во всех внутренних точках области, откуда следует, что в соответствии с доказанной теоремой свое наибольшее значение данная сеточная функция принимает на границе области интегрирования. Однако можно показать, что на границе области интегрирования сеточная функция

$$v_{ml} = \varphi_{ml} - U_{ml}$$

принимает только отрицательные значения, откуда следует, что

$$\varphi_{ml} - U_{ml} \leqslant 0$$

во всех точках области $\widetilde{G} = G \cup \Gamma$.

Если аналогичные рассуждения привести для другой сеточной функции

$$w_{ml} = \varphi_{ml} + U_{ml},$$

то мы получим неравенство

$$\varphi_{ml} + U_{ml} \geqslant 0$$

также во всей области интегрирования.

В результате объединения двух полученных неравенств будем иметь

$$|\varphi_{ml}| \leqslant |U_{ml}| \leqslant \frac{R^2}{4}\,\|f\| + \|F\|, \tag{15.10}$$

т. е. рассматриваемая разностная схема устойчива.

Рассмотрим теперь более практическую и непростую проблему нахождения решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка с матрицей специальной структуры. Основным вопросом является количество арифметических действий, необходимых для решения СЛАУ с заданной точностью, которое обычно оценивается как $O(N^p)$, где N — порядок системы, $p > 0$.

15.2. Итерационные методы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Для численного решения СЛАУ высокого порядка с сильно разреженными матрицами основными методами являются итерационные, в которых по заданному начальному приближению φ^0_{ml} и алгоритму находят первое приближение u^1_{ml}, затем по первому — второе u^2_{ml} и т. д. Итерационный метод является сходящимся, если $u^i_{ml} \underset{i\to\infty}{\to} U_{ml}$ (U_{ml} — проекция точного решения на расчетную сетку), где $i = 0, 1, \ldots$ — номер итерации. Перед реализацией итерационного метода, кроме установления факта сходимости, необходимо оценить скорость сходимости и количество итераций. Скорость сходимости оценивается из неравенства

$$\left\|\varphi_{ml}^{i} - U_{ml}\right\| \leqslant Cq^{i};$$

здесь C — константа, $0 < q < 1$ — параметр, индивидуальный для каждого метода. Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$\left\|\varphi_{ml}^{i+1} - \varphi_{ml}^{i}\right\| \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon \approx Cq^{i}$, откуда следует оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности:

$$i\,(\varepsilon) \approx \ln\,(\varepsilon/C)\,/\ln q.$$

Представим метод простых итераций для численного решения рассматриваемого уравнения в следующем виде:

$$\varphi_{ml}^{i+1} = \begin{cases} \varphi_{ml}^{i} + \tau\left(\Lambda\varphi_{ml}^{i} - f_{ml}\right), & \{x_m, y_l\} \in G_h; \\ F, & \{x_m, y_l\} \in \Gamma_h; \end{cases} \tag{15.11}$$

$$\Lambda\varphi_{ml}^{i} = \frac{\varphi_{m-1,l}^{i} - 2\varphi_{m,l}^{i} + \varphi_{m+1,l}^{i}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{m,l-1}^{i} - 2\varphi_{m,l}^{i} + \varphi_{m,l+1}^{i}}{h_y^2}.$$

Если из (15.11) вычесть очевидное тождество

$$\varphi = \varphi + \tau\,(\Lambda\varphi - f)$$

во внутренних точках, а из равенства $\varphi_{ml}^{i+1} = \varphi_{ml}^{i}$ — тождество $\varphi_{ml} = \varphi_{ml}$ в граничных, то для невязки ξ_{ml}^{i+1} получим уравнение

$$\xi_{ml}^{i+1} = \begin{cases} \xi_{ml}^{i} + \tau\Lambda\xi_{ml}^{i}, & \{x_m, y_l\} \in G; \\ 0, & \{x_m, y_l\} \in \Gamma, \end{cases} \tag{15.12}$$

которое может быть переписано в виде

$$\xi_{ml}^{i+1} = (E + \tau\Lambda)\,\xi_{ml}^{i}. \tag{15.13}$$

Далее переходим к неравенству в нормах:

$$\left\|\xi_{ml}^{i+1}\right\| \leqslant \|E + \tau\Lambda\| \cdot \left\|\xi_{ml}^{i}\right\|, \tag{15.14}$$

