**Задание 1**

**Цель:** реализовать и описать метод решения системы линейных алгебраических уравнений методом LU-разложений и методом вращений.

Исходная матрица A:

Вектор b:

***Метод LU-разложений:***

Метод опирается на возможность представления матрицы A системы в форме произведения двух треугольных матриц:

Где *L* – нижняя, а *U* – верхняя треугольные матрицы, имеющие вид

С учетом (1) система *Ax = b* представляется в форме

Решение системы (1.1) сводиться к последовательному решению двух простых систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит из двух этапов.

Прямой ход: решить систему

И найти вектор y, который в свою очередь равен произведению Ux.

Обратный ход: решить систему

И найти решение задачи – вектор x.

Так как матрицы *L* и *U* треугольны, решения обеих систем находятся рекуррентно.

Формулы для определения элементов матриц *L* и *U*:

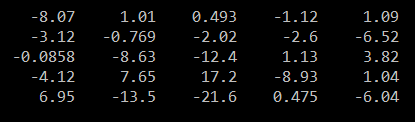
Результат представления матрицы *A* в виде произведения двух треугольных матриц (операция факторизации) удобно хранить в одной матрице следующей структуры:

Кратко алгоритм решения:

1. Выполнить операцию факторизации исходной матрицы и получить матрицы *L* и *U*.
2. Решить систему *Ly = b*.
3. Решить систему *Ux = y*.

***Результат работы реализованного алгоритма:***

Матрица A представленная в виде произведения двух треугольных матриц:



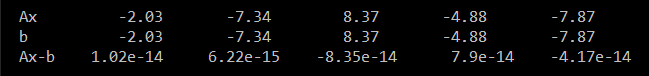
Прямой ход. Найденный вектор y:



Обратный ход. Решение системы – вектор x:



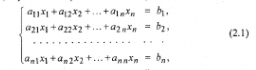
Проверка найденного решения системы с вектором b и отклонение решения:



***Метод вращения:***

Цель прямого хода преобразований в методе вращения – приведение системы к треугольному виду последовательным обнулением поддиагональных элементов сначала первого столбца, затем второго и т.д. Делается это следующим образом.

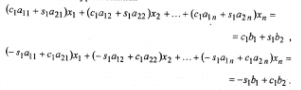
Система имеет вид:



Или иначе, в векторно-матричном уравнении:

Где *b = (b1, b2, … , bn)T* – вектор свободных членов и *x = (x1, x2, … , xn)T* – вектор неизвестных с вещественными координатами, а *A –*– вещественная - матрица коэффициентов данной системы.

Пусть c1 и s1 – некоторые отличные от нуля числа. Умножим первое уравнение системы (2.1) на c1, второе – на s1 и сложим их; полученным уравнением заменим первое уравнение системы. Затем первое уравнение системы умножаем на - s1, второе – на c1 и результатом их сложение заменяем второе уравнение. Таким образом, первые два уравнения системы (2.1) заменяются уравнениями



На введенные два параметра c1 и s1 наложим два условия:

1. Условие обнуления (т.е. исключения x1 из второго уравнения):



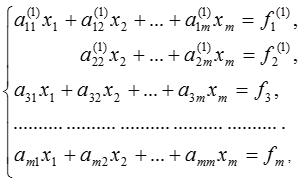
1. Условие нормировки:



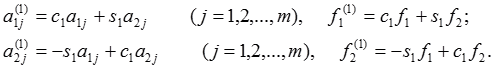
Из условий выше рассчитаем коэффициенты по следующим формулам:



После преобразований система принимает вид (здесь m=n, f ~ b):



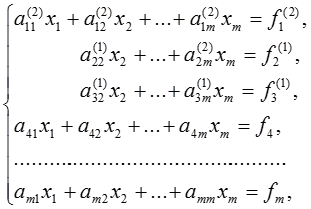
Где



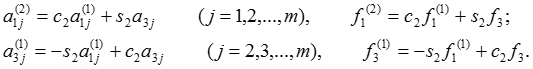
После этого первое уравнение меняем полученным результатом сложения итогов умножения первого и третьего уравнения соответственно на:

Решение систем линейных уравнений. Метод вращения.

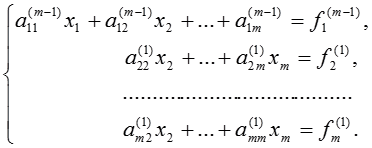
А третье уравнение, полученное после сложения результатов умножения уравнений соответственно на s2 c2. В итоге получаем систему:



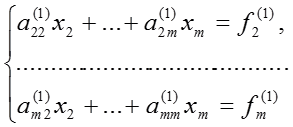
Где



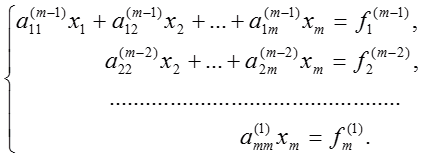
Выполняя преобразование m-1 раз, приходим к системе:



Далее по этому же алгоритму преобразуем подсистему:



В итоге через m-1 этапов прямого хода система приведется к треугольному виду:

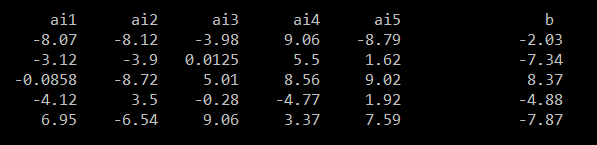


Неизвестные определяются также как и в обратном ходу метода Гаусса.

