

Параллельные алгоритмы
20250218_04

Базовые параллельные алгоритмы

Якобовский Михаил Владимирович

Основные характеристики параллельной программы

- Ускорение $S_p = \frac{T_1}{T_p}$
- Эффективность $E_p = \frac{S_p}{p}$
- Предел масштабируемости – минимальное число процессоров при котором достигается максимальное ускорение
 - Число выполняемых операций
 - Время выполнения
 - Объём обрабатываемых данных

Неубедительность тестирования

... если для нас представляют интерес реально работающие системы, то требуется убедиться (и убедить всех сомневающихся) в корректности наших построений

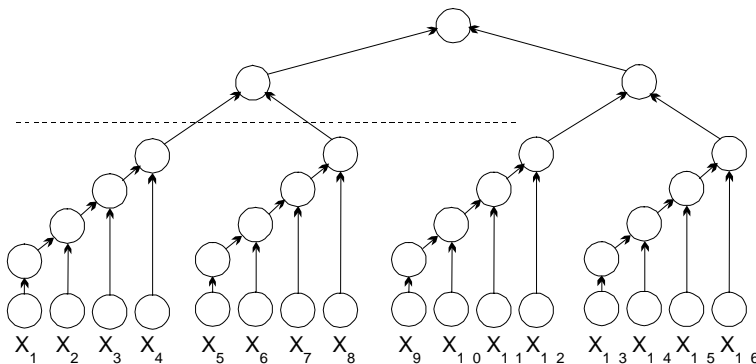
... системе часто придется работать в невоспроизводимых обстоятельствах, и мы едва ли можем ожидать сколько-нибудь серьезной помощи от тестов

*Dijkstra E.W.
1966*

Метод сдвигивания

Определение суммы элементов массива

| rank | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| i | 0 ... n/8-1 | n/8 ... 2n/8-1 | 2n/8 ... 3n/8-1 | 3n/8 ... 4n/8-1 | 4n/8 ... 5n/8-1 | 5n/8 ... 6n/8-1 | 6n/8 ... 7n/8-1 | 7n/8 ... 8n/8-1 |
| 1 | s = sum(a[i]) Recv(1,c) | s = sum(a[i]) Send(0,s) | s = sum(a[i]) Recv(3,c) | s = sum(a[i]) Send(2,s) | s = sum(a[i]) Recv(5,c) | s = sum(a[i]) Send(4,s) | s = sum(a[i]) Recv(7,c) | s = sum(a[i]) Send(6,s) |
| 2 | s = s + c Recv(2,c) | | s = s + c Send(0,s) | | s = s + c Recv(6,c) | | s = s + c Send(4,s) | |
| 3 | s = s + c Recv(4,c) | | | | s = s + c Send(0,s) | | | |
| | s = s + c | | | | | | | |



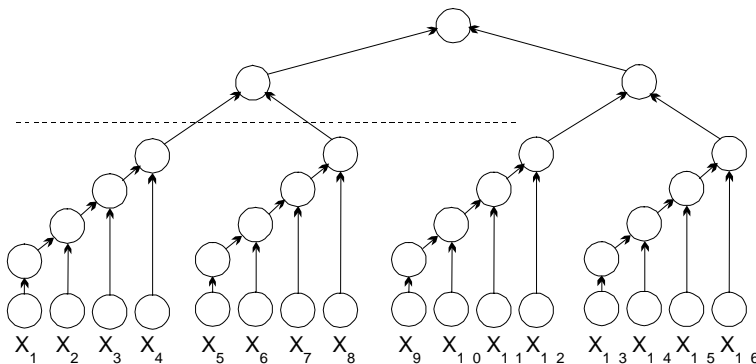
$$T_p = \frac{n}{p} \tau_c + (\tau_c + \tau_s) \log p$$

$$S_p = p \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{\tau_s}{\tau_c}\right) \frac{p}{n} \log p}$$

