Langage et groupes

Gönenç Onay

12 février 2026

2025–26
GSU – Cours MAT-205

Exercice 1.

a) Démontrer qu'un sous-groupe d'un sous-groupe H d'un groupe G est un sous-groupe de G.

b) Est-ce qu'un sous-groupe normal d'un sous-groupe normal H d'un groupe G est un sous-groupe normal de G ? Justifier.

Exercice 2.

a) Quelle propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$) utilise-t-on pour établir que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$?

b) Montrer que tout sous-groupe non trivial de $(\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

c) Connaissez-vous d'autres groupes G tels que tout sous-groupe non trivial $H \leq G$ soit isomorphe à G ?

Exercice 3.

Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de groupes et $f_n : G_{n-1} \to G_n$ une famille de morphismes de groupes. La suite :

$$\cdots \to G_{n-1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+1} \to \ldots$$

est dite *exacte* en G_n si $\mathrm{im}(f_n) = \ker(f_{n+1})$. Elle est dite *exacte* si elle est exacte pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite, 0 désigne le groupe trivial.

— Montrer que $0 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2$ est exacte si et seulement si f est injective.

— Montrer que $G_2 \xrightarrow{g} G_3 \to 0$ est exacte si et seulement si g est surjective.

— Montrer que $0 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \to 0$ est exacte si et seulement si f est un isomorphisme.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition p suivante :

$$p = (\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < t).$$

1. Écrire la négation de p sans utiliser le symbole $\neg$. Quelle propriété de f la proposition p traduit-elle ?
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant p, et un exemple ne la vérifiant pas.
3. Parmi les propositions ci-dessous, déterminer celles qui sont équivalentes à p, celles qui sont toujours vraies, celles qui sont toujours fausses, et celles pour lesquelles on ne peut rien conclure sans information supplémentaire sur f :
   — $p_1 = (\exists x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < x)$;
   — $p_2 = (\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$;
   — $p_3 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < t)$;
   — $p_4 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$.