Corrigé : Examen Final Topologie Métrique

MAT-301

22 janvier 2026

2025-26 GSU

Exercice 1. *Questions de cours* (10 points)

a) **(2 pts)**
Dans une espace vectoriel normé, une partie $K \subseteq E$ est compacte ssi K est borné et fermé.

b) **(2 pts)**
Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$ complet. Soit (x_n) une suite de A convergeant vers $\ell \in E$. Comme (x_n) converge, elle est de Cauchy. Puisque A est complet, (x_n) converge dans A. L'unicité de la limite implique $\ell \in A$. Donc A contient toutes ses valeurs d'adhérence, i.e., A est fermé.

Attention Si on commence par "soit (x_n) une suite de Cauchy dans A", on n'aboutit pas à la conclusion voulue. !

c) **(2 pts)**
Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, i.e., que f est fermée (envoie les fermés sur des fermés). Soit $F \subseteq K$ fermé. Comme K est compact et F est fermé dans K, F est compact (fermé dans compact = compact). L'image d'un compact par une application continue est compacte, donc $f(F)$ est compact dans E. Tout compact dans un espace métrique est fermé, donc $f(F)$ est fermé dans E. Donc f est fermée, d'où f^{-1} continue.

d) **(2 pts)**
Soit E connexe par arcs. Supposons par l'absurde que $E = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vides. Soient $x \in U$ et $y \in V$. Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont ouverts dans $[0, 1]$, disjoints, non vides, et $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V)$, ce qui contredit la connexité de $[0, 1]$.

e) **(2 pts)**
Puisque u est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E < \delta \implies \|u(x)\|_F < 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $y := \frac{\delta}{2\|x\|_E} x$. Alors $\|y\|_E = \frac{\delta}{2} < \delta$, donc $\|u(y)\|_F < 1$. Par linéarité, $\|u(x)\|_F = \frac{2\|x\|_E}{\delta} \|u(y)\|_F < \frac{2}{\delta} \|x\|_E$. Donc u est $\frac{2}{\delta}$-lipschitzienne.

Exercice 2. *Connexité et homéomorphisme* (7 points)

a) **(2 pts)**
$f_{|A}$ est continue car la restriction d'une application continue à un sous-espace est continue. De même, $(f^{-1})_{|f(A)} = (f_{|A})^{-1}$ est continue. Donc $f_{|A}$ est un homéomorphisme.

b) **(2 pts)**
Soit $\varphi : E \to F$ un homéomorphisme. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que E a n composantes connexes ssi F a n composantes connexes.

Initialisation ($n = 1$) : E a une seule composante connexe ssi E est connexe. Or l'image d'un connexe par une application continue est connexe, donc $\varphi(E) = F$ est connexe ssi E est connexe (appliquer aussi à φ^{-1}).

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour n. Supposons que E a $n + 1$ composantes connexes $C_1, \ldots, C_{n+1}$. Chaque C_i est connexe, donc $\varphi(C_i)$ est connexe. De plus, les $\varphi(C_i)$ sont disjoints (car φ bijective) et $F = \bigcup_{i=1}^{n+1} \varphi(C_i)$. Montrons que $\varphi(C_i)$ est une composante connexe de F : si $\varphi(C_i) \subsetneq D$ avec D connexe, alors $C_i \subsetneq \varphi^{-1}(D)$ avec $\varphi^{-1}(D)$ connexe, contredisant la maximalité de C_i. Donc F a exactement $n + 1$ composantes connexes. La réciproque s'obtient en appliquant le même argument à φ^{-1}.

c) **(1 pt)**
Soient $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si $x, y, 0$ ne sont pas alignés, le segment $[x, y]$ ne passe pas par 0, donc $\gamma : t \mapsto (1 - t)x + ty$ est un chemin de x à y dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sinon (si $x, y, 0$ sont alignés), choisir $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non aligné avec x et 0. Par exemple, si $x = (a, b)$, on peut prendre $z = (-b, a)$ (rotation de x de 90°). Alors $z \neq 0$ car $x \neq 0$, et z n'est pas colinéaire à x. Le chemin concaténé $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1 - 2t)x + 2tz & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2 - 2t)z + (2t - 1)y & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

relie x à y sans passer par 0.

d) **(2 pts)**
Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Posons $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $c = f(0)$. Alors $X := \mathbb{R} \setminus \{c\}$ a 2 composantes connexes (les intervalles $]-\infty, c[$ et $]c, +\infty[$). Par a) et b), $f_{|A} : A \to X$ est un homéomorphisme, donc A a aussi 2 composantes connexes. Mais par c), A est connexe par arcs, donc connexe. Contradiction.

Exercice 3. *Distance de Hamming et transmission de messages* (7 points)

a) **(2 pts)**

— **Séparation :** $d_H(x, y) = 0 \iff$ aucune coordonnée ne diffère $\iff x = y$.

— **Symétrie :** $\{i : x_i \neq y_i\} = \{i : y_i \neq x_i\}$, donc $d_H(x, y) = d_H(y, x)$.

— **Inégalité triangulaire :** Soit $I := \{i : x_i \neq z_i\}$, $J := \{i : x_i \neq y_i\}$, $K := \{i : y_i \neq z_i\}$. Si $i \in I$, alors $x_i \neq z_i$, donc $x_i \neq y_i$ ou $y_i \neq z_i$ (ou les deux), i.e., $i \in J \cup K$. Donc $I \subseteq J \cup K$, d'où $|I| \leq |J| + |K|$, soit $d_H(x, z) \leq d_H(x, y) + d_H(y, z)$.

b) **(1 pt)**

— ($\Rightarrow$) Si les boules $B_F(c, t)$ ne sont pas disjointes, il existe $c \neq c' \in \mathcal{C}$ et $y \in B_F(c, t) \cap B_F(c', t)$, i.e., $d_H(y, c) \leq t$ et $d_H(y, c') \leq t$, contredisant la définition.

— ($\Leftarrow$) Si pour un y il existe $c \neq c' \in \mathcal{C}$ tels que $d_H(y, c) \leq t$ et $d_H(y, c') \leq t$, alors $y \in B_F(c, t) \cap B_F(c', t) \neq \emptyset$.

c) **(1 pt)**
Par contraposée : supposons $d_{\min} \leq 2t$. Alors il existe $c \neq c' \in \mathcal{C}$ avec $d_H(c, c') = 2t' \leq 2t$, soit $t' \leq t$.
Construisons explicitement un mot y équidistant de c et c'. Notons $I = \{i : c_i \neq c'_i\}$ l'ensemble des positions où c et c' diffèrent, avec $|I| = 2t'$. Partitionnons $I = I_1 \sqcup I_2$ avec $|I_1| = |I_2| = t'$. Définissons $y \in X$ par :

$$y_i = \begin{cases} c'_i & \text{si } i \in I_1 \\ c_i & \text{si } i \in I_2 \\ c_i = c'_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$$

Alors y diffère de c exactement sur I_1 (donc $d_H(y, c) = t'$) et de c' exactement sur I_2 (donc $d_H(y, c') = t'$). Comme $t' \leq t$, on a $y \in B_F(c, t) \cap B_F(c', t)$, donc le code ne corrige pas t erreurs.

d) **(1 pt)**
Supposons $d_{\min} \geq 2t + 1$. Soit $y \in X$. Si $y \in B_F(c, t) \cap B_F(c', t)$ avec $c \neq c'$, alors par l'inégalité triangulaire :

$$d_H(c, c') \leq d_H(c, y) + d_H(y, c') \leq t + t = 2t < 2t + 1,$$

contredisant $d_{\min} \geq 2t + 1$. Donc les boules sont disjointes.

e) **(1 pt)**
Calculons toutes les distances :

— $d_H(00000, 01110) = 3$ (positions 2,3,4)

— $d_H(00000, 10101) = 3$ (positions 1,3,5)

— $d_H(00000, 11011) = 4$ (positions 1,2,4,5)

— $d_H(01110, 10101) = 4$ (positions 1,2,4,5)

— $d_H(01110, 11011) = 3$ (positions 1,3,5)

— $d_H(10101, 11011) = 3$ (positions 2,3,4)

Donc $d_{\min} = 3$. Comme $d_{\min} = 3 = 2 \cdot 1 + 1$, le code corrige au plus $t = 1$ erreur.

f) **(1 pt)**
Calculons les distances :

— $d_H(01010, 00000) = 2$ (positions 2,4)

— $d_H(01010, 01110) = 1$ (position 3)

— $d_H(01010, 10101) = 4$ (positions 1,2,3,4)

— $d_H(01010, 11011) = 3$ (positions 1,3,5)

La distance minimale est 1 pour le mot de code 01110. On décode donc y en $01110 = C(01)$, ce qui correspond au message initial $m = 01$.