

# Cours - TD 5 : Continuité - Fondements et Structures

---

## Exercice 1.

Soit  $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  une application entre deux espaces métriques. Démontrer l'équivalence des cinq assertions suivantes.

- (i) L'application  $f$  est continue en tout point de  $E$ .
- (ii) Pour toute partie ouverte  $U$  de  $F$ , son image réciproque  $f^{-1}(U)$  est une partie ouverte de  $E$ .<sup>1</sup>
- (iii) Pour toute partie fermée  $A$  de  $F$ , son image réciproque  $f^{-1}(A)$  est une partie fermée de  $E$ .
- (iv) Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

## Exercice 2.

- a) **Composition.** Soient  $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  et  $g : (F, \delta) \rightarrow (G, \rho)$  deux applications continues. Montrer que l'application composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est continue ; ceci reste vrai si l'on remplace la continuité par la continuité en un point.
- b) **Produit.** Soient  $(E, d)$ ,  $(F, \delta)$  et  $(G, \rho)$  des espaces métriques. On munit l'espace produit  $F \times G$  de la distance  $d_\infty((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = \max(\delta(y_1, y_2), \rho(z_1, z_2))$ . Soient  $\pi_F : F \times G \rightarrow F$  et  $\pi_G : F \times G \rightarrow G$  les projections canoniques.  
Montrer qu'une application  $h : E \rightarrow F \times G$  est continue si et seulement si ses applications composantes,  $\pi_F \circ h$  et  $\pi_G \circ h$ , sont continues.

## Exercice 3.

Cet exercice formalise l'intuition qu'une suite convergente peut être vue comme une fonction continue sur un domaine topologique adéquat.

Soit  $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On munit  $X$  de la distance  $d_X$  définie par  $d_X(p, q) = |\phi(p) - \phi(q)|$ , où  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est l'injection

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$  et soit  $\ell \in E$ . On considère la suite comme une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow E$  et on définit son prolongement  $\tilde{u} : (X, d_X) \rightarrow (E, d)$  par :

$$\tilde{u}(n) = \begin{cases} u_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \ell & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

- a) Montrer que  $(X, d_X)$  est un espace métrique, décrire les voisinages de  $\infty$ .
- b) **Caractérisation locale.** En déduire l'équivalence suivante :

La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  dans  $(E, d) \iff$  L'application  $\tilde{u}$  est continue au point  $\infty$ .

- c) Montrer que une fonction  $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$  est continue en  $\ell$  si pour toute suite  $(u_n)_n$  de  $E$ , convergeant vers  $\ell$ , la suite  $(f(u_n))_n$  converge vers  $f(\ell)$ .

---

1. Définition topologique de la continuité.