Corrigé de l'Examen de Rattrapage

MAT301 - Topologie et Analyse

Date : 25.11.2025

Exercice 1.

(1a) C'est la logique. Si $A \subseteq B$, alors la plus grande partie ouverte contenue dans A est aussi contenue dans B, donc $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$. De même, la plus petite partie fermée contenant A est contenue dans la plus petite partie fermée contenant B, donc $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

(1b) $\subseteq$: On a $(A \cap B) \subseteq A$ et $(A \cap B) \subseteq B$ et on applique la question ci-dessus. $\supseteq$: Si $\mathring{A} \cap \mathring{B}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$ et $B(x,r) \subseteq B$, donc $B(x,r) \subseteq A \cap B$.

(1c) On a $\mathring{A} \subseteq (A \cup B)$ et $\mathring{B} \subseteq (A \cup B)$. Donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(1d) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ car $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$. L'autre inclusion est fausse en général. Par exemple, si $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ tandis que $\bar{A} \cap \bar{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

(2) Prendre $A =]1,2]$ et $B =]0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathring{A} =]1,2[$ et $\mathring{B} =]0,1[$, donc $1 \notin (\mathring{A} \cup \mathring{B})$. Mais $A \cup B =]0,2[$ et $(A \cup B)^\circ =]0,2[$.

Exercice 2.

1. $\phi : X \to \mathbb{R}$ etant injective, δ est la distance image reciproque de la distance usuelle par ϕ. Ainsi, δ est une distance.
2. $B(1,1) =]1/2, +\infty[$. En effet : $\delta(1,x) < 1 \Leftrightarrow |1 - \frac{1}{x}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > 1/2$.
3. $A =]0,1]$ n'est pas bornée. En effet, $\delta(1, 1/n) = |1-n| = n-1 \to +\infty$.$A$ est fermé. En effet, si (x_n) est une suite dans A qui converge vers $x \in X$ pour la distance δ, alors $(1/x_n)$ converge vers $1/x$ dans $\mathbb{R}$. Comme $1/x_n \geq 1$ pour tout n, on a $1/x \geq 1$, donc $x \in A$.
4. Soit $x \in B(a,r)$ où $a > 0, r > 0$. Alors :

$$\delta(a,x) < r \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < r \Leftrightarrow \frac{1}{a} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + r.$$

Si $r < \frac{1}{a}$, alors $B(a,r) = \left] \frac{1}{\frac{1}{a}+r}, \frac{1}{\frac{1}{a}-r} \right[= \left] \frac{a}{1+ra}, \frac{a}{1-ra} \right[$. Si $r \geq \frac{1}{a}$, alors $B(a,r) = \left] \frac{a}{1+ra}, +\infty \right[$.

Exercice 3.

1. Si $x \in A \cap B$, alors $d(x,A) = 0$ et $d(x,B) = 0$, donc $d(A,B) = 0$, contradiction avec $\alpha > 0$.
2. (a) U et V sont ouverts car $x \mapsto d(x,A)$ est continue. En effet, $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. Sans utiliser la continuité, on peut aussi écrire :

$$U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\alpha}{3}\right), \quad V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\alpha}{3}\right).$$

   (b) Pour tout $a \in A$, on a $d(a,A) = 0 < \alpha/3$, donc $a \in U$. De même $B \subseteq V$.

   (c) Soit $x \in U \cap V$. Alors $d(x,A) < \alpha/3$ et $d(x,B) < \alpha/3$. Il existe donc $a \in A, b \in B$ tels que $d(x,a) < \alpha/3$ et $d(x,b) < \alpha/3$. Par inégalité triangulaire : $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \alpha/3 + \alpha/3 = 2\alpha/3 < \alpha$. Mais ceci contredit $d(A,B) = \alpha$. Donc $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 4.

Cas $n = 0$ **:** Prendre $(x_k) = (k)_{k \in \mathbb{N}}$. Cette suite diverge vers $+\infty$ et n'a aucun point d'accumulation.

Cas $n \geq 1$ **:** Pour $n = 1$ on peut par exemple prendre

$$x_k = k si \text{ est pair}, \quad x_k = \frac{1}{k} \text{ si } k \text{ est impair.}$$

qui admet 0 comme unique point d'accumulation mais n'est pas convergente.

Pour un entier $n \geq 1$ fixe, choisissons des points distincts $a_1, \ldots, a_n$ (par exemple $a_j = j$) et écrivons tout $k \geq 1$ sous la forme $k = qn + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$. Posons

$$x_k = a_r + \frac{1}{q+1}.$$

Pour chaque r la sous-suite des x_k avec reste r modulo n converge vers a_r, et aucun autre point n'est limite, donc l'ensemble des points d'accumulation vaut $\{a_1, \ldots, a_n\}$.