# 傅里叶级数 / Fourier series

任意满足狄利克雷条件（充分不必要）的周期函数f(x)可展开为无穷多个正弦函数和余弦函数的线性组合，即

$f(x) = f(x + T)$

f(x)可展开为

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(n\omega x)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)sin(n\omega x)dx$$

$w = \frac{2\pi}{T}$

由欧拉公式得到傅里叶级数的复指数形式

$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$

->

$cos\,\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$sin\,\theta = \frac{-i(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2}$

->

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)e^{-in\omega x}dx\}e^{in\omega x}$$

f(x)在一系列离散的频率上展开

任何周期函数, 都可以分解为不同振幅，不同相位正弦波的叠加

f(x)

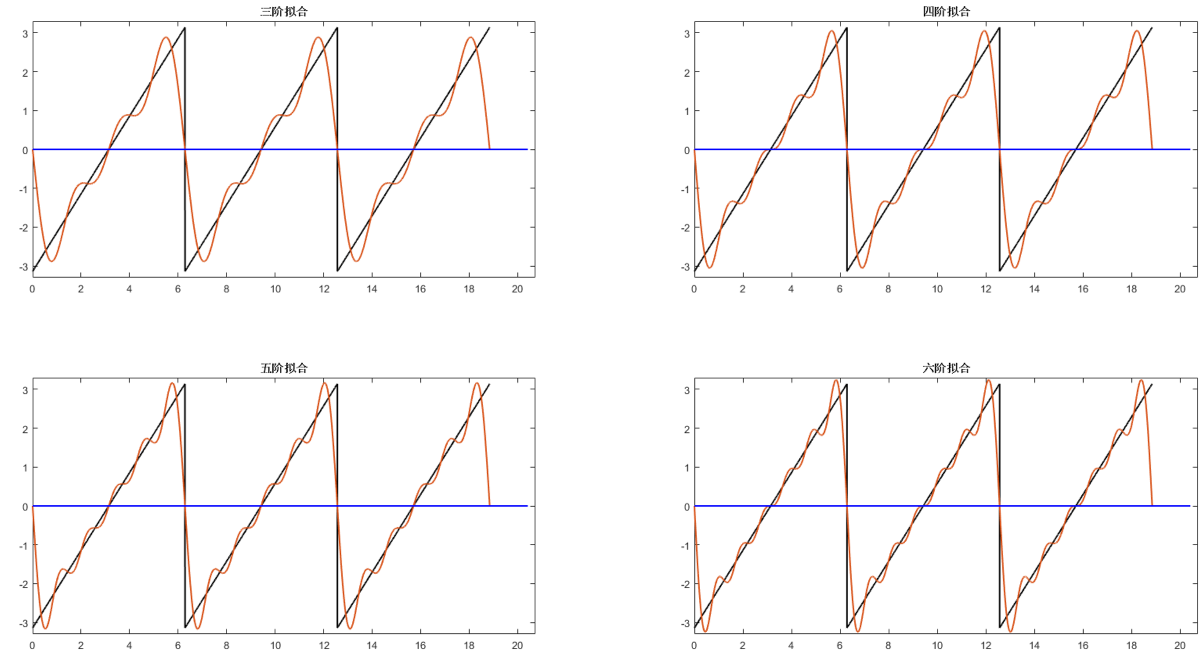
信号的时域表示

周期, 连续函数

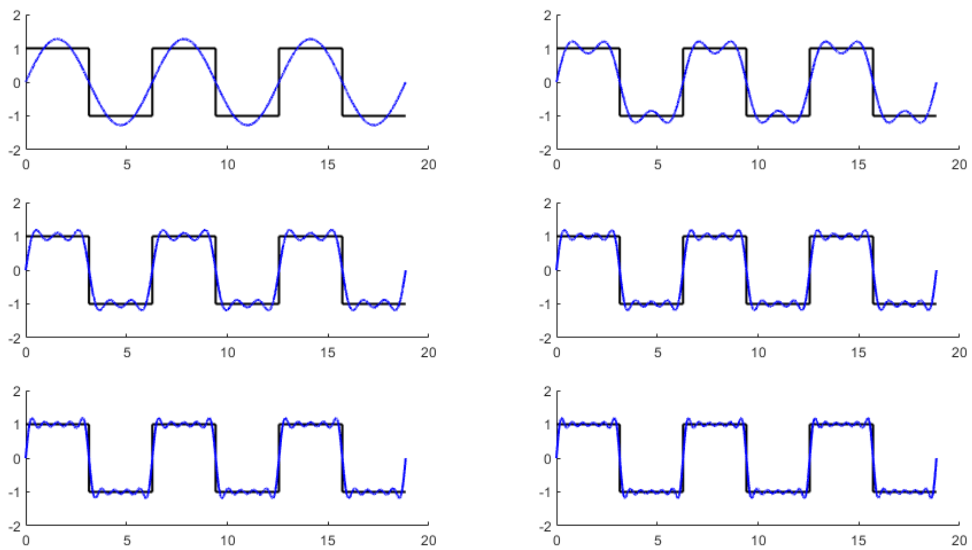
F(w)