или

$$\left\|\xi_{ml}^{i}\right\| \leqslant \|E + \tau\Lambda\| \cdot \left\|\xi_{ml}^{0}\right\|.$$

Теорема 15.2. *Пусть* $\lambda_{\min}$ *и* $\lambda_{\max}$ — *соответственно минимальное и максимальное собственные числа (границы спектра) оператора* $\Lambda = \Lambda^* > 0$ *в итерационном процессе*

$$\varphi_{ml}^{i+1} = \varphi_{ml}^{i} + \tau\left(\Lambda\varphi_{ml}^{i} - f_{ml}\right),$$

построенном для решения уравнения в частных производных эллиптического типа:

$$\Delta\varphi = f\,(x, y). \tag{15.15}$$

Тогда последовательность $\{\varphi_i\}$ *сходится к точному решению* (15.15), *если* $0 < \tau < 2/\lambda_{\max}$.

При этом выполняется

$$\left\|\varphi^i\right\| \leqslant q^i \left\|\varphi^0\right\|,$$

где $q = \max\{|1-\tau\lambda_{\min}|, |1-\tau\lambda_{\max}|\}$ — *параметр, принимающий наименьшее значение, равное*

$$q_{\min} = \left(1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)\Big/\left(1 + \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)$$

при

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}. \tag{15.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственной подстановкой в известное равенство

$$\Lambda_{xx}\omega_m^{(p)} = -\lambda^{(p)}\omega_m^{(p)}$$

показывается, что числа

$$\lambda^{(p)} = \frac{4}{h^2}\sin\left(\frac{p\pi}{2M}\right),$$

где $p = 1, \ldots, M-1$ — номер собственного значения, m — номер сеточного узла, являются собственными функциями оператора Λ_{xx}; $\omega_m^{(p)}$ — соответствующие им собственные функции:

$$h^{-2}\left[\sin\left(\frac{m-1}{M}p\pi\right) - 2\sin\left(\frac{mp\pi}{M}\right) + \sin\left(\frac{m+1}{M}p\pi\right)\right] = \\ = -\left[4h^{-2}\sin^2\left(\frac{p\pi}{M}\right)\cdot\sin\left(\frac{mp\pi}{M}\right)\right].$$

Аналогично показывается, что функции

$$\Omega_{ml}^{(pq)} = \omega_m^{(p)}\omega_l^{(q)}$$

являются собственными функциями оператора $\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}$, а соответствующими собственными значениями — величины

$$\lambda^{(pq)} = \lambda^{(p)} + \lambda^{(q)} = 4h^{-2}\left[\sin^2\left(\frac{p\pi}{2M}\right) + \sin^2\left(\frac{q\pi}{2M}\right)\right].$$

Несложно определить границы спектра собственных значений оператора Λ_{xx}:

$$\lambda_{\min} = \lambda^{(1)} = 4h^{-2}\sin^2\frac{\pi}{2M} \approx \pi^2,$$

поскольку $h = M^{-1}$, $M \gg 1$;

$$\lambda_{\max} = \lambda^{(M-1)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(M-1)\pi}{2M} \approx \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2} = 4h^{-2} = 4M^2.$$

Соответственно, границами спектра оператора Λ будут значения:

$$\lambda_{\min} \approx 2\pi^2; \quad \lambda_{\max} \approx 8h^{-2} = 8M^2.$$

Число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих исходное уравнение в частных производных, вычисляется как отношение

$$\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = (2M/\pi)^2\,,$$

т. е. система плохо обусловлена, поскольку $M^2 \gg 1$.

Функция ξ_{ml}, равная нулю на границах, может быть представлена в виде фурье-разложения по базису из собственных функций $\Omega_{ml}^{(pq)}$ оператора Λ:

$$\xi_{ml}^0 = \sum_{pq} c_{pq}\Omega_{ml}^{(pq)}, \quad c_{pq} = \left(\xi_{ml}^0, \Omega_{ml}^{(pq)}\right),$$

причем

$$\left\|\xi_{ml}^0\right\| = \left(r^0, r^0\right) = \sqrt{\sum_{pq} c_{pq}^2} = \|c\|$$

— равенство Парсеваля.