Метод сдваивания

Определение суммы элементов массива

| rank | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|--|----------------|--|-----------------|--|-----------------|--|-----------------|
| i | 0 ... n/8-1 | n/8 ... 2n/8-1 | 2n/8 ... 3n/8-1 | 3n/8 ... 4n/8-1 | 4n/8 ... 5n/8-1 | 5n/8 ... 6n/8-1 | 6n/8 ... 7n/8-1 | 7n/8 ... 8n/8-1 |
| 1 | s = sum(a[i]) Recv(1,c) ← Send(0,s) | s = sum(a[i]) | s = sum(a[i]) Recv(3,c) ← Send(2,s) | s = sum(a[i]) | s = sum(a[i]) Recv(5,c) ← Send(4,s) | s = sum(a[i]) | s = sum(a[i]) Recv(7,c) ← Send(6,s) | s = sum(a[i]) |
| 2 | s = s + c Recv(2,c) ← Send(0,s) | | s = s + c Send(0,s) | | s = s + c Recv(6,c) ← Send(4,s) | | s = s + c Send(4,s) | |
| 3 | s = s + c Recv(4,c) ← Send(0,s) | | | | s = s + c Send(0,s) | | | |
| | s = s + c | | | | | | | |



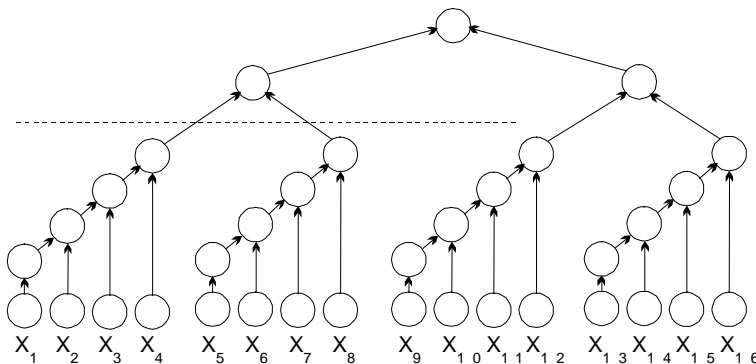
$$T_p = \frac{n}{p} \tau_c + (\tau_c + \tau_s) \log p$$

$$S_p = p \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{\tau_s}{\tau_c}\right) \frac{p}{n} \log p}$$

