TD 4 : Suites dans les espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.

a) La suite $u_n = \frac{1}{1+n}$ est-elle convergente dans $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$?

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit convergente dans (E, d_{disc}).

Exercice 2.

Considérer $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi que de la distance induite. La suite $f_n : x \mapsto x^n$ est-elle convergente ?

Exercice 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la suite $c_n = e^{inx}$ dans $\mathbb{C}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que (c_n) admette un nombre fini de valeurs.

b) On suppose désormais que cette condition n'est pas vérifiée. Écrire un programme Python qui dessine progressivement les valeurs de c_n sur le cercle unité (On va revenir sur cet example prochainement).

Exercice 4.

Soient d et δ deux distances topologiquement équivalentes sur E. Montrer que si (u_n) converge dans (E, d), alors (u_n) converge dans (E, δ) et les deux limites coïncident.

Exercice 5.

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Sur $E \times F$, on considère $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), \delta(y_1, y_2)\}$. Montrer que si (u_n) converge vers u dans (E, d) et (v_n) converge vers v dans (F, δ), alors (u_n, v_n) converge vers (u, v) dans $(E \times F, d_\infty)$.

Exercice 6.

Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la distance p-adique. Montrer que (u_n) est de Cauchy si et seulement si $u_{n+1} - u_n \to 0$.