TD 3 : Ouverts et fermés dans les espaces métriques

Gönenç Onay

2025-26
GSU - Cours MAT-301

Exercice 1.

On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ où d_2 est la distance euclidienne.

1. Montrer que la boule fermée $B_{\mathtt{F}}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x,0) \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$, le premier quadrant ouvert, montrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, le premier quadrant fermé, montrer que F est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. Montrer que S est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Soit E un ensemble non vide et d la distance discrète sur E.

1. Déterminer la boule ouverte $B(a,r)$ pour $a \in E$ et $r > 0$.
2. En déduire que toute partie de E est à la fois ouverte et fermée pour la topologie induite par la distance discrète.

Exercice 3. Soit (E,d) un espace métrique et $r > 0$. Est-ce que la boule fermée $B_{\mathtt{F}}(a,r)$ est la plus petite partie fermée contenant la boule ouverte $B(a,r)$? Justifier votre réponse.

Exercice 4.

1. **Ultramétrique.** On dit qu'une distance d sur un ensemble E est une *ultramétrique* si pour tous $x, y, z \in E$, on a
$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$
Vérifier qu'une ultramétrique est une métrique :
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

2. **Valuation p-adique.** Soit p un nombre premier. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on définit la *valuation p-adique* $v_p(n)$ comme le plus grand entier $k \geq 0$ tel que p^k divise n. On pose également $v_p(0) = +\infty$.
   a) Calculer $v_2(12)$, $v_3(18)$, et $v_5(100)$.
   b) Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$.
   c) Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $v_p(n+m) \geq \min\{v_p(n), v_p(m)\}$.

3. **Norme p-adique.** Pour tout $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, on peut écrire $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On définit la *valuation p-adique* de x par $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$ et on pose $v_p(0) = +\infty$. On définit alors la *norme p-adique* $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par
$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   a) Calculer $|12|_2$, $|1/3|_3$, et $|10|_5$.
   b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.

c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

d) En déduire que la fonction $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $d_p(x,y) = |x-y|_p$ est une ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

4. **Boules dans les espaces ultramétriques.** Soit (E,d) un espace ultramétrique.

a) Montrer que si $x \in B(a,r)$, alors $B(x,r) = B(a,r)$. Autrement dit, tout point d'une boule ouverte est un centre de cette boule.

b) Montrer que deux boules ouvertes de même rayon sont soit disjointes, soit identiques.

c) En déduire que toute boule ouverte est également une partie fermée de E.

d) Dans l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d_2)$ où d_2 est la distance 2-adique, décrire explicitement les boules $B(0,1)$, $B(0,1/2)$, et $B_{\mathtt{F}}(0,1)$.