Метод сдваивания

Определение суммы элементов массива

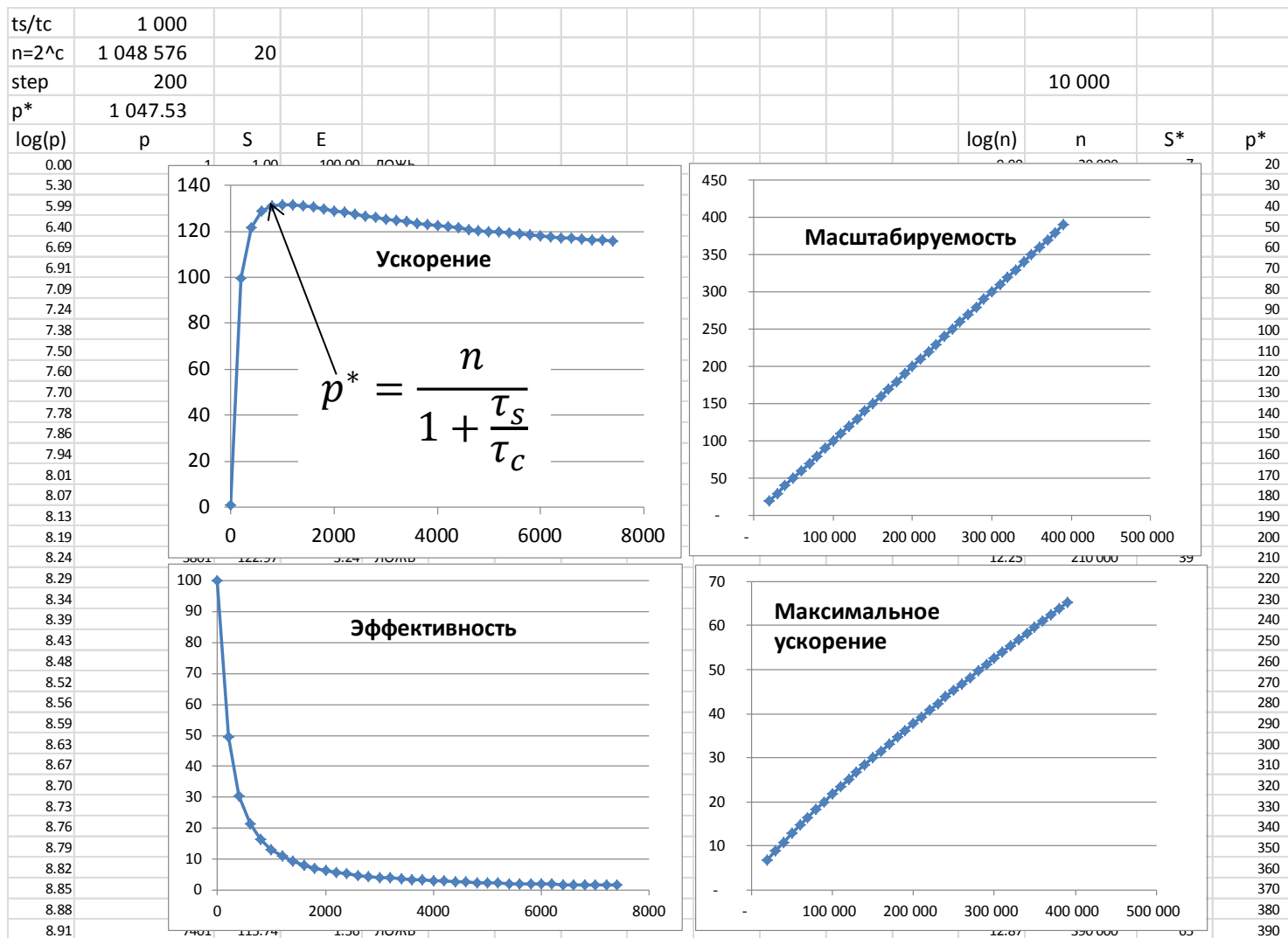
| rank | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|----------------------------|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|--|----------------------------|
| i | 0 ... n/8-1 | n/8 ... 2n/8-1 | 2n/8 ... 3n/8-1 | 3n/8 ... 4n/8-1 | 4n/8 ... 5n/8-1 | 5n/8 ... 6n/8-1 | 6n/8 ... 7n/8-1 | 7n/8 ... 8n/8-1 |
| 1 | s = sum(a[i]) Recv(1,c) | s = sum(a[i]) Send(0,s) | s = sum(a[i]) Recv(3,c) ← Send(2,s) | s = sum(a[i]) Send(2,s) | s = sum(a[i]) Recv(5,c) ← Send(4,s) | s = sum(a[i]) Send(4,s) | s = sum(a[i]) Recv(7,c) ← Send(6,s) | s = sum(a[i]) Send(6,s) |
| 2 | s = s + c Recv(2,c) | | s = s + c Send(0,s) | | s = s + c Recv(6,c) ← Send(4,s) | | s = s + c Send(4,s) | |
| 3 | s = s + c Recv(4,c) | | | | s = s + c Send(0,s) | | | |
| | s = s + c | | | | | | | |



$$T_p = \frac{n}{p} \tau_c + (\tau_c + \tau_s) \log p$$

$$S_p = p \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{\tau_s}{\tau_c}\right) \frac{p}{n} \log p}$$

Масштабируемость – число процессоров, при котором достигается максимальное ускорение



Неубедительность тестирования

... если для нас представляют интерес реально работающие системы, то требуется убедиться (и убедить всех сомневающихся) в корректности наших построений

... системе часто придется работать в невоспроизводимых обстоятельствах, и мы едва ли можем ожидать сколько-нибудь серьезной помощи от тестов

*Dijkstra E.W.
1966*

Метод геометрического параллелизма

Циклическая обработка локально связанных данных

- Обработка изображений
- Обработка данных, заданных на решетках или произвольных графах
- Моделирование физических процессов (течений жидкости и газов, теплопереноса, упругости, ...)
- ...

