Examen de Rattrapage : Topologie Métrique

MAT-301

5 février 2026

2025-26 GSU

Si une question vous semble ambiguë, n'hésitez pas à donner votre propre interprétation et à justifier vos choix.

Durée : 2h30 **Barème :** 25 points

Exercice 1. *Questions de cours* (8 points)

a) **(1 pt)** Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$. Donner la définition de l'adhérence $\overline{A}$.

b) **(1 pt)** Donner un exemple d'espace métrique où il existe une suite de Cauchy qui ne converge pas. Justifier.

c) **(2 pts)** Montrer qu'une suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy.

d) **(2 pts)** Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

e) **(2 pts)** Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$ non vide. On définit la **distance à** A par $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. Montrer que d_A est continue, comme application $(E, d) \to (\mathbb{R}, d_{us})$

Exercice 2. *Sous-ensembles d'espaces métriques* (9 points)

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est ouvert/fermé/ni ouvert ni fermé/ à la fois ouvert et fermé/compact.

a) **(3 pts)** Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de la **distance discrète** $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$. Soit $A = \{1, 2, 3\}$.

b) **(3 pts)** On considère $\mathbb{R}^3$ muni d'une norme quelconque Soit

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}.$$

c) **(3 pts)** On considère $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Soit

$$C = \{f \in E : f' = 0\}$$

Exercice 3. *Connexité dans* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ (8 points)

On considère $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle et $\mathbb{R}^2$ avec la distance produit.

a) **(2 pts)** Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux parties connexes. Montrer que $A \cap B$ est connexe.

b) **(2 pts)** Montrer que ce résultat est **faux** dans $\mathbb{R}^2$: exhiber deux parties connexes $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ dont l'intersection $A \cap B$ n'est pas connexe.

c) **(2 pts)** Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ une partie connexe. Montrer que son intérieur $\mathring{E}$ est connexe.

d) **(2 pts)** Montrer que ce résultat est **faux** dans $\mathbb{R}^2$: exhiber une partie connexe $E \subseteq \mathbb{R}^2$ dont l'intérieur $\mathring{E}$ n'est pas connexe.

Bon courage !