TD 7 : Compacité, Connexité et Complétude

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Partie I : Compacité

Exercice 1.
Théorème de Cantor (intersection de compacts emboîtés).
Soit (E, d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides : $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$.

a) Montrer que $K := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.
b) Donner un contre-exemple dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ montrant que l'hypothèse de compacité est essentielle.
c) On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$. Montrer que K est un singleton.

Exercice 2.
Distance entre compacts disjoints.
Soient K_1, K_2 deux compacts **disjoints** d'un espace métrique (E, d).

a) Montrer qu'il existe $a \in K_1$ et $b \in K_2$ réalisant $d(K_1, K_2) := \inf\{d(x, y) : x \in K_1, y \in K_2\}$.
b) En déduire que $d(K_1, K_2) > 0$.
c) Ce résultat reste-t-il vrai si K_1 et K_2 sont seulement fermés ? Justifier par un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.
Compacité du groupe orthogonal.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ l'espace des matrices réelles $n \times n$, muni d'une norme quelconque. On définit $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$.

a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $|a_{ij}| \leq 1$ pour tous i, j.
c) Conclure que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.
d) Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est-il compact ? borné ? fermé ?

Partie II : Connexité

Exercice 4.
Composantes connexes.
Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$, on définit la *composante connexe* de x comme la réunion de toutes les parties connexes de E contenant x :

$$C_x = \bigcup\{A \subseteq E : A \text{ connexe et } x \in A\}.$$

a) Montrer que C_x est connexe.

b) Montrer que C_x est fermé dans E.
Indication : Montrer que l'adhérence d'un connexe est connexe.

c) Montrer que les composantes connexes forment une partition de E.

d) Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ (muni de la distance usuelle).

e) Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
Indication : Deux matrices sont dans la même composante si et seulement si elles ont le même signe du déterminant.

Exercice 5.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe et $f : A \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

c) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\nabla f = 0$ partout. Montrer que f est constante.
Indication : Montrer que pour $a \in U$ fixé, l'ensemble $\{x \in U : f(x) = f(a)\}$ est ouvert et fermé dans U.

d) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

Partie III : Complétude

Exercice 6.
Sous-espaces complets.
Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace complet est complet.

b) Réciproquement, montrer qu'un sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

c) L'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ est complet. En déduire que l'ensemble

$$F = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$$

est un espace métrique complet.

d) L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, vu comme sous-espace de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, est-il complet ?

Exercice 7.
Le théorème du point fixe de Banach et applications.
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une contraction de rapport $k \in [0, 1[$.

a) **(Admis ou rappelé)** f admet un unique point fixe $\ell \in E$, et pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ.

b) **Équation fonctionnelle :** Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}\cos(g(x)) + x$ admet une unique solution $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Indication : Réécrire sous la forme $g = T(g)$ et montrer que T est une contraction.

c) **Existence locale pour les EDO :** Soit $F : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et lipschitzienne en la seconde variable : $|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. Montrer que pour a assez petit, le problème de Cauchy

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbb{R})$.

Indication : Reformuler en équation intégrale $y(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s))ds$ et appliquer Banach sur $\mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$.

Exercice 8.

Le théorème de Baire (introduction).

Un espace métrique (E, d) est dit de *Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. On admet que tout espace métrique complet est de Baire.

a) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Indication : Si $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, considérer $U_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Thomae définie par $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ avec p, q premiers entre eux et $q > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Indication : Pour $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de rationnels p/q dans $[0, 1]$ avec $q < 1/\varepsilon$.

c) En utilisant Baire, montrer qu'il n'existe pas de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$.

Indication : L'ensemble des points de continuité d'une fonction est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts).