Exercice 1.

Partie A : Caractéristique d'un anneau

Soit A un anneau. On appelle **caractéristique** de A, notée $\mathrm{char}(A)$, l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\mathbb{Z} \to A) = n\mathbb{Z}$.

1. Déterminer la caractéristique de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si A est **intègre**, alors sa caractéristique est soit 0, soit un nombre premier p.
3. Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $px = 0_A$.

Partie B : Endomorphisme de Frobenius

Soit A un anneau commutatif de caractéristique $p > 0$ (où p est un nombre premier).

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. En déduire que l'application $\Phi : A \to A$, $x \mapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux. On l'appelle **endomorphisme de Frobenius**.
3. On suppose que A est un corps. Montrer que Φ est injectif. Est-il toujours surjectif ? (Penser au corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(X)$).
4. Montrer que si A est un corps *fini*, alors Φ est un automorphisme.

Exercice 2.

Partie A : Localisation

Soit A un anneau commutatif. Une partie $S \subseteq A$ est dite **multiplicative** si $1_A \in S$ et pour tous $s, t \in S$, $st \in S$. On définit sur $A \times S$ la relation $\sim$ par :

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S,\ u(at - bs) = 0_A.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. On note $\frac{a}{s}$ la classe de (a, s) et $S^{-1}A$ l'ensemble quotient.
2. Montrer que $S^{-1}A$ muni des lois usuelles des fractions est un anneau commutatif.
3. Soit $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ un idéal premier. Montrer que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative. On note $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé.
4. Montrer que $A_{\mathfrak{p}}$ possède un unique idéal maximal (c'est un *anneau local*).

Partie B : Corps des fractions et sous-anneaux de $\mathbb{Q}$

Soit A un anneau intègre. On appelle *corps des fractions* de A, noté $\mathrm{Frac}(A)$, le localisé $S^{-1}A$ pour $S = A \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Frac}(A)$ est un corps.
2. On s'intéresse aux sous-anneaux de $\mathbb{Q}$. Soit P un ensemble de nombres premiers. On note $\mathbb{Z}_P$ l'ensemble des fractions $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telles que tous les diviseurs premiers de b appartiennent à P.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}_P$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}_P$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à une partie multiplicative S que l'on précisera.
   (c) Réciproquement, montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est de la forme $\mathbb{Z}_P$ pour un ensemble P de nombres premiers.