TD 6 : Continuité dans les Espaces Normés

Rappel (Admis pour ce TD) : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Elles définissent la même topologie (mêmes ouverts, mêmes suites convergentes).

Exercice 1 : Ouverts et fermés

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés en les exprimant, si possible, comme image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue f.

1. **Dans $\mathbb{R}^2$ (norme euclidienne) :**
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 < 1\}$
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$
2. **Dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$) :**
   (a) $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. *Indication : Étudier l'application $\delta_0 : f \mapsto f(0)$.*
   (b) $U = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt > 1\}$. *Indication : Montrer que $\psi : f \mapsto \int_0^1 f$ est lipschitzienne.*

Exercice 2 : La continuité linéaire

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u : E \to F$ linéaire.

1. **En dimension finie :** On suppose $\dim(E) < \infty$. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.
   1. En utilisant l'équivalence des normes (voir Rappel), justifier qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x = \sum x_i e_i$, on a $\sum |x_i| \leq K \|x\|_E$.
   2. En déduire, par l'inégalité triangulaire, que u est une application lipschitzienne.
2. **En dimension infinie :** On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, tous deux munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $D : E \to F$ l'opérateur $D(f) = f'$.
   1. Considérer la suite de fonctions $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2 t)$.
   2. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|D(f_n)\|_\infty$.
   3. Conclure sur la continuité de D.

Exercice 3 : Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ d'une norme, par exemple la norme infinie définie par

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|,$$

pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **Topologie du groupe linéaire :**
   1. Justifier que l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
   2. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.
   1. On considère le polynôme caractéristique $P_A(t) = \det(A - tI_n)$. Combien ce polynôme admet-il de racines ?
   2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la matrice $A_k = A - \varepsilon_k I_n$ soit inversible pour tout k.
   3. En déduire que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.