Quiz de Révision : Vocabulaire des Espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.
Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$.

1. Montrer que $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.
2. Montrer que l'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'union de tous les ouverts contenus dans A.

Exercice 2.
Soit (E, d) un espace métrique et $x, y \in E$ deux points distincts. Montrer qu'il existent des ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Exercice 3.
Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$ un sous-ensemble non vide. On définit le diamètre de A, noté $\mathrm{diam}(A)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, comme $\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}$. Montrer que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

Exercice 4.
Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle) est une union dénombrable d'intervalles ouverts (disjoints).

Exercice 5.
Soit $E = ([a, b], d)$ où d est la restriction de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ à l'intervalle $[a, b]$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés de E d'intersection vide, c'est-à-dire $\bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n = \emptyset$.

Montrer qu'il existe une sous-famille finie d'intersection vide, i.e., il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n=0}^{N} F_n = \emptyset$. *Indication :* Utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Si l'on change $[a, b]$ en $]a, b[$ est-ce que le résultat reste vrai ?

Exercice 6.
Soit $E = \mathbb{N}$. On définit

$$\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{C \subseteq \mathbb{N} : C \text{ est cofini}\},$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ satisfait les proprietes principales des ouverts d'un espace métrique, c'est-à-dire :
   - $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $E \in \mathcal{A}$,
   - $\mathcal{A}$ est stable par union quelconque,
   - $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.
2. Peut-on munir E d'une distance d telle que $\mathcal{A}$ soit exactement l'ensemble de tous les ouverts de (E, d) ? (penser à l'Exercice 2)