Cours - TD 5 : Continuité - Fondements et Structures

Exercice 1.
Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une application entre deux espaces métriques. Démontrer l'équivalence des cinque assertions suivantes.

(i) L'application f est continue en tout point de E.

(ii) Pour toute partie ouverte U de F, son image réciproque $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de E.[1]

(iii) Pour toute partie fermée A de F, son image réciproque $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de E.

(iv) Pour toute partie B de F, l'adhérence de l'image réciproque de B est contenue dans l'image réciproque de l'adhérence de B :
$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

(v) Pour toute partie B de F, l'image réciproque de l'intérieur de B est contenue dans l'intérieur de l'image réciproque de B :
$$f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(B)).$$

Exercice 2.

a) **Composition.** Soient $f : (E, d) \to (F, \delta)$ et $g : (F, \delta) \to (G, \rho)$ deux applications continues. Montrer que l'application composée $g \circ f : E \to G$ est continue ; ceci reste vrai si l'on remplace la continuité par la continuité en un point.

b) **Produit.** Soient (E, d), (F, δ) et (G, ρ) des espaces métriques. On munit l'espace produit $F \times G$ de la distance $d_\infty((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = \max(\delta(y_1, y_2), \rho(z_1, z_2))$. Soient $\pi_F : F \times G \to F$ et $\pi_G : F \times G \to G$ les projections canoniques.
Montrer qu'une application $h : E \to F \times G$ est continue si et seulement si ses applications composantes, $\pi_F \circ h$ et $\pi_G \circ h$, sont continues.

Exercice 3.
Cet exercice formalise l'intuition qu'une suite convergente peut être vue comme une fonction continue sur un domaine topologique adéquat.

Soit $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit X de la distance d_X définie par $d_X(p, q) = |\phi(p) - \phi(q)|$, où $\phi : X \to \mathbb{R}$ est l'injection
$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d) et soit $\ell \in E$. On considère la suite comme une application $u : \mathbb{N} \to E$ et on définit son prolongement $\tilde{u} : (X, d_X) \to (E, d)$ par :
$$\tilde{u}(n) = \begin{cases} u_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \ell & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

a) Montrer que (X, d_X) est un espace métrique, décrire les voisinages de ∞.

b) **Caractérisation locale.** Démontrer l'équivalence suivante :
$$\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ dans } (E, d) \iff \text{L'application } \tilde{u} \text{ est continue au point } \infty.$$

c) Montrer qu'une fonction $f : (E, d) \to (F, \delta)$, est continue en ℓ si pour toute suite $(u_n)_n$ de E, convergeant vers l, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$.

---

1. Définition topologique de la continuité.