Одномерная явная разностная схема для уравнения диффузии

$$N_t = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

$$\frac{\bar{N}_i - N_i}{\tau} = D \frac{N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\bar{N}_0 = N_0 \quad \bar{N}_n = N_n$$

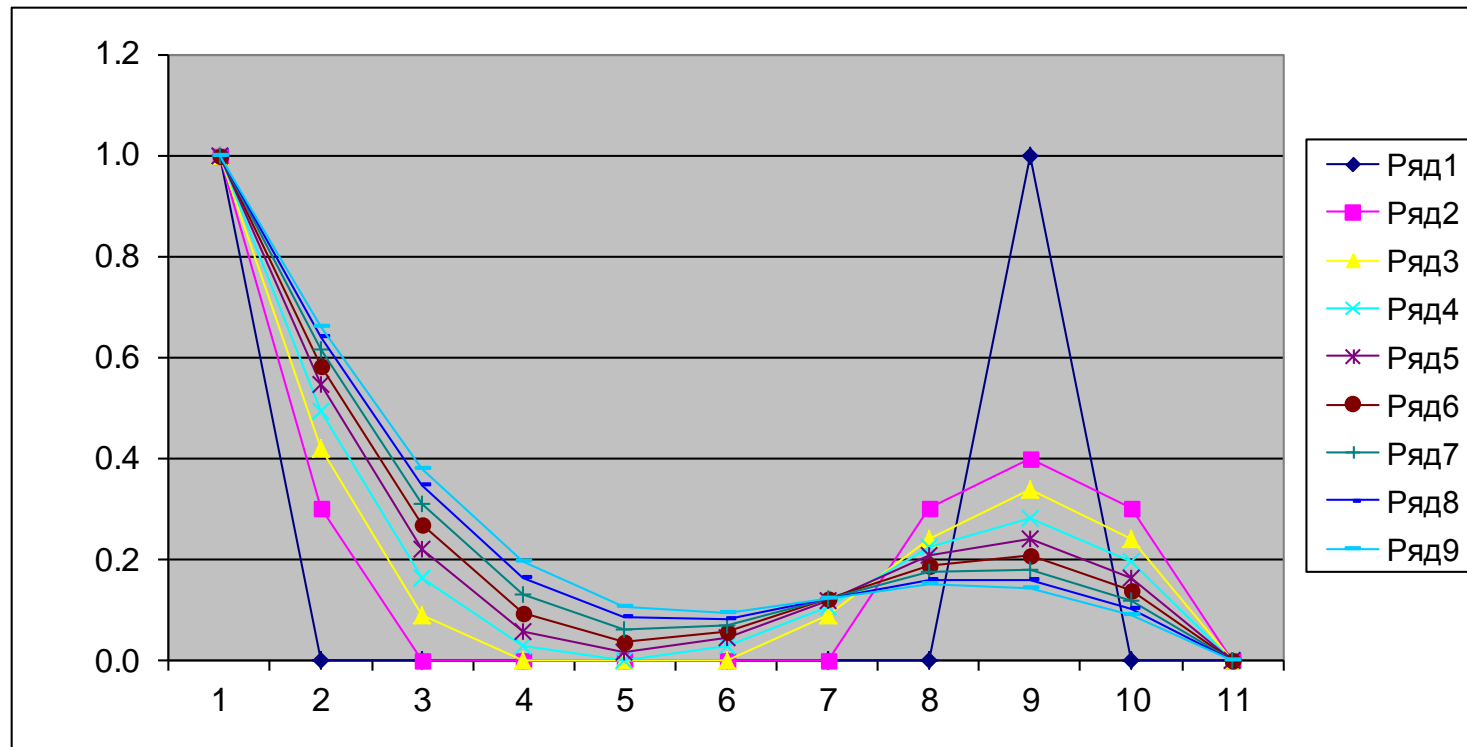
n – число ячеек

$$\frac{\bar{N}_n - N_n}{\tau} = D \frac{N_n - N_{n-1}}{h}$$

κ – число шагов по времени

$$\bar{N}_i = N_i + \tau \frac{D}{h^2} (N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

