

TD 3 : Ouverts et fermés dans les espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26

GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.

On considère l'espace métrique (\mathbb{R}^2, d_2) où d_2 est la distance euclidienne.

1. Montrer que la boule fermée $B_F(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) \leq 1\}$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$, le premier quadrant ouvert, montrer que A est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .
3. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, le premier quadrant fermé, montrer que F est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
4. Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. Montrer que S est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2.

Soit E un ensemble non vide et d la distance discrète sur E .

1. Déterminer la boule ouverte $B(a, r)$ pour $a \in E$ et $r > 0$.
2. En déduire que toute partie de E est à la fois ouverte et fermée pour la topologie induite par la distance discrète.

Exercice 3.

Soit (E, d) un espace métrique et $r > 0$. Est-ce que la boule fermée $B_F(a, r)$ est la plus petite partie fermée contenant la boule ouverte $B(a, r)$? Justifier votre réponse.

Exercice 4.

1. **Ultramétrie.** On dit qu'une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur un ensemble E est une *ultramétrie* si pour tous $x, y, z \in E$, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$, et

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

Vérifier qu'une ultramétrie est une métrique :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

2. **Valuation p -adique.** Soit p un nombre premier. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on définit la *valuation p -adique* $v_p(n)$ comme le plus grand entier $k \geq 0$ tel que p^k divise n . On pose également $v_p(0) = +\infty$.
 - a) Calculer $v_2(12)$, $v_3(18)$, et $v_5(100)$.
 - b) Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$.
 - c) Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $v_p(n + m) \geq \min\{v_p(n), v_p(m)\}$.
3. **Norme p -adique.** Pour tout $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, on peut écrire $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On définit la *valuation p -adique* de x par $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$ et on pose $v_p(0) = +\infty$. On définit alors la *norme p -adique* $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ par

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a) Calculer $|12|_2$, $|1/3|_3$, et $|10|_5$.
 - b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.
 - c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.
 - d) En déduire que la fonction $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $d_p(x, y) = |x - y|_p$ est une ultramétrie sur \mathbb{Q} .
4. **Boules dans les espaces ultramétriques.** Soit (E, d) un espace ultramétrique.
- a) Montrer que si $x \in B(a, r)$, alors $B(x, r) = B(a, r)$. Autrement dit, tout point d'une boule ouverte est un centre de cette boule.
 - b) Montrer que deux boules ouvertes de même rayon sont soit disjointes, soit identiques.
 - c) En déduire que toute boule ouverte est également une partie fermée de E .
 - d) Dans l'espace métrique (\mathbb{Q}, d_2) où d_2 est la distance 2-adique, décrire explicitement les boules $B(0, 1)$, $B(0, 1/2)$, et $B_{\mathbb{F}}(0, 1)$.