Examen Final : Topologie Métrique

MAT-301

24 janvier 2026

2025-26 GSU

Durée : 2h30 **Barème :** 25 points

Exercice 1. *Questions de cours* (10 points)

a) **(2 pts)** Enoncer le théorème de Heine-Borel (dans une espace vectoriel normé de dimension finie, ….) (On ne demande pas de le montrer)

b) **(2 pts)** Montrer que pour partie complète d'un espace métrique est fermée.

c) **(2 pts)** Soit K et E deux espaces métriques, et K est compact. Montrer que toute application **continue et bijective** $f : K \to E$ est un homéomorphisme.

d) **(2 pts)** Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.

e) **(2 pts)** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que si une application linéaire $u : E \to F$ est continue, alors elle est lipschitzienne. *Indication : utiliser la continuité en* 0 *et l'homogénéité.*

Exercice 2. *Connexité et homéomorphisme* (8 points)

a) **(2 pts)** Montrer que, si $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est un homéomorphisme alors pour tout $A \subseteq E$, la restriction $f_{|A} : (A, d_{|A}) \to (f(A), \delta_{|f(A)})$ est un homéomorphisme.

b) **(2 pts)** Montrer que si E et F sont des espaces métriques homéomorphes, alors E possède n composantes connexes si et seulement si F possède n composantes connexes, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

c) **(2 pt)** Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

d) **(2 pts)** Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.
Indication : par l'absurde, supposer qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, poser $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $c = f((0,0))$. Combien de composantes connexes a $X := \mathbb{R}\setminus\{c\}$? Est-ce que X et A peuvent être homéomorphes ?

Exercice 3. *Distance de Hamming et transmission de messages* (7 points)

Lors de la transmission de données par un canal bruité, certains bits peuvent être altérés. On cherche à concevoir un système permettant de corriger ces erreurs.

Soit $n \geq 1$ un entier. Un **mot** de taille n est un élément de $X := \{0,1\}^n$, noté sans parenthèses ni virgules (par exemple : 01010). On fixe $k < n$. Un **message** est un élément de $\{0,1\}^k$. Un **code** est une application injective $C : \{0,1\}^k \to X$. On note $\mathcal{C} := \mathrm{Im}(C) \subseteq X$ l'ensemble des mots de code.

Question. À quelle condition peut-on garantir que si au plus t bits sont altérés, le message original est retrouvé de manière unique ?

a) **(2 pts)** On définit l'application $d_H : X \times X \to \mathbb{N}$ par :

$$d_H(x, y) := \mathrm{Card}\left(\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}\right).$$

C'est à dire le nombre total de positions où les mots sont différents. Montrer que d_H est une distance sur X.

b) **(1 pt)** On dit que le code **corrige** t **erreurs** si, pour tout mot reçu $y \in X$, il existe au plus un mot de code $c \in \mathcal{C}$ tel que $d_H(y, c) \leq t$. Montrer que cette condition équivaut à : les boules fermées $B_F(c, t)$ pour $c \in \mathcal{C}$ sont deux à deux disjointes.

c) **(1 pt)** On note $d_{\min} := \min\limits_{c \neq c'\,,\, c, c' \in \mathcal{C}} d_H(c, c')$ la distance minimale du code. Montrer que si le code corrige t erreurs, alors $d_{\min} \geq 2t + 1$.

d) **(1 pt)** Réciproquement, montrer que si $d_{\min} \geq 2t + 1$, alors le code corrige t erreurs.

e) **(1 pt)** On considère le code $C : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^5$ défini par :

$$C(00) = 00000, \quad C(01) = 01110, \quad C(10) = 10101, \quad C(11) = 11011.$$

Calculer $d_{\min}$. Combien d'erreurs ce code peut-il corriger ?

f) **(1 pt)** Un mot $y = 01010$ est reçu. Sachant qu'au plus 1 erreur s'est produite, quel message a été envoyé ? Justifier.

Bon courage !