

# Examen Final : Topologie Métrique

MAT-301

8 février 2026

2025-26 GSU

Durée : 2h30

Barème : 25 points

## Exercice 1. Questions de cours (10 points)

- (2 pts) Enoncer le théorème de Heine-Borel (dans une espace vectoriel normé de dimension finie, ....) (On ne demande pas de le montrer)
- (2 pts) Montrer que toute partie complète d'un espace métrique est fermée.
- (2 pts) Soit  $K$  et  $E$  deux espaces métriques, et  $K$  est compact. Montrer que toute application **continue et bijective**  $f : K \rightarrow E$  est un homéomorphisme.
- (2 pts) Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.
- (2 pts) Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. Montrer que si une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est continue, alors elle est lipschitzienne. *Indication : utiliser la continuité en 0 et l'homogénéité.*

## Exercice 2. Connexité et homéomorphisme (8 points)

- (2 pts) Montrer que, si  $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  est un homéomorphisme alors pour tout  $A \subseteq E$ , la restriction  $f|_A : (A, d|_A) \rightarrow (f(A), \delta|_{f(A)})$  est un homéomorphisme.
- (2 pts) Montrer que si  $E$  et  $F$  sont des espaces métriques homéomorphes, alors  $E$  possède  $n$  composantes connexes si et seulement si  $F$  possède  $n$  composantes connexes, pour tout  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .
- (2 pt) Montrer que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est connexe par arcs.
- (2 pts) Montrer que  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas homéomorphes.

*Indication : par l'absurde, supposer qu'il existe un homéomorphisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , poser  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $c = f((0, 0))$ . Combien de composantes connexes a  $X := \mathbb{R} \setminus \{c\}$ ? Est-ce que  $X$  et  $A$  peuvent être homéomorphes?*

## Exercice 3. Distance de Hamming et transmission de messages (7 points)

Lors de la transmission de données par un canal bruité, certains bits peuvent être altérés. On cherche à concevoir un système permettant de corriger ces erreurs.

Soit  $n \geq 1$  un entier. Un **mot** de taille  $n$  est un élément de  $X := \{0, 1\}^n$ , noté sans parenthèses ni virgules (par exemple : 01010). On fixe  $k < n$ . Un **message** est un élément de  $\{0, 1\}^k$ . Un **code** est une application injective  $C : \{0, 1\}^k \rightarrow X$ . On note  $\mathcal{C} := \text{Im}(C) \subseteq X$  l'ensemble des mots de code.

**Question.** À quelle condition peut-on garantir que si au plus  $t$  bits sont altérés, le message original est retrouvé de manière unique ?

- (2 pts) On définit l'application  $d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$  par :

$$d_H(x, y) := \text{Card}(\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}).$$

C'est à dire le nombre total de positions où les mots sont différents. Montrer que  $d_H$  est une distance sur  $X$ .

- (1 pt) On dit que le code **corrige  $t$  erreurs** si, pour tout mot reçu  $y \in X$ , il existe au plus un mot de code  $c \in \mathcal{C}$  tel que  $d_H(y, c) \leq t$ . Montrer que cette condition équivaut à : les boules fermées  $B_F(c, t)$  pour  $c \in \mathcal{C}$  sont deux à deux disjointes.
- (1 pt) On note  $d_{\min} := \min_{c \neq c', c, c' \in \mathcal{C}} d_H(c, c')$  la distance minimale du code. Montrer que si le code corrige  $t$  erreurs, alors  $d_{\min} \geq 2t + 1$ .
- (1 pt) Réciproquement, montrer que si  $d_{\min} \geq 2t + 1$ , alors le code corrige  $t$  erreurs.
- (1 pt) On considère le code  $C : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^5$  défini par :

$$C(00) = 00000, \quad C(01) = 01110, \quad C(10) = 10101, \quad C(11) = 11011.$$

Calculer  $d_{\min}$ . Combien d'erreurs ce code peut-il corriger ?

- (1 pt) Un mot  $y = 01010$  est reçu. Sachant qu'au plus 1 erreur s'est produite, quel message a été envoyé ? Justifier.

*Bon courage !*