**Exercice I (11 points)**

i) La boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B_{\mathrm{F}}(a,r) := \{x \in E : d(x,a) \leq r\}.$$

ii) Par l'inégalité triangulaire :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z),$$
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z).$$

De la première inégalité : $d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z)$.
De la seconde : $d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$, donc $-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z)$.
Par conséquent :

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

iii) Soit $B_{\mathrm{F}}(a,r)$ une boule fermée. Montrons que son complémentaire est ouvert. Soit $x \in E \setminus B_{\mathrm{F}}(a,r)$, donc $d(x,a) > r$. Posons $\varepsilon := d(x,a) - r > 0$. Soit $y \in B(x,\varepsilon)$, D'après **ii**, on a : $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \varepsilon = r$. Ainsi $y \notin B_{\mathrm{F}}(a,r)$, i.e., $B(x,\varepsilon) \subseteq E \setminus B_{\mathrm{F}}(a,r)$. Le complémentaire est donc ouvert, donc $B_{\mathrm{F}}(a,r)$ est fermé.

iv) Deux définitions équivalentes de la continuité de $f : (E,d) \to (F,\delta)$ en $x \in E$ :
**Topologique :** Pour toute voisinage $V$ de $f(x)$ dans $F$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x$ dans $E$.
**Métrique ($\varepsilon$-$\eta$) :** Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x' \in E$,

$$d(x',x) < \eta \Rightarrow \delta(f(x'), f(x)) < \varepsilon.$$

v) On a $B \subseteq E \setminus A$, qui est fermé (car $A$ est ouvert). Donc $\overline{B} \subseteq E \setminus A$.

vi) Montrons la double inclusion.
($\subseteq$) Soit $(x,y) \in B_d(e,r) \times B_\delta(f,r)$. Alors $d(x,e) < r$ et $\delta(y,f) < r$. Donc :

$$d_\infty\big((x,y),(e,f)\big) = \sup\{d(x,e), \delta(y,f)\} < r,$$

d'où $(x,y) \in B_{d_\infty}((e,f),r)$.
($\supseteq$) Soit $(x,y) \in B_{d_\infty}((e,f),r)$. Alors :

$$\sup\{d(x,e), \delta(y,f)\} < r.$$

Donc $d(x,e) < r$ et $\delta(y,f) < r$, i.e., $(x,y) \in B_d(e,r) \times B_\delta(f,r)$.

**Exercice II (10 points)**

i) $A(r)$ **est ouvert :** $A(r)$ est une union de boules ouvertes, donc est ouvert.
$A \subseteq A(r)$ **:** Pour tout $a \in A$, on a $a \in B(a,r)$ (car $d(a,a) = 0 < r$), donc $a \in A(r)$.

ii) C'est un exerice de traduction ; on a :
Si $x \notin A(r)$, alors pour tout $a \in A$, $d(x,a) \geq r$, c'est á dire pour tout $a \in A$, la boule $B(x,r)$ ne contient pas $a$, autrement dit $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Il vient $x \in \mathrm{Ext}(A)$.

iii) $\widetilde{A}$ **est fermé :** $\widetilde{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(1/2^n)$. Si $x \notin A(1/2^{n_0})$, d'après **ii**, la boule $B(x,r)$ avec $r = 1/2^{n_0}$ vérifie $B(x,1/2^{n_0}) \cap A = \emptyset$. Considerons $r' = r/2$. Choissons $n > n_0$. Alors $B(x,r') \cap A(1/2^n) = \emptyset$ car sinon il existerait $a \in A$ avec $d(x,a) < 1/2^n + r' \leq r$, ce qui est impossible. Ainsi, $E \setminus \widetilde{A}$ est ouvert, donc $\widetilde{A}$ est fermé.
$\widetilde{A} \supseteq \overline{A}$ **:** Comme $\widetilde{A}$ est fermé et contient $A$ (car $A \subseteq A(r)$ pour tout $r > 0$), et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$, on a $\overline{A} \subseteq \widetilde{A}$.

iv) Il reste à montrer $\widetilde{A} \subseteq \overline{A}$ : Soit $x \in \widetilde{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A(1/2^n)$. Donc pour tout $n$, il existe $a_n \in A$ tel que $x \in B(a_n, 1/2^n)$, i.e., $d(x,a_n) < 1/2^n$. Donc toute boule $B(x,r)$ avec $r > 0$ contient $a_n$ pour $n$ assez grand (tel que $1/2^n < r$). Ainsi, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$, donc $x \in \overline{A}$. (On peut aussi dire que $a_n \to x$ avec $a_n \in A$, donc $x \in \overline{A}$.)

v) Soit $F$ un fermé de $E$. Alors $F = \overline{F} = \widetilde{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F(1/2^n)$, où chaque $F(1/2^n)$ est ouvert d'après i).
Donc tout fermé est une intersection décroissante dénombrable d'ouverts.

**Exercice III (4 points)**

i) Considérons :
$f \in \mathring{A}$ **:** Prenons $f(t) = 1/4$ (constante). Alors $f(0) = 1/4 \geq 0$ et $f(1) = 1/4 < 1$, donc $f \in A$. Pour $\varepsilon = 1/4$, et $g \in A$, si $d_\infty(f,g) < \varepsilon$, alors $|g(0) - 1/4| < 1/4$ donc $g(0) > 0$, et $|g(1) - 1/4| < 1/4$ donc $g(1) < 1/2 < 1$. Donc $B(f,1/4) \subseteq A$, i.e., $f \in \mathring{A}$.

$g \in \mathrm{Fr}(A)$ **:** Prenons $g(t) = 0$ (constante). Alors $g(0) = 0 \geq 0$ et $g(1) = 0 < 1$, donc $g \in A$. Mais toute boule autour de $g$ contient des fonctions $h$ dans $A$, avec $h(0) < 0$ (donc hors de $A$) : en effet pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction constante $h_\varepsilon(t) = -\varepsilon/2$ vérifie $d_\infty(g,h_\varepsilon) = \varepsilon/2 < \varepsilon$, i.e. $h_\varepsilon \in B(g,\varepsilon)$ et $h_\varepsilon \notin A$ ; Donc $g \in \mathrm{Fr}(A)$.

$h \in \mathrm{Ext}(A)$ **:** Prenons $h(t) = -1$ (constante). Alors $h(0) = -1 < 0$. Pour $\varepsilon = 1/2$, si $d_\infty(h,k) < 1/2$, alors $|k(0) + 1| < 1/2$ donc $k(0) < -1/2 < 0$, donc $k \notin A$. Ainsi, $B(h,1/2) \cap A = \emptyset$, donc $h \in \mathrm{Ext}(A)$.

ii) $A$ **n'est pas ouvert :** La fonction nulle $g(t) = 0$ appartient à $A$ (avec $g(0) = 0 \geq 0$ et $g(1) = 0 < 1$), mais toute boule autour de $g$ contient des fonctions avec $f(0) < 0$, donc $g \notin \mathring{A}$.
$A$ **n'est pas fermé :** Considérons la fonction constante $f_n(t) = 1 - 1/(n+1)$. Alors $f_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $f_n(0) = 1 - 1/(n+1) \geq 0$ et $f_n(1) = 1 - 1/(n+1) < 1$).
La suite $(f_n)$ converge vers $f(t) = 1$, car $d_\infty(f_n, f) = 1/(n+1) \to 0$.
Or $f(1) = 1 \not< 1$, donc $f \notin A$. Ainsi, $A$ n'est pas fermé.

*Fin du corrigé*