Параллельные алгоритмы 20250304_06

Параллельные алгоритмы сортировки данных

Якобовский Михаил Владимирович

Расположить в порядке неубывания *N* элементов массива чисел, используя *p* процессоров

К вопросу о

- Наилучшем последовательном алгоритме
- Медленном последовательном алгоритме
- Высокой степени внутреннего параллелизма

Две задачи сортировки массива чисел

A. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***достаточен*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

B. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***мал*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

Задача А

- Расположить N элементов массива *a* таким образом, чтобы для любого

$$i = 0, \ldots, N-2$$

выполнялось неравенство

$$a_i \le a_{i+1}$$

Задача B

- Пусть массив можно разместить на *p* процессорах.
- Пусть на процессоре с номером *rank* размещено n^{rank} элементов массива a^{rank}.

$$N = \sum_{rank=0}^{rank<p} n^{rank}$$

- Расположить N элементов массивов a^{rank} таким образом, чтобы:
  - для любых $rank = 0,\ldots,(p-1)$ и $i = 0,\ldots,(n^{rank} - 2)$ выполнялось неравенство $a_i^{rank} \le a_{i+1}^{rank}$
  - для любого $rank = 0,\ldots,(p-2)$
  - выполнялось неравенство $a_{n^{rank}-1}^{rank} \le a_0^{rank+1}$

Задача B

- Части массива хранятся на нескольких процессорах
  - Каждая часть массива должна быть упорядочена
  - На процессорах с б**о**льшими номерами должны быть размещены элементы массива с б**о**льшими значениями

- Правильно $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,6,7,7 \rangle \quad \langle 8,8,9 \rangle$
- Ошибка $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,7,6,7 \rangle \quad \langle 8,8,9 \rangle$
- Ошибка $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,6,7,8 \rangle \quad \langle 7,8,9 \rangle$

$$N = 11$$
$$p = 3$$

Задача B

- Будем рассматривать только процесс упорядочивания элементов:
  – Перед началом сортировки на каждом из процессоров уже есть часть элементов массива
  – После окончания сортировки на каждом из процессоров должно остаться столько элементов, сколько их было в начале (но, это уже могут быть другие элементы, расположенные ранее на других процессорах)

Предлагаемая стратегия: Этапы сортировки

– Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров

– Перераспределение элементов массива между процессорами

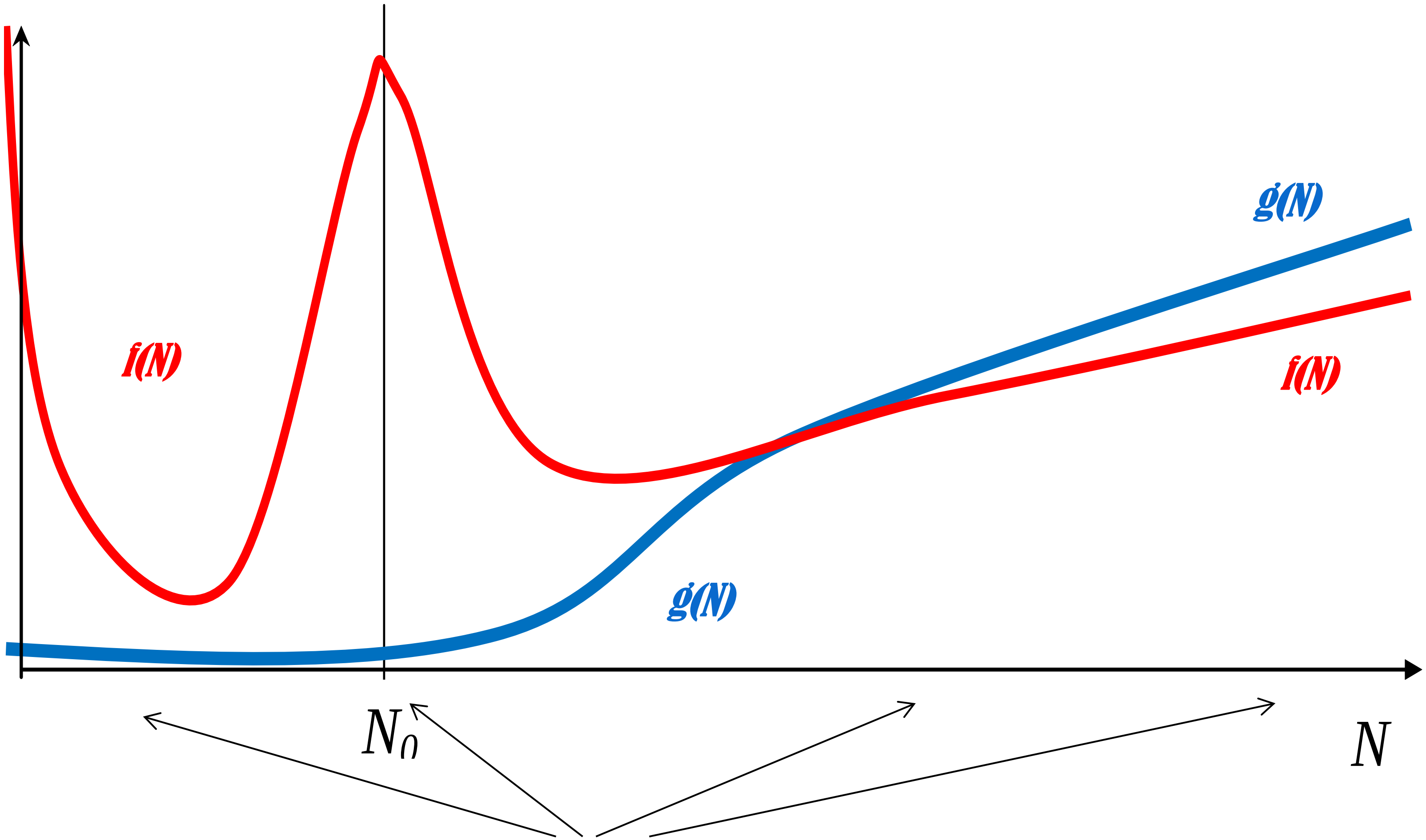
Конструирование наилучшего последовательного алгоритма

Сравнение последовательных алгоритмов сортировки

$$M(n) < Cn^2$$

Алгоритм сортировки	Среднее число операций	Максимальное число операций
Быстрая (***qsort***)	$11.7\ n \log_2 n$	$O(n^2)$
Пирамидальная (***hsort***)	$16\ n \log_2 n$	$18\ n \log_2 n + 38n$
Слияние списков (***lsort***)	$10\ n \log_2 n$	$O(n \log_2 n)$

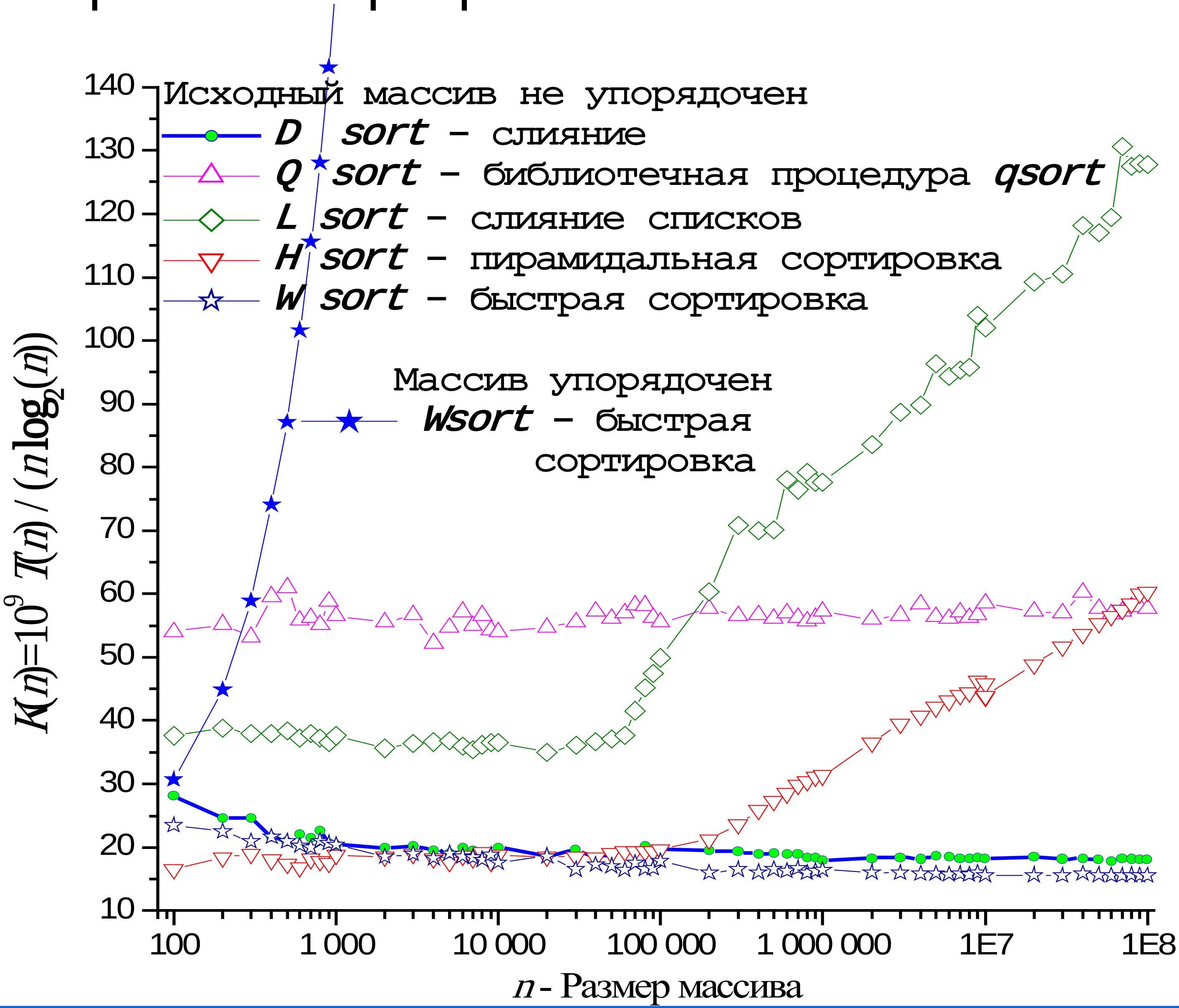
$O(f)<O(g)$: $f(N)<C\cdot g(N)$ при $N>N_0$ – что из этого следует?



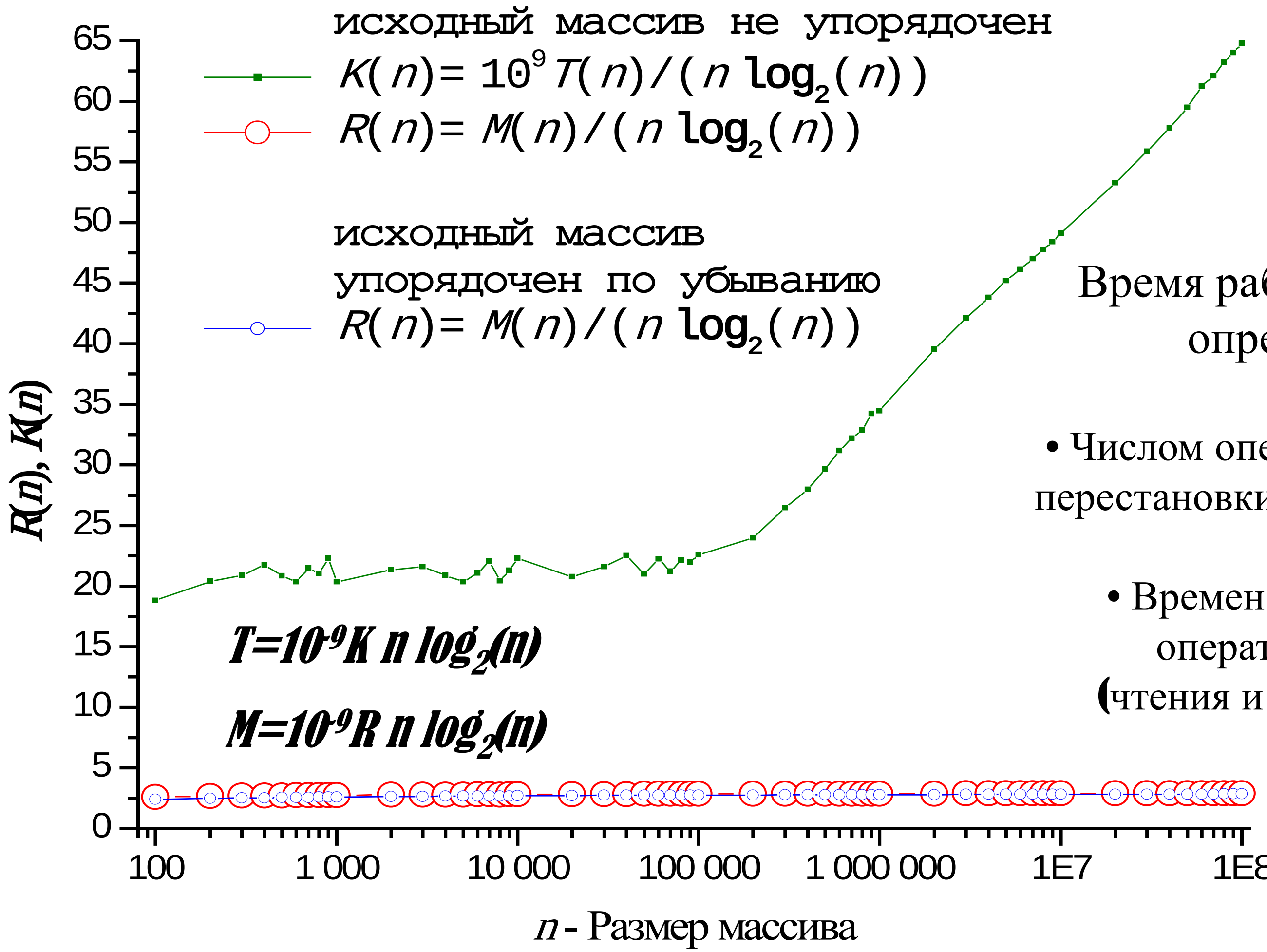
Какому размеру доступной оперативной памяти соответствует N_0?

Константа времени сортировки

$$T(n) = 10^{-9} K(n)\, n\log_2 n$$

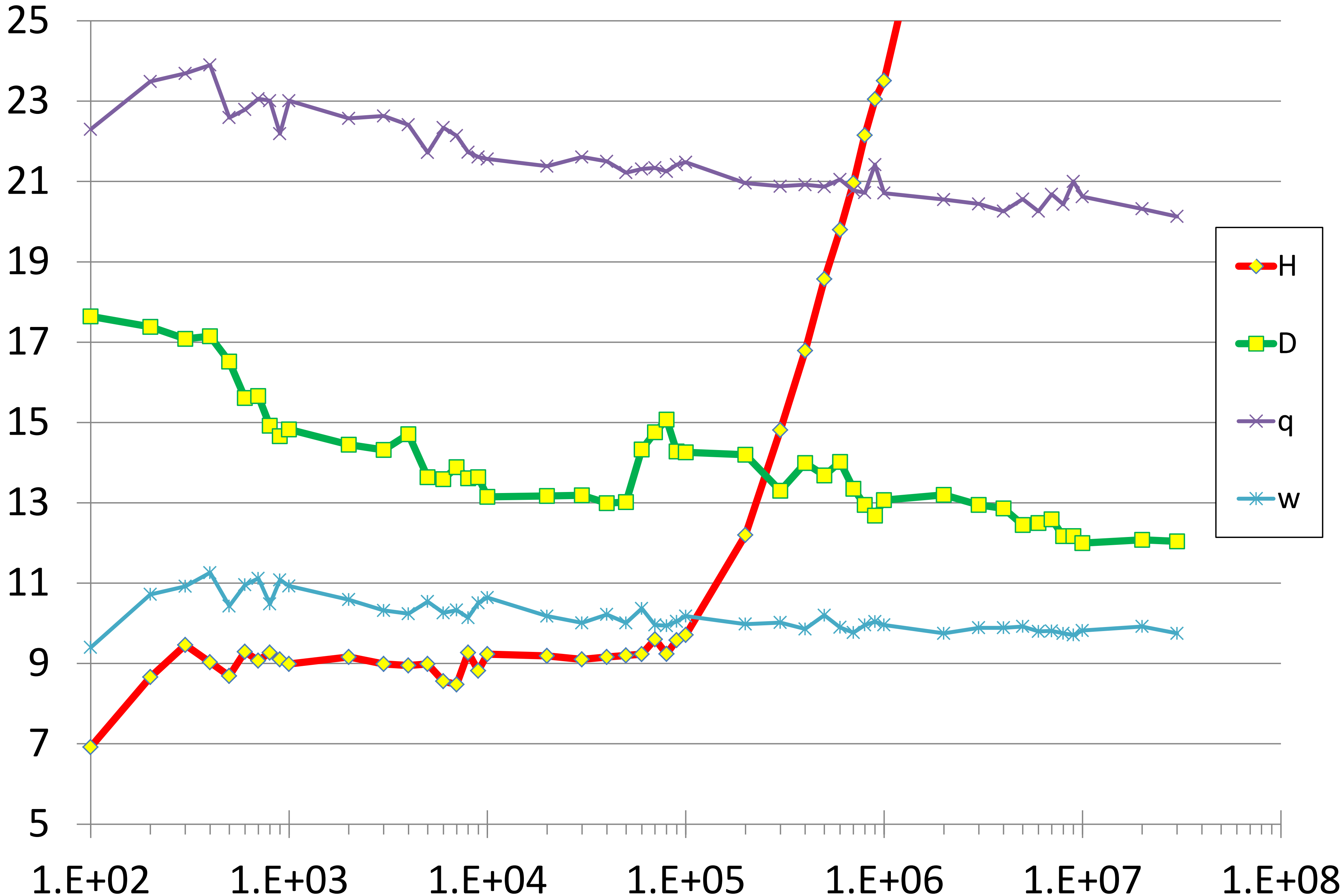


Пирамидальная сортировка: константы времени и числа операций

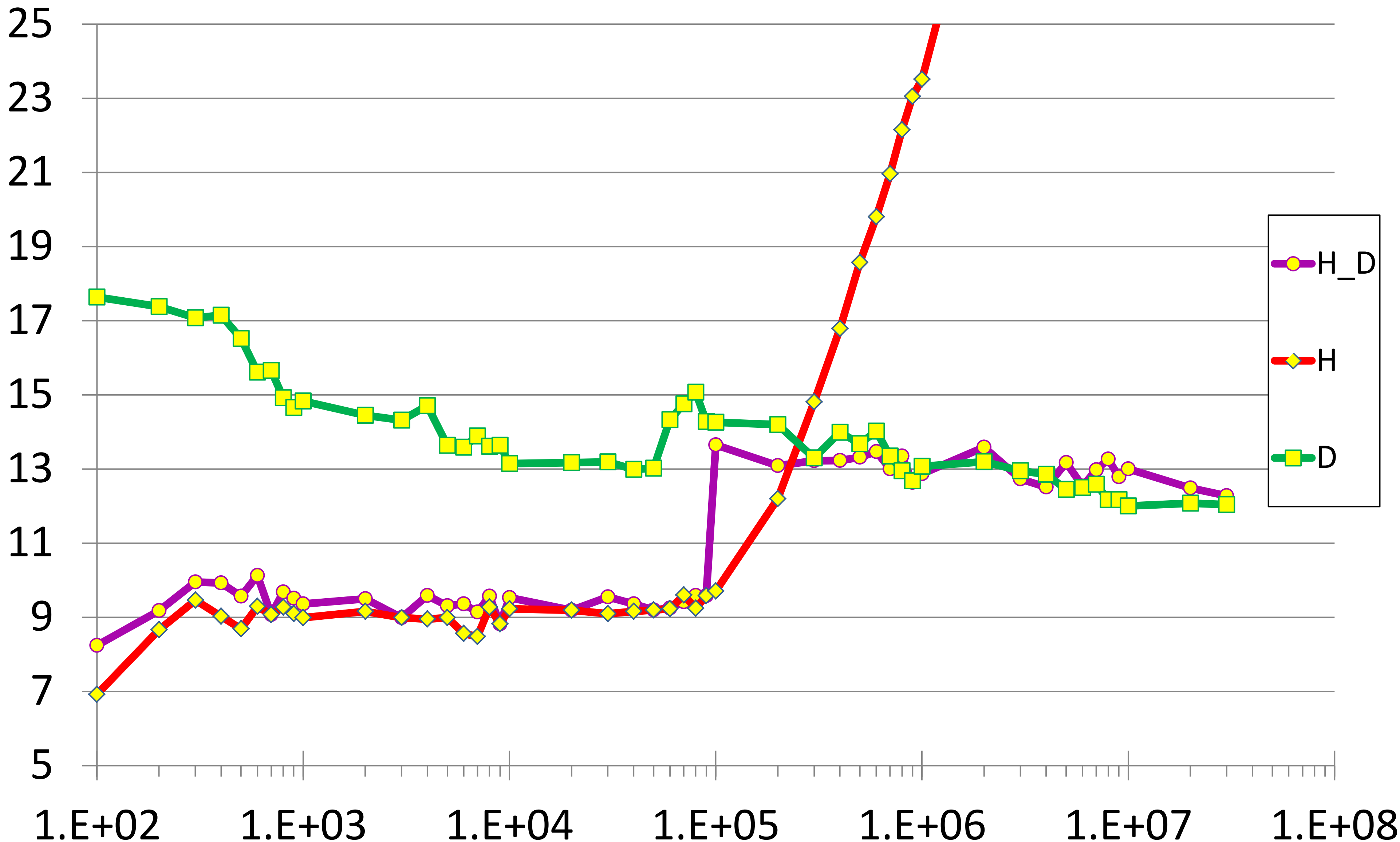


Время работы алгоритма определяется:

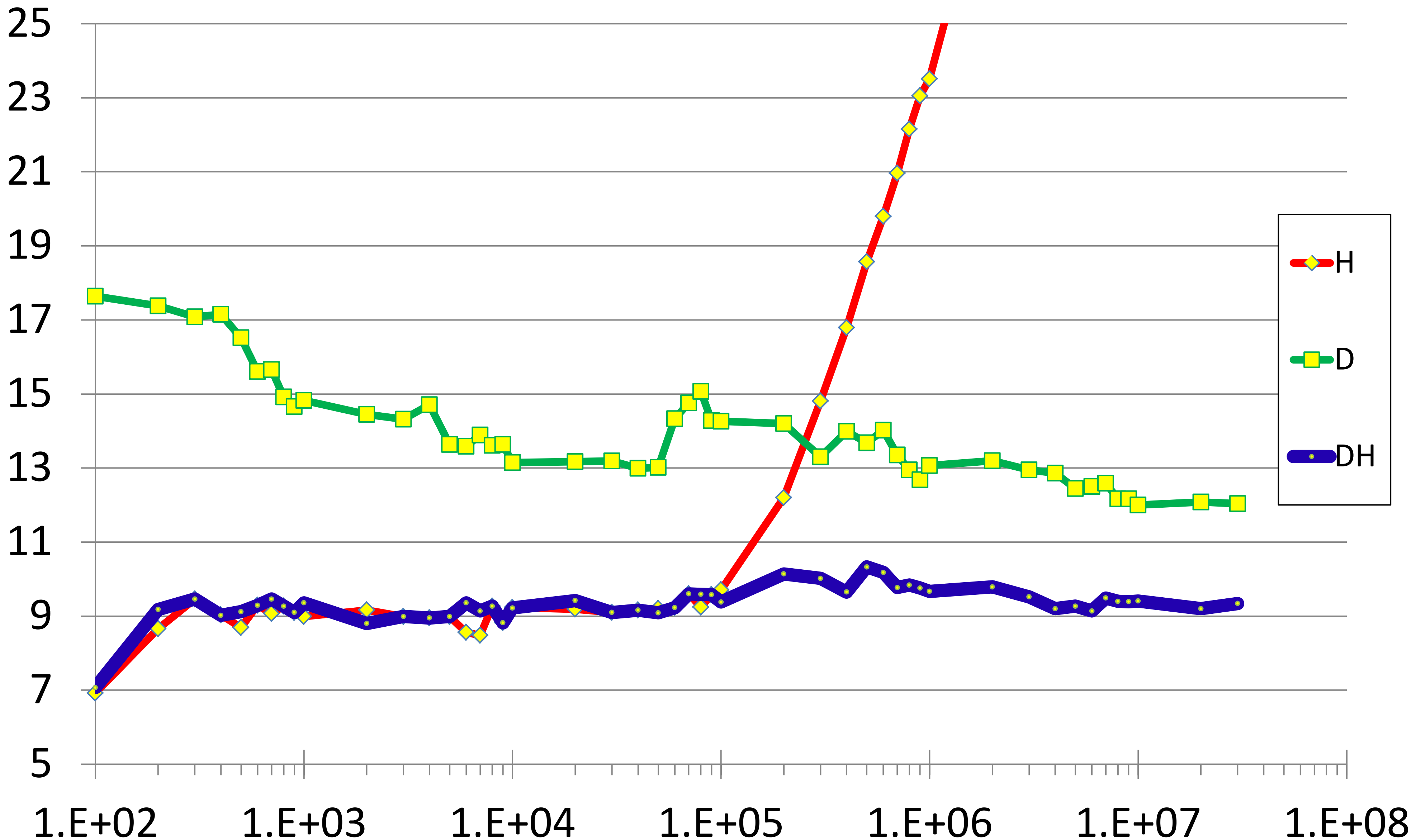
- Числом операций сравнения и перестановки элементов массива
- Временем обращения к оперативной памяти (чтения и записи элементов массива)

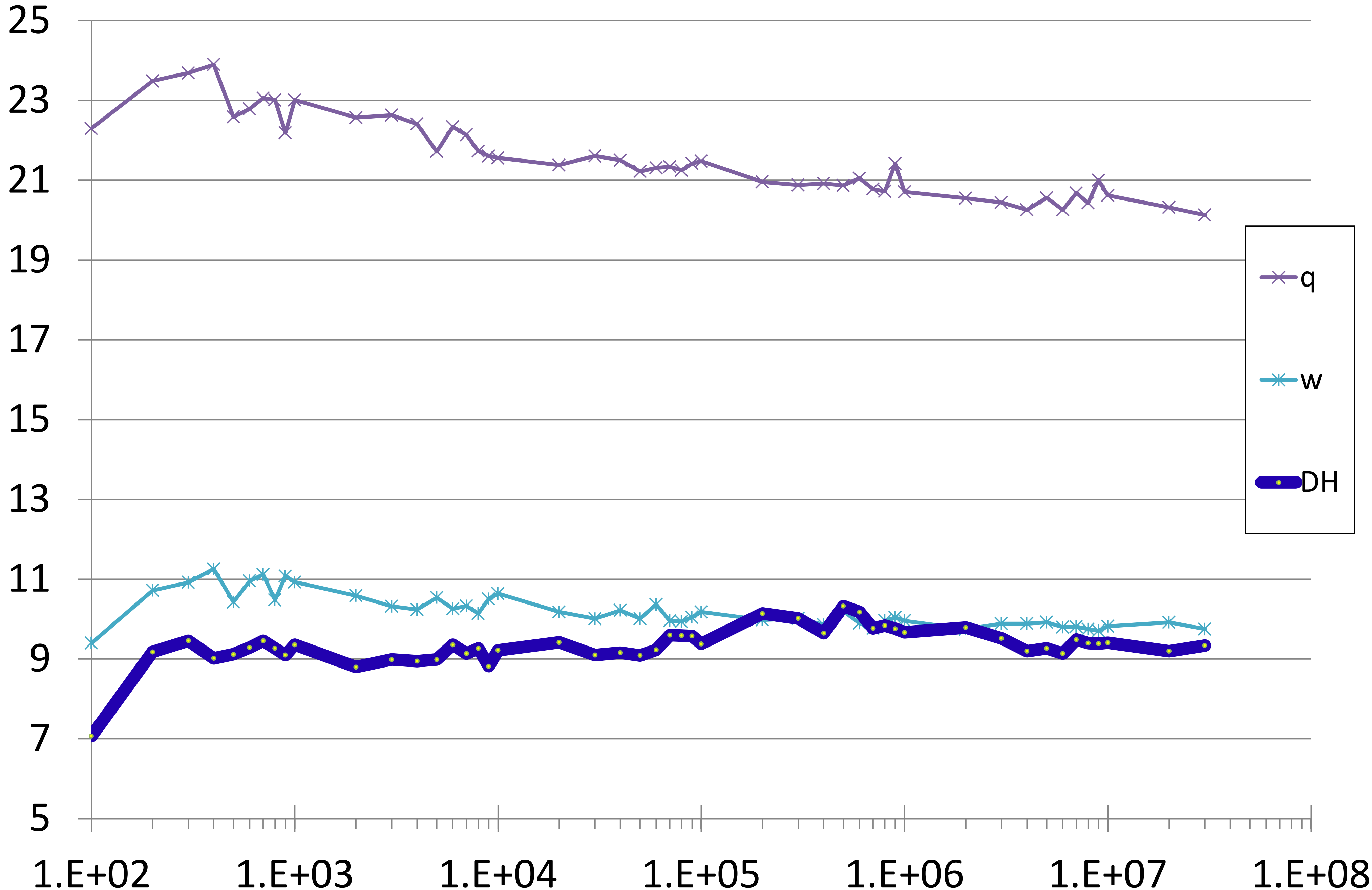

25
23
21
19
17
15
13
11
9
7
5
1.E+02
1.E+03
1.E+04
1.E+05
1.E+06
1.E+07
1.E+08
H
D
q
w

Меньше 10 000 - пирамидальная, больше - слияние



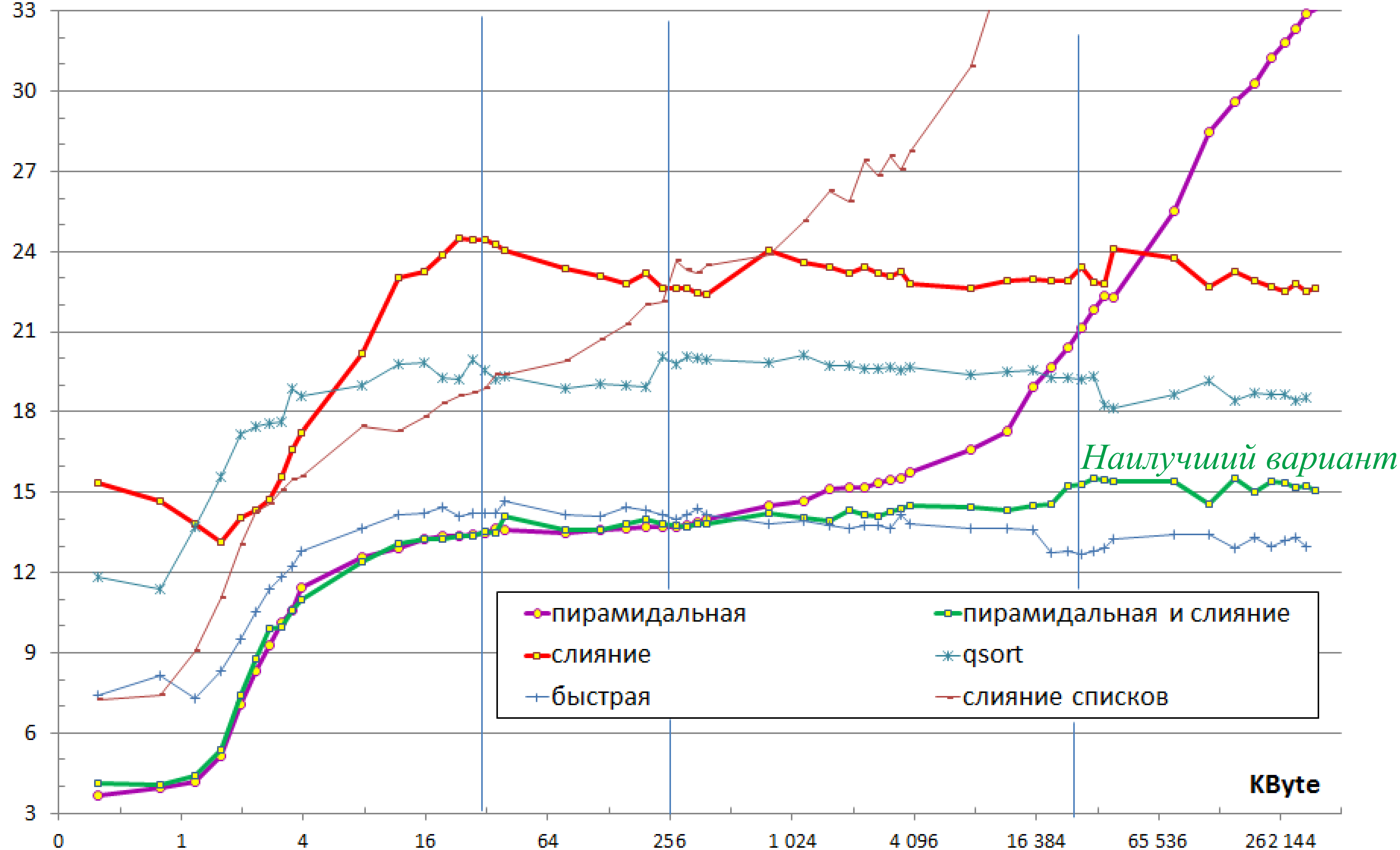
Меньше 100 000 элементов – пирамидальная,
иначе – (пирамидальная над фрагментами + слияние упорядоченных фрагментов)



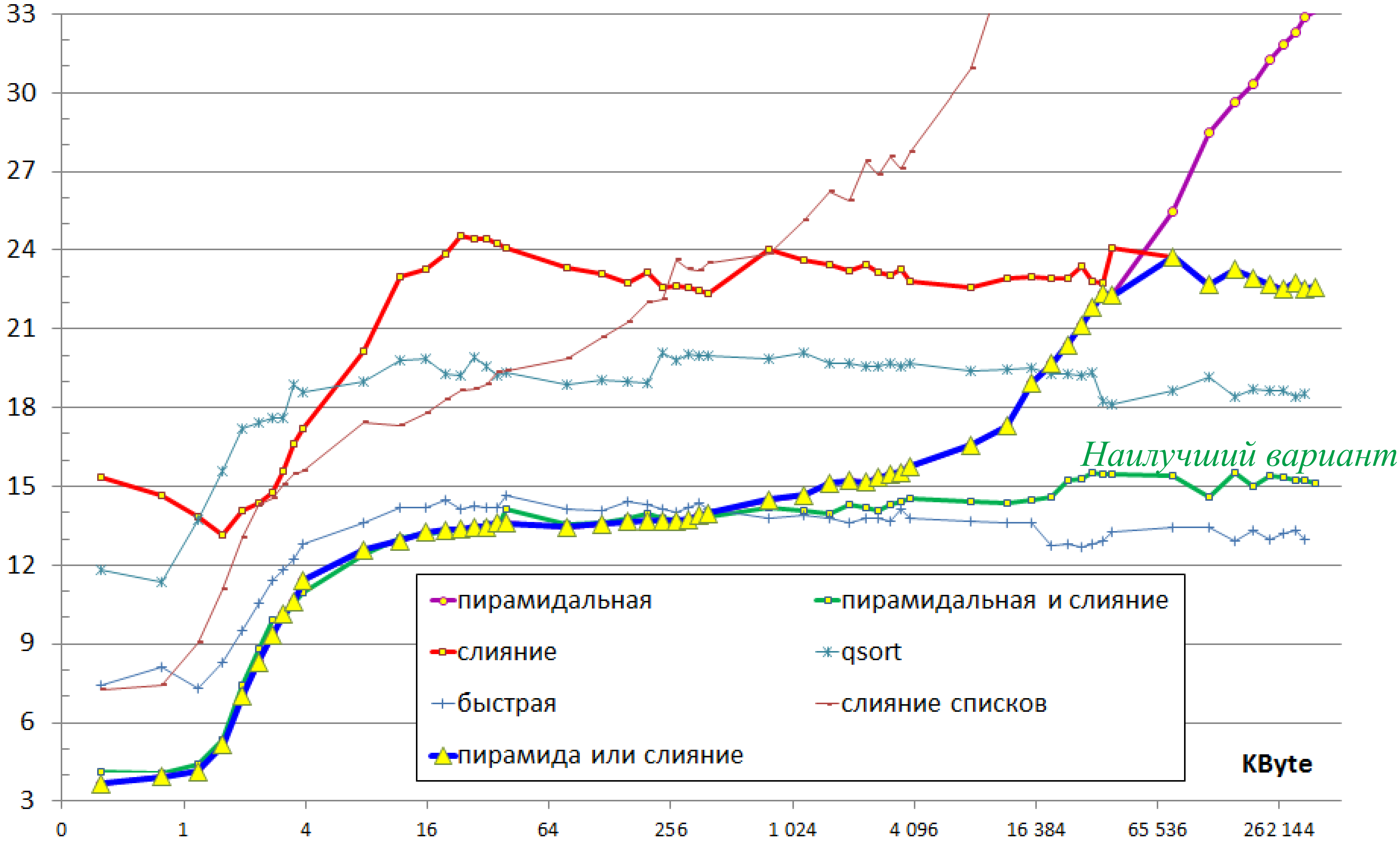


25
23
21
19
17
15
13
11
9
7
5
1.E+02
1.E+03
1.E+04
1.E+05
1.E+06
1.E+07
1.E+08
q
w
DH

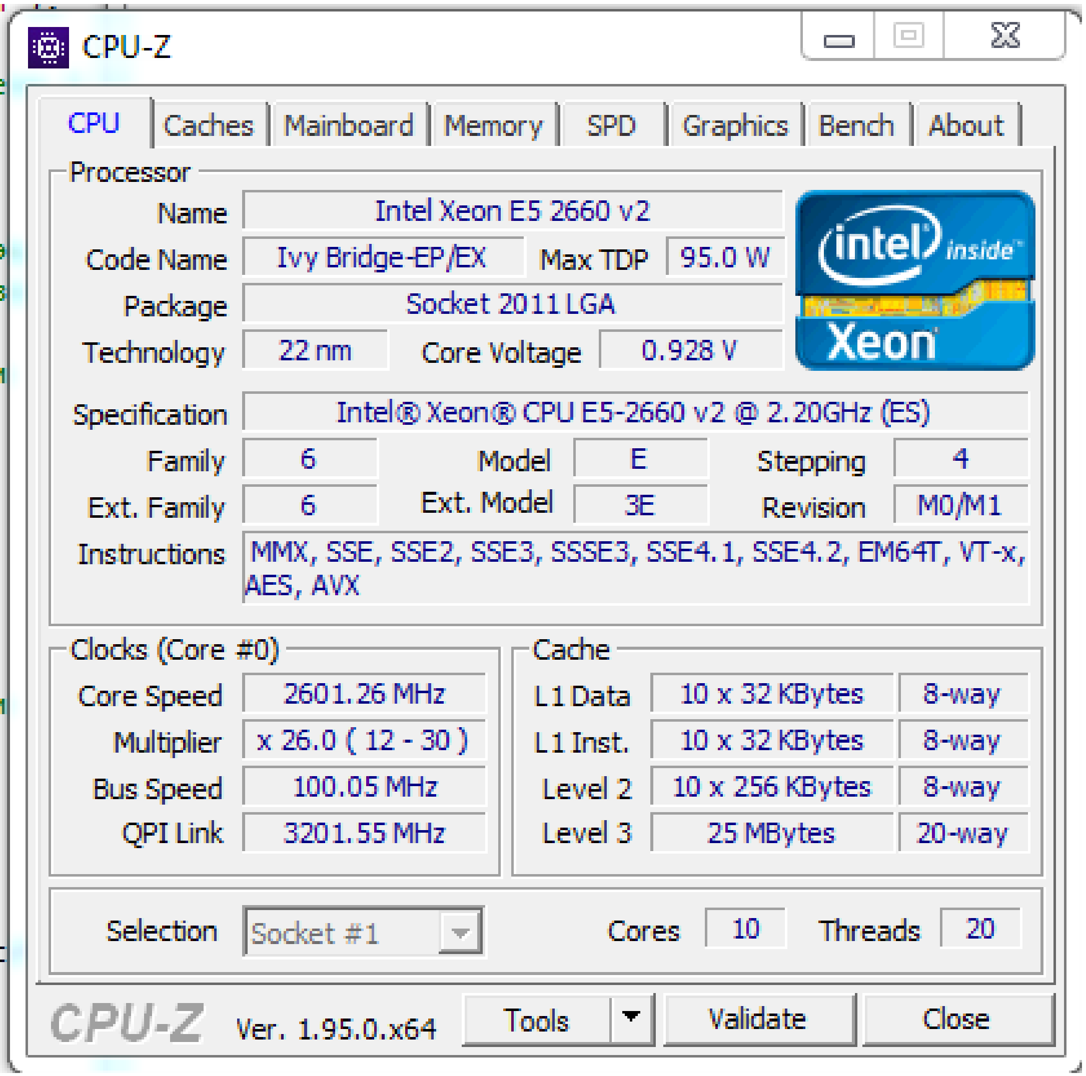
Intel Xeon E5 2660 v2, 10x2 ядер, 4 канала памяти



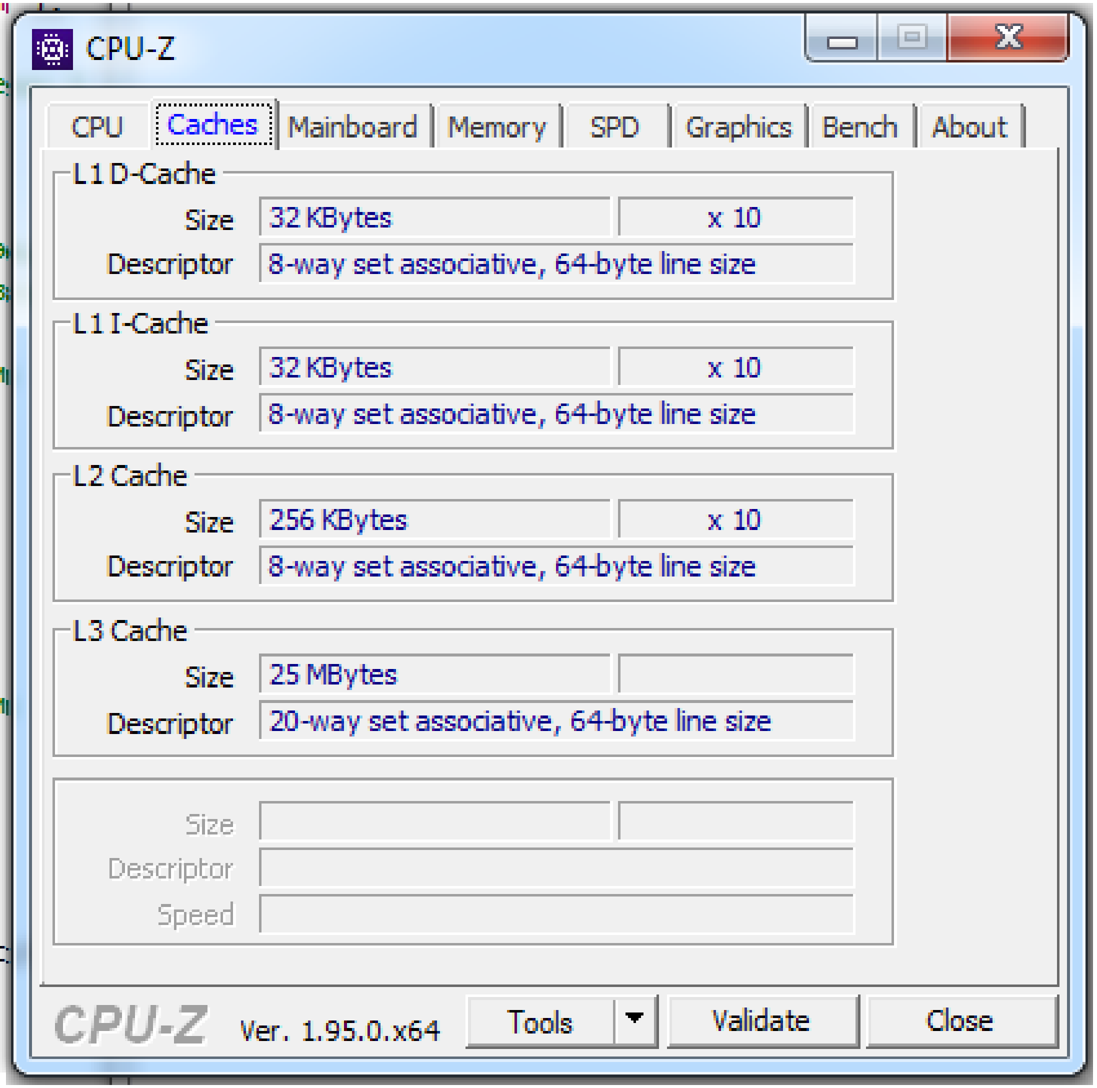
Intel Xeon E5 2660 v2, 10x2 ядер, 4 канала памяти