Решения одномерного уравнения, соответствующие 9ти моментам времени



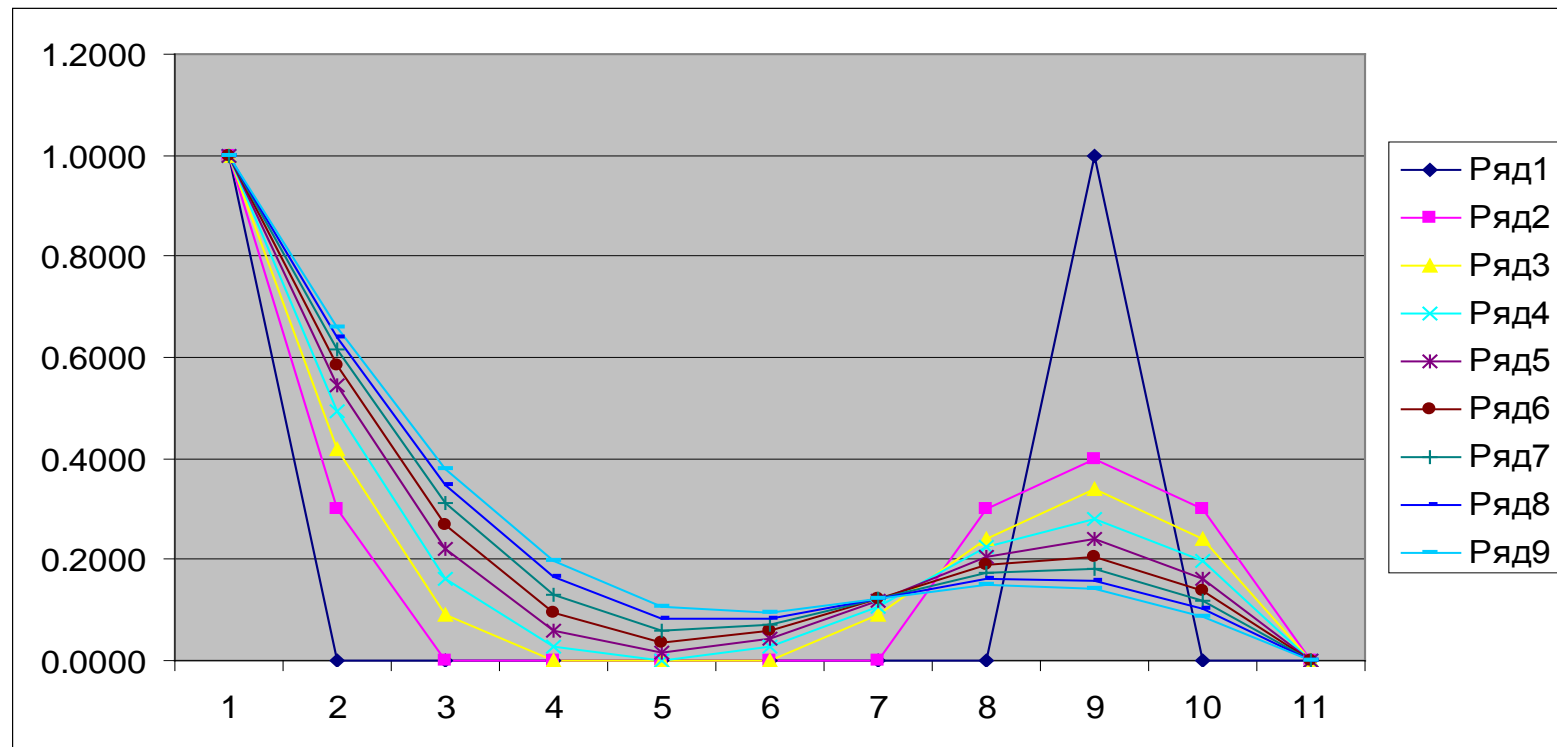
Одномерная явная разностная схема для уравнения диффузии

n – число ячеек

k – число шагов по времени

```
for( $j = 0; j < k; j++$ )  
{  
    for( $i = 1; i < n; i++$ )  
         $\bar{N}_i = N_i + \tau \frac{D}{h^2} (N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1})$   
     $\bar{N}_0 = N_0$   
     $\bar{N}_n = N_n$   
    for( $i = 0; i \leq n; i++$ )  
         $N_i = \bar{N}_i$   
}
```