Теперь можно провести анализ сходимости итерационного процесса:

$$\xi_{ml}^1 = (E + \tau\Lambda)\,\xi_{ml}^0 = (E + \tau\Lambda)\sum_{pq} c_{pq}\Omega_{ml}^{(pq)} =$$
$$= \sum_{pq} c_{pq}\,(E + \tau\Lambda)\,\Omega_{ml}^{(pq)} = \sum_{pq} c_{pq}\left(1 - \tau\lambda^{(pq)}\right)\Omega_{ml}^{(pq)}. \quad (15.17)$$

Последнее равенство объясняется тем, что значения $\left(1 - \tau\lambda^{(pq)}\right)$ являются собственными числами оператора $E + \tau\Lambda$, что следует из сложения равенств:

$$\tau\Lambda\omega_m^{(p)} = -\tau\lambda\omega_m^{(p)}, \quad E\omega_m^{(p)} = \omega_m^{(p)},$$

откуда имеем

$$(E + \tau\Lambda)\,\omega_m^{(p)} = (1 - \tau\lambda)\,\omega_m^{(p)}$$

(для $\Omega_{ml}^{(pq)}$ последнее равенство доказывается аналогично).

Далее можно получить оценку невязки ξ^1_{ml} по норме:

$$\left\|\xi^1_{ml}\right\| = \sqrt{\sum_{pq} c^2_{pq}\,(1-\tau\lambda)^2} \leqslant \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]}\left|1-\tau\lambda^{(pq)}\right|\sqrt{\sum_{pq} c^2_{pq}} =$$

$$= \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]}\left|1-\tau\lambda^{(pq)}\right| \cdot \left\|\xi^0_{ml}\right\| = q(\tau)\cdot\left\|\xi^0_{ml}\right\|,$$

где $q\,(\tau) = \max\limits_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]}\left|1-\tau\lambda^{(pq)}\right|$.

Аналогичным путем получим оценку для нормы невязки на i-й итерации:

$$\left\|\xi^i_{ml}\right\| \leqslant q^i\,(\tau)\left\|\xi^0_{ml}\right\|. \tag{15.18}$$

Из последнего неравенства видно, что

$$q\,(\tau) = \max\left\{|1-\tau\lambda_{\min}|, |1-\tau\lambda_{\max}|\right\},$$

причем итерационный процесс сходится при $0 < q < 1$, т. е. при выполнении условия

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \tag{15.19}$$

которое и требовалось доказать.

Будем выбирать итерационный параметр таким образом, чтобы скорость сходимости итерационного процесса была максимальной. При этом мы приходим к типичной «минимаксной» задаче: найти

$$\min_\tau\left\{\max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]}|1-\tau\lambda|\right\}.$$

Поскольку внутренний максимум

$$\max|1-\tau\lambda|$$

достигается либо на одной из границ спектра λ (левой $\lambda_{\min}$ или правой $\lambda_{\max}$), то нам необходимо найти минимум

$$\min_\tau\left\{\max|1-\tau\lambda_{\min}|, \max|1-\tau\lambda_{\max}|\right\};$$

который достигается при некотором оптимальном значении $\tau_{\text{опт}}$ параметра τ:

$$\tau_{\text{опт}} = \arg\min_\tau\left\{\max\left(|1-\tau\lambda_{\min}|, |1-\tau\lambda_{\max}|\right)\right\}. \tag{15.20}$$

Как видно на графиках двух функций (рис. 15.1):

$$|1-\tau\lambda_{\min}|, \quad |1-\tau\lambda_{\max}|,$$

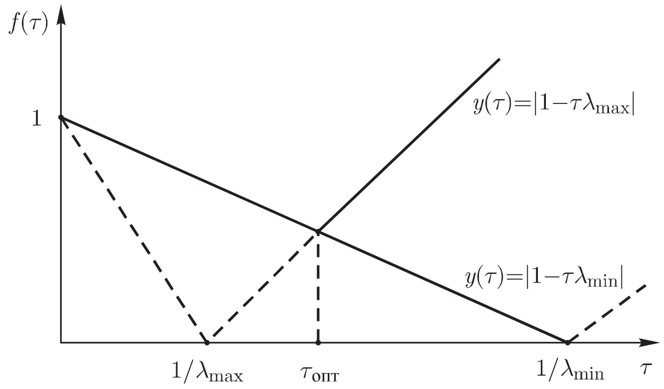

Рис. 15.1

оптимальное значение итерационного параметра $\tau_{\text{опт}}$, при котором достигается минимум в нашей минимаксной задаче, находится из очевидного уравнения (точка пересечения двух графиков)