Характеристики Кеш памяти

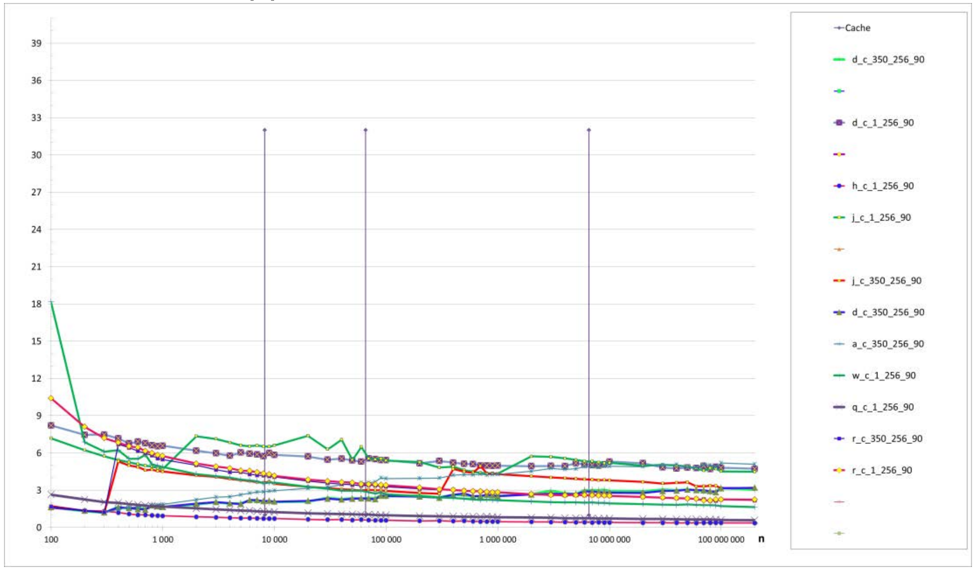


Характеристики Кеш памяти

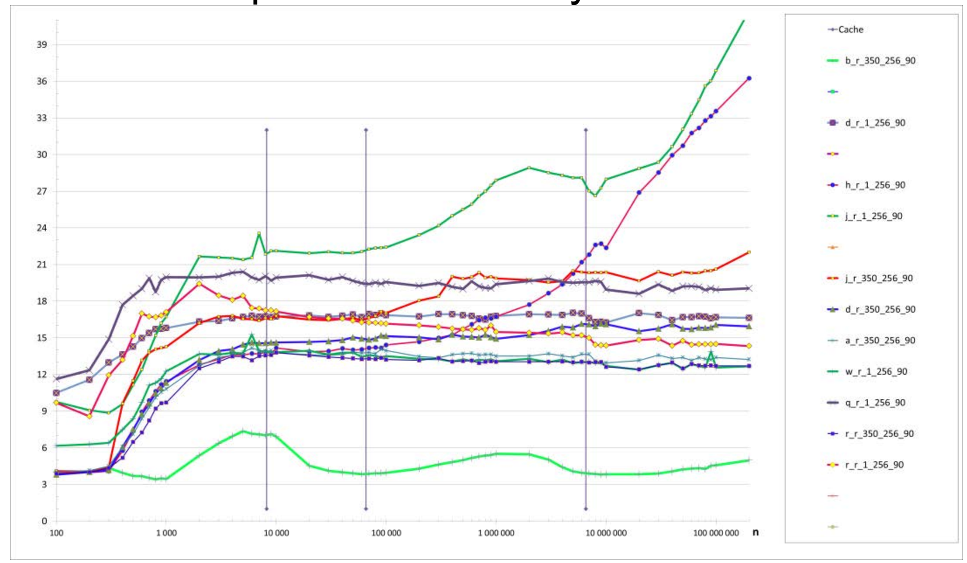


Зависимость константы сортировки от вида исходного массива

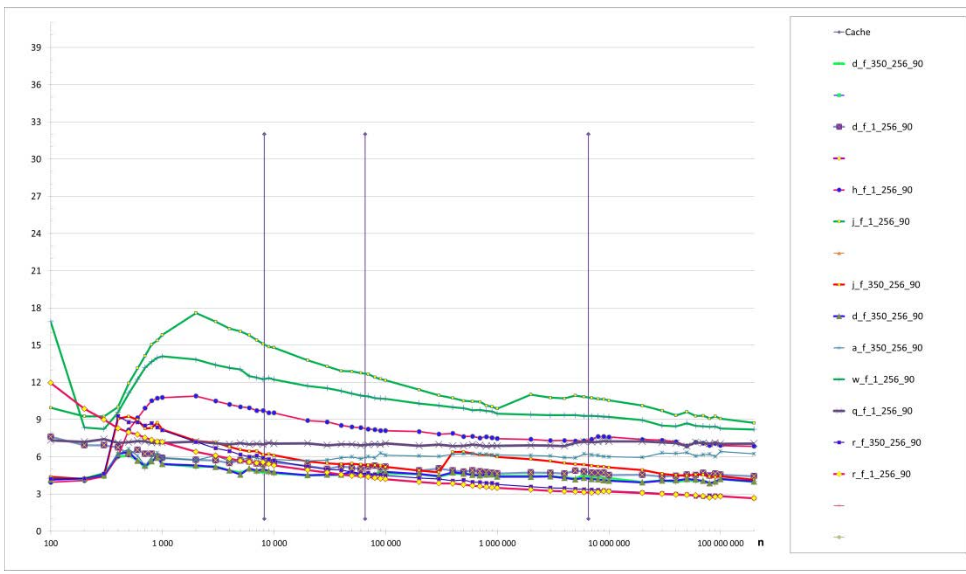
Элементы одинаковы



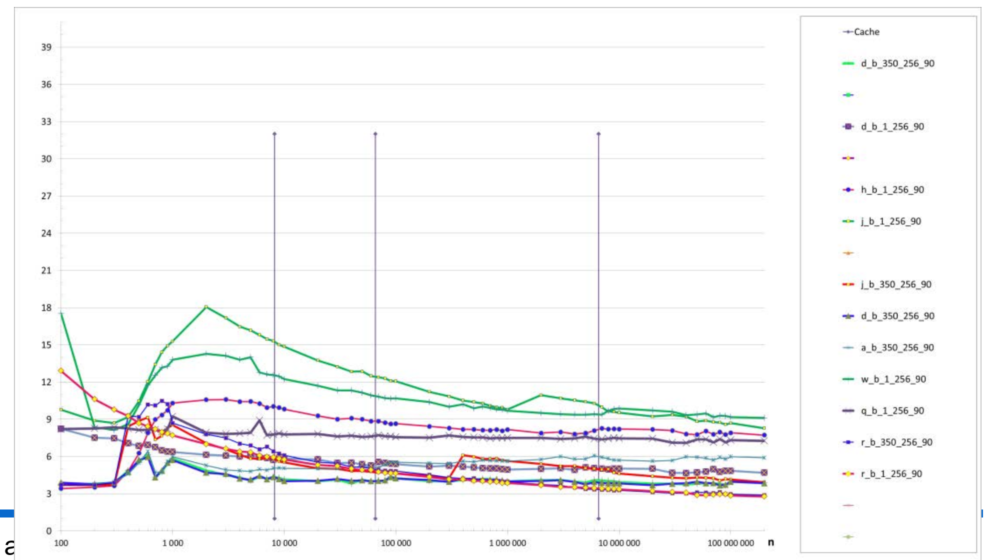
Хаотично перемешанные случайные числа



Элементы упорядочены по возрастанию



Элементы упорядочены по убыванию



Usage: sortmas <from> <to> <step|0> <seq: c|f|b|r>
<subr: q|Q|h|H|d|D|a|l|L|s|S|w|W> [size_of_hyper_block]

```
case 'r': rsort( mas, n);   break;
```

Поразрядная сортировка

```
case 'b':bsort( mas, n);  break;
```

Поразрядная сортировка с байтовым анализом

```
case 'q':qsort( mas, n, (size_t)sizeof( intsort ), cmpgle ); break;
```

run-time библиотека

```
case 'l': lsort( mas, n);            break;
```

слияние списков

```
case 'h':hsort( mas, n);             break;
```
пирамидальная сортировка

```
case 'd':dsort( mas, n);             break; //  hsort (nk)
```
Двухпутевое слияние

```
case 'a':dsort_not_if( mas, n);    break;
```
Двухпутевое слияние без if при выборе максимума

```
case 's': ssort( mas, n);            break;
```
Выбор наибольшего элемента

```
case 'w':            Qsort( mas, n);            break;
```
Быстрая сортировка целых чисел

Сортировка слиянием методом сдваивания
Требуется 16 * log(16) = 64 тактов (1 процессор)

5 2 2 1 9 5 7 3 3 4 4 0 3 6 8 2 — исходный массив

5 2 | 2 1 | 9 5 | 7 3 | 3 4 | 4 0 | 3 6 | 8 2 — 1 процессор

2 5 | 1 2 | 5 9 | 3 7 | 3 4 | 0 4 | 3 6 | 2 8 — 16 тактов

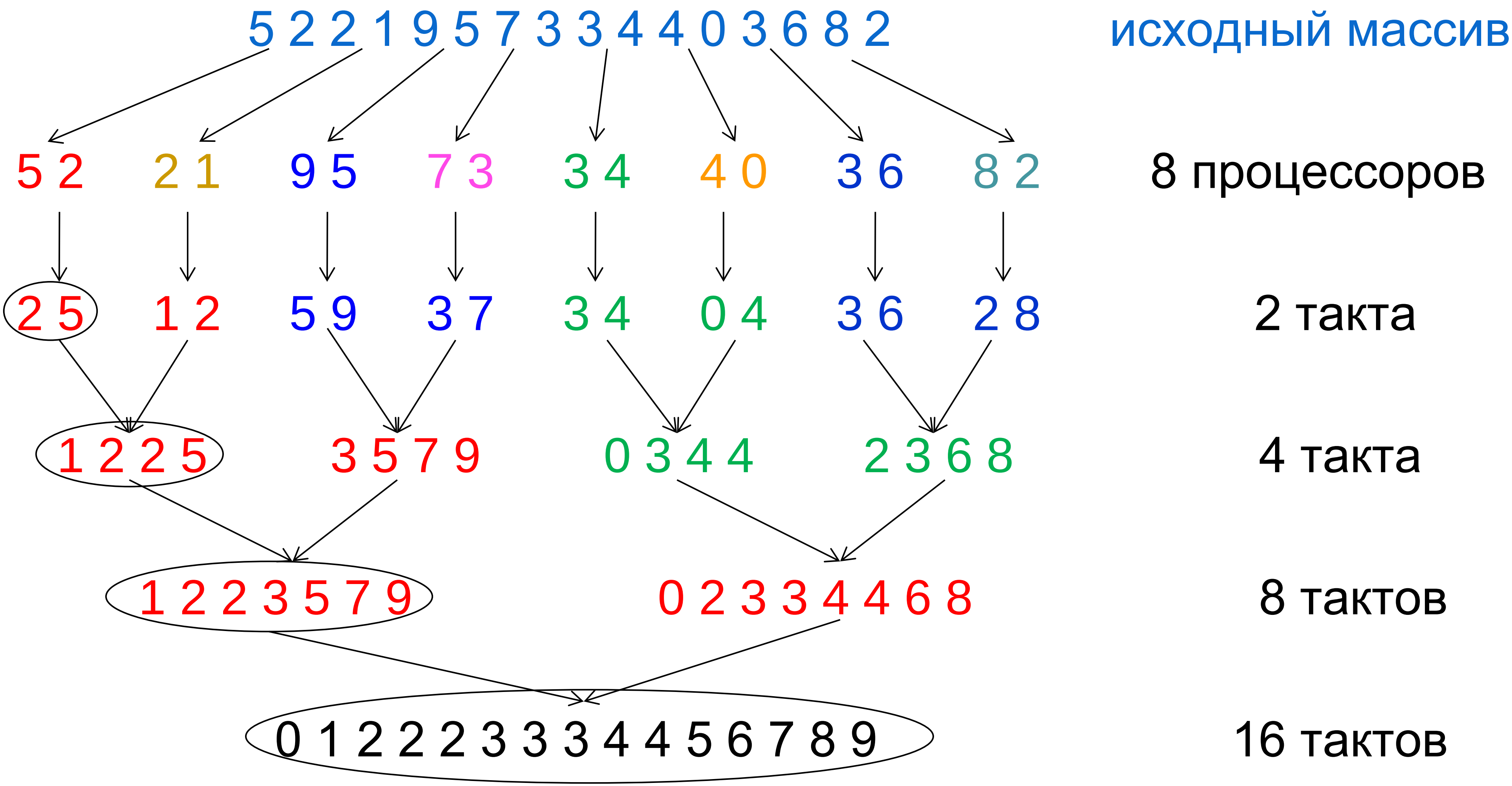
1 2 2 5 | 3 5 7 9 | 0 3 4 4 | 2 3 6 8 — 16 тактов

1 2 2 3 5 7 9 | 0 2 3 3 4 4 6 8 — 16 тактов

0 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 6 7 8 9 — 16 тактов

ИТОГО 64 такта

Сортировка слиянием методом сдваивания
Требуется 2 + 4 + 8 + 16 = 30 тактов (8 процессоров)



ИТОГО 30 тактов

Изящный алгоритм сортировки массива слиянием

```
сортировать ( массив mas, число элементов n )
  {
  если (n > 1)
    {
    // сортировка первой половины массива
    сортировать ( mas, n/2);
    // сортировка второй половины массива
    сортировать ( mas+n/2, n-n/2);
    // слияние отсортированных половинок массива
    слияние ( mas, n/2, mas+n/2,n-n/2);
    }
  }
```

Нерекурсивный алгоритм сортировки массива слиянием

```
Dsort(intsort *array, intsort *array_second, int n)
{
 a=array;              // сортируемый массив
 b=array_second;       // вспомогательный массив

 for(i=1;i<n;i=i*2) // размер объединяемых фрагментов
   {
     for(j=0;j<n;j=j+2*i) // начало первого из объединяемых
                         // фрагментов
       {
         r=j+i; // начало второго из объединяемых фрагментов
         n1=max(min(i,n-j), 0);
         n2=max(min(i,n-r), 0);

         // слияние упорядоченных фрагментов
              b = a[r…r+n1] & a[j…j+n2]
       }
   c=a;a=b;b=c;
   }
   // ответ в одном из массивов: array или array_second
}
```

Слияние упорядоченных фрагментов

```
j = …; r = …; // смещения начал фрагментов

for(ia=0,ib=0,k=0;k<n1+n2;k++)
{
     if(ia>=n1) b[j+k]= a[r+ib++];
     else
     if(ib>=n2) b[j+k]= a[j+ia++];
     else
     if(a[j+ia]<a[r+ib]) b[j+k]= a[j+ia++];
     else                b[j+k]= a[r+ib++];
}
```

Слияние одним процессором. Требуется 16 тактов

*Обращение к **последовательным** адресам памяти*

(1 2 2 3 5 5 7 9) (0 2 3 3 4 4 6 8)

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1 2

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1 2 2

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1 2 2 3

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1 2 2 3 3

1 2 2 3 5 5 7 9 0 2 3 3 4 4 6 8 0 1 2 2 3 3 3

…

Слияние двумя процессорами. Требуется 8 тактов

1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 … 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 … 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 … 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 … 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 … 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 … 5 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 3 … 4 5 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 6 7 8 9

Ускорение при методе сдваивания

k_1 – сортировка, k_2 – передача данных

$$S(n,p)=\frac{T(n,1)}{T(n,p)}=\frac{k_1 n\log_2 n}{\frac{n}{p}\left[k_1\left(\log_2\frac{n}{p}+2p-1\right)+k_2(p-1)\right]}$$

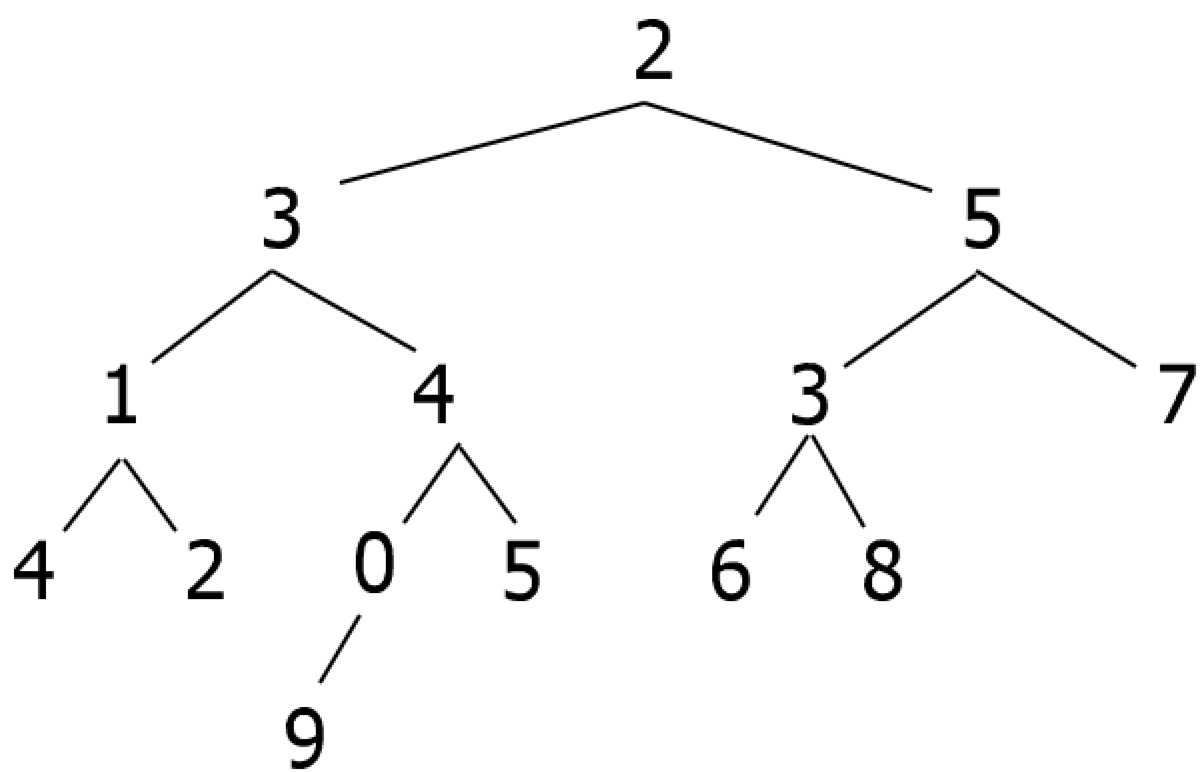
$$S\left(10^9,4\right)\approx\frac{4}{1.13+\frac{1}{30}\frac{k_2}{k_1}}<3.5$$

$$S\left(10^9,32\right)=\frac{32}{1+\frac{1}{30}\left(56+31\frac{k_2}{k_1}\right)}\approx\frac{32}{3+\frac{k_2}{k_1}}<11$$

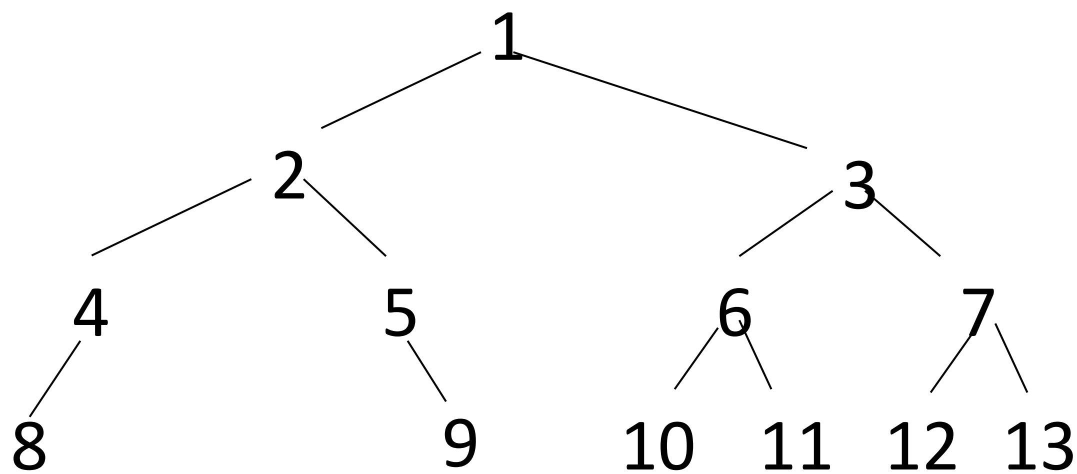
Пирамиды

- Дерево называют сбалансированным, если потомки любого его корня отличаются по высоте не более чем на 1
- Пирамида – сбалансированное бинарное дерево в котором левый потомок любого узла не ниже правого потомка

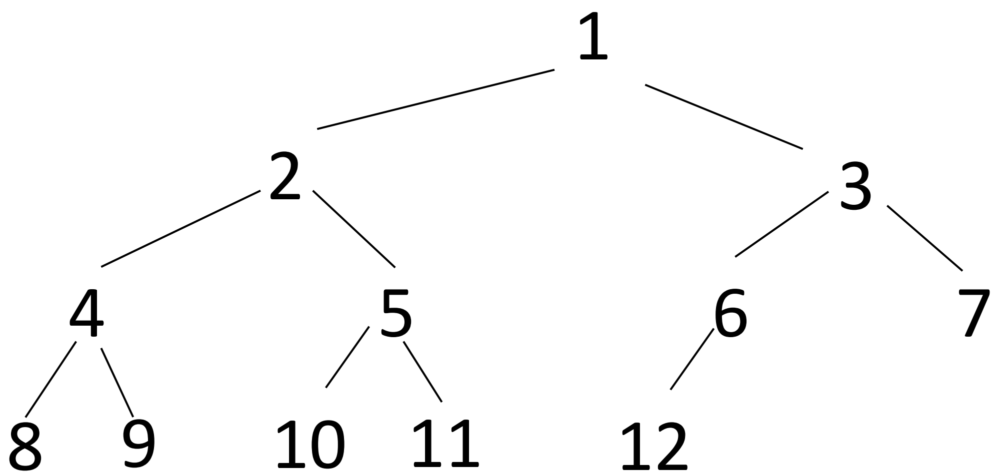
Не сбалансированное дерево

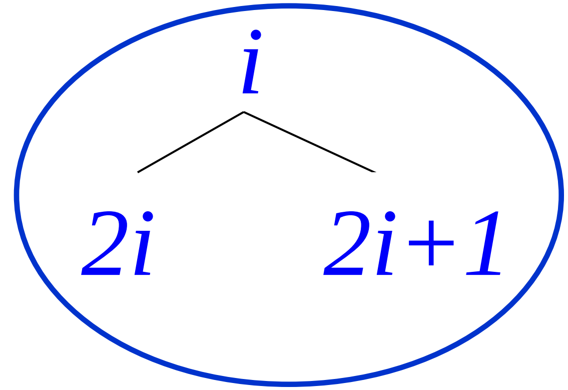


Сбалансированное дерево, но не пирамида



Пирамида





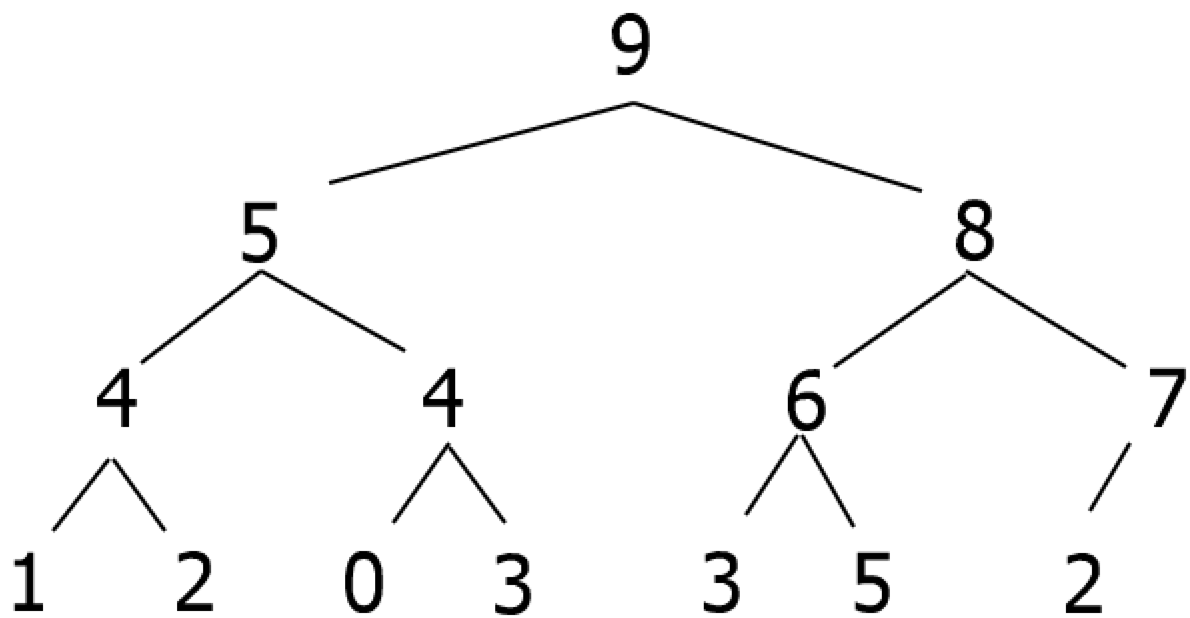
Потомки вершины i хранятся в элементах 2i, 2i+1

