

Examen Final : Topologie Métrique

MAT-301

8 février 2026

2025-26 GSU

Durée : 2h30

Barème : 25 points

Exercice 1. Questions de cours (10 points)

- a) (2 pts) Énoncer le théorème de Heine-Borel (dans un espace vectoriel normé de dimension finie, ...) (On ne demande pas de le montrer)
- b) (2 pts) Montrer que toute partie complète d'un espace métrique est fermée.
- c) (2 pts) Soit K et E deux espaces métriques, et K est compact. Montrer que toute application **continue et bijective** $f : K \rightarrow E$ est un homéomorphisme.
- d) (2 pts) Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.
- e) (2 pts) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que si une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est continue, alors elle est lipschitzienne. *Indication : utiliser la continuité en 0 et l'homogénéité.*

Exercice 2. Connexité et homéomorphisme (8 points)

- a) (2 pts) Montrer que, si $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ est un homéomorphisme alors pour tout $A \subseteq E$, la restriction $f|_A : (A, d|_A) \rightarrow (f(A), \delta|_{f(A)})$ est un homéomorphisme.
- b) (2 pts) Montrer que si E et F sont des espaces métriques homéomorphes, alors E possède n composantes connexes si et seulement si F possède n composantes connexes, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- c) (2 pt) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
- d) (2 pts) Montrer que \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} ne sont pas homéomorphes.
Indication : par l'absurde, supposer qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, poser $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $c = f((0, 0))$. Combien de composantes connexes a $X := \mathbb{R} \setminus \{c\}$? Est-ce que X et A peuvent être homéomorphes ?

Exercice 3. Distance de Hamming et transmission de messages (7 points)

Lors de la transmission de données par un canal bruité, certains bits peuvent être altérés. On cherche à concevoir un système permettant de corriger ces erreurs.

Soit $n \geq 1$ un entier. Un **mot** de taille n est un élément de $X := \{0, 1\}^n$, noté sans parenthèses ni virgules (par exemple : 01010). On fixe $k < n$. Un **message** est un élément de $\{0, 1\}^k$. Un **code** est une application injective $C : \{0, 1\}^k \rightarrow X$. On note $\mathcal{C} := \text{Im}(C) \subseteq X$ l'ensemble des mots de code.

Question. À quelle condition peut-on garantir que si au plus t bits sont altérés, le message original est retrouvé de manière unique ?

- a) (2 pts) On définit l'application $d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ par :

$$d_H(x, y) := \text{Card}(\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}).$$

C'est à dire le nombre total de positions où les mots sont différents. Montrer que d_H est une distance sur X .

- b) (1 pt) On dit que le code **corrige t erreurs** si, pour tout mot reçu $y \in X$, il existe au plus un mot de code $c \in \mathcal{C}$ tel que $d_H(y, c) \leq t$. Montrer que cette condition équivaut à : les boules fermées $B_F(c, t)$ pour $c \in \mathcal{C}$ sont deux à deux disjointes.
- c) (1 pt) On note $d_{\min} := \min_{c \neq c', c, c' \in \mathcal{C}} d_H(c, c')$ la distance minimale du code. Montrer que si le code corrige t erreurs, alors $d_{\min} \geq 2t + 1$.
- d) (1 pt) Réciproquement, montrer que si $d_{\min} \geq 2t + 1$, alors le code corrige t erreurs.
- e) (1 pt) On considère le code $C : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^5$ défini par :

$$C(00) = 00000, \quad C(01) = 01110, \quad C(10) = 10101, \quad C(11) = 11011.$$

Calculer d_{\min} . Combien d'erreurs ce code peut-il corriger ?

- f) (1 pt) Un mot $y = 01010$ est reçu. Sachant qu'au plus 1 erreur s'est produite, quel message a été envoyé ? Justifier.