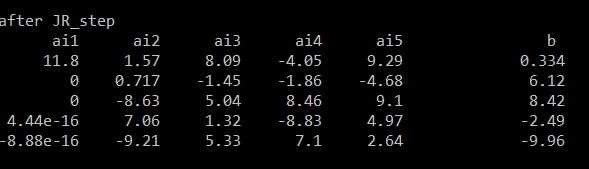
*Обратный ход Гаусса – это обычный метод Гаусса, но только когда движение идет не от первого уравнения к последнему, а от последнего уравнения к первому.*

***Результат работы реализованного алгоритма:***

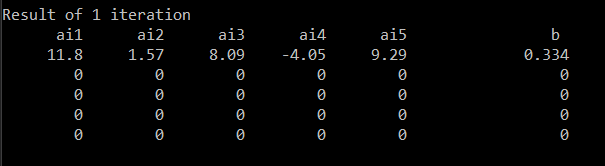
Исходная матрица *A* и вектор *b*:



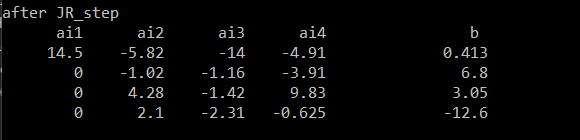
Подсистема имеет следующий вид на первой итерации:



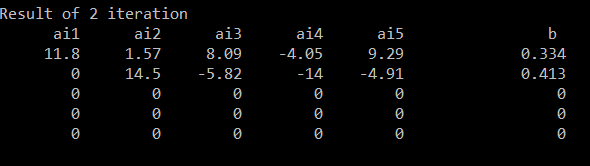
Результат после первой итерации:



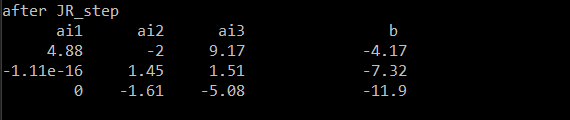
Вид подсистемы на второй итерации:



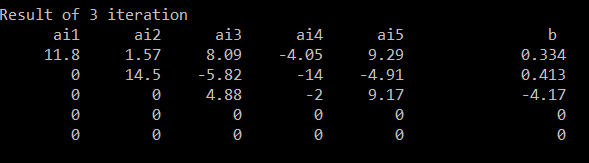
Результат второй итерации:



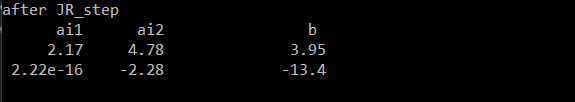
Вид подсистемы на третьей итерации:



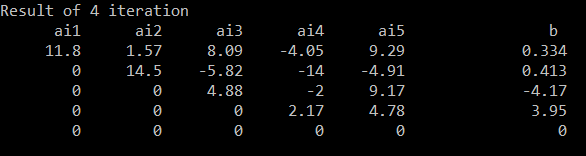
Результат третей итерации:



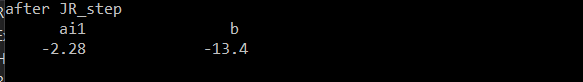
Вид подсистемы на четвертой итерации:



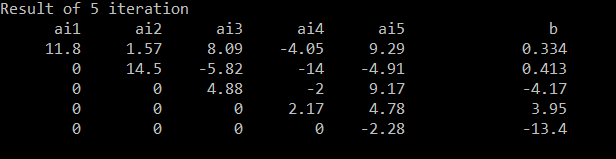
Результат четвертой итерации:



Вид подсистемы на пятой итерации:



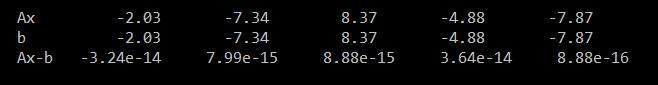
Результат на пятой итерации:



Из данной системы находим x:



И проверяем точность найденного решения:

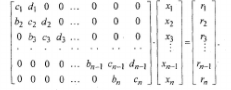


**Задание 2.**

**Цель:** решить трехдиагональную систему методом прогонки. Проверить точность решения.

***Метод прогонки.***

Система имеет трехдиагональную структуру:



Предположим, что существуют такие наборы чисел ,при которых

Уменьшим индекс на единицу и подставим это выражение в уравнение:

Тогда получим следующее уравнение:

Откуда получаем

Так как это выражение имеет вид (3.1) и будет точно с ним совпадать:

В силу условия *b1 = 0:*

В силу *dn = 0,* при *i=n* получим Тогда

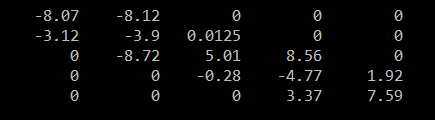
Таким образом, решение данной системы сводиться к следующим формулам:

1. Нахождение прогоночных коэффициентов и (прямая прогонка) по формулам (3.3);
2. Получение неизвестных *xi* по формуле (3.2) (обратная прогонка).

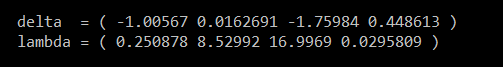
Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникало ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть быстрого роста погрешностей округлений.

***Результат работы реализованного алгоритма:***

Исходная трехдиагональная матрица имеет вид:



Результат прямой прогонки – прогоночные коэффициенты:



Найденное решение системы:



Проверка точности найденного решения:

