TD 1 : Premiers pas dans les anneaux

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-205

Exercice 1.
Considérer la fonction Lisp définie ci-dessous, qui évalue une expression algébrique :

```
(defun evaluer-poly (x a b c)
  (+ (* a (* x x)) (* b x) c))
```

1. Écrire le en notation mathématique usuelle et traduire cette fonction en Python.
2. Écrire une fonction mathematiques $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ qui prend en entrée les coefficients a, b, c, x comme composes des fonctions de base (addition, multiplication, identité, constantes) et qui évalue le même polynôme que la fonction Lisp ci-dessus.

Exercice 2.

1. Déterminer analytiquement et dresser la liste des éléments du groupe des unités $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Quels sont les éléments nilpotents et idempotents de cet anneau ?

Exercice 3.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. L'anneau A est dit *de Boole* si tout élément de A est idempotent, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$.

1. L'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est-il un anneau de Boole ? Le corps $\mathbb{R}$ l'est-il ?
2. Soit $x \in A$. En développant de deux manières le produit $(x+x)^2$, démontrer que $x+x = 0_A$. En déduire que pour tous $x, y \in A$, l'égalité $x + y = 0_A$ implique $x = y$.
3. Soient $x, y \in A$. En explicitant le produit $(x + y)^2$, démontrer que l'anneau A est nécessairement commutatif.
4. L'anneau A possède-t-il des éléments nilpotents autres que 0_A ? Justifier rigoureusement.

Exercice 4.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents :

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid \exists n \geq 1,\ x^n = 0_A\}.$$

1. On suppose dans cette question que l'anneau A est commutatif.
   (a) Soient $x, y \in \mathcal{N}(A)$. Montrer, en justifiant l'utilisation de la formule du binôme de Newton, que $x + y \in \mathcal{N}(A)$.
   (b) Montrer que si $x \in A$ et $y \in \mathcal{N}(A)$, alors $xy \in \mathcal{N}(A)$.
2. On ne suppose plus A commutatif.
   (a) Donner un exemple d'anneau non commutatif A et de deux éléments $x, y \in \mathcal{N}(A)$ tels que $x + y \notin \mathcal{N}(A)$.
   Indication : On pourra chercher dans l'anneau des matrices $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Soient $x \in \mathcal{N}(A)$ et $u \in A^{\times}$ (le groupe des unités de A). On suppose que x et u commutent ($xu = ux$). Montrer que $u + x$ est inversible dans A.
Indication : Factoriser par u et se ramener au théorème vu en cours sur 1_A+nilpotent.