$$|1-\tau\lambda_{\min}| = |1-\tau\lambda_{\max}|,$$

или

$$1-\tau\lambda_{\min} = -(1-\tau\lambda_{\max}),$$

откуда получим

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}. \tag{15.21}$$

Теперь мы сможем оценить скорость сходимости итераций:

$$q_{\text{опт}} = 1-\tau_{\text{опт}}\lambda_{\min} = 1-\frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}} =$$
$$= \frac{1-\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}}{1+\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}} = \frac{1-\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}-2\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}}{1+\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}} \approx 1-2\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1}. \tag{15.22}$$

Теорема доказана.

Заметим, что теперь можно оценить количество итераций, соответствующее полученному итерационному процессу (ε — заданная точность):

$$I = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln q(\tau)}\right]+1 = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-2\lambda_{\min}/\lambda_{\max})}\right]+1 \approx$$
$$\approx \left[\frac{\ln\varepsilon}{-2\lambda_{\min}/\lambda_{\max}}\right]+1 \approx \left[\frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}}\ln\left(\varepsilon^{-1}\right)\right]+1.$$

Если вычисления проводятся на расчетной сетке $10^2 \times 10^2$ при $\varepsilon = 10^{-5}$ ($\lambda_{\min} = 2\pi^2$, $\lambda_{\max} = 8M^2$), то

$$I = \frac{8M^2}{2 \cdot 2\pi^2} \cdot \ln 10^5 \approx 2 \cdot 10^4; \tag{15.23}$$

при этом

$$q_{\text{опт}} \approx 1 - 2\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)^{-1} \approx 0{,}9995.$$

Напомним, что

$$\mu = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$$

— это число обусловленности, являющееся важной характеристикой матрицы рассматриваемой системы линейных алгебраических уравнений.

Чем больше это число, тем больше требуется вычислений для достижения приемлемой точности. В нашем случае количество итераций $\sim 10^4$ арифметических операций, однако цена каждой итерации приблизительно $10M^2$ арифметических операций, т. е. необходимо количество операций $\sim 10^9$, так что данный метод требует значительных затрат машинного времени. По этой причине были затрачены большие усилия для разработки итерационных методов, существенно уменьшивших количество арифметических операций. Приведенный же метод тем не менее имеет большой методический смысл, необходимый для понимания современных итерационных методов.

Рассмотрим другой итерационный процесс, использующий важное свойство полинома П. Л. Чебышёва (чебышёвское ускорение, итерационный метод с чебышёвскими параметрами).

В предыдущем процессе для погрешности было получено следующее выражение:

$$\xi^i_{ml} = \sum c_{pq}\left(1 - \tau_{\text{опт}}\lambda^{(pq)}\right)^i \omega^{(pq)}_{ml},$$

из которого видно, что ослабление фурье-компонент проходит неравномерно: в «средней» части спектра ($\lambda \approx \lambda_{\max}/2$) заметно быстрее, чем на краях. Логично было бы выбирать итерационные параметры так, чтобы убывание невязки было более равномерным по всем значениям спектра в фурье-разложении. Такой результат может быть достигнут выбором своего итерационного параметра на каждой итерации:

$$\varphi^{i+1} = \varphi^i + \tau_{i+1}\left(\Lambda\varphi^i - f\right). \tag{15.24}$$

В этом случае выражение для погрешности будет иметь следующий вид:

$$\xi^{i+1}_{ml} = (E + \tau_{i+1}\Lambda)\,\xi^i_{ml}, \tag{15.25}$$

причем
$$\xi^i_{ml} = \prod_{j=1}^{i} (E + \tau_j \Lambda)\, r^0_{ml}. \tag{15.26}$$