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 \ldots$$

$$a_1\ a_i\ a_3\ a_{2i}\ a_{2i+1}\ a_6\ a_7 \ldots$$

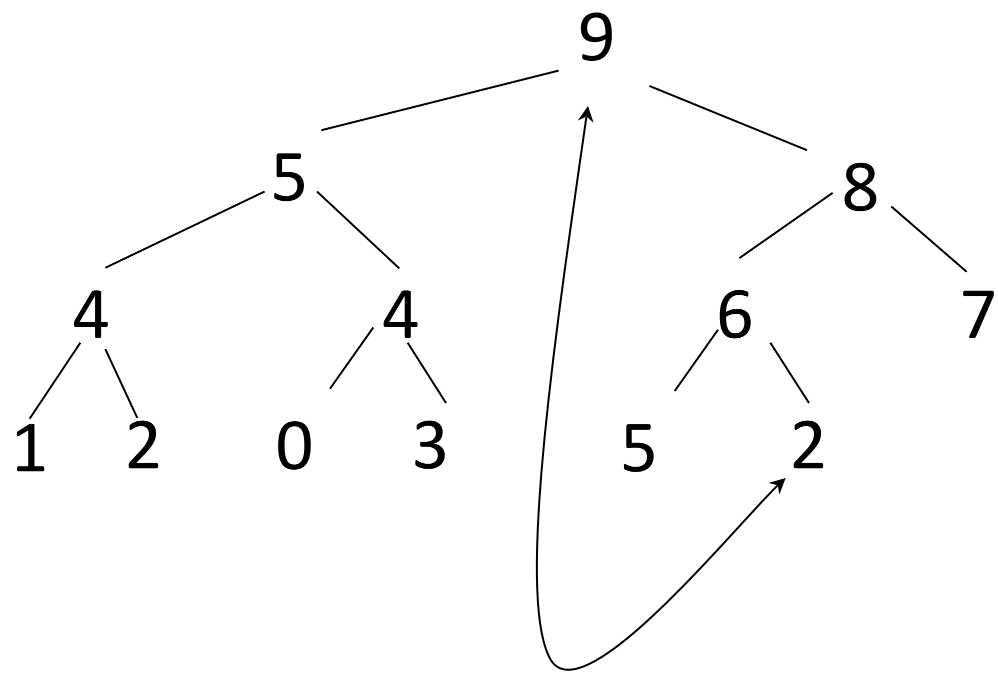
Упорядоченная пирамида

- 9   5 8   4 4 6 7   1 2 0 3 3 5 2



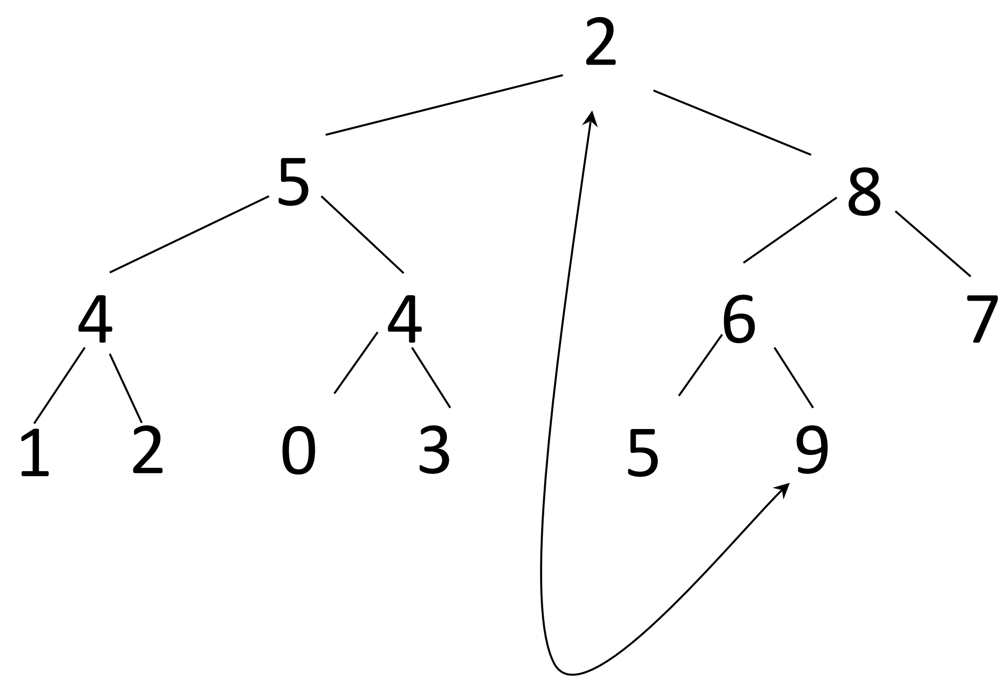
Поменять корень местами с последним потомком

- 9   5 8   4 4 6 7   1 2 0 3 3 5 2



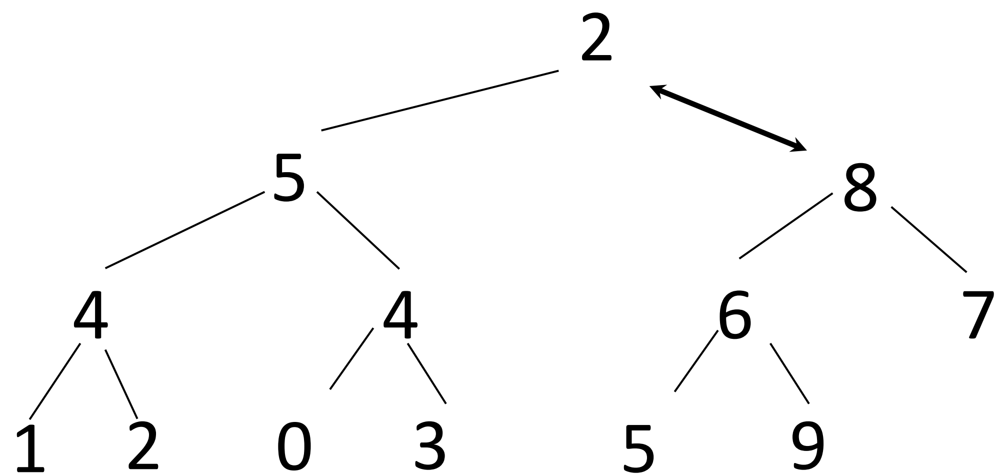
Поменять корень местами с последним потомком

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



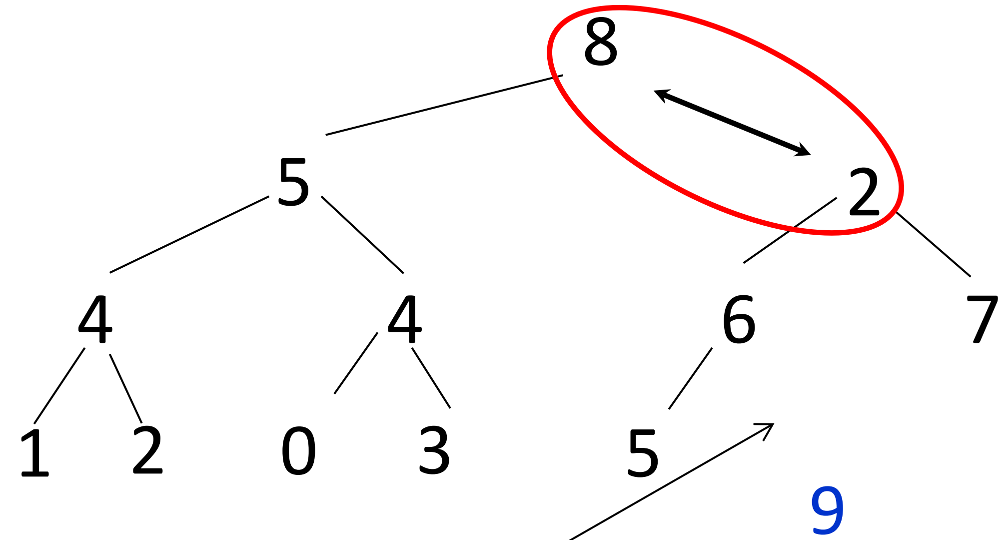
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5   [9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

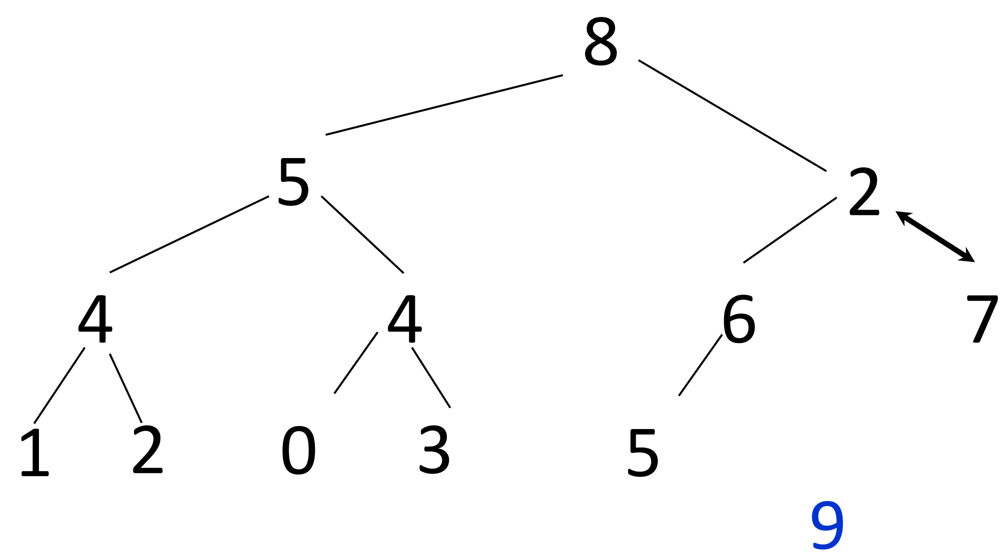
- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

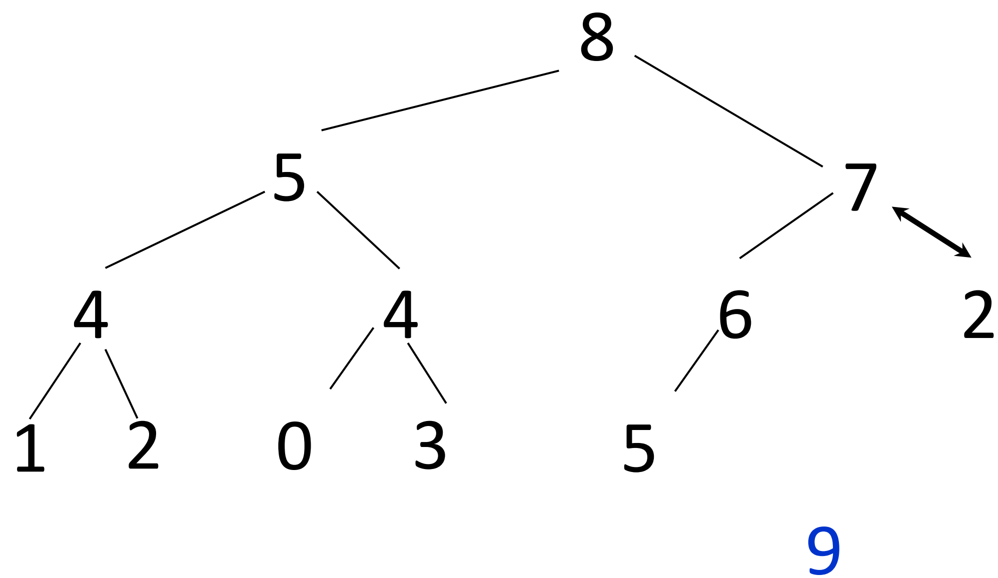
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 8   5 2   4 4 6 7   1 2 0 3 3 5   [9



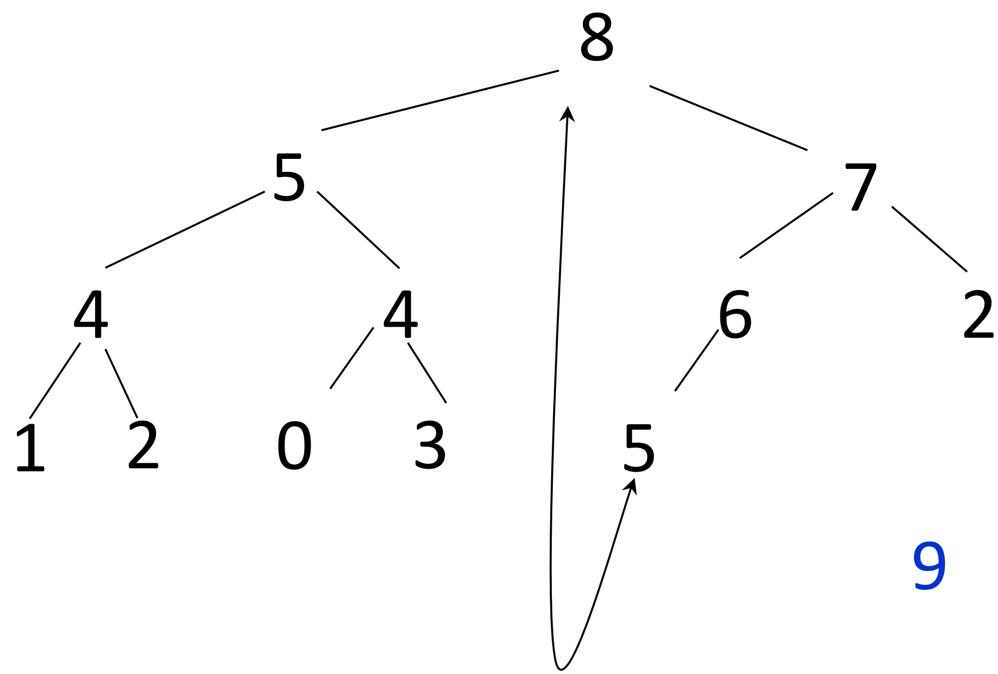
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 8   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3 5   [9



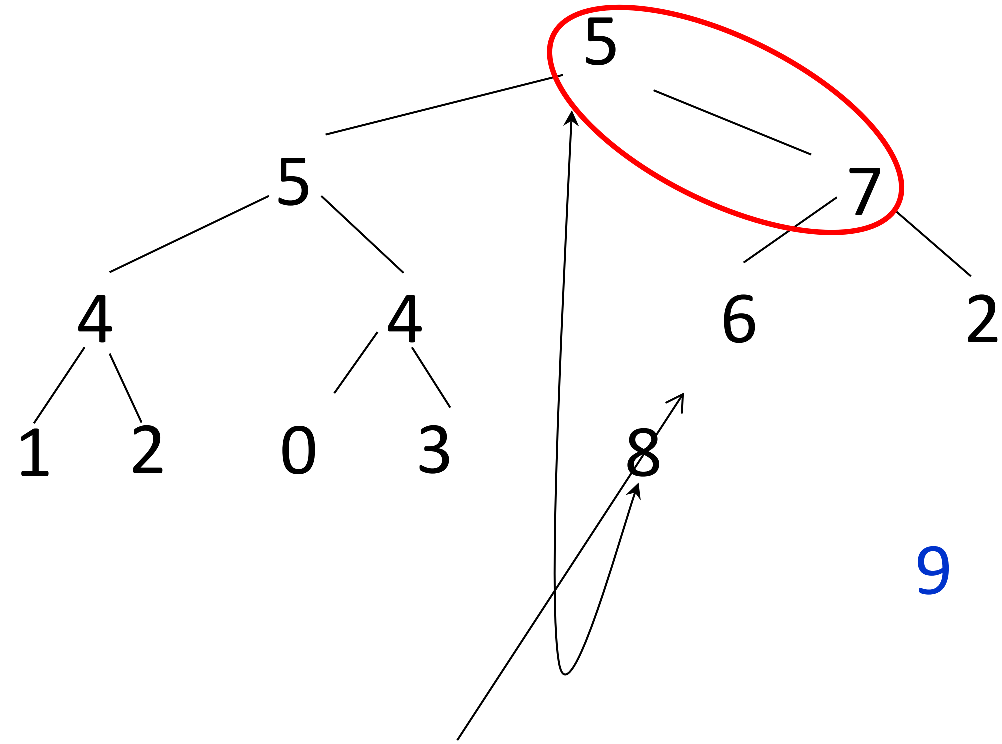
Поменять корень местами с последним потомком

- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



Поменять корень местами с последним потомком

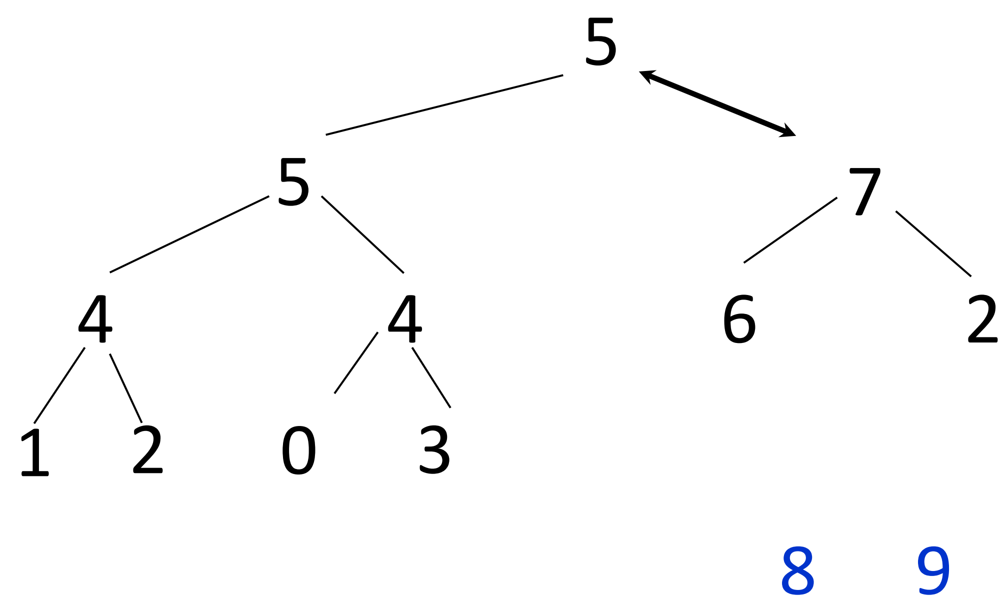
- 8   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3 5   [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

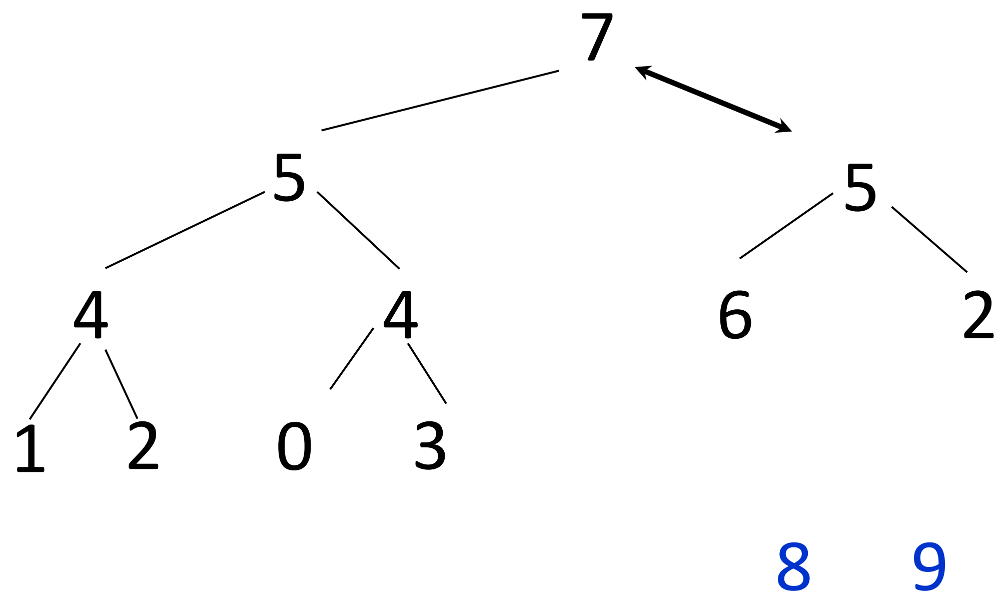
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 5   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3   [8 9



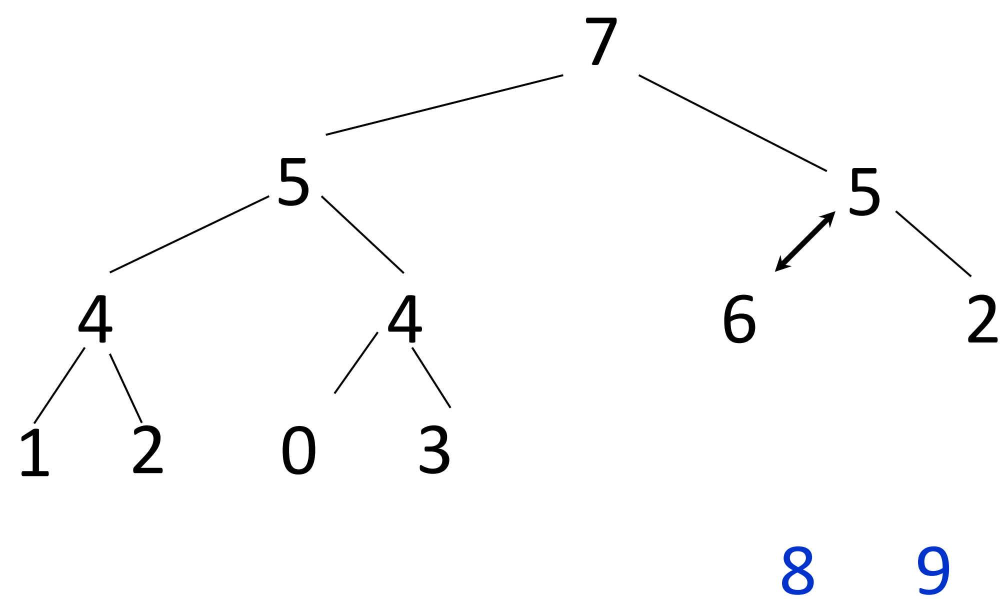
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 5   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3   [8 9