信号的频域表示

非周期, 离散函数




锯齿形波的三角函数拟合



矩形波的三角函数拟合

# 傅里叶变换 / Fourier transform

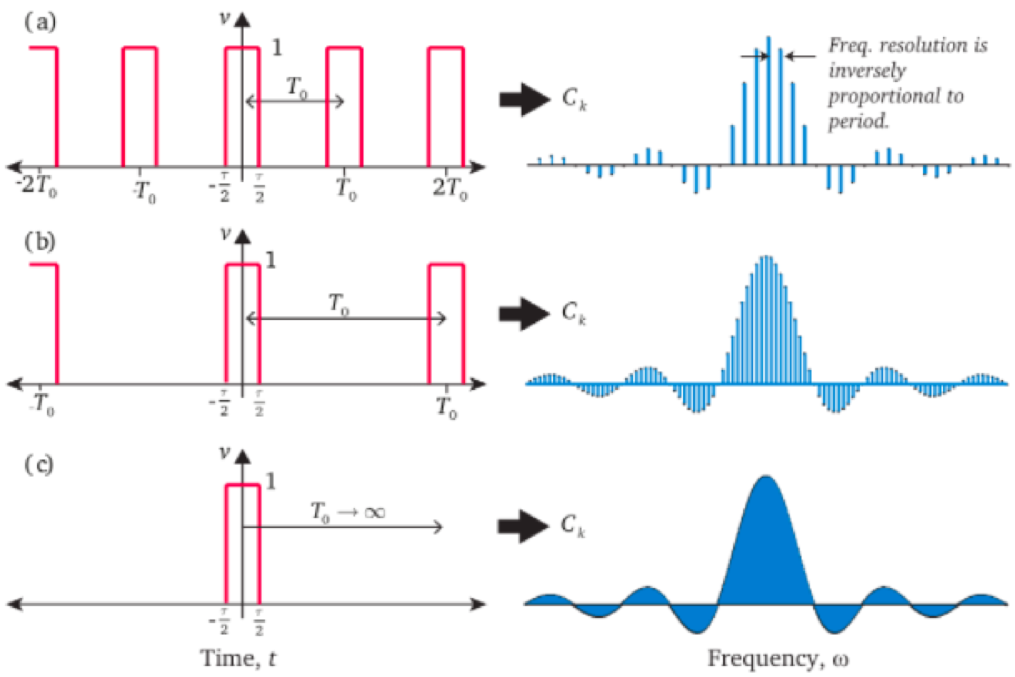
非周期函数看作周期无穷大的周期函数
任意函数f(x)的傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\cdot 2\pi\omega x}dx$$

逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\cdot 2\pi\omega x}d\omega$$

事实上，时域信号的周期$T$决定了频域上相邻两个输出之间的距离，即频率的分辨率$\Delta f = \frac{1}{T}$，周期信号的频谱是离散的。当输入信号的周期不断增大，得到频域输出之间的距离随之不断减少。当周期$T$不断增加直至趋近于$\infty$，这时候频率会非常小，此时周期信号退化为非周期性的一般时域信号，而该信号对应的频域输出距离此时也趋近于$0$，即一个连续的频域输出。从直观上来看，非周期的信号对应着连续的信号频谱。