Решения одномерного уравнения, соответствующие 9ти моментам времени



Метод геометрического параллелизма

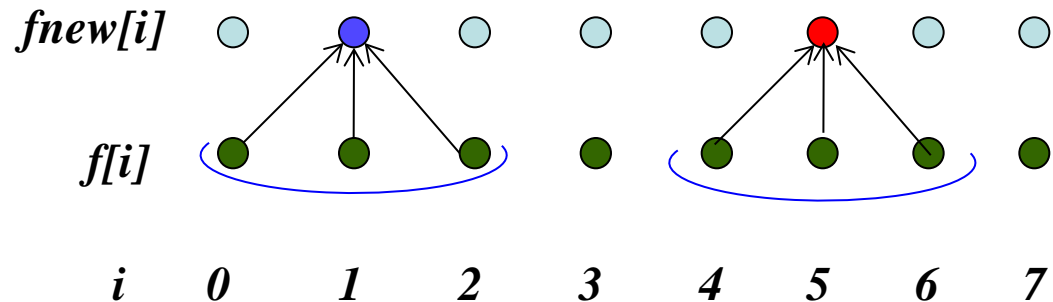
```
for(t=0; t<k; t++)  
{
```

```
  for( i=1; i<n; i++)  
    fnew[i]=fun( f[i-1], f[i], f[i+1] )
```

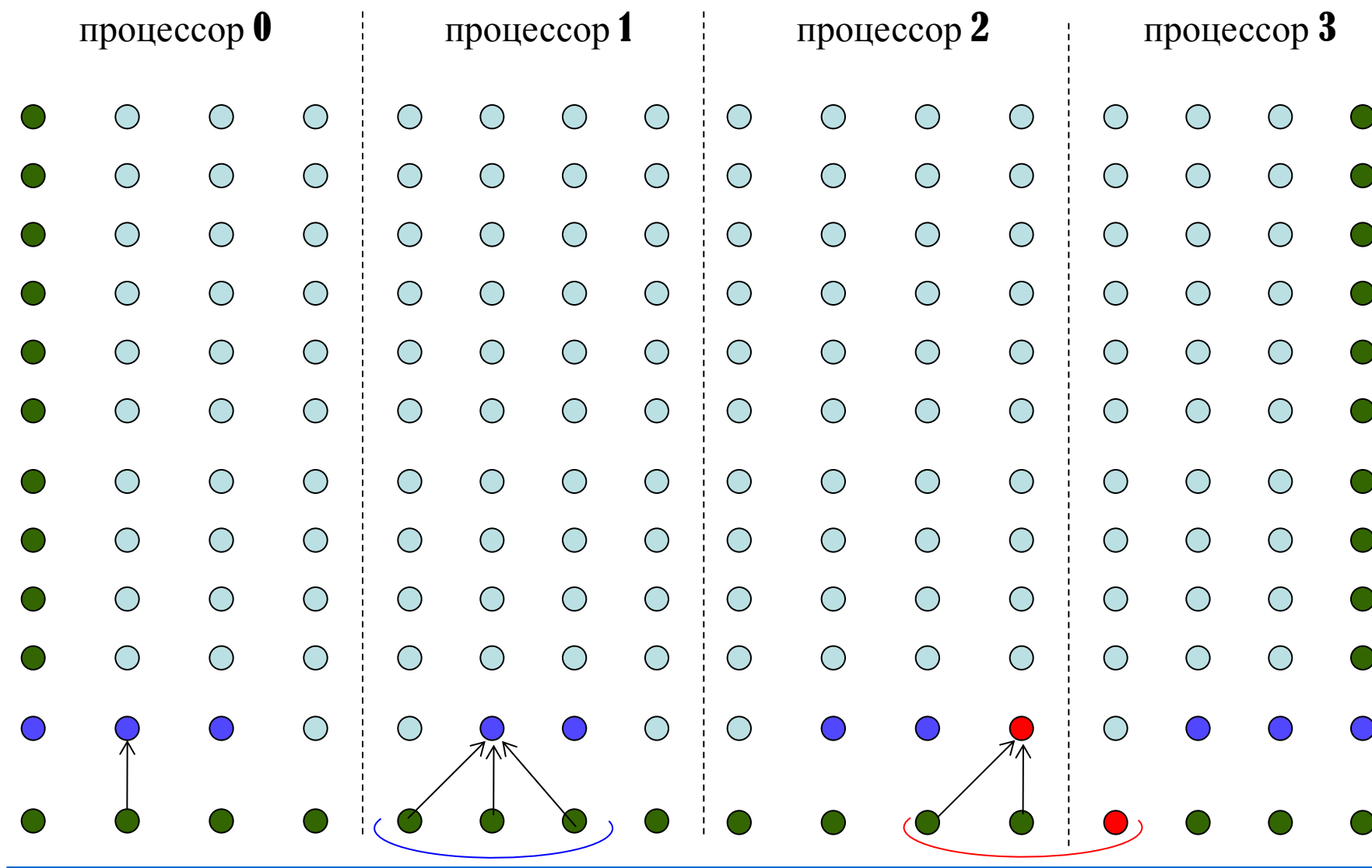
```
  for( i=0; i<=n ; i++)  
    f[i] = fnew [i]
```

```
}
```