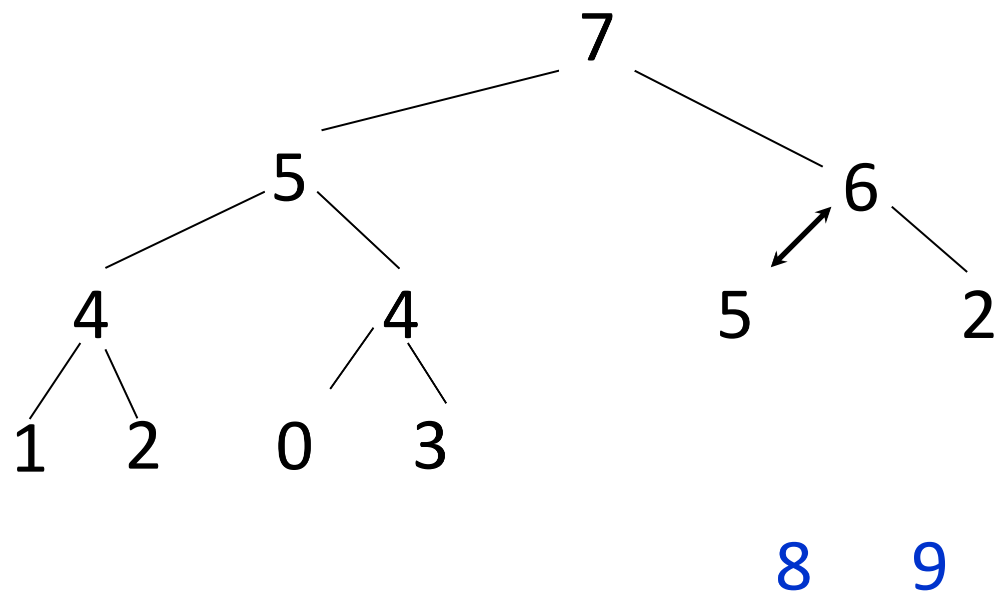
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9



Пирамидальная сортировка – хаотичные обращения к памяти

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2 [

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

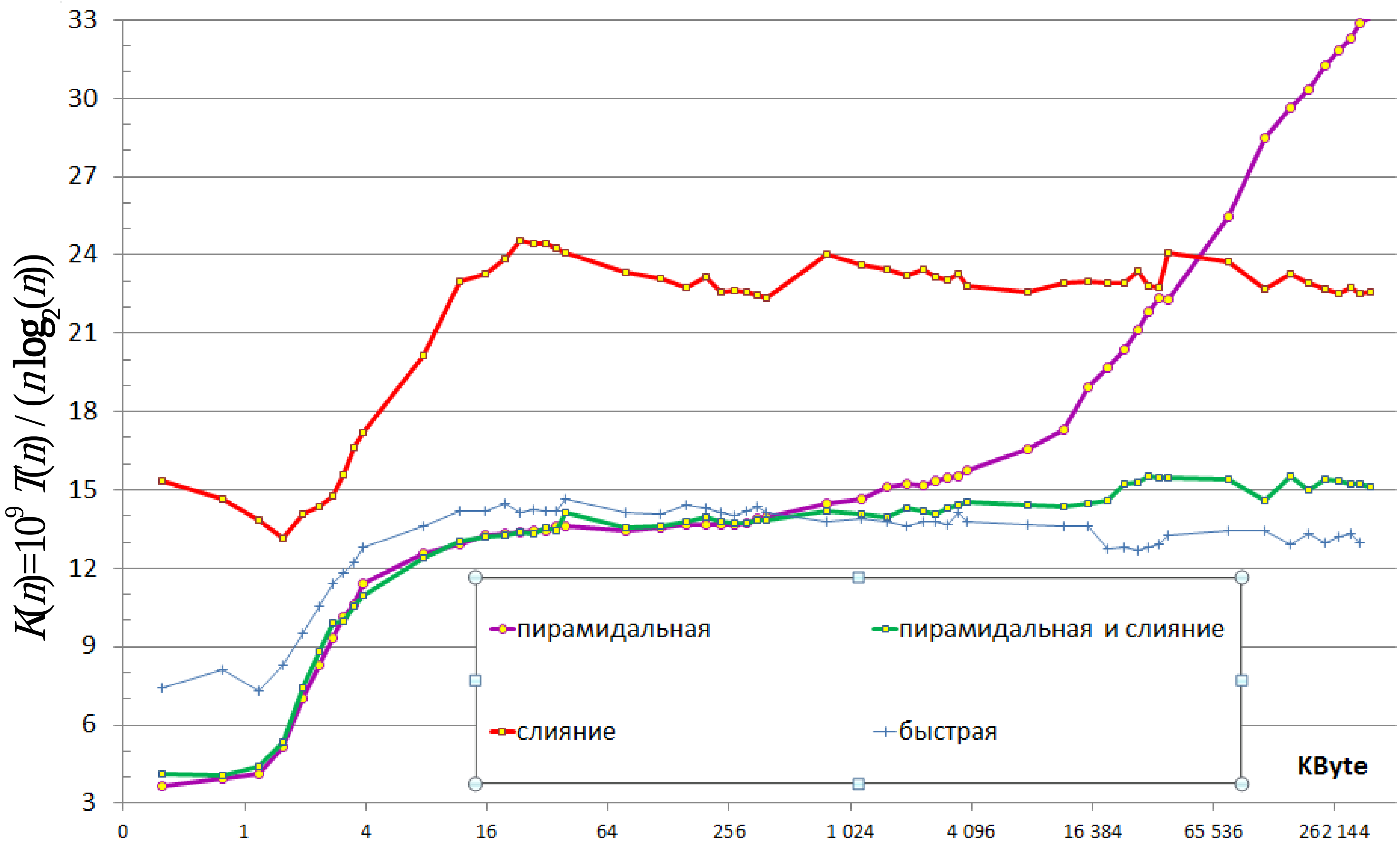
7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9

Оптимальный алгоритм

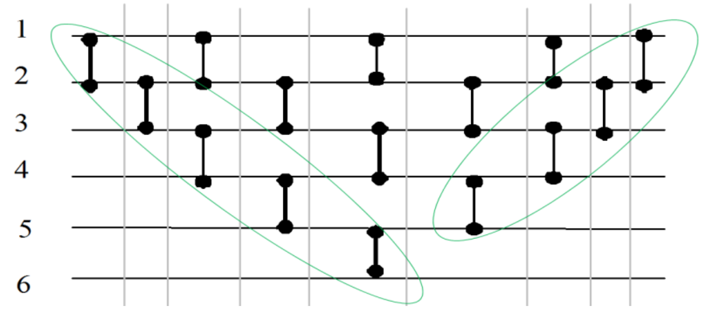
- Оптимальна комбинация:
- H алгоритм (пирамидальная сортировка) при *n* от 10 до 50 000
- DH алгоритм (пирамидальная сортировка блоков размером до 50 000 и их последующее слияние) при *n* больше 50 000

Константа времени сортировки наилvчшего алгоритма

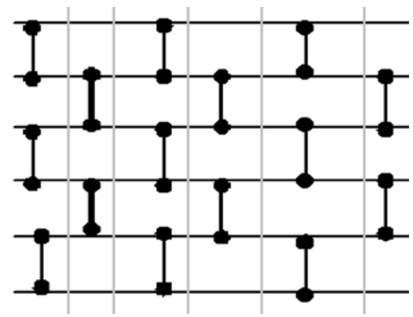


Параллельная сортировка: сети сортировки

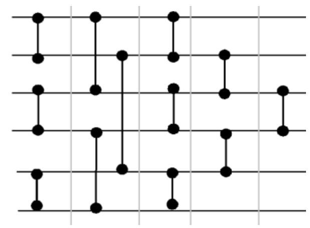
- Выбор наименьшего элемента



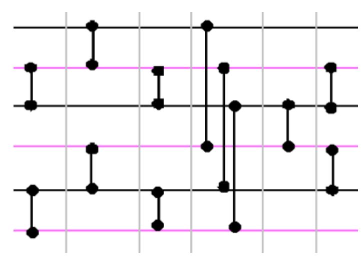
- Четно-нечётные перестановки



- Минимальные сети

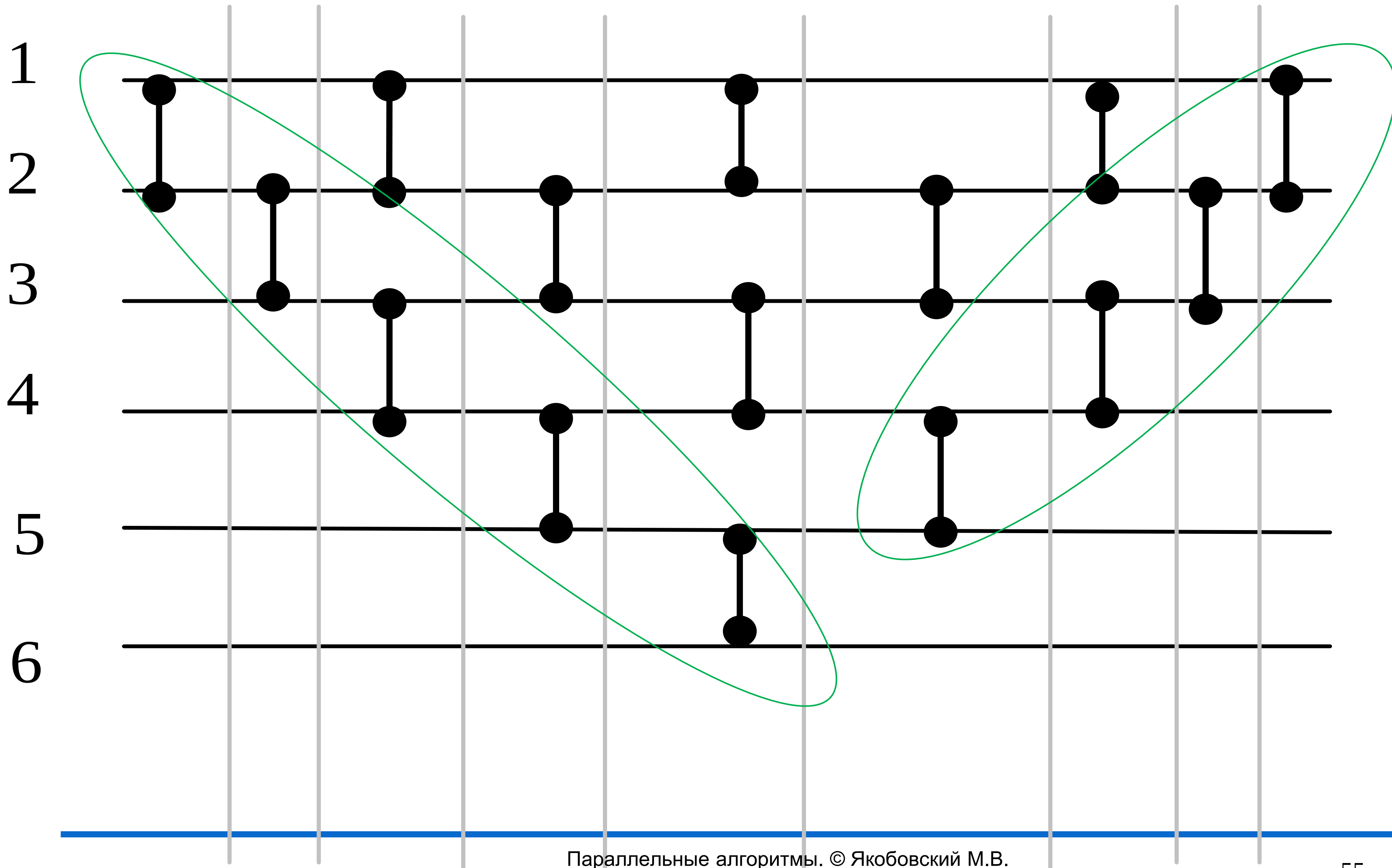


- Четно-нечетное слияние Бэтчера

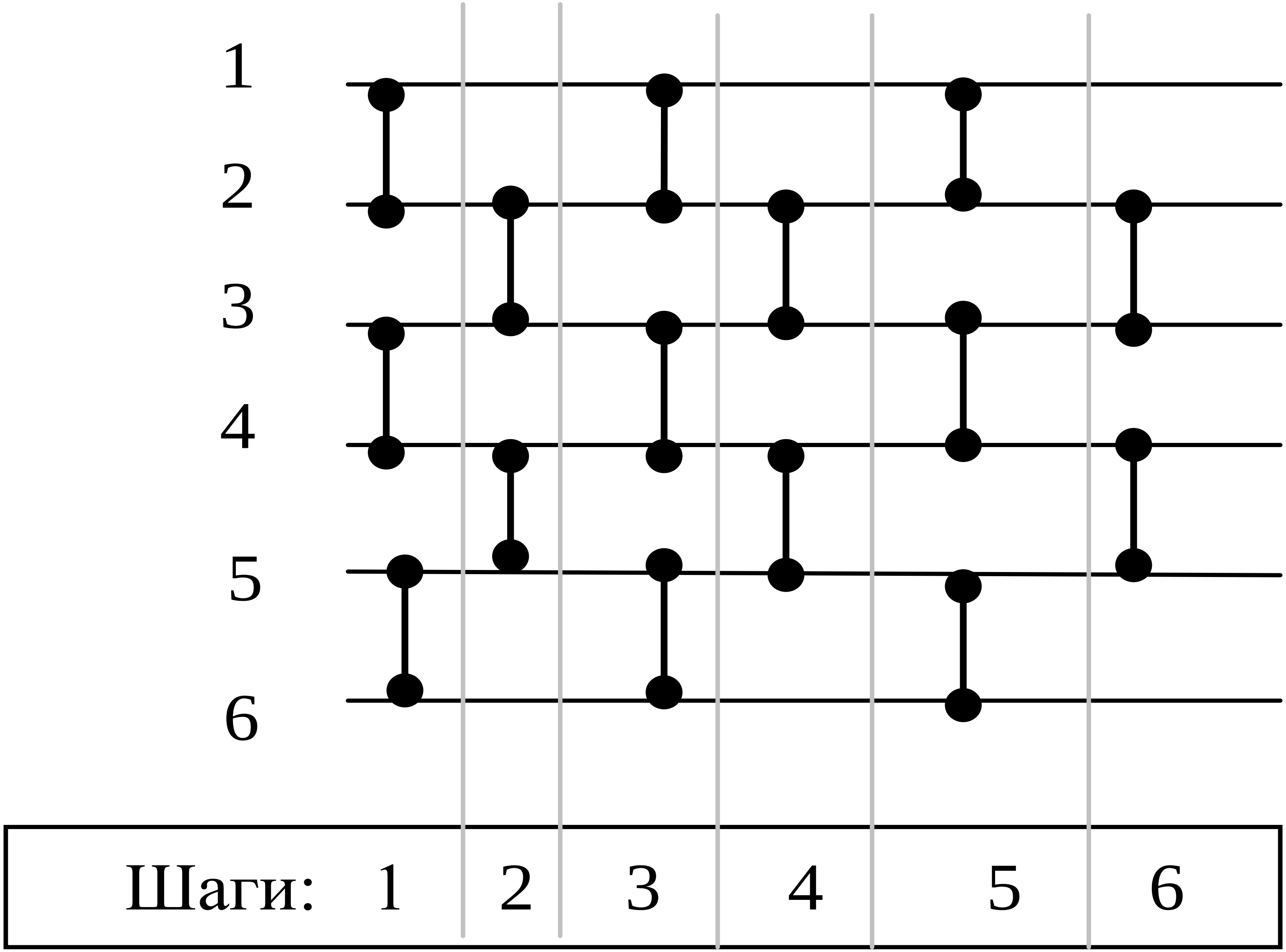


  - *Битонная сортировка*

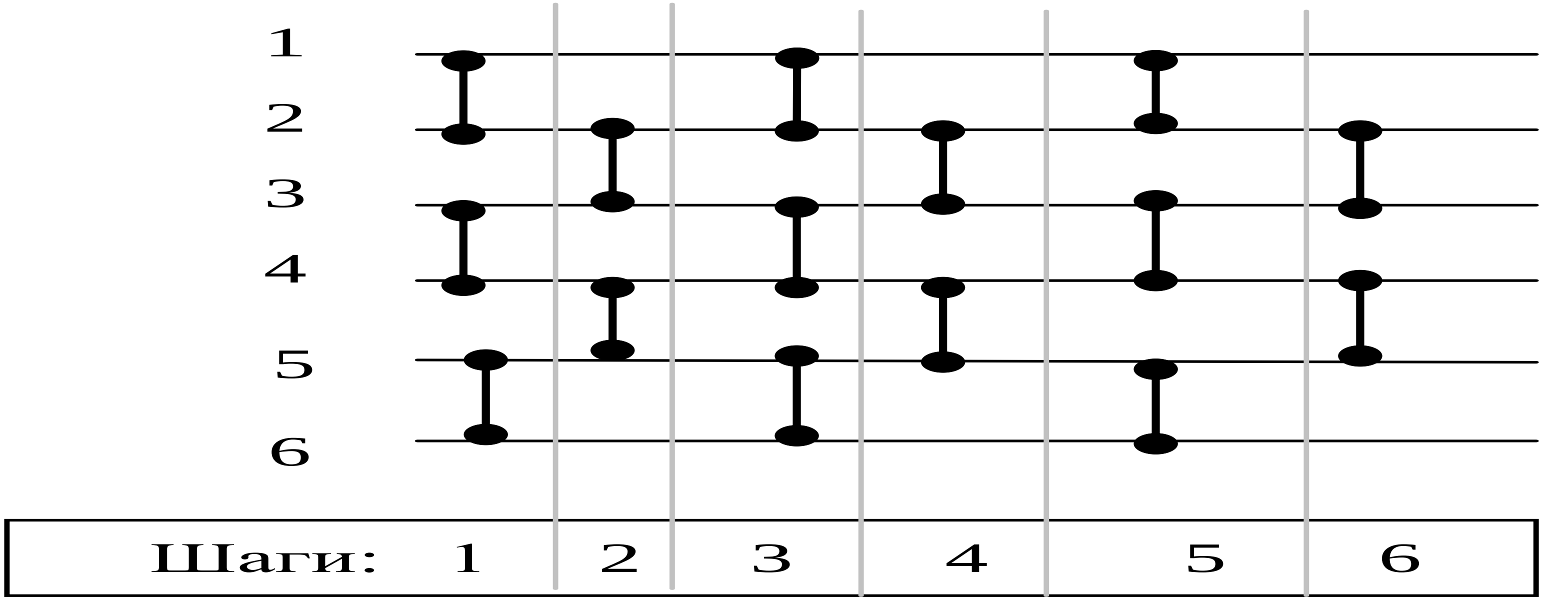
Сеть сортировки (пузырёк) $n=6$ $s=2n-3=9$



Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n=6 s=n=6*



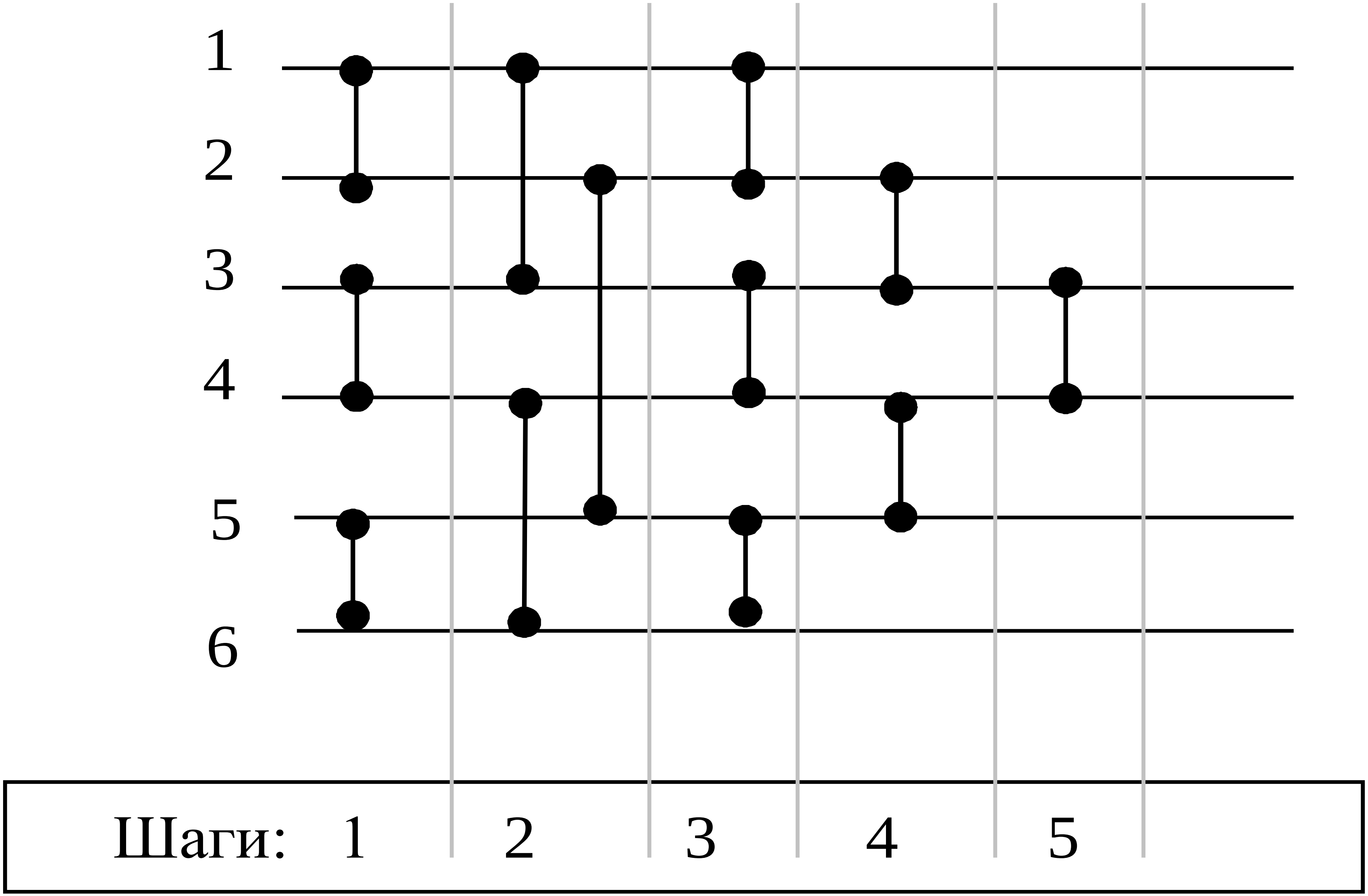
Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n=6 s=n=6*



