

Devoir Maison : Espaces Métriques Complets

MAT-301

2025-26 GSU

Présentation. Un espace est complet si toute suite de Cauchy converge — *grossierement dit*, si l'espace n'a pas de trous.

Cette propriété est la clé de résultats fondamentaux. Le *théorème du point fixe de Banach* garantit qu'une contraction sur un espace complet possède un unique point fixe : c'est l'outil central pour résoudre des équations et prouver l'existence de solutions. Le *théorème de prolongement* assure qu'une fonction uniformément continue définie sur une partie dense s'étend à l'espace entier, pourvu que l'arrivée soit complète.

La complétude éclaire aussi la compacité : un espace est compact si et seulement s'il est complet et satisfait la propriété des réverbères pour tout rayon. Enfin, tout espace métrique admet un plus petit sur-espace *complète* — on peut toujours boucher les trous de manière canonique.

*On fixe un espace métrique (E, d) sauf mention contraire. Une suite (x_n) est **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. L'espace est **complet** si toute suite de Cauchy converge.*

I. Suites de Cauchy et caractérisation de la complétude

Exercice 1. Propriétés élémentaires

- Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
- Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- Soit (x_n) de Cauchy. Montrer que si (x_n) admet une sous-suite convergente vers ℓ , alors $x_n \rightarrow \ell$.
- En déduire qu'une suite de Cauchy a **au plus** une valeur d'adhérence.

Exercice 2. Contre-exemples fondamentaux

- Construire une suite de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ qui ne converge pas.
- Montrer que $]0, 1[$ n'est pas complet.
- Complétude n'est pas une notion purement topologique !** L'application $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un homéomorphisme. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le fait que \mathbb{R} est complet.

Exercice 3. Caractérisation de Cantor

On **admet** que \mathbb{R} est complet. Soit (F_n) une suite de fermés non vides avec $F_{n+1} \subseteq F_n$ et $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

- En choisissant $x_n \in F_n$, montrer que (x_n) est de Cauchy.
- Montrer que $\bigcap_n F_n$ est un singleton.
- Pourquoi l'hypothèse $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ est-elle essentielle ? Considérer $F_n = [n, +\infty[$.
- Réciproquement, soit E satisfaisant : “toute suite de fermés emboîtés de diamètre tendant vers 0 a une intersection non vide”. Montrer que E est complet.

Indication : Pour une suite de Cauchy (x_n) , poser $F_n = \overline{\{x_p : p \geq n\}}$.

II. Interactions avec la topologie

Exercice 4. Parties complètes et fermées

- a) Montrer : toute partie complète de E est fermée.

Indication : Soit $\xi \in \overline{A}$. Poser $F_n = \overline{B}(\xi, 1/n) \cap A$ et appliquer Cantor.

- b) Montrer : si E est complet, toute partie fermée est complète.

- c) Conclure : dans un espace complet, A est complète $\Leftrightarrow A$ est fermée.

Exercice 5. Compacité et complétude

- a) Déduire immédiatement en utilisant la propriété B-W que tout compact est complet.

- b) Donner un exemple d'espace complet non compact.

- c) On dit que E est *totalement borné* si $\forall \varepsilon > 0$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε . Montrer que E est compact $\Leftrightarrow E$ est complet et totalement borné.

Indication pour (\Leftarrow) : Extraire $(x_n^{(k)})$ confinée dans une boule de rayon $1/k$. Vérifier que suite diagonale $(x_k^{(k)})$ est de Cauchy.

Exercice 6. Produit d'espaces complets

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On munit $E_1 \times E_2$ de $d((x, y), (x', y')) = \max(d_1(x, x'), d_2(y, y'))$.

- a) Montrer que $E_1 \times E_2$ est complet ssi E_1 et E_2 le sont.

- b) En déduire que \mathbb{R}^n (distance sup) est complet.

III. Applications continues et théorème du point fixe

Exercice 7. Continuité uniforme et suites de Cauchy

Soit $f : E \rightarrow F$ uniformément continue entre espaces métriques.

- a) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

- b) L'image d'un espace complet par f est-elle complète ? Justifier.

Indication : Considérer arctan : $\mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Exercice 8. Prolongement des applications uniformément continues

Soient $A \subseteq E$ dense et $f : A \rightarrow F$ uniformément continue, où F est **complet**. On rappelle que f est uniformément continue sur A , si pour tout $\epsilon > 0$, there is $\eta > 0$, tel que pour tout $x, y \in A$, $d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Avant de commencer l'exercice vérifier que f est uniformément continue si et seulement si, pour toute suite $(x_n), (y_n)$ de A , si $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ alors $d(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$.

- a) Pour $x \in E$, choisir a_n , une suite d'élément de A , avec $a_n \rightarrow x$. Montrer que $(f(a_n))$ est de Cauchy.

- b) Montrer que la limite $\bar{f}(x) := \lim_n f(a_n)$ ne dépend pas du choix de (a_n) .

- c) Montrer que $\bar{f} : E \rightarrow F$ est uniformément continue et prolonge f .

- d) Montrer que \bar{f} est le *seul* prolongement continu de f à E .

- e) Pourquoi l'hypothèse “uniformément continue” est-elle nécessaire ? Considérer $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$.

Exercice 9. *Théorème du point fixe de Banach*

Soit E complet et $f : E \rightarrow E$ une *contraction* : $\exists k \in [0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$.

- a) Montrer que f a au plus un point fixe.
 b) Soit $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer par récurrence :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1).$$

- c) En déduire que pour $m < n$: $d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$.
 d) Conclure que (x_n) converge vers un point fixe ξ .
 e) **Application** : Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^1 avec $|g'| \leq k < 1$. Montrer que g a un unique point fixe.
 f) **Contre-exemple** : Soit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur \mathbb{R} . Montrer que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, mais que f n'a pas de point fixe. Où est la faille ?

Exercice 10. *Existence du complété*

Soit (E, d) un espace métrique. On construit un espace complet (\hat{E}, \hat{d}) , le plus petit possible, dans lequel (E, d) se plonge isométriquement. Cet espace est appelé le *complété* de E .

Soit \mathcal{C} l'ensemble des suites de Cauchy de E . On définit sur \mathcal{C} :

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

- a) Montrer que \sim est une relation d'équivalence. On note la classe d'une suite (x_n) comme $[(x_n)]$.
 b) On pose $\hat{E} = \mathcal{C}/\sim$. Pour $[(x_n)], [(y_n)] \in \hat{E}$, on définit :

$$\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Montrer que cette limite existe et que \hat{d} est bien définie (indépendante des représentants).

- c) Montrer que \hat{d} est une distance sur \hat{E} .
 d) Soit $\iota : E \rightarrow \hat{E}$ définie par $\iota(x) = [(x, x, x, \dots)]$. Montrer que ι est une isométrie.
 e) Montrer que $\iota(E)$ est dense dans \hat{E} .

Indication : Pour $[(x_n)] \in \hat{E}$, considérer $\iota(x_n)$.

- f) Montrer que \hat{E} est complet.

Indication : Soit $(X^{(k)})$ une suite de Cauchy dans \hat{E} , avec $X^{(k)} = [(x_n^{(k)})_n]$. Pour chaque k , choisir $a_k \in E$ tel que $\hat{d}(X^{(k)}, \iota(a_k)) < 1/k$. Montrer que (a_k) est de Cauchy dans E .

Bon courage !