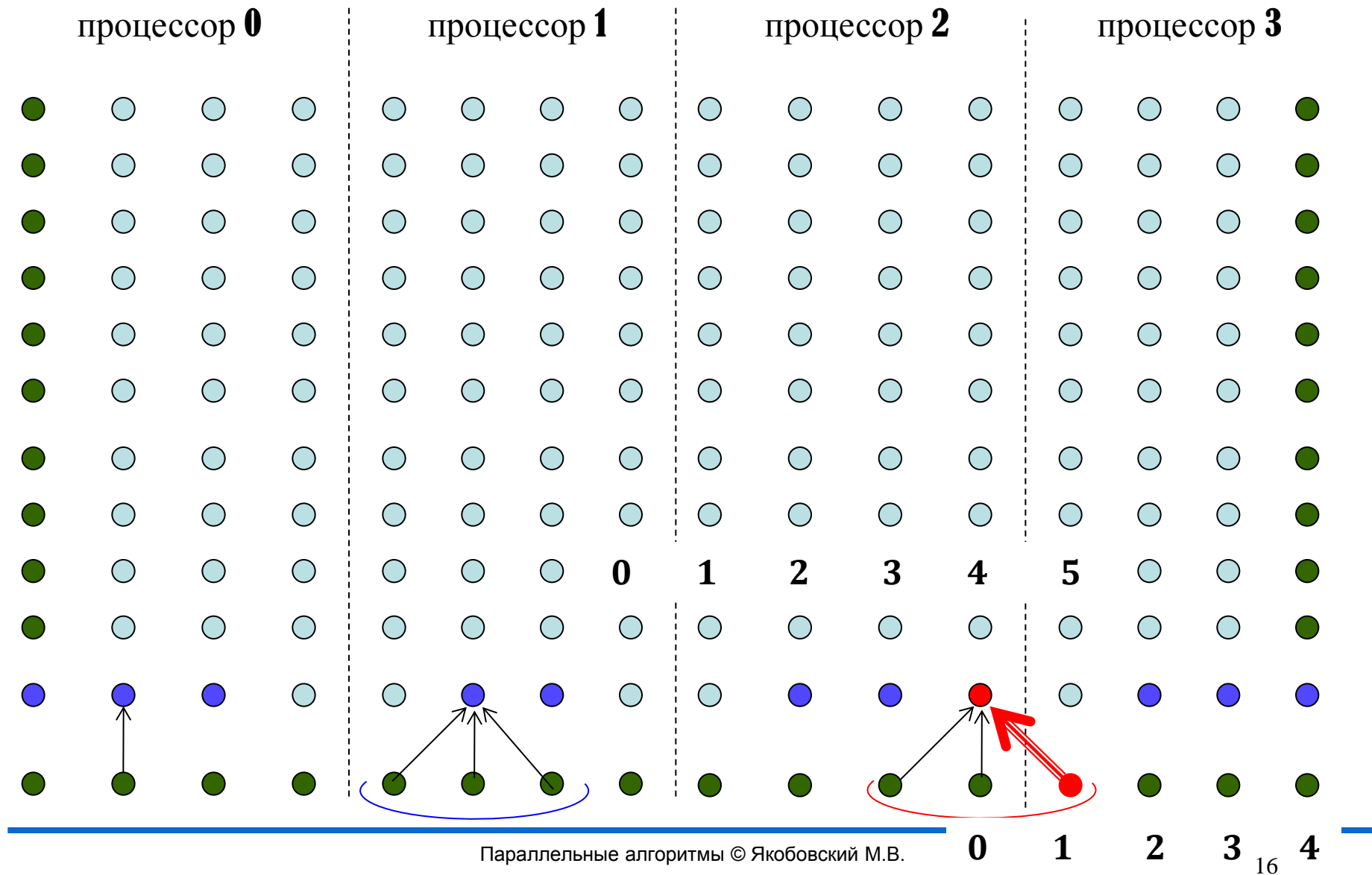
τ_c — время вычисления $fun(f-, f, f+)$