$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2\frac{n}{p}+p\right]\right)=O\left(\frac{n}{p}\log_2\frac{n}{p}+n\right)\approx O(n)$$

$$T_p=O(n)$$

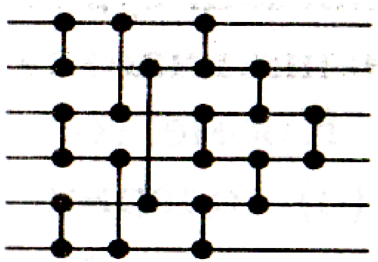
Минимальная сеть сортировки n=6 s=5



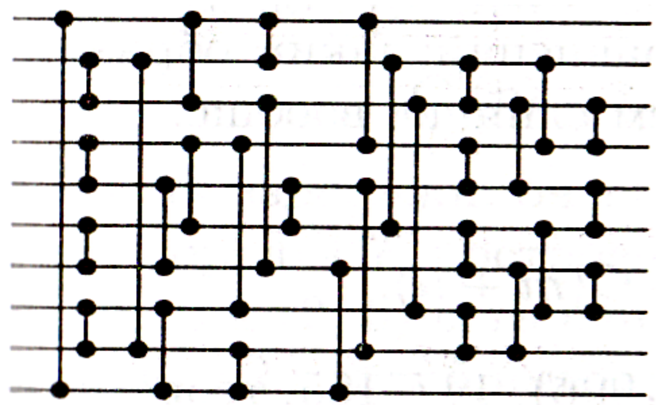
Минимальные сети сортировки

[Дн.Кнут]

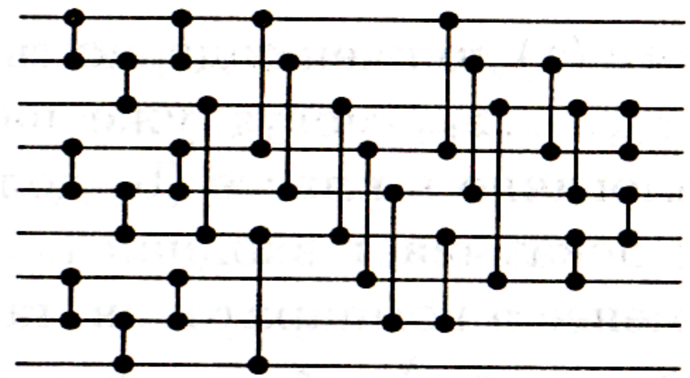
n=6 s=5



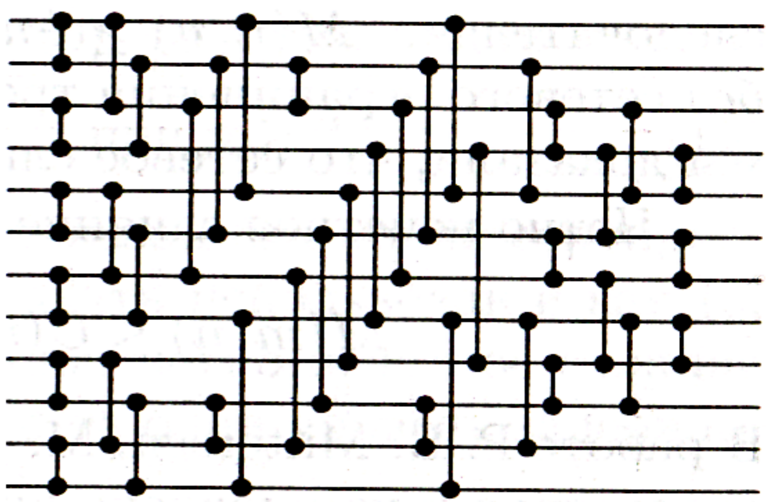
n=10 s=7



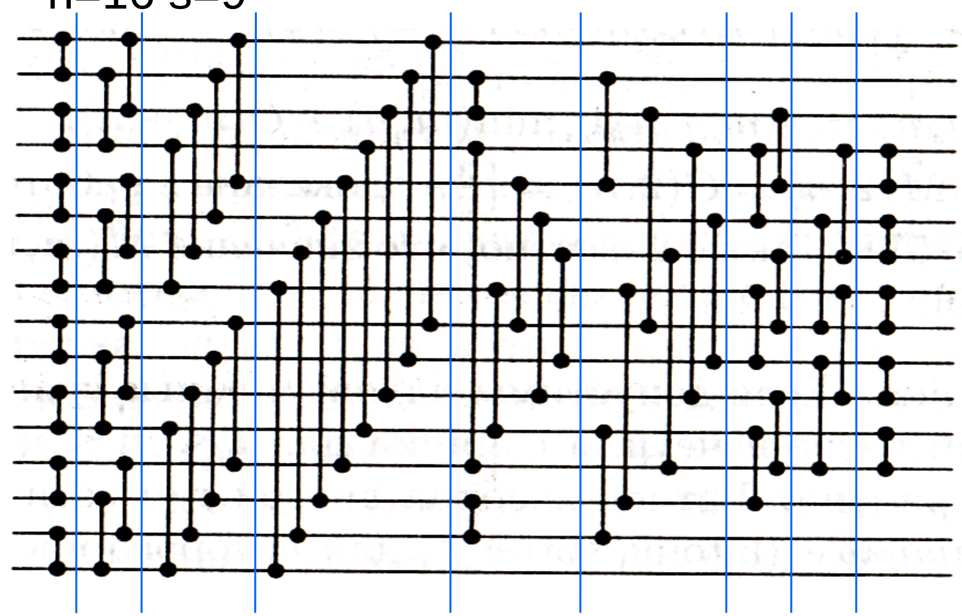
n=9 s=8



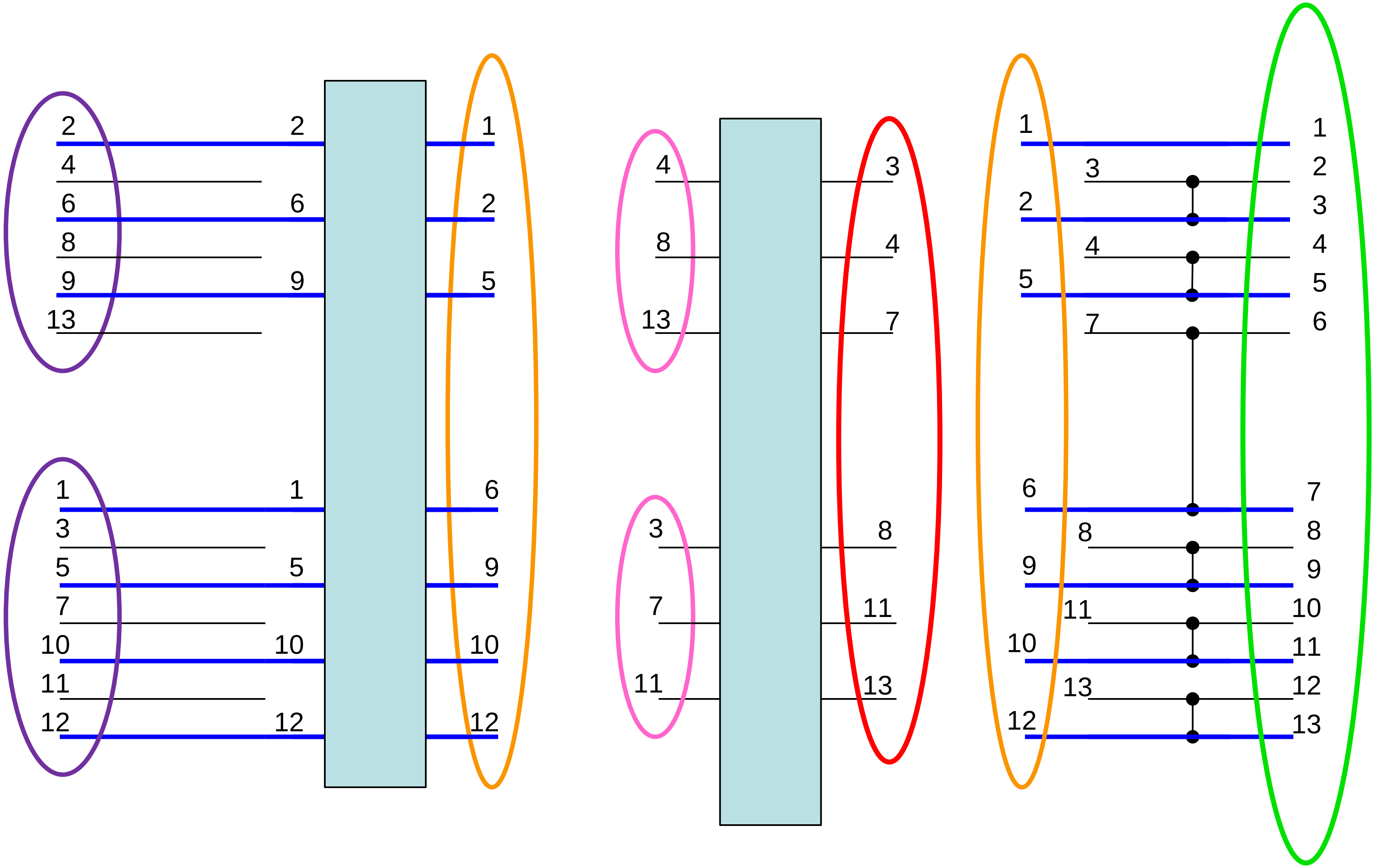
n=12 s=8



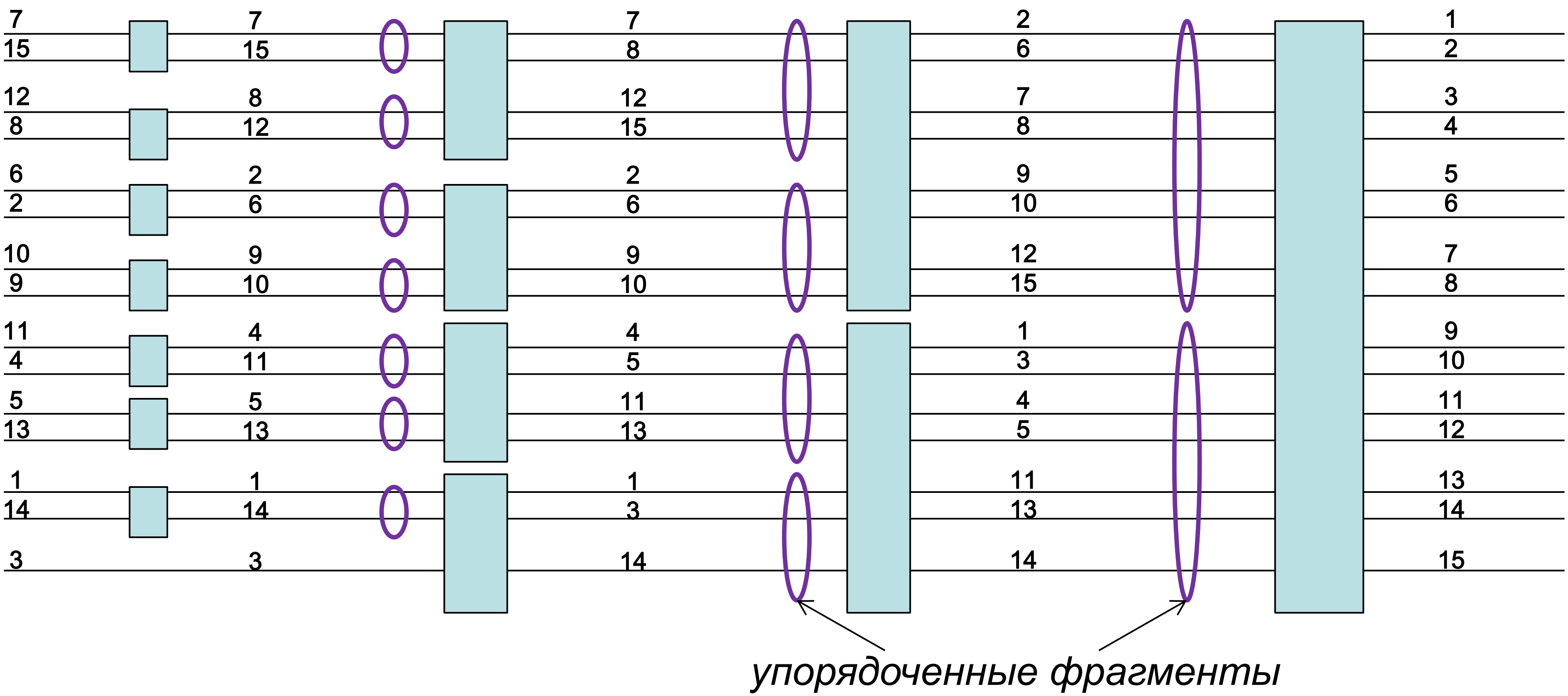
n=16 s=9



Четно-нечетное слияние Бэтчера – масштабируемая сеть



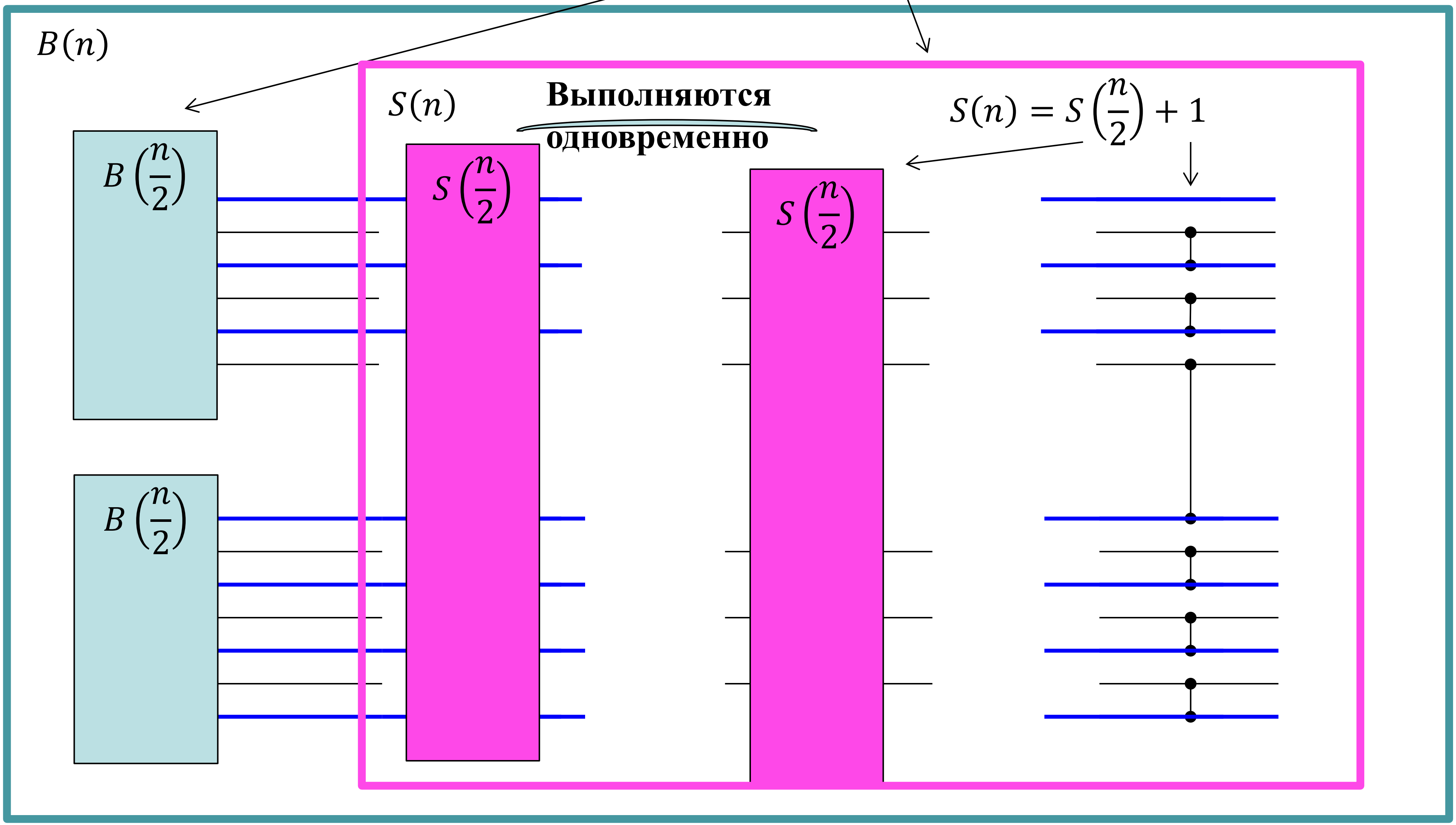
Сортировка массива из 15 элементов на основе четно-нечетного слияния Бэтчера



- сеть четно-нечетного слияния Бетчера

Оценка числа тактов

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + S(n)$$



Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + S(n)$$

$$S(n) = S\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + S(n)$$

$$S(n) = S\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad S(n) = \log_2 n$$

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n$$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + S(n)$$

$$S(n) = S\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad\qquad S(n) = \log_2 n$$

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n$$

$$B(n) = \frac{\log_2 n\,(\log_2 n + 1)}{2}$$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + S(n)$$

$$S(n) = S\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad S(n) = \log_2 n$$

$$B(n) = B\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n$$

$$B(n) = \frac{\log_2 n\,(\log_2 n + 1)}{2}$$

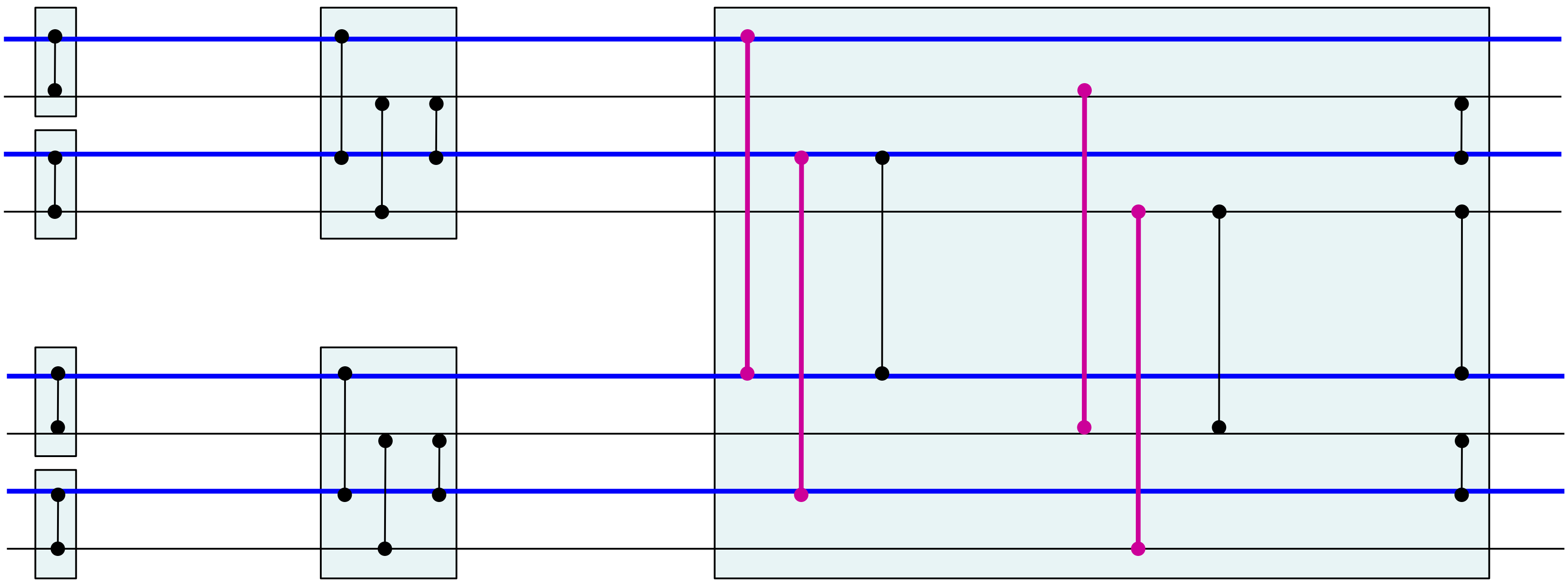
$$s_p \approx \frac{\lceil \log_2 p \rceil (\lceil \log_2 p \rceil + 1)}{2}$$

Сортировка восьми элементов

или

n элементов восемью процессорами

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2\frac{n}{p}+\frac{\lceil\log_2 p\rceil^2}{2}\right]\right)$$



- *сеть четно-нечетного слияния Бетчера*

Пример работы алгоритма
Начало, массив распределен по процессорам

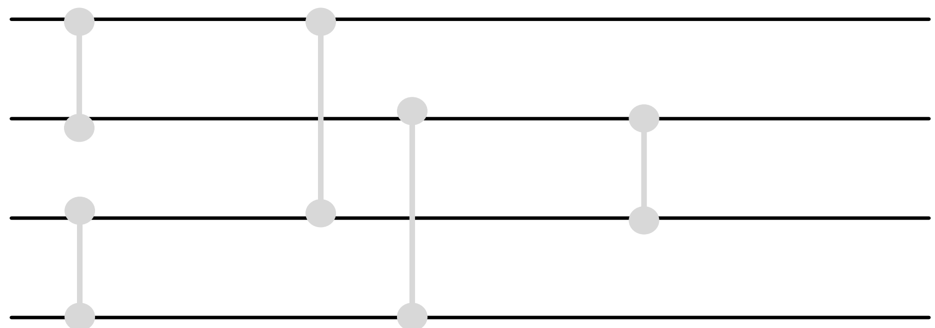
8 7 4   3 9 2   5 1 2   4 0 6

8 7 4

3 9 2

5 1 2

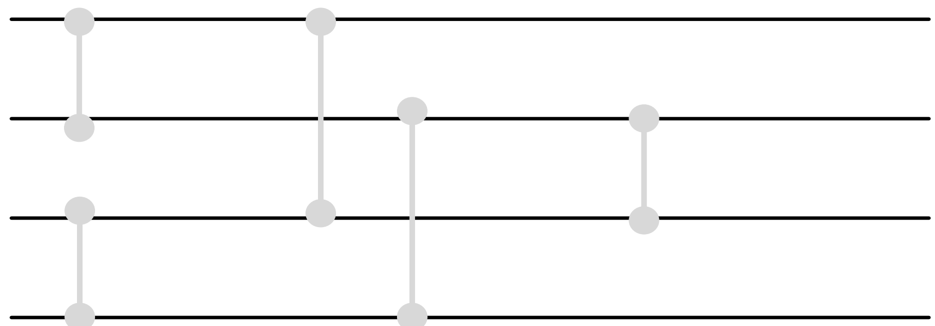
4 0 6



Сортируем фрагменты

8 7 4   3 9 2   5 1 2   4 0 6

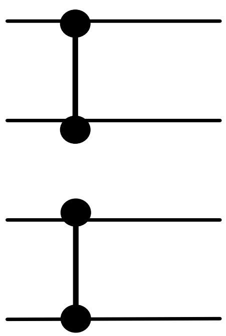
4 7 8
2 3 9
1 2 5
0 4 6



4 7 8   2 3 9   1 2 5   0 4 6

Первые два компаратора слияния перестановки

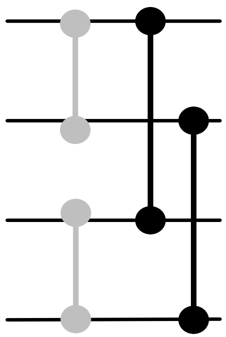
4 7 8   2 3 9   1 2 5   0 4 6

4 7 8		2 3 4
2 3 9		7 8 9
1 2 5		0 1 2
0 4 6		4 5 6

2 3 4   7 8 9   0 1 2   4 5 6

Вторая пара компараторов слияния перестановки

2 3 4   7 8 9   0 1 2   4 5 6

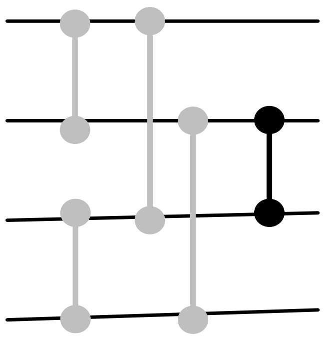
2 3 4		0 1 2
7 8 9		4 5 6
0 1 2		2 3 4
4 5 6		7 8 9

