TD 1 : Espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la fonction $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ définit une métrique sur E.

Exercice 2.
Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$. Montrer que la fonction distance à A définie par $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ vérifie $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

Exercice 3. (Distance SNCF)
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la distance SNCF par :

$$d_{SNCF}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Rappel : Une boule ouverte -à la SNCF-de centre a et de rayon $r > 0$ est $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ d_{SNCF}(a, x) < r\}$.

1. Vérifier que d_{SNCF} définit bien une métrique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire géométriquement les boules $B((0, 0), 1)$ et $B((1, 1), 1)$.

Exercice 4.
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$.

Exercice 5.
Soit (E, d) un espace métrique et $K \subseteq E$ compact. Montrer que :

1. K est fermé et borné.
2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans K, alors elle admet une sous-suite convergente vers un point de K.

Exercice 6.
Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application entre espaces métriques. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x dans E, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans F.
3. Pour tout ouvert U dans F, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E.