

EXAMEN DE RATRAPAGE
MAT301 - TOPOLOGIE ET ANALYSE

Date : 25.11.2025 Heure : 16:00

Les portables et documents sont interdits.

Exercice 1.

1. Soient A, B deux parties d'un espace métrique (E, d) .
 - (a) On suppose $A \subseteq B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ et que $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.
 - (b) Montrer que $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
 - (c) Montrer que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$.
 - (d) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.
2. Donner un exemple (E, d) et A, B où $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subsetneq (A \cup B)^\circ$

Exercice 2.

Soit $X =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in X$, on note

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

1. Montrer que δ est une distance sur X (on peut justifier et utiliser que $\phi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est injective sur X .)
2. Déterminer $B(1, 1)$ pour cette distance.
3. La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée pour cette distance ? fermée ?
4. Déterminer les boules ouvertes pour cette distance. (Soit $a > 0$ et $r > 0$. Montrer que $B(a, r) = \{x \in X : \delta(a, x) < r\}$ est un intervalle que l'on précisera selon les valeurs de a et r .)

Exercice 3.

Soient A et B deux parties non-vides d'un espace métrique (X, d) . On note $d(x, A) := \inf\{d(x, a) ; a \in A\}$ pour tout $x \in X$ et $d(A, B) := \inf\{d(a, b) ; a \in A, b \in B\}$. On suppose $\alpha = d(A, B) > 0$.

1. Montrer que A et B sont disjoints.
2. On pose $U = \{x \in X : d(x, A) < \alpha/3\}$ et $V = \{x \in X : d(x, B) < \alpha/3\}$.
 - (a) Montrer que U et V sont des ouverts de X .
 - (b) Montrer que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.
 - (c) Montrer que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $(x_k)_k$ de nombres réelles qui possède exactement n points d'accumulations distincts et qui n'est pas convergente.

Barème indicatif :

- Exercice 1 : (1a) 2pts, (1b) 1pt, (1c) 1pt, (1d) 2pts, (2) 2pts
- Exercice 2 : (1) 2pts, (2) 2pt, (3) 2pts, (4) 2pts
- Exercice 3 : (1) 2pt, (2a) 2pts, (2b) 1pt, (2c) 2pts
- Exercice 4 : 3pts

Total : 26 points.