0 1 2   4 5 6   2 3 4   7 8 9

Последний компаратор слияния перестановки

0 1 2　　4 5 6　　2 3 4　　7 8 9

0 1 2
4 5 6
2 3 4
7 8 9

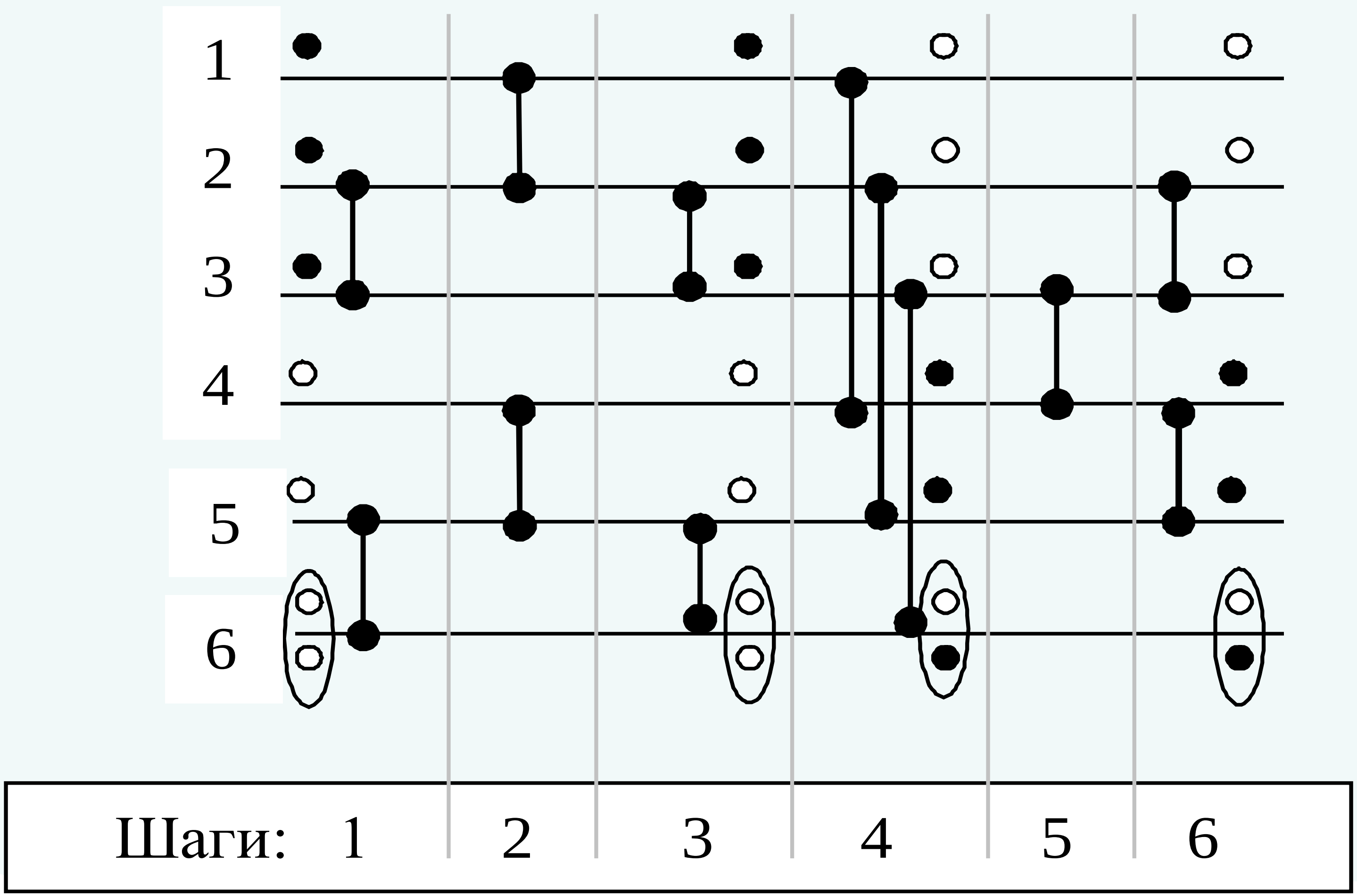


0 1 2
2 3 4
4 5 6
7 8 9

0 1 2　　2 3 4　　4 5 6　　7 8 9

Массив упорядочен

Ограничение метода:
Сортировка блоков – ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА

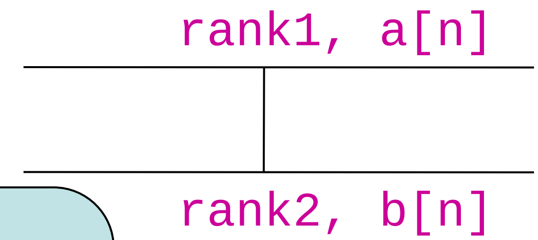


Слияние упорядоченных фрагментов

```
// объединить два упорядоченных массива a,b

for(ia=0,ib=0,k=0;k<n1+n2;k++)
     {
     if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
     else
     if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
     else
     if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
     else            c[k]=b[ib++];
     }
```

Слияние упорядоченных фрагментов




```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;k++)
    {
    if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
    else
    if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
    else
    if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
    else            c[k]=b[ib++];
    }
```

```
// n – число элементов в каждом из массивов a,b
```

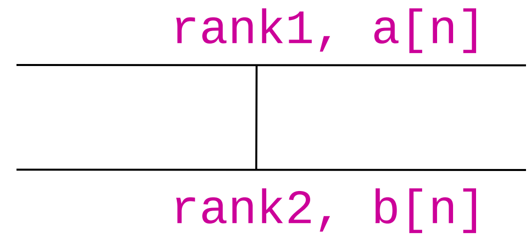
Слияние упорядоченных фрагментов

```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;k++)
      {



            if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
            else            c[k]=b[ib++];
      }

// n – число элементов в каждом из массивов a,b
```



Слияние упорядоченных фрагментов


```
Join(int *a, int *b, int *c, int n,rank1,rank2)
{
if(rank==rank1)
      for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;)
            {
            if(a[ia]<b[ib]) c[k++]=a[ia++];
            else             c[k++]=b[ib++];
            }
else
      for(ia=n-1,ib=n-1,k=n-1;k>=0;)
            {
            if(a[ia]>b[ib]) c[k--]=a[ia--];
            else             c[k--]=b[ib--];
            }
}
```

Реализация компаратора слияния

```
// взаимодействие процессоров rank и rankC
int *a,*b,*c,*tmp;
ASend(a,n,rankC);
ARecv(b,n,rankC);
ASync();

Join(a,b,c,n, rank, rankC);

tmp=a;
a=c;
c=tmp;
```

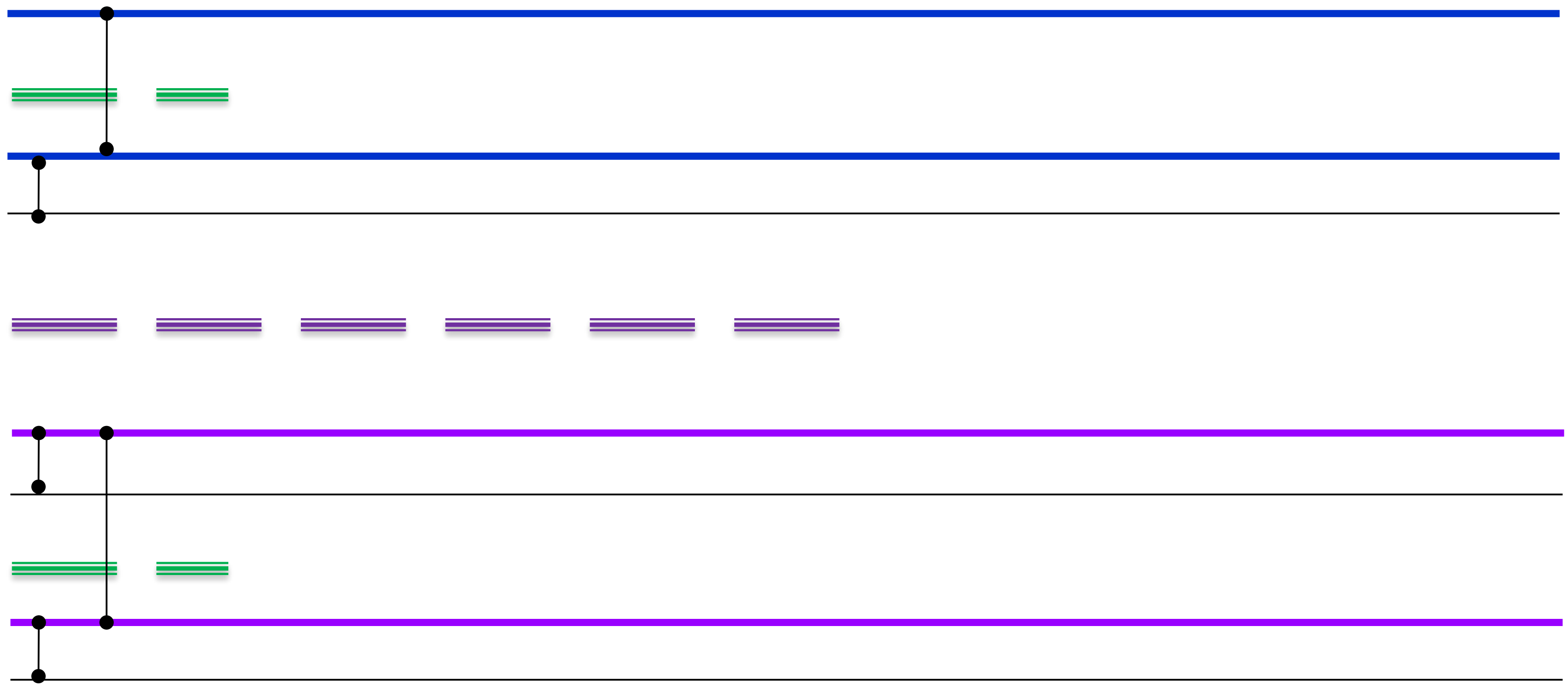
Сортировка семи элементов

Разделить на две группы

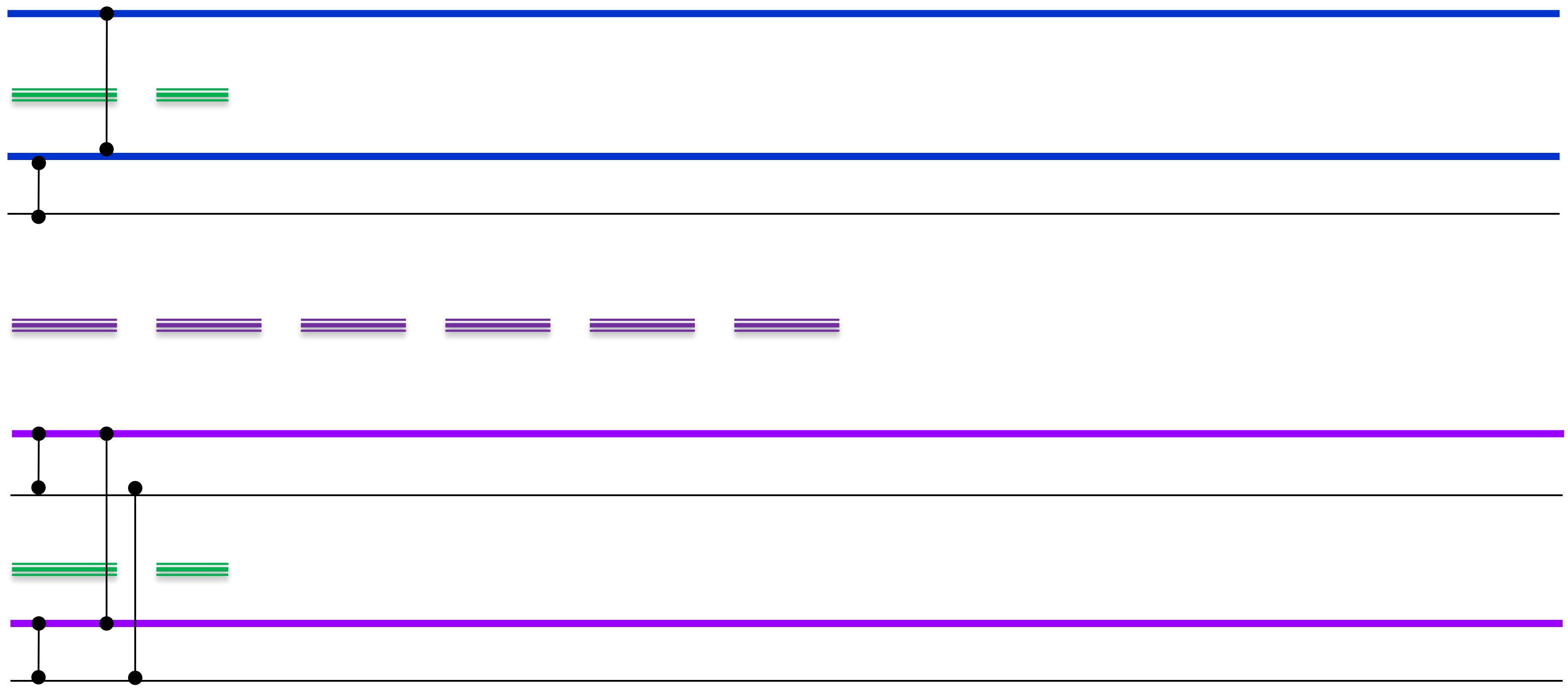
Снова разделить каждую группу

Сортировать каждый короткий фрагмент

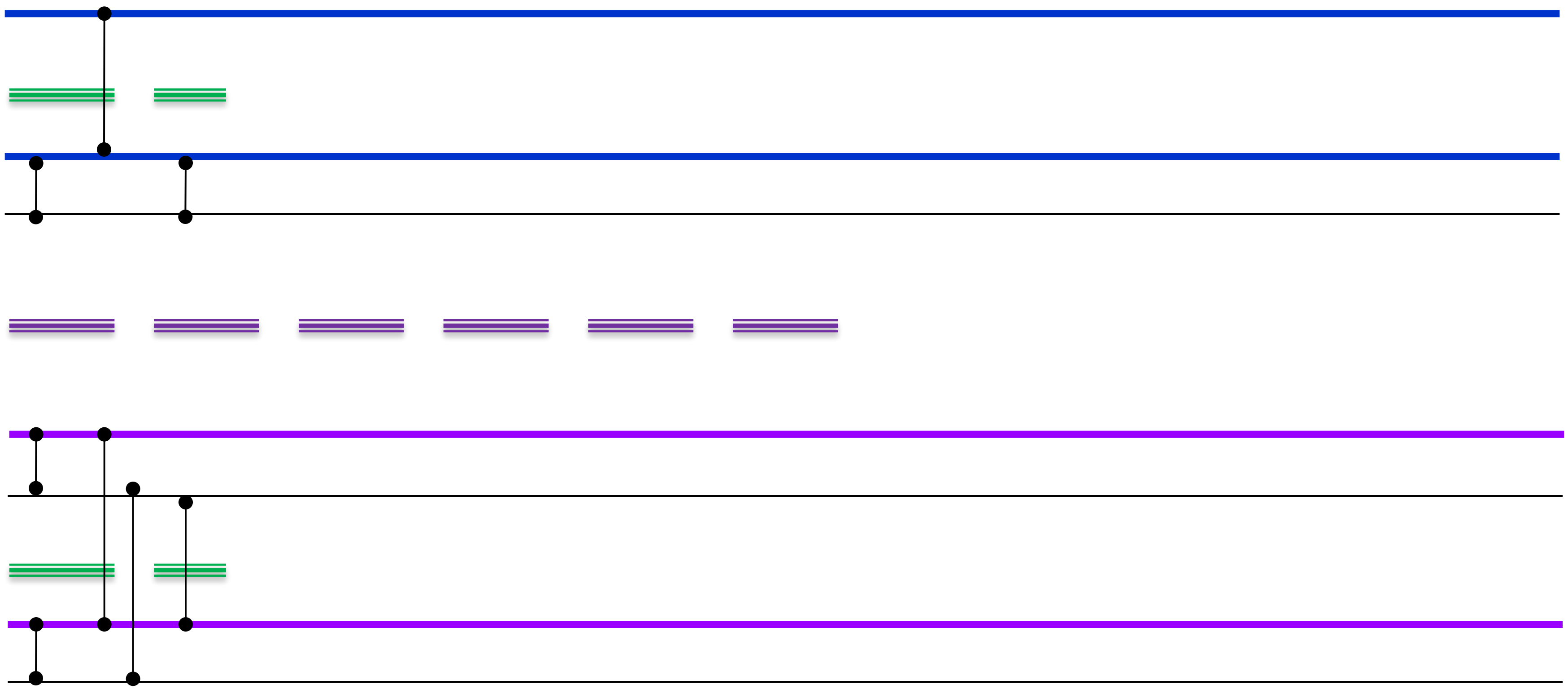
Сортировать нечетные строки в каждом из фрагментов



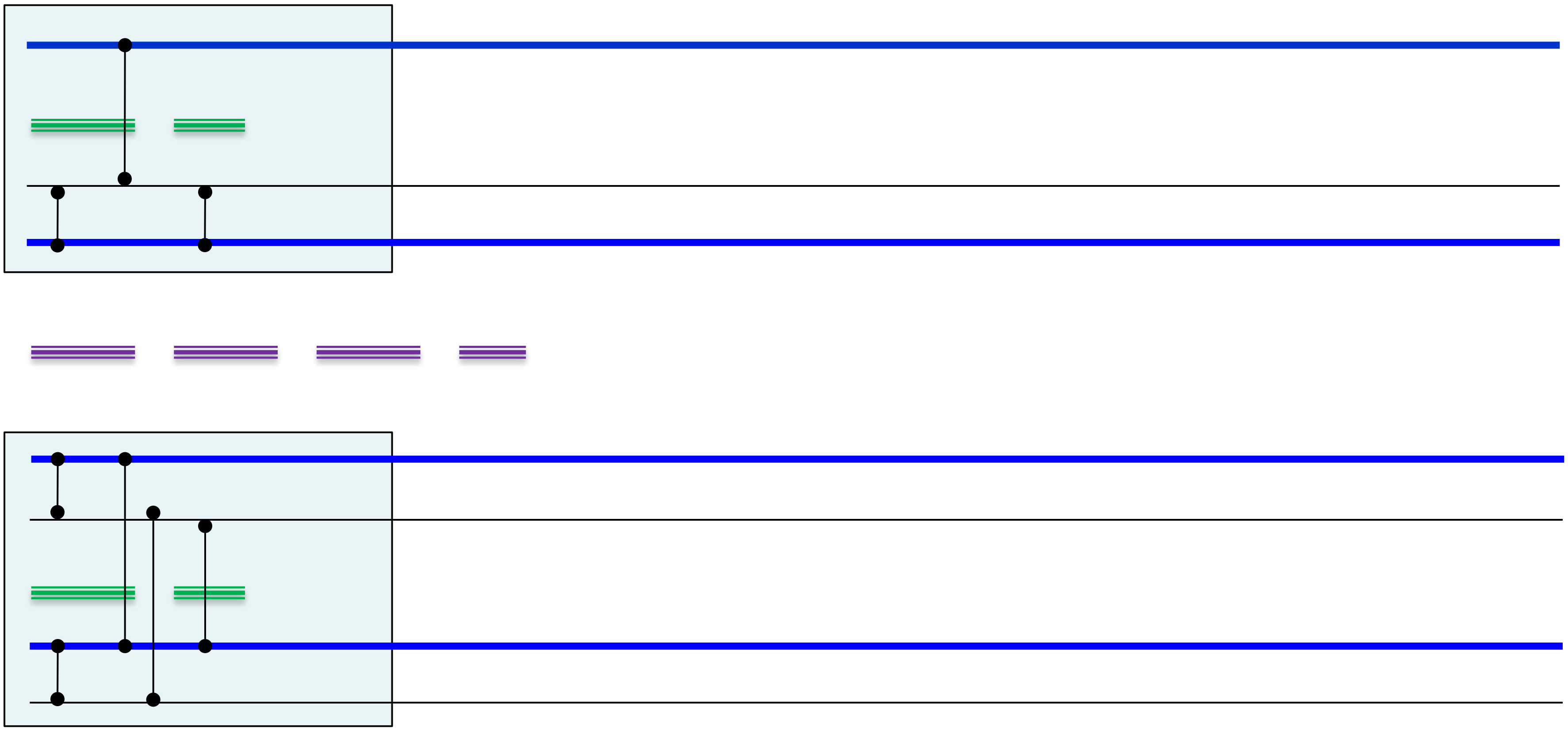
Сортировать четные строки в каждом из фрагментов