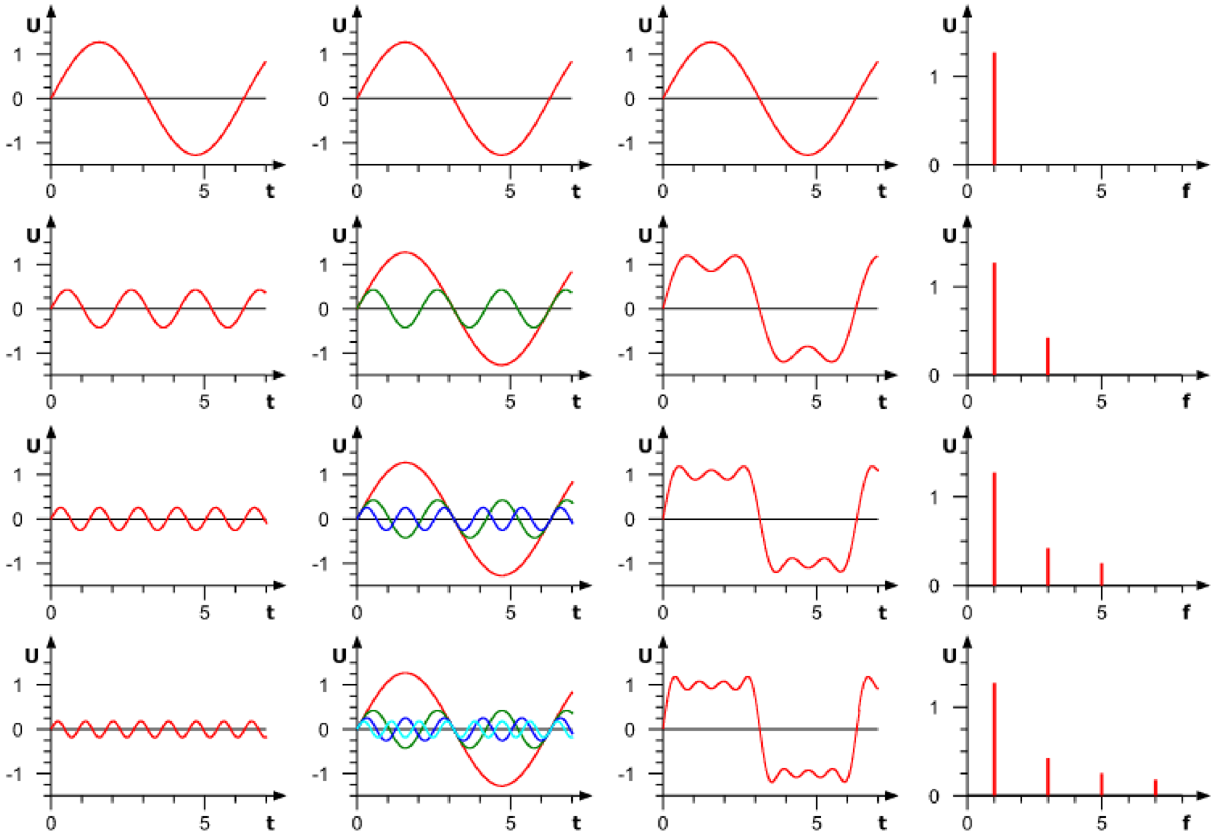



周期函数的傅里叶级数到一般函数的傅里叶积分的直观解释

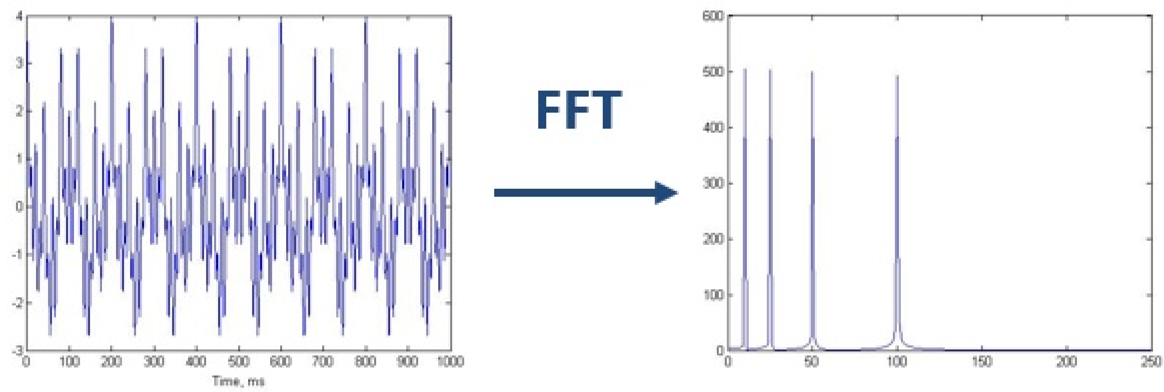
傅里叶变换
信号在连续的频率上展开
得到连续的频谱

应用
很多在时域困难的操作，在频域很容易，比如从某条曲线中去除特定的频率成分（滤波）
音频后期
图像处理，压缩，降噪等

局限性
全局，在整个时间轴上分解，计算量大
变换后不包含时间维度
局部性差，不适用于对非稳态信号的局部分析

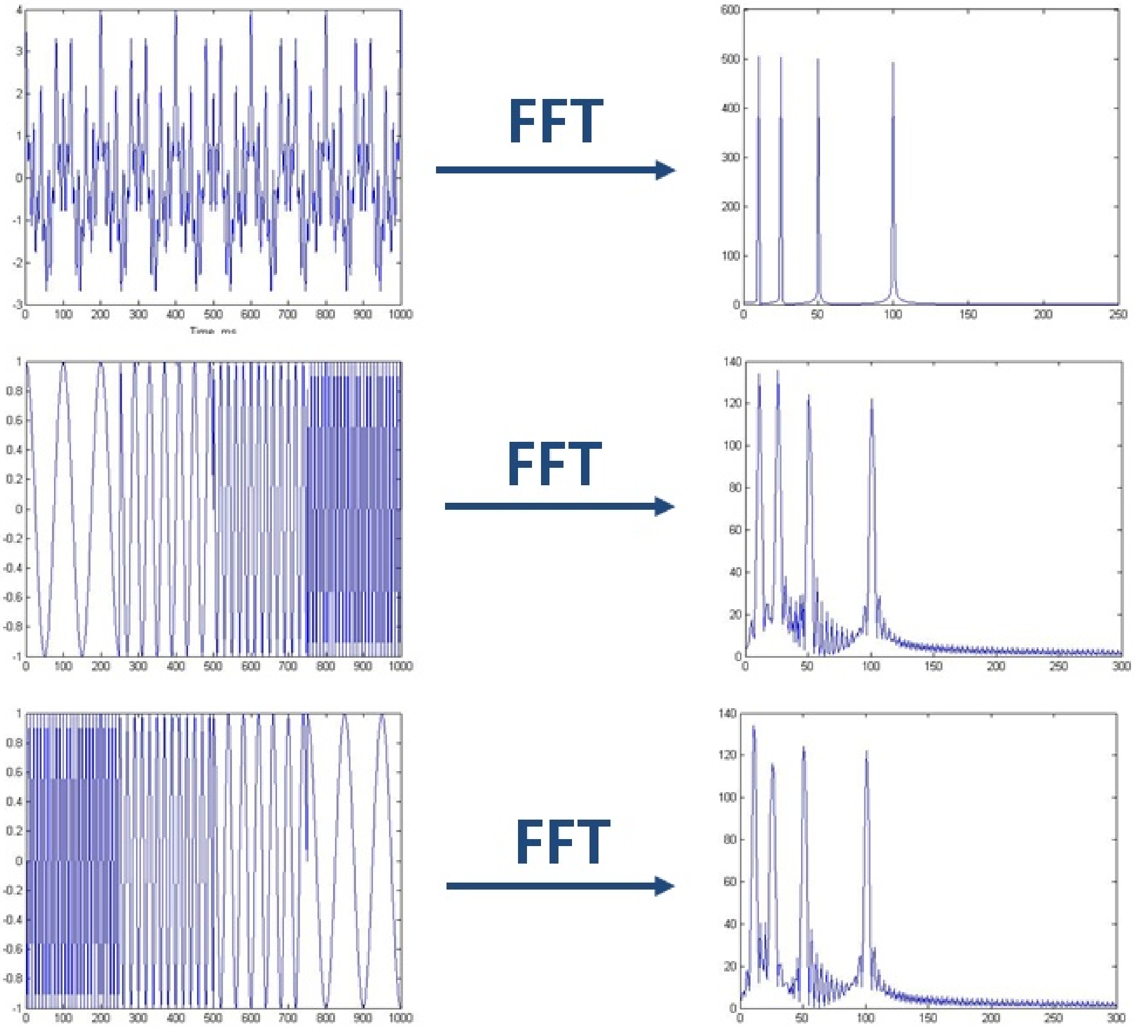



傅里叶变换得到信号的频谱




