TD 7 : Compacité, Connexité et Complétude

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Partie I : Compacité

Exercice 1.
Théorème de Cantor (intersection de compacts emboîtés).

Soit (E, d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides : $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$.

a) Montrer que $K := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

b) Donner un contre-exemple dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ montrant que l'hypothèse de compacité est essentielle.

c) On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$. Montrer que K est un singleton.

Exercice 2.
Distance entre compacts disjoints.

Soient K_1, K_2 deux compacts **disjoints** d'un espace métrique (E, d).

a) Montrer qu'il existe $a \in K_1$ et $b \in K_2$ réalisant $d(K_1, K_2) := \inf\{d(x, y) : x \in K_1, y \in K_2\}$.

b) En déduire que $d(K_1, K_2) > 0$.

c) Ce résultat reste-t-il vrai si K_1 et K_2 sont seulement fermés ? Justifier par un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.
Compacité du groupe orthogonal.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ l'espace des matrices réelles $n \times n$, muni d'une norme quelconque. On définit $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$.

a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $|a_{ij}| \leq 1$ pour tous i, j.

c) Conclure que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

d) Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est-il compact ? borné ? fermé ?

Partie II : Connexité

Exercice 4.
Composantes connexes.

Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$, on définit la *composante connexe* de x comme la réunion de toutes les parties connexes de E contenant x :

$$C_x = \bigcup \{A \subseteq E : A \text{ connexe et } x \in A\}.$$

a) Montrer que C_x est connexe.

b) Montrer que C_x est fermé dans E.
Indication : Montrer que l'adhérence d'un connexe est connexe.

c) Montrer que les composantes connexes forment une partition de E.

d) Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ (muni de la distance usuelle).

e) Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
Indication : Deux matrices sont dans la même composante si et seulement si elles ont le même signe du déterminant.

Exercice 5.
Le peigne topologique (connexe mais non connexe par arcs).
On considère dans $\mathbb{R}^2$ le sous-ensemble :

$$E = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right).$$

C'est un "peigne" avec une infinité de dents aux points $1/n$ et une dent limite en $x = 0$.

a) Dessiner E et montrer que E est connexe par arcs.

b) Soit $\overline{E} = E \cup (\{0\} \times]1,2])$, le peigne avec un "manche" supplémentaire en $x = 0$. Montrer que $\overline{E}$ est connexe.
Indication : Montrer que $\overline{E} = \overline{E_0}$ où E_0 est connexe par arcs.

c) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.
Indication : Supposer qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \overline{E}$ avec $\gamma(0) = (0,2)$ et $\gamma(1) = (1,0)$. Si γ quitte le segment $\{0\} \times [0,2]$, étudier $t_0 = \inf\{t : \gamma(t) \notin \{0\} \times [0,2]\}$.

Exercice 6.
Applications de la connexité.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe et $f : A \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

c) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\nabla f = 0$ partout. Montrer que f est constante.
Indication : Montrer que pour $a \in U$ fixé, l'ensemble $\{x \in U : f(x) = f(a)\}$ est ouvert et fermé dans U.

d) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

Partie III : Complétude

Exercice 7.
Sous-espaces complets.
Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace complet est complet.

b) Réciproquement, montrer qu'un sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

c) L'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ est complet. En déduire que l'ensemble

$$F = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$$

est un espace métrique complet.

d) L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, vu comme sous-espace de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, est-il complet ?

Exercice 8.
Le théorème du point fixe de Banach et applications.

Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une contraction de rapport $k \in [0,1[$.

a) **(Admis ou rappelé)** f admet un unique point fixe $\ell \in E$, et pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ.

b) **Équation fonctionnelle :** Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}\cos(g(x)) + x$ admet une unique solution $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Indication : Réécrire sous la forme $g = T(g)$ et montrer que T est une contraction.

c) **Existence locale pour les EDO :** Soit $F : [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et lipschitzienne en la seconde variable : $|F(t,y_1) - F(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. Montrer que pour a assez petit, le problème de Cauchy

$$y'(t) = F(t,y(t)), \quad y(0) = y_0$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([0,a],\mathbb{R})$.

Indication : Reformuler en équation intégrale $y(t) = y_0 + \int_0^t F(s,y(s))ds$ et appliquer Banach sur $\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$.

Exercice 9.
Le théorème de Baire (introduction).

Un espace métrique (E,d) est dit de *Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. On admet que tout espace métrique complet est de Baire.

a) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Indication : Si $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, considérer $U_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Thomae définie par $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ avec p, q premiers entre eux et $q > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Indication : Pour $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de rationnels p/q dans $[0,1]$ avec $q < 1/\varepsilon$.

c) En utilisant Baire, montrer qu'il n'existe pas de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$.

Indication : L'ensemble des points de continuité d'une fonction est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts).