Examen de Rattrapage : Topologie Métrique

MAT-301

4 février 2026

2025-26 GSU

Si une question vous semble ambiguë, n'hésitez pas à donner votre propre interprétation et à justifier vos choix. Si vous pensez qu'il y a une erreur dans l'énoncé, signalez-la et poursuivez en conséquence.

Durée : 2h30 — **Barème :** 25 points

Exercice 1. *Questions de cours* (8 points)

a) **(2 pts)** Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

b) **(2 pts)** Soit (X, d) un espace métrique. On définit $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ par

$$d'(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}.$$

Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes sur X.

c) **(2 pts)** Soit (X, d) un espace métrique compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides (i.e. $F_{n+1} \subseteq F_n$ pour tout n). Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

d) **(2 pts)** Donner un exemple de deux espaces vectoriels normés E et F et d'une application linéaire $u : E \to F$ qui n'est pas continue. Justifier votre réponse.

Exercice 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A, B deux parties non vides de E. On définit la **somme de Minkowski** de A et B par :

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

a) **(3 pts)** Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

b) **(3 pts)** Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
Indication : considérer une suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $A + B$ qui converge vers un point $\ell \in E$, et utiliser la compacité de A.

c) **(3 pts)** Montrer que si A et B sont connexes par arcs, alors $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 3.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction. Le **graphe** de f est l'ensemble

$$G := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}.$$

On munit G de la métrique induite par une norme sur $\mathbb{R}^2$, par exemple la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

a) **(2 pts)** Démontrer que si f est continue sur $[0, 1]$, alors G est compact et connexe (indication : considérer l'application $F : [0, 1] \to G$ définie par $F(x) := (x, f(x))$).

b) **(2 pts)** On pose $C := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. Démontrer que si f est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ et que $(0, f(0)) \in \overline{C}$, alors G est connexe.

c) **(2 pts)** Donner un exemple d'une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ discontinue dont le graphe est connexe. Justifier.

d) **(2 pts)** Démontrer que si G est compact, alors f est continue sur $[0, 1]$ (indication : on peut procéder par contraposée, utiliser la critère de continuité par suites . . .).

Bon courage !