$$x(t)=\cos(2\pi*10t)+\cos(2\pi*25t)+\cos(2\pi*50t)+\cos(2\pi*100t)$$

**10, 25, 50, 100Hz**



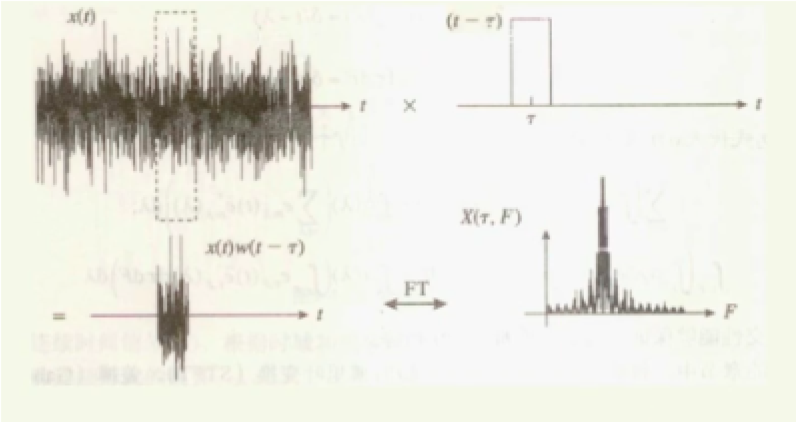

p1稳态信号，p2，p3在时域相差极大的非稳态信号，得到相似频谱

## 短时傅里叶变换 / Short-time Fourier transform

$$X(\omega, \tau) = STFT\{f(t)\} = FT\{f(t) \cdot w(t - \tau)\}$$

$$X(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-i \cdot 2\pi \omega t} dt$$