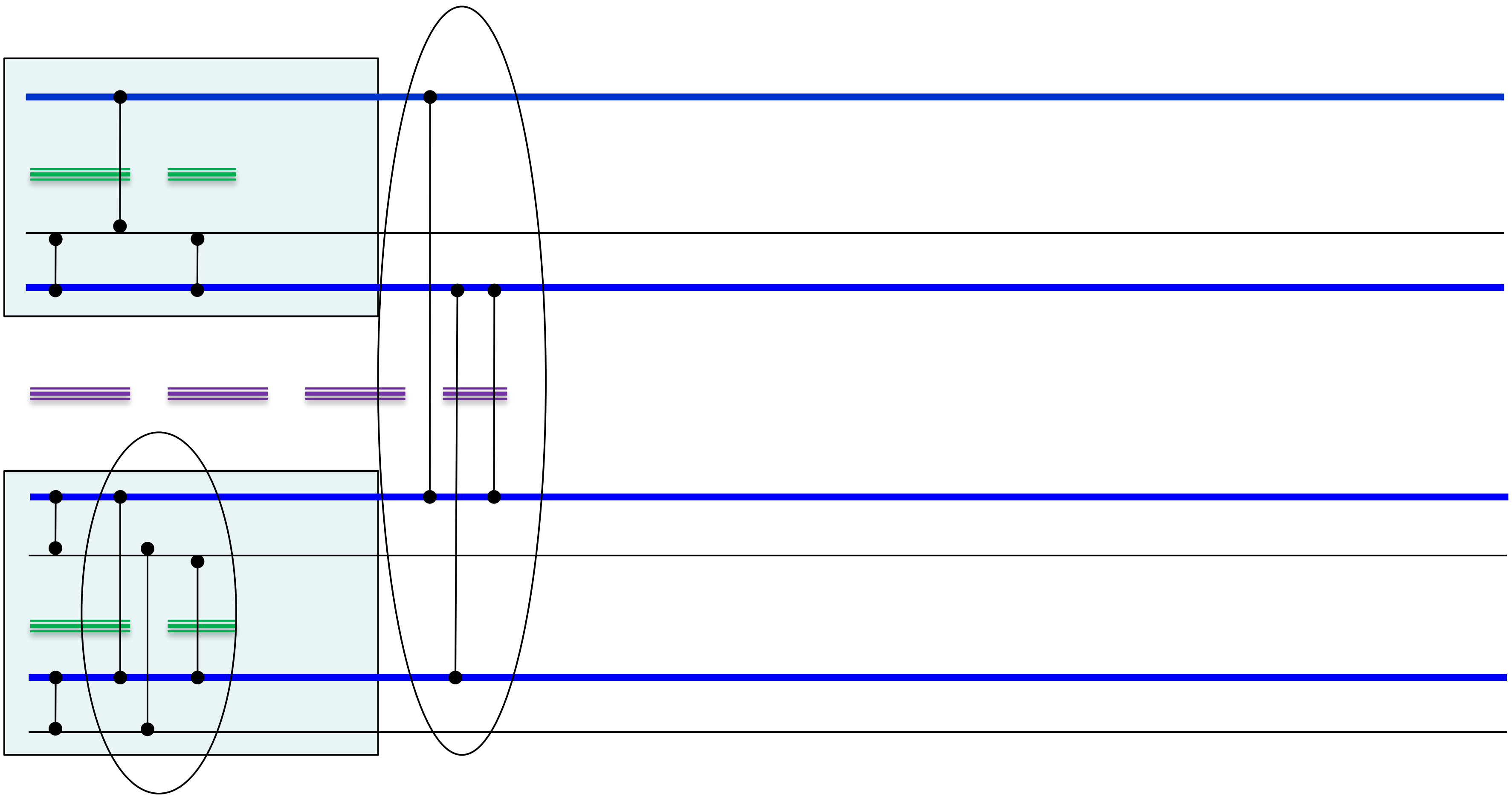
Объединить отсортированные четные и нечетные строки в каждом фрагменте



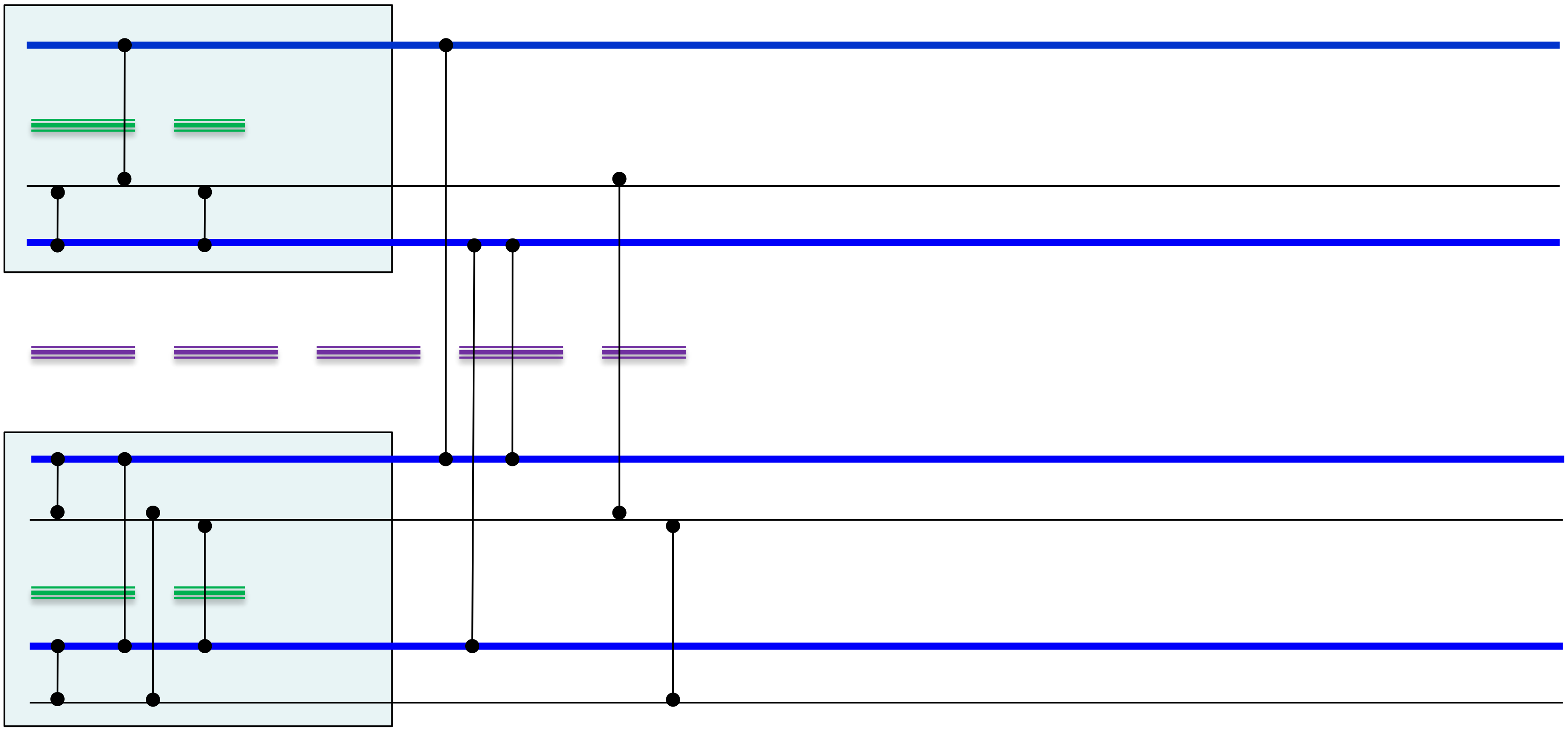
Объединить два отсортированных фрагмента



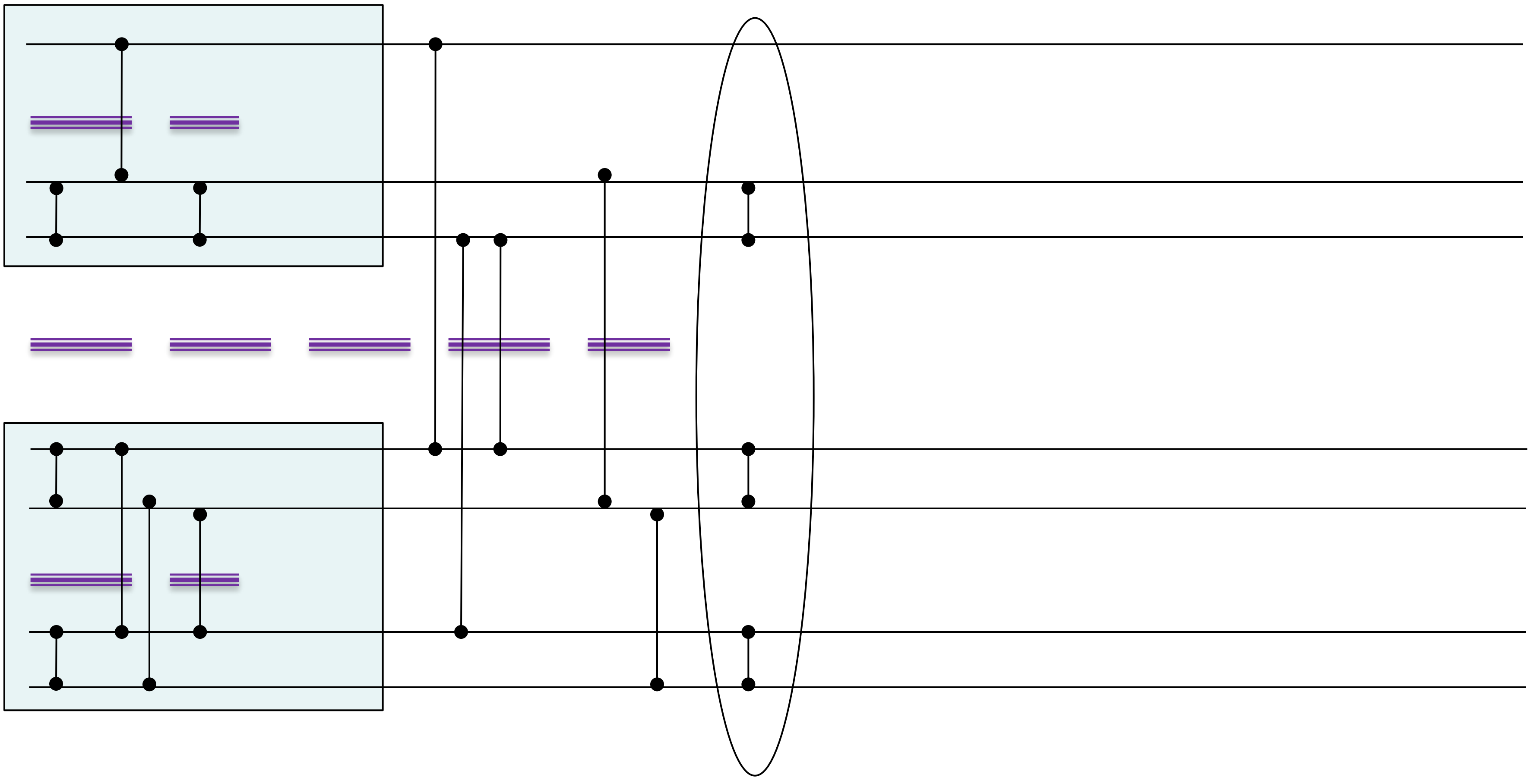
Объединить четные строки отсортированных фрагментов



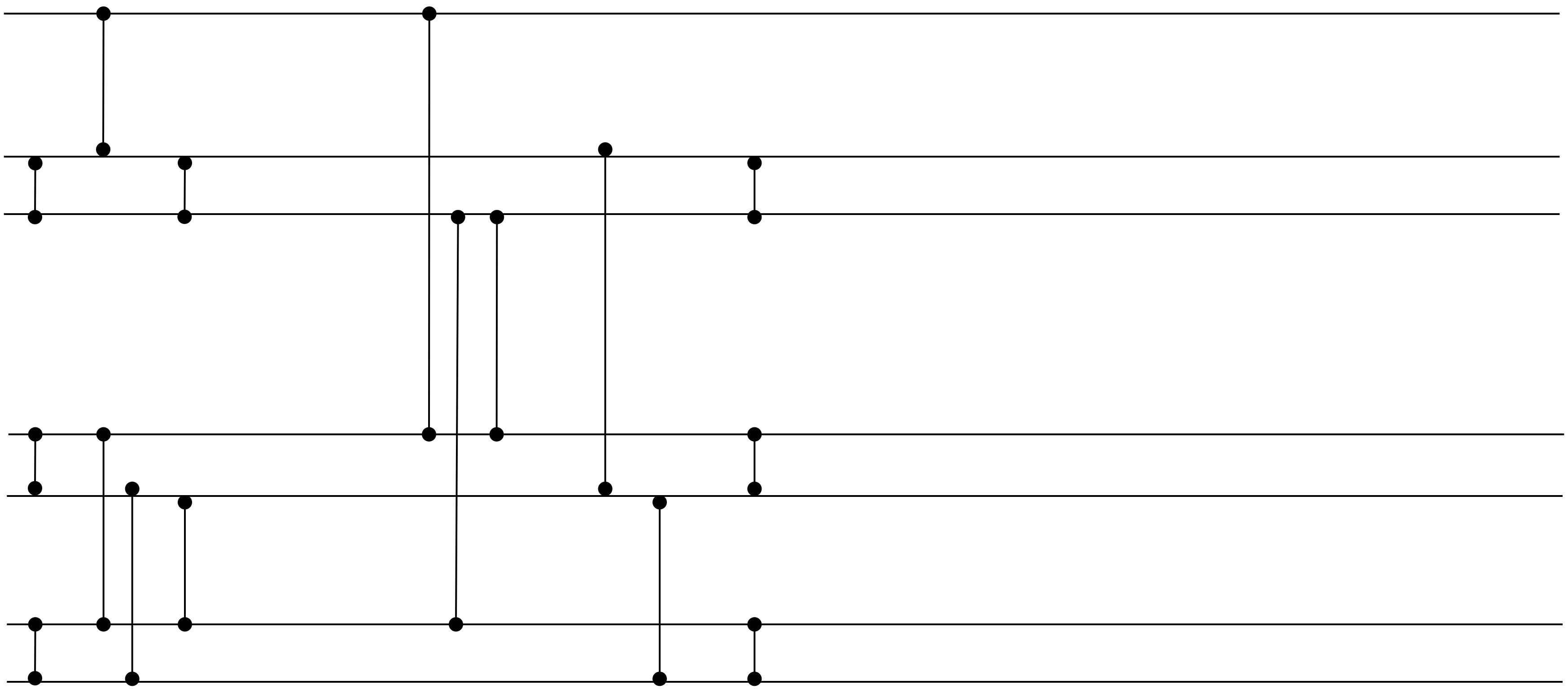
Объединить нечетные строки отсортированных фрагментов



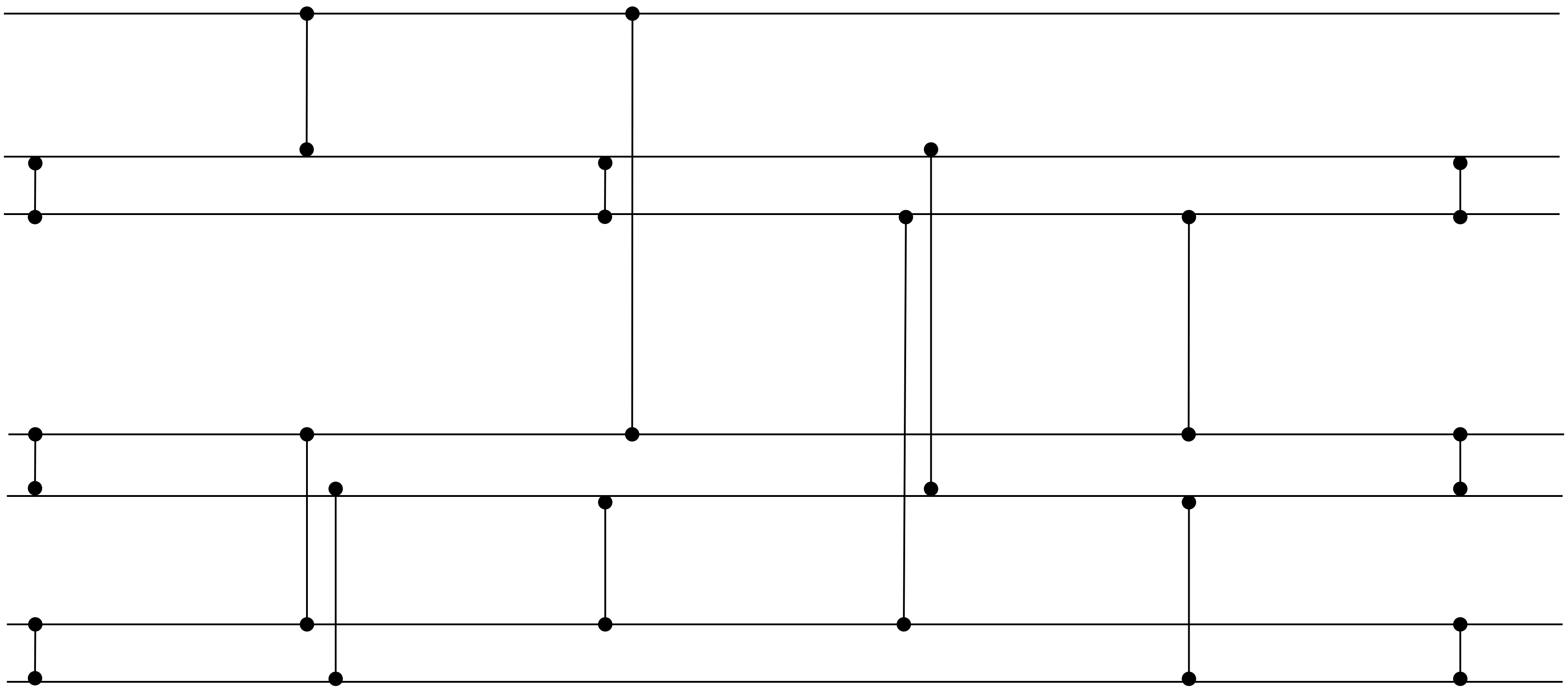
Замыкающая цепочка компараторов



Полная сеть сортировки



Полная сеть сортировки, такты выполнения

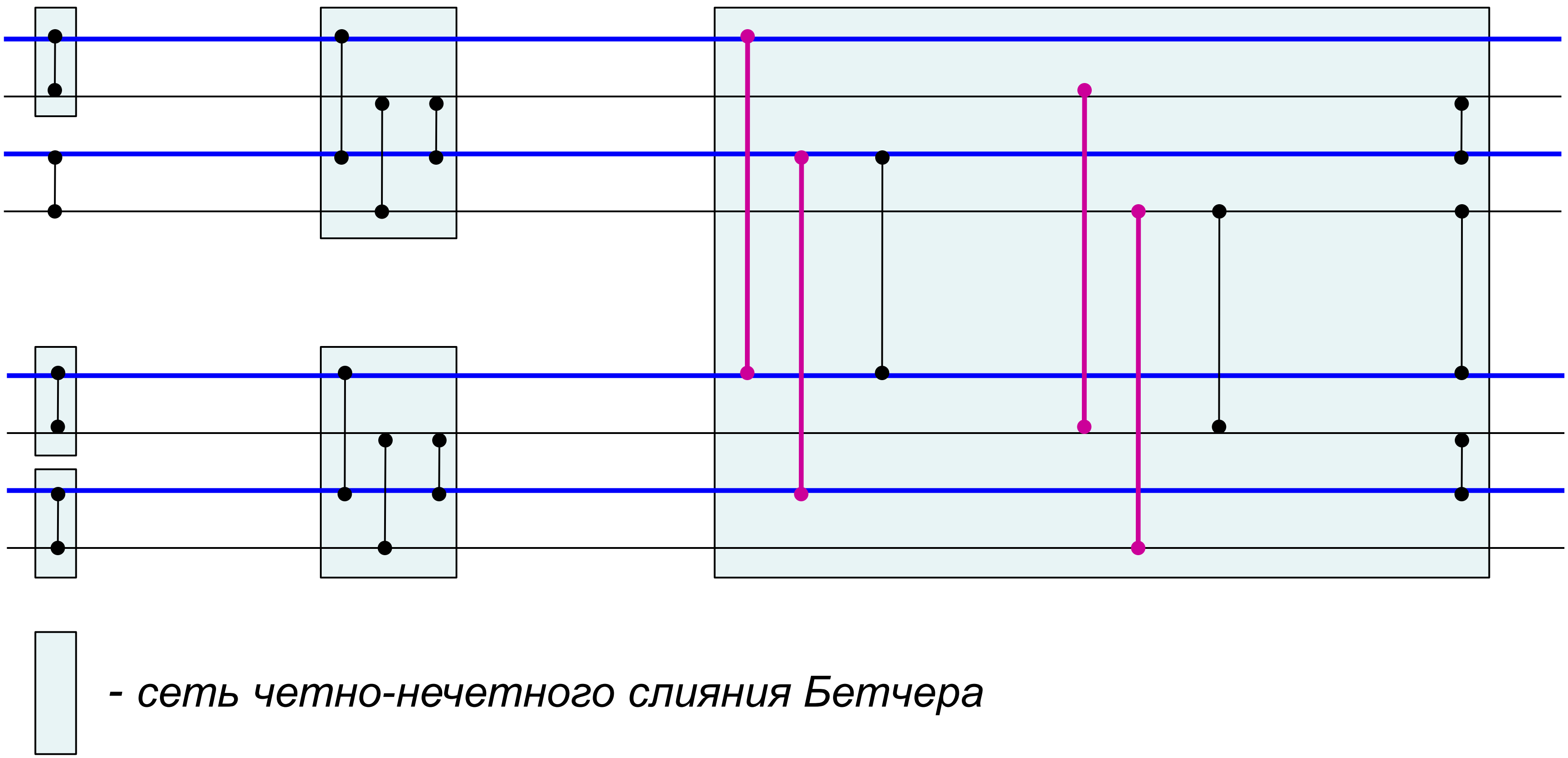


Сортировка восьми элементов

или

n элементов восемью процессорами

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2\frac{n}{p}+\frac{\lceil\log_2 p\rceil^2}{2}\right]\right)$$



- сеть четно-нечетного слияния Бетчера

n=10^8

$$E^{\max}(n,p)=\frac{\log_2 n}{\log_2 n+s_p-\log_2 p}\approx\frac{1}{1+\log_n p(\log_2 p-1)/2}$$

P	T,сек	E	S	E^{max}	S^{max}	s_p
1	83.51	100.00%	1.00	100%	1.0	0
2	46.40	90.00%	1.80	100%	2.0	1
3	35.93	77.48%	2.32	95%	2.8	3
4	29.68	70.35%	2.81	96%	3.9	3
5	24.45	68.33%	3.42	91%	4.5	5
6	22.16	62.80%	3.77	92%	5.5	5
7	21.82	54.67%	3.83	89%	6.2	6
8	19.95	52.32%	4.19	90%	7.2	6
16	12.36	42.22%	6.75	82%	13.1	10
27	9.32	33.20%	8.97	74%	20.0	14
32	7.85	33.24%	10.64	73%	23.3	15
48	6.45	26.97%	12.95	66%	31.9	19
64	4.92	26.53%	16.98	64%	40.9	21
128	3.19	20.47%	26.20	56%	71.5	28
192	2.52	17.29%	33.19	51%	98.2	33
256	1.99	16.41%	42.02	49%	124.6	36
384	1.63	13.33%	51.20	49%	187.0	41
512	1.29	12.64%	64.74	42%	217.4	45
640	1.21	10.78%	69.02	41%	264.7	47

$$s_p\approx\frac{\lceil\log_2 p\rceil\left(\lceil\log_2 p\rceil+1\right)}{2}$$

Заключение

- Рассмотрен ряд методов сортировки массивов
- Проиллюстрирована разница между зависимостью от объема данных времени сортировки и от числа выполняемых операций
- Построен «наилучший» последовательный алгоритм сортировки
- Рассмотрены сети сортировки
- Построен параллельный масштабируемый алгоритм сортировки

Контакты

Якобовский М.В., *чл.-корр. РАН, проф., д.ф.-м.н.,*

Заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук

mail: lira@imamod.ru

web: http://lira.imamod.ru