После фурье-разложения ξ^i_{ml} по базису из собственных функций $\Omega^{(pq)}_{ml}$ из (15.17) получим:
$$\sum_{pq} c^{i+1}_{pq} \Omega^{(pq)}_{ml} = \sum_{pq} c^i_{pq} (E + \tau_{i+1}\Lambda)\, \Omega^{(pq)}_{ml} = \\ = \sum c^i_{pq} (1 - \tau_{i+1})\, \lambda^{(pq)} \Omega^{(pq)}_{ml},$$
т. е. коэффициенты фурье-разложения на i-й и $(i+1)$-й итерациях связаны соотношением
$$c^{i+1}_{pq} = c^i_{pq} \left(1 - \tau_{i+1} \lambda^{(pq)}\right),$$
из которого получим
$$c^i_{pq} = \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \tau_i \lambda^{(pq)}\right) c^0_{pq}.$$
В таком случае выражение для невязки будет иметь вид
$$\xi^i_{ml} = \sum_{pq} c^i_{pq} \Omega^{(pq)}_{ml} = \sum_{pq} c^0_{pq} \prod_j \left(1 - \tau_j \lambda^{(pq)}\right) \Omega^{(pq)}_{ml}. \tag{15.27}$$

Далее оценим величину невязки на i-й итерации по норме:
$$\left\|\xi^i_{ml}\right\| = \max_{[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left| \prod_{j=1}^{i} (1 - \tau_j \lambda) \right| \cdot \left\| \sum c^0_{pq} \cdot \Omega_{ml} \right\| \leqslant \\ \leqslant \max_{[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left| \prod_{j=1}^{i} (1 - \tau_j \lambda) \right| \cdot \left\|\xi^0_{ml}\right\|.$$
Желая построить наиболее эффективный, в смысле скорости сходимости, итерационный процесс, мы вновь приходим к минимаксной задаче: определить последовательность итерационных параметров τ_k $(k = 1, \ldots, i)$ такую, что будет достигнут минимум:
$$\min_{\{\tau_k\}} \max_{[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left| \prod_{k=1}^{i} (1 - \tau_k \lambda) \right|.$$
Поскольку выражение
$$\prod_{k=1}^{i} (1 - \tau_k \lambda)$$

представляет собой полином степени i относительно τ, то мы пришли к классической задаче о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля на интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Этот полином, как хорошо известно, есть полином Чебышёва, а итерационные параметры τ_k^i являются величинами, обратными значениям корней этого полинома:

$$\tau_k^i = \left[\frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2} + \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2i}\pi\right)\right]^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, i. \tag{15.28}$$

Опуская промежуточные выкладки, дадим оценку скорости сходимости этого метода:

$$q \approx 1 - 2\sqrt{(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{-1}} = 1 - 2\sqrt{\mu^{-1}};$$
$$I \approx \left[\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\,\ln\varepsilon^{-1}\right] + 1.$$

Для задачи с теми же параметрами, которые приводились в случае метода с одним оптимальным итерационным параметром $\tau_{\text{опт}}$ ($M = 100$, $\varepsilon = 10^{-5}$), получим:

$$q \approx 0{,}968, \quad i \approx 360,$$

т. е. чебышёвский метод позволяет сократить количество арифметических операций на два порядка по сравнению с предыдущим методом. Однако попытки применения рассмотренного метода привели к парадоксальному результату — быстрому росту решения задачи в ходе итерационного процесса. Причина оказалась в быстром росте ошибок округления и сгущением величин, обратных корням полинома Чебышёва ($1/\tau_k$), вблизи границ спектра. Оказалось, что это явление можно устранить, если изменить порядок чередования итерационных параметров определенным образом [4]: так, чтобы при любом i частные произведения

$$\prod_{k=1}^{i} (1 - \tau_k \lambda)$$

не возрастали вблизи границ спектра.

Например, для $i = 4$ получим следующее чередование чебышёвских параметров:

$$\{1, 4, 2, 3\},$$

для $i = 8$:

$$\{1, 8, 4, 5, 2, 7, 3, 6\}$$

и т. д.

Такие итерационные процессы оказываются устойчивыми и существенно быстрее сходящимися: так, в случае $\lambda_{\max} = 8M^2$, $\lambda_{\min} = 2\pi^2$, $M = 100$ за M итераций погрешность убывает в 20 раз, а в случае одного параметра она умножается только на 0,95.

Указанного недостатка лишен трехэтапный метод Чебышёва, который можно представить в следующем виде:

$$\varphi_{ml}^1 = (E - \tau A)\,\varphi_{ml}^0 + \tau f_{ml},$$
$$\varphi_{ml}^{i+2} = \frac{2\alpha_1\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\,(E - \tau A)\,\varphi^{i+1} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\varphi^i + \frac{2\alpha_1\alpha_i}{\alpha_{i+1}}f, \quad i = 1, 2, \ldots;$$

здесь:

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \quad \alpha_{i+2} = 2\alpha_1\alpha_{i+1} - \alpha_i.$$

Заметим, что двухслойный итерационный метод может быть записан в канонической форме

$$B\frac{\varphi^{i+1} - \varphi^i}{\tau_{i+1}} + A\varphi^i = f.$$

При $B = E$ такой метод называется *явным*, в противном случае — *неявным*.

