Devoir Maison : Espaces Métriques Complets

MAT-301

2025-26 — GSU

On fixe un espace métrique (E,d) sauf mention contraire. Une suite (x_n) est ***de Cauchy*** *si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $m,n \geq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$. L'espace est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy converge.*

I. Suites de Cauchy et caractérisation de la complétude

Exercice 1. *Propriétés élémentaires*

a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
Indication : Utiliser l'inégalité triangulaire avec $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,\ell) + d(\ell,x_n)$.

b) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

c) Soit (x_n) de Cauchy. Montrer que si (x_n) admet une sous-suite convergente vers ℓ, alors $x_n \to \ell$.

d) En déduire qu'une suite de Cauchy a **au plus** une valeur d'adhérence.

Exercice 2. *Contre-exemples fondamentaux*

a) Construire une suite de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ qui ne converge pas.

b) Montrer que $]0,1[$ n'est pas complet.

c) L'application $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un homéomorphisme. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le fait que $\mathbb{R}$ est complet.

Exercice 3. *Caractérisation de Cantor*

On **admet** que $\mathbb{R}$ est complet. Soit (F_n) une suite de fermés non vides avec $F_{n+1} \subseteq F_n$ et $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$.

a) En choisissant $x_n \in F_n$, montrer que (x_n) est de Cauchy.

b) Montrer que $\bigcap_n F_n$ est un singleton.

c) Pourquoi l'hypothèse $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ est-elle essentielle ? Considérer $F_n = [n, +\infty[$.

d) Réciproquement, soit E satisfaisant : "toute suite de fermés emboîtés de diamètre tendant vers 0 a une intersection non vide". Montrer que E est complet.
Indication : Pour une suite de Cauchy (x_n), poser $F_n = \overline{\{x_p : p \geq n\}}$.

II. Interactions avec la topologie

Exercice 4. *Parties complètes et fermés*

a) Montrer : toute partie complète de E est fermée.
Indication : Soit $\xi \in \overline{A}$. Poser $F_n = \overline{B}(\xi, 1/n) \cap A$ et appliquer Cantor.

b) Montrer : si E est complet, toute partie fermée est complète.

c) Conclure : dans un espace complet, A est complète $\Leftrightarrow$ A est fermée.

Exercice 5. *Compacité et complétude*

On **admet** qu'un espace est compact ssi de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

a) Déduire immédiatement : tout compact est complet.

b) Donner un exemple d'espace complet non compact.

c) On dit que E est *totalement borné* si $\forall \varepsilon > 0$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε. Montrer que E est compact $\Leftrightarrow$ E est complet et totalement borné.
Indication pour ($\Leftarrow$) : extraire une sous-suite de Cauchy par diagonalisation.

Exercice 6. *Produit d'espaces complets*

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On munit $E_1 \times E_2$ de $d((x,y),(x',y')) = \max(d_1(x,x'), d_2(y,y'))$.

a) Montrer que $E_1 \times E_2$ est complet ssi E_1 et E_2 le sont.

b) En déduire que $\mathbb{R}^n$ (distance sup) est complet.

III. Applications continues et théorème du point fixe

Exercice 7. *Continuité uniforme et suites de Cauchy*

Soit $f : E \to F$ uniformément continue entre espaces métriques.

a) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

b) L'image d'un espace complet par f est-elle complète ? Justifier.
Indication : Considérer $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 8. *Prolongement des applications uniformément continues*

Soient $A \subseteq E$ dense et $f : A \to F$ uniformément continue, où F est **complet**.

a) Pour $x \in E$, choisir $(a_n) \subseteq A$ avec $a_n \to x$. Montrer que $(f(a_n))$ est de Cauchy.

b) Montrer que la limite $\bar{f}(x) := \lim_n f(a_n)$ ne dépend pas du choix de (a_n).

c) Montrer que $\bar{f} : E \to F$ est uniformément continue et prolonge f.

d) Montrer que $\bar{f}$ est le *seul* prolongement continu de f à E.

e) Pourquoi l'hypothèse "uniformément continue" est-elle nécessaire ? Considérer $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0,1]$.

Exercice 9. *Théorème du point fixe de Banach*

Soit E complet et $f : E \to E$ une *contraction* : $\exists k \in [0,1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x,y)$.

a) Montrer que f a au plus un point fixe.

b) Soit $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer par récurrence :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1).$$

c) En déduire que pour $m < n$: $d(x_m, x_n) \leq \dfrac{k^m}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$.

d) Conclure que (x_n) converge vers un point fixe ξ.

e) **Application :** Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^1 avec $|g'| \leq k < 1$. Montrer que g a un unique point fixe.

f) **Contre-exemple :** Soit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, mais que f n'a pas de point fixe. Où est la faille ?

Exercice 10. *Existence du complété*

Soit (E, d) un espace métrique. On va construire son *complété* $(\hat{E}, \hat{d})$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de E. On définit sur $\mathcal{C}$:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) On pose $\hat{E} = \mathcal{C}/\sim$. Pour $[(x_n)], [(y_n)] \in \hat{E}$, on définit :

$$\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Montrer que cette limite existe et que $\hat{d}$ est bien définie (indépendante des représentants).

c) Montrer que $\hat{d}$ est une distance sur $\hat{E}$.

d) Soit $\iota : E \to \hat{E}$ définie par $\iota(x) = [(x, x, x, \ldots)]$. Montrer que ι est une isométrie.

e) Montrer que $\iota(E)$ est dense dans $\hat{E}$.
Indication : Pour $[(x_n)] \in \hat{E}$, considérer $\iota(x_n)$.

f) Montrer que $\hat{E}$ est complet.
Indication : Soit $(X^{(k)})$ une suite de Cauchy dans $\hat{E}$, avec $X^{(k)} = [(x_n^{(k)})_n]$. Pour chaque k, choisir $a_k \in E$ tel que $\hat{d}(X^{(k)}, \iota(a_k)) < 1/k$. Montrer que (a_k) est de Cauchy dans E.

Bon courage !