

Cours - TD 5 : Continuité - Fondements et Structures

Exercice 1.

Soit $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ une application entre deux espaces métriques. Démontrer l'équivalence des cinq assertions suivantes.

- (i) L'application f est continue en tout point de E .
- (ii) Pour toute partie ouverte U de F , son image réciproque $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de E .¹
- (iii) Pour toute partie fermée A de F , son image réciproque $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de E .
- (iv) Pour toute partie A de E , $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 2.

- a) **Composition.** Soient $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ et $g : (F, \delta) \rightarrow (G, \rho)$ deux applications continues. Montrer que l'application composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est continue ; ceci reste vrai si l'on remplace la continuité par la continuité en un point.
- b) **Produit.** Soient (E, d) , (F, δ) et (G, ρ) des espaces métriques. On munit l'espace produit $F \times G$ de la distance $d_\infty((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = \max(\delta(y_1, y_2), \rho(z_1, z_2))$. Soient $\pi_F : F \times G \rightarrow F$ et $\pi_G : F \times G \rightarrow G$ les projections canoniques.
Montrer qu'une application $h : E \rightarrow F \times G$ est continue si et seulement si ses applications composées, $\pi_F \circ h$ et $\pi_G \circ h$, sont continues.

Exercice 3.

Cet exercice formalise l'intuition qu'une suite convergente peut être vue comme une fonction continue sur un domaine topologique adéquat.

Soit $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit X de la distance d_X définie par $d_X(p, q) = |\phi(p) - \phi(q)|$, où $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est l'injection

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d) et soit $\ell \in E$. On considère la suite comme une application $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ et on définit son prolongement $\tilde{u} : (X, d_X) \rightarrow (E, d)$ par :

$$\tilde{u}(n) = \begin{cases} u_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \ell & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

- a) Montrer que (X, d_X) est un espace métrique, décrire les voisinages de ∞ .
- b) **Caractérisation locale.** En déduire l'équivalence suivante :

La suite (u_n) converge vers ℓ dans $(E, d) \iff$ L'application \tilde{u} est continue au point ∞ .

- c) Montrer qu'une fonction $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$, est continue en ℓ si pour toute suite $(u_n)_n$ de E , convergeant vers ℓ , la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(\ell)$.

1. Définition topologique de la continuité.