Обозначения: TP, FP, TN, FN - true positive, false positive, true negative, false negative. $TPR = \frac{TP}{TP+FN}, FPR = \frac{FP}{FP+TN}$ - true positive rate, false positive rate. То есть $\begin{pmatrix} FPR \\ TPR \end{pmatrix}$ - координаты точки, с ROC-кривой.

В данной задаче ROC-кривая строится по трем точкам: $(0,0)$ (порог 1 - считаем всё 0), $(1,1)$ (порог 0 - считаем всё 1) и третья, полученная в результате применения указанного классификатора (выбираем порог между 0 и 1, то есть просто оставляем результат классификации).

Пусть $N(y)$ - число объектов класса y в выборке, а y_x - класс объекта x. Тогда $TP+FN = N(1)$, а $FP+TN = N(0)$. Найдем математическое ожидание TP и FP.

$$E(TP) = E\left(\sum_{\{x:y_x=1\}} I(a(x)=1)\right) = N(1)P(a(x)=1) = N(1)p,$$

$$E(FP) = E\left(\sum_{\{x:y_x=0\}} I(a(x)=1)\right) = N(0)P(a(x)=1) = N(0)p.$$

Теперь легко найти математическое ожидание TPR и FPR:

$$E(TPR) = E\left(\frac{TP}{TP+FN}\right) = \frac{E(TP)}{N(1)} = p,$$

$$E(FPR) = E\left(\frac{FP}{FP+TN}\right) = \frac{E(FP)}{N(0)} = p.$$

Вычислим, как площадь под ROC-кривой в нашей задаче зависит от координат третьей точки. Пусть они равны x и y. Представим площадь под ROC-кривой как сумму площадей треугольника $((0,0),(x,0),(x,y))$ и трапеции $((x,0),(x,y),(1,1),(1,0))$. Тогда искомая площадь, очевидно, равна:

$$S = \frac{1}{2}xy + (1-x)\frac{1+y}{2} = \frac{y-x+1}{2}$$

Тогда, учитывая, что $x = FPR$, а $y = TPR$, можно вычислить и математическое ожидание площади под графиком:

$$E(S) = E\left(\frac{TPR - FPR + 1}{2}\right) = \frac{E(TPR) - E(FPR) + 1}{2} = \frac{p-p+1}{2} = \frac{1}{2},$$

Таким образом, площадь под ROC-кривой в среднем будет равна $\frac{1}{2}$, что и требовалось.