# TD 1 : Espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

---

**Exercice 1.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence de $\overline{\lim} u_n$.
2. Construire une sous-suite de $(u_n)$ convergent vers $\overline{\lim} u_n$.
3. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

**Exercice 2.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}$ et $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente de limite $\ell$. Montrer que

$$\underline{\lim} u_n \leq \ell \leq \overline{\lim} u_n.$$

**Exercice 3.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}$ de limite $\ell$. Montrer que toute sous-suite de $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Exercice 4.** (Distance SNCF)
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la distance SNCF par :

$$d_{SNCF}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Une boule ouverte -à la SNCF-de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ d_{SNCF}(a,x) < r\}$.

1. Vérifier que $d_{SNCF}$ définit bien une métrique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire géométriquement les boules-SNCF $B((0,0),1)$ et $B((1,1),1)$, comparer avec les boules euclidiennes que vous avez vu en deuxième année.

**Exercice 5.**
Soit $(E,d)$ un espace métrique. Montrer que la fonction $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ définit une métrique sur $E$.

**Exercice 6.**
Soit $(E,d)$ un espace métrique et $A \subseteq E$. Montrer que la fonction distance à $A$ définie par $d_A(x) = \inf_{a\in A} d(x,a)$ vérifie $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ pour tous $x, y \in E$.