UNIVERSITÉ GALATASARAY

Département de Mathématiques

MAT 301 – TOPOLOGIE MÉTRIQUE

Examen Partiel

Date : 13 novembre 2025 à 16h00
Durée : 2 heures 15 minutes
Année académique : 2025–2026

Les portables et les documents sont interdits. La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice I (11 points)

i) **(1 point)** Soit (E, d) un espace métrique. Rappeler la définition d'une boule fermée dans E.

ii) **(2 points)** Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que, pour tous $x, y, z \in E$,

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|.$$

iii) **(2 points)** Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que toute boule fermée est un fermé de E.

iv) **(2 points)** Rappeler les deux définitions équivalentes de la continuité d'une fonction

$$f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$$

entre des espaces metriques, en un point $x \in E$.

v) **(2 points)** Soient A et B des parties d'un espace métrique (E, d) telles que A est ouvert et $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

vi) **(2 points)** Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. On considère $G = (E \times F)$ avec la distance

$$d_\infty\big((e_1, f_1), (e_2, f_2)\big) := \sup\big\{d(e_1, e_2), \delta(f_1, f_2)\big\},$$

où $e_1, e_2 \in E$ et $f_1, f_2 \in F$.

Pour $r > 0$, montrer que

$$B_d(e, r) \times B_\delta(f, r) = B_{d_\infty}\big((e, f), r\big).$$

Exercice II (10 points)

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Pour $r > 0$, on pose

$$A(r) := \bigcup_{a\in A} B(a,r).$$

i) **(2 points)** Montrer que $A(r)$ est un ouvert de E et que $A \subseteq A(r)$.

ii) **(2 points)** Montrer que s'il existe $r > 0$ tel que $x \notin A(r)$, alors $x \in \mathrm{Ext}(A)$.

iii) **(2 points)** On pose $\widetilde{A} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(1/2^n)$. Déduire de la question précédente que $\widetilde{A}$ est fermé dans E et que $\widetilde{A} \supseteq \overline{A}$.

iv) **(2 points)** Montrer que $\overline{A} = \widetilde{A}$.

v) **(2 points)** En deduire que : Tout fermé d'un espace métrique est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice III (4 points)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance $d_\infty : (f,g) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ et

$$A := \{f \in E : f(0) \geq 0 \text{ et } f(1) < 1\}.$$

i) **(2 points)** Donner $f, g, h \in E$ tels que

$$f \in \mathring{A}, \quad g \in \mathrm{Fr}(A), \quad h \in \mathrm{Ext}(A).$$

ii) **(2 points)** Est-ce que A est ouvert ? Est-ce qu'il est fermé ?

Bonne chance !