先把函数和一个窗函数相乘，然后进行傅里叶变换，通过窗函数的滑动得到一系列的傅里叶变换结果，将这些结果竖着排开得到一个二维的表象




$w(t - \tau)$

窗函数，以τ为中心，在τ两侧一小段区域内有非零值，其他区域为零或接近零

加窗

分段做傅里叶变换

窗长足够小时，可以反映瞬时频率信息

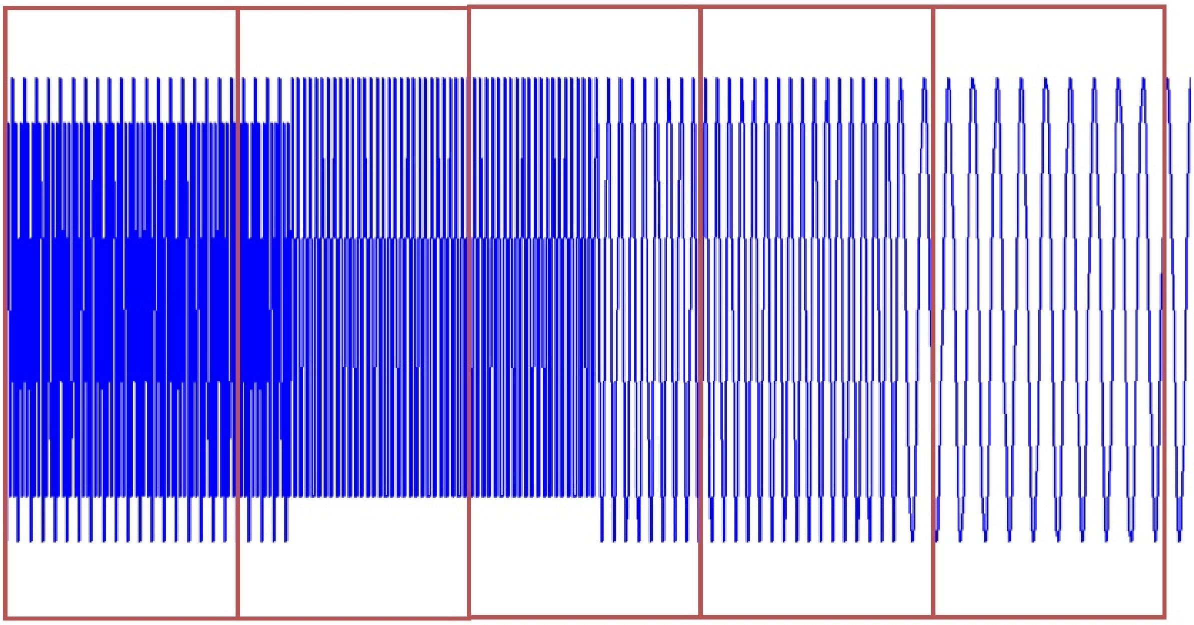
时频分析