Каноническая форма трехэтапного итерационного метода имеет вид

$$B\frac{\widetilde{\varphi} - \varphi^i}{\tau_{i+1}} + A\varphi^i = f,$$
$$\varphi^{i+1} = \alpha_{i+1}\widetilde{\varphi} + (1 - \alpha_{i+1})\,\varphi^{i-1}.$$

При $\alpha_i = 1$ трехслойная схема переходит в двухслойную. В рассмотренных методах полагалось:

$$A = A^* > 0, \quad 0 < \lambda_{\min} < \lambda_i < \lambda_{\max}.$$

Важным моментом в приведенных процессах является то, что для их реализации необходимо только знание границ спектра.

Добиться более высокого ускорения итерационного процесса для численного решения уравнения Пуассона оказалось возможным, если применить метод установления. Для этого рассматривается нестационарное уравнение

$$\varphi_t' = \Delta\varphi - f \tag{15.29}$$

со стационарными граничными условиями. В этом случае при $t \to \infty$ решение такого уравнения будет стремиться к решению стационарного уравнения. Для решения (15.29) воспользуемся методом переменных направлений:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_{ml}^{i+1/2} - \varphi_{ml}^{i}}{\tau} = \Lambda_{xx}\varphi_{ml}^{i+1/2} + \Lambda_{yy}\varphi_{ml}^{i} - f_{ml}, \\ \dfrac{\varphi_{ml}^{i+1} - \varphi_{ml}^{i}}{\tau} = \Lambda_{xx}\varphi_{ml}^{i+1/2} + \Lambda_{yy}\varphi_{ml}^{i+1} - f_{ml}. \end{cases} \tag{15.30}$$

Вычитая их этих уравнений очевидное тождество

$$\frac{\varphi_{ml} - \varphi_{ml}}{\tau} = \Lambda_{xx}\varphi_{ml} + \Lambda_{yy}\varphi_{ml} - f,$$

получим уравнения для погрешности:

$$\begin{cases} \dfrac{\xi_{ml}^{i+1/2} - \xi_{ml}^{i}}{\tau} = \Lambda_{xx}\xi_{ml}^{i+1/2} + \Lambda_{yy}\xi_{ml}^{i}, & (15.31а) \\ \dfrac{\xi_{ml}^{i+1} - \xi_{ml}^{i+1/2}}{\tau} = \Lambda_{xx}\xi_{ml}^{i+1/2} + \Lambda_{yy}\xi_{ml}^{i+1}. & (15.31б) \end{cases}$$

Далее представим ξ_{ml}^{i} и $\xi_{ml}^{i+1/2}$ в виде фурье-разложения, как и выше:

$$\xi_{ml}^{i} = \sum_{pq} c_{pq}^{i}\Omega_{ml}^{(pq)}; \quad \xi_{ml}^{i+1/2} = \sum_{pq} c_{pq}^{i+1/2}\Omega_{ml}^{(pq)}. \tag{15.32}$$

Из (15.31а) получим

$$(E - \tau\Lambda_{xx})\,\xi_{ml}^{i+1/2} = (E + \tau\Lambda_{yy})\,\xi_{ml}^{i}, \tag{15.33}$$

или, с учетом (15.32),

$$(E - \tau\Lambda_{xx})\sum_{pq} c_{pq}^{i+1/2}\Omega_{ml}^{(pq)} = (E + \tau\Lambda_{yy})\sum_{pq} c_{pq}^{i}\Omega_{ml}^{(pq)}.$$

После введения операторов под знаки сумм будем иметь

$$\sum_{pq} c_{pq}^{i+1/2}\left(1 + \tau\lambda^{(p)}\right)\Omega^{(pq)} = \sum_{pq} c_{pq}^{i}\left(1 - \tau\lambda^{(q)}\right)\Omega^{(pq)}, \tag{15.34}$$

