Résumé du cours : Topologie Métrique

Gönenç Onay

2025

Ce document propose une balade à travers les concepts fondamentaux des espaces métriques, en s'inspirant du cours, des feuilles de TD et du polycopié de référence.

1 La Notion de Distance

Au cœur de l'analyse se trouve l'idée de "proximité". Un **espace métrique** est une formalisation simple de cette idée. C'est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une **distance** (ou métrique), qui doit satisfaire pour tous $x, y, z \in E$ les axiomes suivants :

1. **Séparation :** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. **Symétrie :** $d(x, y) = d(y, x)$.
3. **Inégalité triangulaire :** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Cette dernière propriété, l'inégalité triangulaire, est cruciale ; elle capture l'intuition que le chemin direct est toujours le plus court.

Exercice : Montrer que $|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in E$.

1.1 Quelques exemples fondamentaux

— **La distance usuelle sur** $\mathbb{R}$ est simplement $d(x, y) = |x - y|$.
— **Sur** $\mathbb{R}^n$, plusieurs distances coexistent. Pour $x = (x_i), y = (y_i)$:
  — $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ (la distance de Manhattan).
  — $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ (la distance euclidienne).
  — $d_\infty(x, y) = \max_{i=1..n} |x_i - y_i|$ (la distance du sup).
  Comme nous le verrons, bien que numériquement différentes, ces distances décrivent la même notion de "proximité" sur $\mathbb{R}^n$ (cf. TD2, elles sont topologiquement équivalentes).
— **Sur l'espace** $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, la **distance de la convergence uniforme** est $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.
— **La distance discrète** sur n'importe quel ensemble E : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon. C'est un cas extrême où tous les points sont "isolés" les uns des autres.

— **La distance SNCF (TD1)** sur $\mathbb{R}^2$ est un exemple plus exotique où la distance entre deux points dépend de leur position par rapport à l'origine (Paris !), illustrant que les métriques peuvent être non triviales.

— **La distance ultramétrique** sur un ensemble E est une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant une inégalité triangulaire renforcée :

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} \quad \text{pour tous } x, y, z \in E.$$

Cette condition est plus forte que l'inégalité triangulaire usuelle (puisque $\max\{a,b\} \leq a+b$), et elle confère aux espaces ultramétriques des propriétés surprenantes. Par exemple, dans un espace ultramétrique, tout point d'une boule ouverte en est un centre (TD3, Exercice 4a), et toute boule ouverte est également fermée (TD3, Exercice 4c) !
L'exemple fondamental est la **distance p-adique** sur $\mathbb{Q}$ (TD3, Exercice 4). Pour un nombre premier p fixé, on définit d'abord la valuation p-adique $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ (le plus grand exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers), puis la norme p-adique $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ pour $x \neq 0$ et $|0|_p = 0$. La distance p-adique est alors $d_p(x,y) = |x-y|_p$. Cette distance capture une notion de "proximité" radicalement différente de la distance usuelle : deux nombres sont p-adiquement proches si la valuation p-adique de leur différence est grande.

1.2 Constructions de nouvelles métriques

Les métriques peuvent être construites de multiples façons. Voici les constructions fondamentales qui permettent d'engendrer de nouveaux espaces métriques à partir de structures existantes.

1.2.1 Distance induite sur un sous-ensemble

Si (E,d) est un espace métrique et $A \subseteq E$, on peut munir A de la **distance induite** (ou la restriction)

$$d|_A : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par $d|_A(x,y) = d(x,y)$ pour $x, y \in A$.

1.2.2 Distance image réciproque

Plus généralement, si $f : A \to E$ est une application **injective** d'un ensemble A vers un espace métrique (E,d), on peut munir A d'une distance définie par :

$$d_f(a,a') := d(f(a), f(a')).$$

Cette distance sur A est appelée la **distance image réciproque** (en anglais : *pullback metric*). Elle "tire en arrière" la métrique de E via f. L'injectivité de f garantit la propriété de séparation : $d_f(a,a') = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'$. Cette construction permet de transférer la structure métrique de l'espace d'arrivée vers l'ensemble de départ.

La distance induite d_A ci-dessus n'est qu'un cas particulier de la distance image réciproque, lorsque A est un sous-ensemble de E et f l'injection canonique ($x \mapsto x$).

1.2.3 Distance produit

Lorsqu'on a deux espaces métriques (E, d) et (F, δ), on peut construire un espace métrique sur le produit cartésien $E \times F$. Une distance naturelle est la **distance produit** (ou distance sup) définie par :

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), \delta(y_1, y_2)\}.$$

Cette construction est fondamentale. Elle permet de comprendre la convergence dans le produit : une suite (u_n, v_n) converge vers (u, v) dans $(E \times F, d_\infty)$ si et seulement si $u_n \to u$ dans (E, d) et $v_n \to v$ dans (F, δ) (cf. TD4, Exercice 5). On peut aussi considérer d'autres distances produit, comme $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + \delta(y_1, y_2)$ ou la distance euclidienne $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + \delta(y_1, y_2)^2}$.

1.2.4 Distance induite par une norme

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Un **espace vectoriel normé** sur $\mathbb{K}$ est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une **norme**, c'est-à-dire une application satisfaisant pour tous $x, y \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Séparation :** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. **Homogénéité :** $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. **Inégalité triangulaire :** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tout espace vectoriel normé devient naturellement un espace métrique avec la **distance induite** $d(x, y) = \|x - y\|$. Cette distance hérite de la structure vectorielle : elle est invariante par translation, i.e. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ pour tout $a \in E$ (cf. TD2).

2 Vocabulaire Topologique : Ouverts, Fermés et Voisinages

La distance nous permet de définir les **boules ouvertes** $B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$ et les **boules fermées** $B_{\mathtt{F}}(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}$ $(r \geq 0)$. Avec notre convention, r peut être nul, auquel cas $B(x, 0) = \emptyset$ et $B_{\mathtt{F}}(x, 0) = \{x\}$.

2.1 Voisinages

Une partie $V \subseteq E$ est un **voisinage** d'un point $x \in E$ s'il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ soit entièrement contenue dans V. On note $\mathcal{V}(x)$ (ou $\mathcal{V}_d(x)$ quand on veut préciser la métrique) l'ensemble de tous les voisinages de x. Les voisinages capturent l'idée de "proximité locale" autour d'un point : un voisinage est une région qui contient x avec "un peu d'espace de manœuvre" autour de lui. Remarquons qu'un voisinage n'est pas nécessairement ouvert ; par exemple, $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$ dans $\mathbb{R}$, bien qu'il ne soit pas ouvert. Notons qu'un voisinage peut être très grand : E elle-même est un voisinage de chacun de ses points.

2.2 Ouverts

Une partie $U \subseteq E$ est dite **ouverte** si chaque point de U est le centre d'une petite boule ouverte non vide entièrement contenue dans U. C'est-à-dire, $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq U$. Les caractérisations suivantes sont équivalentes :

— U est un ouvert ;

— U est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice : Montrer que les boules ouvertes sont elles-mêmes des ouverts.

Propriétés principales des ouverts : L'espace entier, l'ensemble vide, toute union et toute intersection finie d'ouverts sont des ouverts.

2.3 Fermés

Un ensemble F est **fermé** si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert. Toute intersection et toute union finie de fermés sont des fermés. Le cercle unité S^1 dans $\mathbb{R}^2$ est un exemple de fermé (TD3).

Propriétés principales des fermés : L'espace entier, l'ensemble vide, toute union finie de fermés et toute intersection de fermés sont des fermés.

Attention, "ouvert" et "fermé" ne sont pas des contraires. Une partie peut être les deux (dans l'espace discret, toutes les parties le sont) ou aucun des deux (comme $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$). Dans un espace ultramétrique, on peut montrer que les boules ouvertes sont aussi fermées (TD3) !

Exercice : Montrer que les ouverts d'un sous-ensemble A d'un espace métrique (E,d), pour la distance induite, sont exactement les traces sur A des ouverts de l'espace ambiant : $V \subseteq A$ est un ouvert de A si et seulement s'il existe un ouvert U de E tel que $V = U \cap A$. De même pour les fermés ?

2.4 Les opérateurs topologiques

Pour toute partie $A \subseteq E$, on peut définit des régions fondamentales dont 3 décomposent l'espace :

2.4.1 L'intérieur

L'**intérieur** de A, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A. On peut le caractériser de manière équivalente comme l'ensemble des points dont A est un voisinage :

$$\mathring{A} = \{x \in A \mid A \in \mathcal{V}(x)\} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\}.$$

Un ensemble V est un voisinage d'un point x si et seulement si x appartient à l'intérieur de V.

Il s'ensuit que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

2.4.2 L'adhérence

L'**adhérence** (ou la *fermeture*) de A, notée $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. C'est l'ensemble des points "infiniment proches" de A, au sens où toute boule centrée sur l'un d'eux rencontre A :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

2.4.3 L'extérieur

L'**extérieur** de A, noté $\mathrm{ext}(A)$, est l'intérieur du complémentaire : $\mathrm{ext}(A) = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$. C'est l'ensemble des points qui sont "loin" de A, au sens où ils possèdent un voisinage entièrement disjoint de A.

2.4.4 La frontière

La **frontière** de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est définie par $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. C'est l'ensemble des points qui sont à la fois infiniment proches de A et de son complémentaire : ni intérieurs à A, ni extérieurs à A. Ces trois ensembles forment une partition de l'espace tout entier :

$$E = \mathring{A} \sqcup \mathrm{Fr}(A) \sqcup \mathrm{ext}(A).$$

L'exercice du TD3 demandant si $\overline{B(a,r)} = B_{\mathrm{F}}(a,r)$ est instructif. La réponse est non en général. Dans un espace discret, $\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}$, mais $B_{\mathrm{F}}(x,1) = E$.

Exercice : Montrer que cela devient vrai lorsque la distance en question est induite par une norme.

2.4.5 Interlude : Topologie

Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'une collection de parties de E, appelées *ouverts*, contenant E et $\emptyset$, et stable par intersection finie et réunion quelconque. Les opérateurs ci-dessus ont un sens dans ce cadre plus général, sans faire appel à une distance (et donc sans boules). Un espace métrique induit donc une topologie via ses ouverts. Notons que dans un espace métrique, deux points distincts peuvent être **séparés** par des ouverts disjoints : si $x \neq y$, alors il existe U_x, U_y ouverts, tels que $x \in U_x, y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$. Ce n'est pas le cas pour tout espace topologique (cf. les exercices 2 et 6 du quiz).

2.5 Équivalence topologique des métriques

Deux distances d et δ sur un même ensemble E sont dites **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même famille d'ouverts, ou, de façon équivalente, la même famille de voisinages pour chaque point. Pour tout $x \in E$, on a alors $\mathcal{V}_d(x) = \mathcal{V}_\delta(x)$.

En pratique, pour montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, on utilise souvent le critère suivant : pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

$$B_\delta(x, \eta) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B_d(x, \eta') \subseteq B_\delta(x, \varepsilon).$$

Cela signifie que toute boule ouverte pour une distance contient une boule ouverte (centrée au même point) pour l'autre, et vice-versa (cf. TD2, Exercice 3).

Il s'ensuit que d et δ sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles induisent la même **topologie**.

Exemple fondamental : Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2 et d_∞ sont topologiquement équivalentes. On peut le montrer en vérifiant les inclusions de boules. Par exemple, le TD2 (Exercice 4) démontre explicitement que $\mathcal{V}_{d_1}(0) = \mathcal{V}_{d_\infty}(0)$ sur $\mathbb{R}^2$. Par invariance par translation (ces distances provenant de normes), cela s'étend à tout point de $\mathbb{R}^n$.

Cette équivalence a des conséquences profondes : une suite converge pour l'une de ces distances si et seulement si elle converge pour les autres, et la limite est la même (cf. TD4, Exercice 4). Autrement dit, sur $\mathbb{R}^n$, la convergence coordonnée par coordonnée (associée à d_1 ou d_∞) équivaut à la convergence euclidienne (associée à d_2).

3 Suites : Points d'Accumulation et Convergence

Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \to E$. Les **termes** de u sont notés u_n ($\in E$), et la suite elle-même $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Points d'accumulation Un point $a \in E$ est un **point d'accumulation** de la suite (u_n) si la suite "revient" infiniment souvent aussi près que l'on veut de a. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } d(u_n, a) < \varepsilon, \tag{1}$$

ou de manière équivalente : pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des indices $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Convergence

Proposition : Soit (u_n) une suite d'éléments de (E, d) et soit $\ell \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geq N$, la distance entre u_n et ℓ est strictement inférieure à ε. Cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, \ell) < \varepsilon. \tag{2}$$

2. Pour tout réel strictement positif ε, l'ensemble des indices des termes de la suite qui n'appartiennent pas à la boule ouverte de centre ℓ et de rayon ε est un ensemble fini. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin B(\ell, \varepsilon)\}$ est fini. Cela signifie que l'image réciproque par u de toute boule centrée en ℓ est une partie **cofinie** de $\mathbb{N}$ (son complémentaire dans $\mathbb{N}$ est fini).

On dit qu'une suite (u_n) d'un espace métrique (E, d) **converge** vers un élément $\ell \in E$ si l'une des conditions équivalentes énoncées dans la proposition ci-dessus est satisfaite.

L'élément ℓ est alors appelé la **limite** de la suite (u_n). Si une suite converge, sa limite est unique.

Si une suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors ℓ est son unique point d'accumulation.

Il est important de noter que la réciproque n'est pas toujours vraie. Une suite peut posséder un unique point d'accumulation sans pour autant converger. Par exemple, la suite définie dans $\mathbb{R}$ par $u_n = 1/n$ si n est impair et $u_n = n$ si n est pair a 0 comme unique point d'accumulation, mais elle ne converge pas car les termes de rang pair ne sont pas bornés.

3.1 Lien entre suites et topologie

Le lien entre suites et topologie est intime :

- **Caractérisation séquentielle de l'adhérence :** $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x.
- **Caractérisation séquentielle des fermés :** Une partie F est fermée si et seulement si les limites de toutes les suites convergentes d'éléments de F appartiennent à F.

Note : Ce résumé est une référence pour le cours Mat 301 - Topologie Métrique, année académique 2025-26.