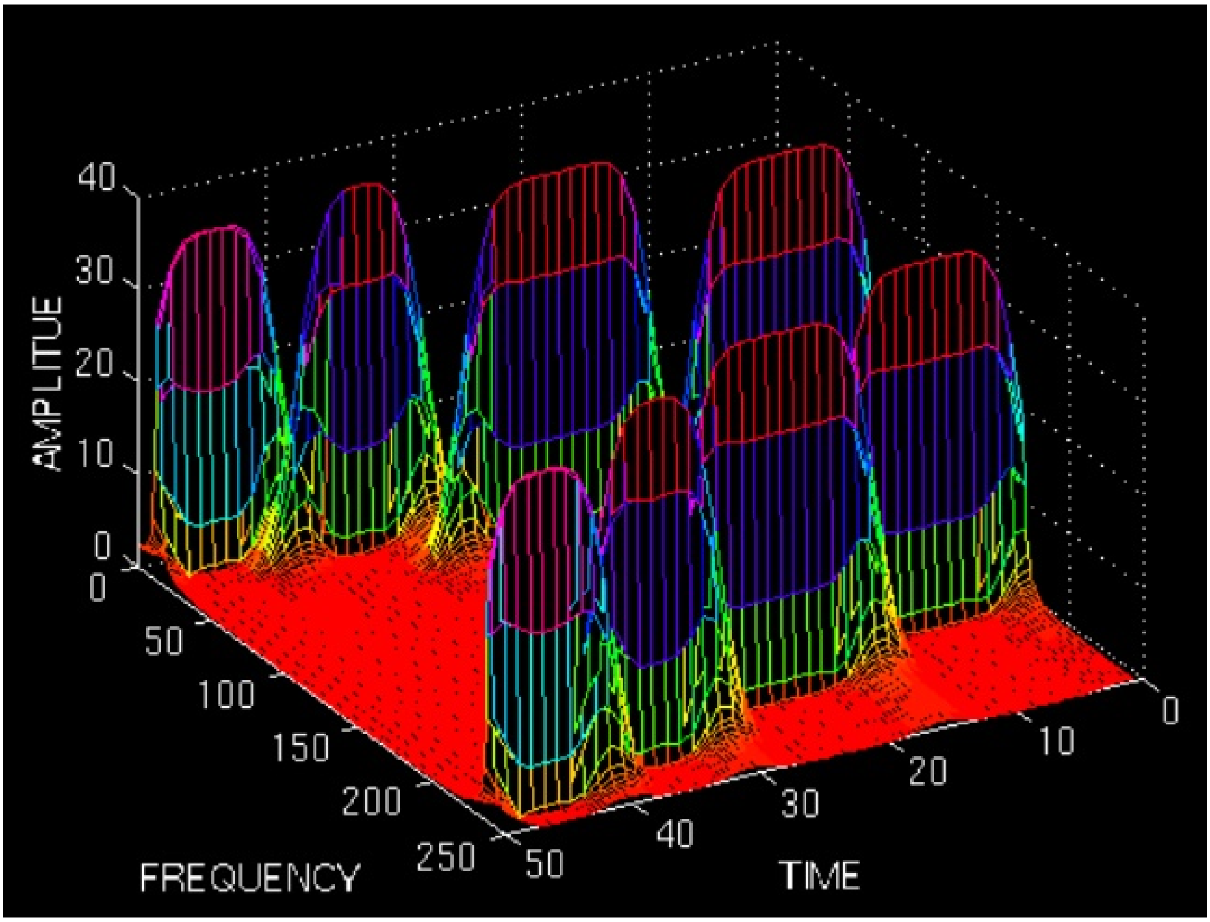
一元函数->二元函数

对时间和频率的统一分析

局限性

对于非稳态信号，高频适合小窗口，低频适合大窗口，STFT在一次变换中窗长固定，无法同时适应高频和低频

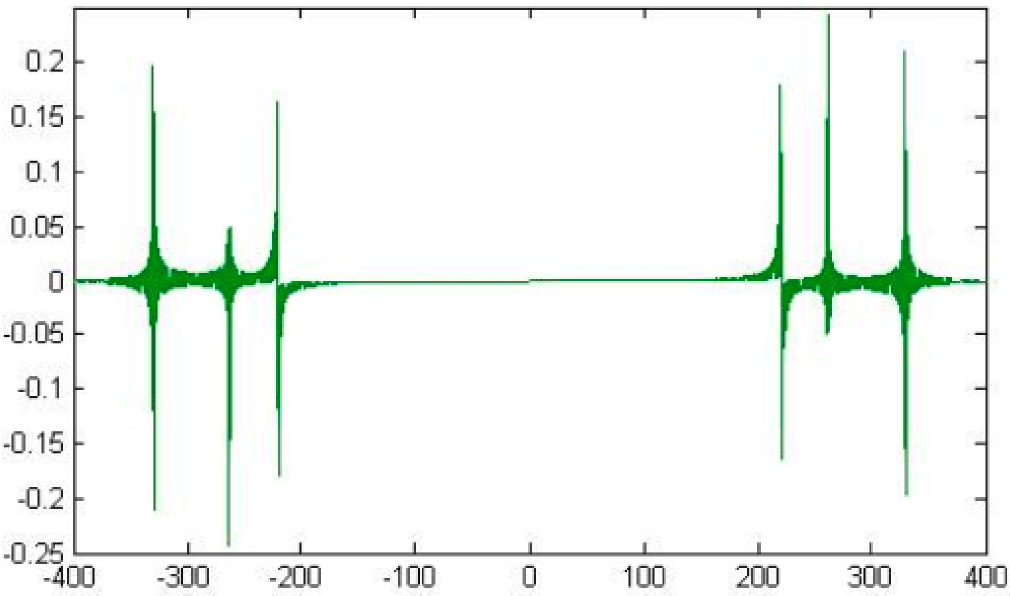




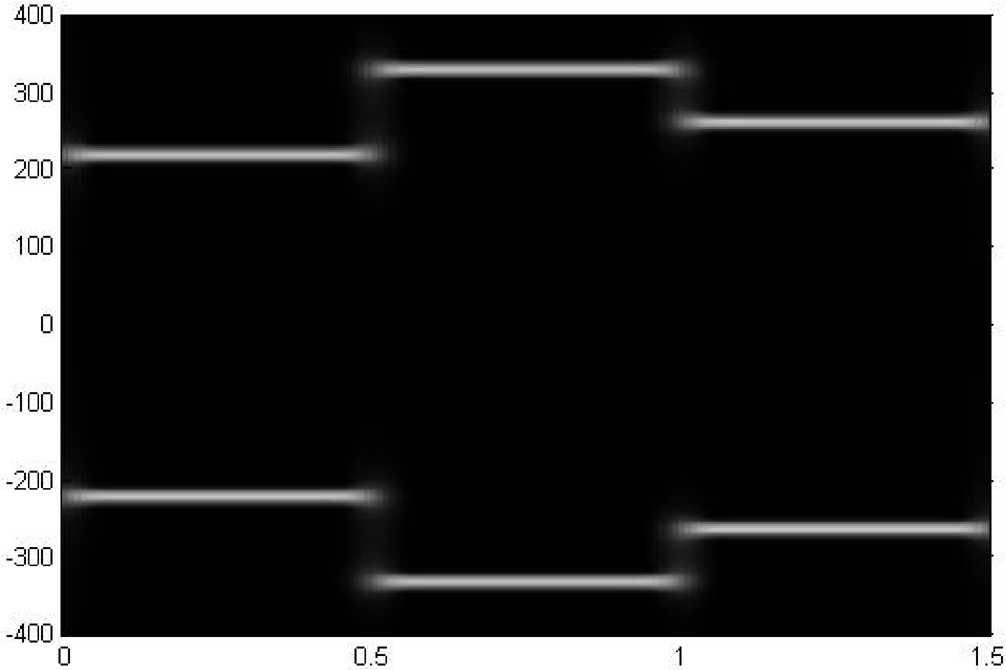
短时傅里叶变换得到时频图

举例，对如下信号x(t)分别做傅里叶变换和短时傅里叶变换

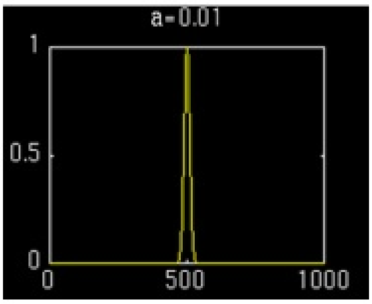
$$x(t)=\begin{cases}\cos(440\pi t), & t<0.5\\ \cos(660\pi t), & 0.5\le t<1\\ \cos(524\pi t), & t\ge 1.\end{cases}$$

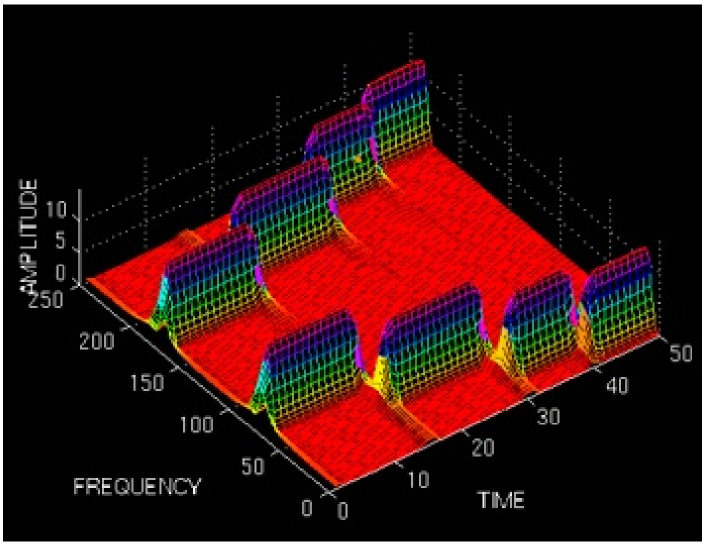


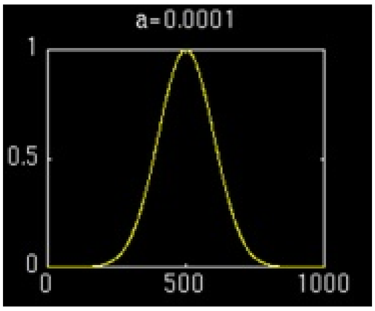

傅里叶变换得到的频谱

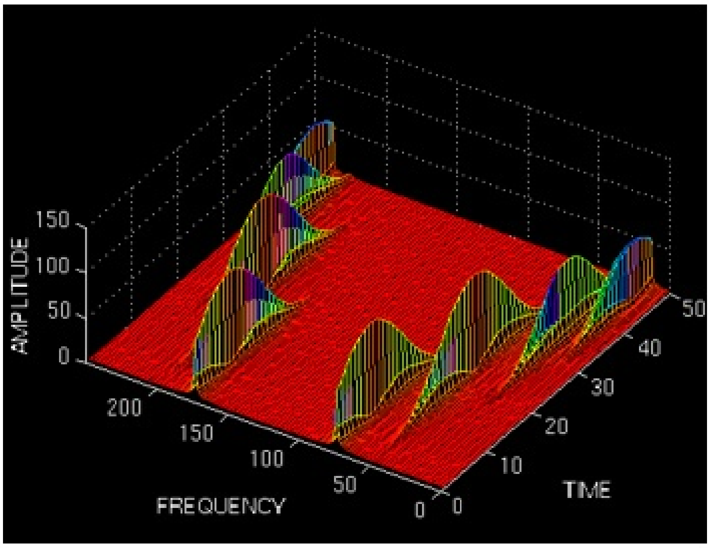


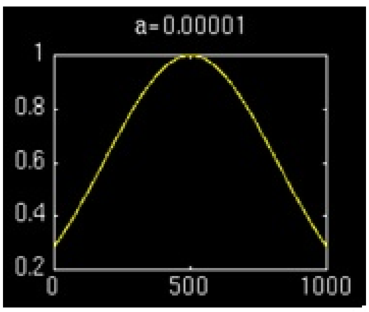

短时傅里叶变换得到的时频谱

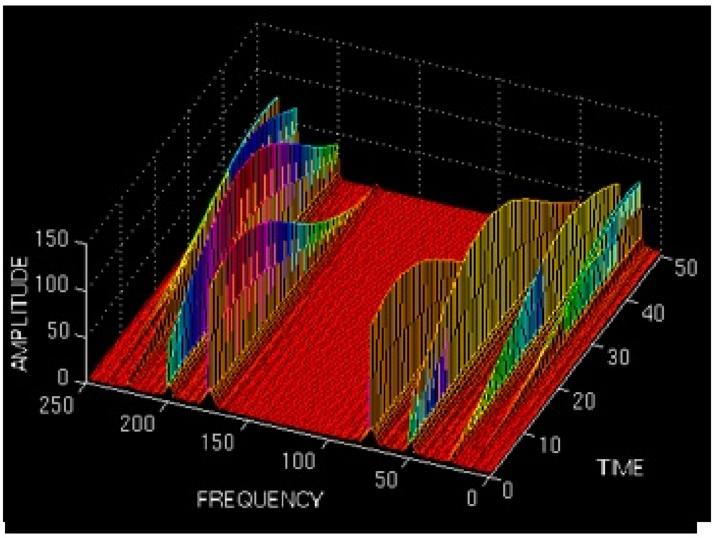



从p1到p3, 窗口长度增加，时域分辨率降低，频域分辨率增高

# 傅里叶变换的不确定性原理

时域宽度*频域宽度>=2

采用任何函数作为窗函数，其时间窗长度和频率宽度的乘积>=2

不可能在时域和频域同时以任意分辨率逼近被测信号，必须对其中之一做出让步