Corrigé – Examen de Rattrapage

MAT-301 Topologie Métrique

Exercice 1 – Questions de cours

1.a) $\overline{A} = \{x \in E : \forall\varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing\}$.

(Formes équivalentes : le plus petit fermé contenant A, l'intersection de tous les fermés contenant A, ou $\{\lim x_n : (x_n) \subseteq A$ convergente$\}$.)

1.b) $(\mathbb{Q}, d_{us})$. Exemple : $x_n = (1+1/n)^n$. Cette suite est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (car convergente dans $\mathbb{R}$), mais $\lim x_n = e \notin \mathbb{Q}$.

(Autre classique : développement décimal de $\sqrt{2}$ tronqué à n chiffres.)

1.c) Soit $(x_n) \to \ell$. Pour $\varepsilon > 0$, $\exists N : n \geq N \Rightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon/2$. Donc pour $m, n \geq N$:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \ell) + d(\ell, x_n) < \varepsilon.$$

1.d) Soit $B = B(a,r)$ la boule ouverte. Montrons $\overline{B} = B_{\mathrm{F}}(a,r)$.

Attention : ce résultat est faux dans un espace métrique quelconque ! Il utilise la structure d'espace vectoriel normé.

($\subseteq$) $B_{\mathrm{F}}(x,a)$ est fermé et contient B, donc contient le plus petit fermé contenant B, i.e. $\overline{B} \subseteq B_{\mathrm{F}}(a,r)$. ($\supseteq$) Soit $\|x-a\| \leq r$. Si $x = a$, trivial. Sinon, posons $x_n = a + (1-1/n)(x-a)$ pour $n > 0$. Alors $x_n \in B$ (car $\|x_n - a\| = (1-1/n)\|x-a\| < r$) et $x_n \to x$.

1.e) Soit $x, y \in E$. Pour tout $a \in A$:

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \implies d_A(x) \leq d(x,y) + d_A(y).$$

Par symétrie, $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$. Donc d_A est 1-lipschitzienne, donc continue.

Exercice 2 – Sous-ensembles

2.a) (E, d_{disc}), $A = \{1,2,3\}$.

Tout singleton $\{x\} = B(x, 1/2)$ est ouvert, donc tout sous-ensemble est ouvert et fermé. Ainsi A est **ouvert, fermé, et compact** (fini dans un espace discret).

2.b) $B = \{x+y+z = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

B est un **hyperplan affine** (sous-espace affine de codimension 1).

$B = f^{-1}(\{1\})$ où $f(x,y,z) = x+y+z$ est linéaire continue. Donc B est **fermé**.

B n'est pas borné (contient $(t, 0, 1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), donc **non compact**.

B n'est pas **ouvert** : soit $p = (0,0,1) \in B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le point $p' = (0,0,1+\varepsilon/2)$ vérifie $\|p - p'\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ mais $p' \notin B$. Donc $B(p,\varepsilon) \not\subseteq B$.

2.c) $C = \ker(D) = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) : f' = 0\}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

C est l'ensemble des fonctions constantes.

C est **fermé** : Soit $(f_n) \subseteq C$ avec $f_n \to f$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Chaque $f_n \equiv c_n$ est constante. Alors $\|f_n - f\|_\infty = \sup_t |c_n - f(t)| \to 0$. En particulier, pour tous $s, t \in [0,1]$:

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - c_n| + |c_n - f(t)| \leq 2\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Donc f est constante, i.e. $f \in C$.

C n'est pas **compact** car non borné : pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \equiv n$ est dans C et $\|f_n\|_\infty = n \to +\infty$. C n'est pas **ouvert** : pour $f \equiv c$, la fonction $f_\varepsilon(t) = c + \varepsilon t \notin C$ mais $\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon \to 0$.

Exercice 3 – Connexité

3.a) Dans $\mathbb{R}$, les connexes sont les intervalles. A, B intervalles $\Rightarrow A \cap B$ intervalle (éventuellement vide). Un intervalle est **connexe**.

3.b) Contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \text{cercle unité } S^1, \quad B = \text{droite } \{y = 0\}.$$

A et B sont connexes (connexes par arcs). Mais $A \cap B = \{(-1,0),(1,0)\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x < 0\} \sqcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x < 0\}$ est dans l'union de deux ouverts disjointes, donc **non connexe**. **3.c)** Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ connexe $\Rightarrow E$ est un intervalle. L'intérieur d'un intervalle est un intervalle (possiblement vide), donc **connexe**.

3.d) Contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$:

$$E = B_{\mathtt{F}}((-1,0),1) \cup B_{\mathtt{F}}((1,0),1) \quad \text{(deux disques fermés tangents en l'origine)}$$

E est connexe (les deux disques se touchent en $(0,0)$). Mais :

$$\mathring{E} = B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \quad \text{(deux boules ouvertes disjointes)}$$

qui n'est **pas connexe** (union de deux ouverts non vides disjoints).