TD 2 : Espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.
Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E, c'est-à-dire que pour tous $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $\|f\| \geq 0$ et $\|f\| = 0$ si et seulement si $f = 0$;

(ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$;

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Exercice 2.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit d la distance associée à cette norme définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Montrer que la distance d est invariante par translation, c'est-à-dire que pour tous $x, y, a \in E$, on a

$$d(x + a, y + a) = d(x, y).$$

Exercice 3.
Soit (E, d_1) et (E, d_2) deux espaces métriques ayant le même ensemble sous-jacent E.

1. Rappeler la définition selon laquelle deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites *topologiquement équivalentes*.
2. Montrer la proposition suivante :
   Pour que deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E soient topologiquement équivalentes, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

   $$B_{d_2}(x, \eta) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B_{d_1}(x, \eta') \subset B_{d_2}(x, \varepsilon),$$

   où $B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ pour la distance d.

Exercice 4.
Sur $\mathbb{R}^2$, on considère les distances d_1 et d_∞ définies pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

et

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{V}_{d_1}(x)$ l'ensemble des voisinages de x pour la topologie induite par d_1 et $\mathcal{V}_{d_\infty}(x)$ l'ensemble des voisinages de x pour la topologie induite par d_∞.

a) Montrer que $\mathcal{V}_{d_1}(0) = \mathcal{V}_{d_\infty}(0)$.

b) En déduire que les distances d_1 et d_∞ sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.