где $\lambda^{(p)}$, $\lambda^{(q)}$ — собственные значения операторов Λ_{xx} и Λ_{yy} соответственно. Из последнего равенства вытекает

$$c_{pq}^{i+1/2} = \frac{1 - \tau\lambda^{(q)}}{1 + \tau\lambda^{(q)}}\, c_{pq}^{i}. \tag{15.35}$$

После фурье-разложения на втором этапе итерационного процесса получим

$$c_{pq}^{i+1} = \frac{1 - \tau\lambda^{(q)}}{1 + \tau\lambda^{(q)}}\, c_{pq}^{i+1/2} = \frac{1 - \tau\lambda^{(q)}}{1 + \tau\lambda^{(q)}} \cdot \frac{1 - \tau\lambda^{(q)}}{1 + \tau\lambda^{(q)}}\, c_{pq}^{i+1}. \tag{15.36}$$

После введения обозначения

$$v(\tau) = \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} \frac{|1-\tau\lambda|}{|1+\tau\lambda|} \tag{15.37}$$

получим неравенство

$$\left|c_{pq}^{i+1}\right| \leqslant \nu^2 \left|c_{pq}^{i}\right|. \tag{15.38}$$

В таком случае для нормы погрешности ξ^{i+1} имеем

$$\left\|\xi^{i+1}\right\| \leqslant \mu^2 \cdot \left\|\xi^{i}\right\|, \tag{15.39}$$

так как

$$\left\|\xi^{i+1}\right\| = \left\|\sum_{pq} c_{pq}^{i+1}\Omega^{(pq)}\right\| \leqslant \left\|\sum_{pq} v^2 \cdot c_{pq}^{i+1}\cdot\Omega^{(pq)}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \mu^2 \left\|\sum_{pq} c_{pq}^{i+1}\Omega^{(pq)}\right\| = \mu^2 \left\|\xi^{i}\right\|.$$

Для того чтобы найти оптимальное значение итерационного параметра τ, доставляющего

$$\min_{\tau} v(\tau),$$

нужно решить знакомую нам минимаксную задачу:

$$\tau = \arg\left\{\min_{\tau} \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} \left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|\right\},$$

для которой, как можно увидеть из анализа графика функции $\left|\dfrac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|$, выполняется

$$\max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} \left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right| = \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} \left\{\left|\frac{1-\tau\lambda_{\min}}{1+\tau\lambda_{\min}}\right|, \left|\frac{1-\tau\lambda_{\max}}{1-\tau\lambda_{\max}}\right|\right\}.$$

Минимум достигается при выполнении равенства

$$\frac{1-\tau_{\text{опт}}\lambda_{\min}}{1+\tau_{\text{опт}}\lambda_{\min}} = -\frac{1-\tau_{\text{опт}}\lambda_{\max}}{1+\tau_{\text{опт}}\lambda_{\max}},$$

т. е. при

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\cdot\lambda_{\max}}}.$$

Количество итераций в вышеприведенном примере, требуемое для достижения заданной точности ε, есть

$$i \approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\,\ln\varepsilon^{-1} = \frac{1}{4}\sqrt{\mu}\,\ln\varepsilon^{-1}.$$

Обобщением приведенного итерационного метода является введение набора чебышёвских параметров τ_i, что приводит к минимаксной задаче:

$$\min_{\{\tau_i\}} \max_{[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} \prod_{k=1}^{i} \left|\frac{1-\tau_i\lambda}{1+\tau_i\lambda}\right|^2.$$

Оценка количества итераций в этом случае дает

$$i \approx \left[(\ln\mu)\cdot\varepsilon^{-1}\right] + 1.$$

Приведем данные по количеству итераций для различных методов.

1. Метод Якоби: $2M^2/\pi^2$.
2. Метод простых итераций с оптимальным параметром: $2M^2/\pi^2$.
3. Метод Зейделя: M^2/π^2.
4. Метод верхней релаксации: $2M/\pi$.
5. Метод итераций с чебышёвскими итерационными параметрами: M/π.
6. Метод переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами: $(1/2)(M/\pi)$.
7. Метод переменных направлений с чебышёвскими итерационными параметрами: $\dfrac{2}{\alpha}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}M\right)$, $\alpha \approx 3{,}2$.

Список литературы

1. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Интеллект, 2008. 503 с.
2. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 288 с.
3. *Петров И.Б.*, *Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 522 с.

Дополнительная литература

4. *Самарский А.А.*, *Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
5. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1983. 656 с.