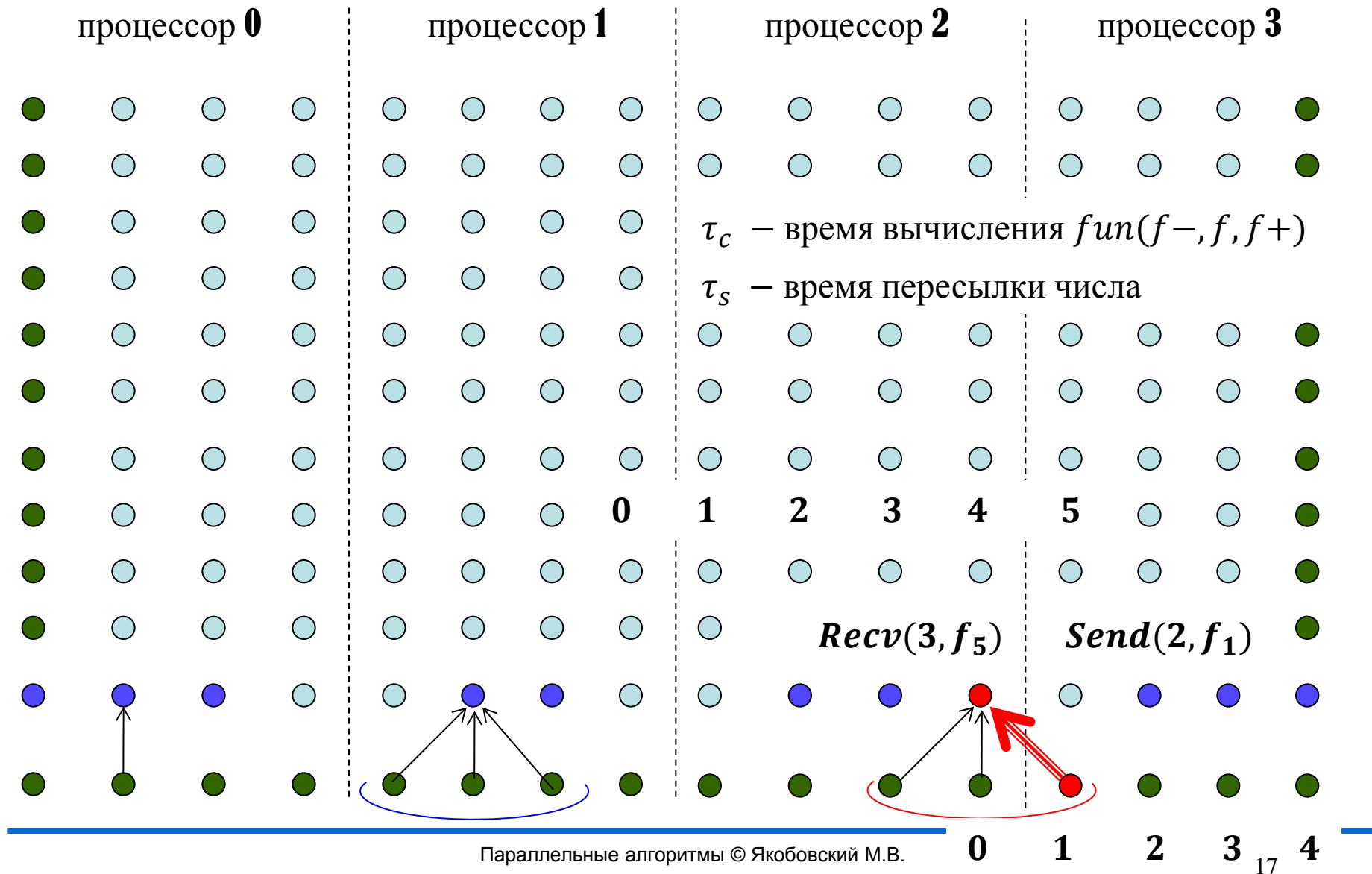
Метод геометрического параллелизма



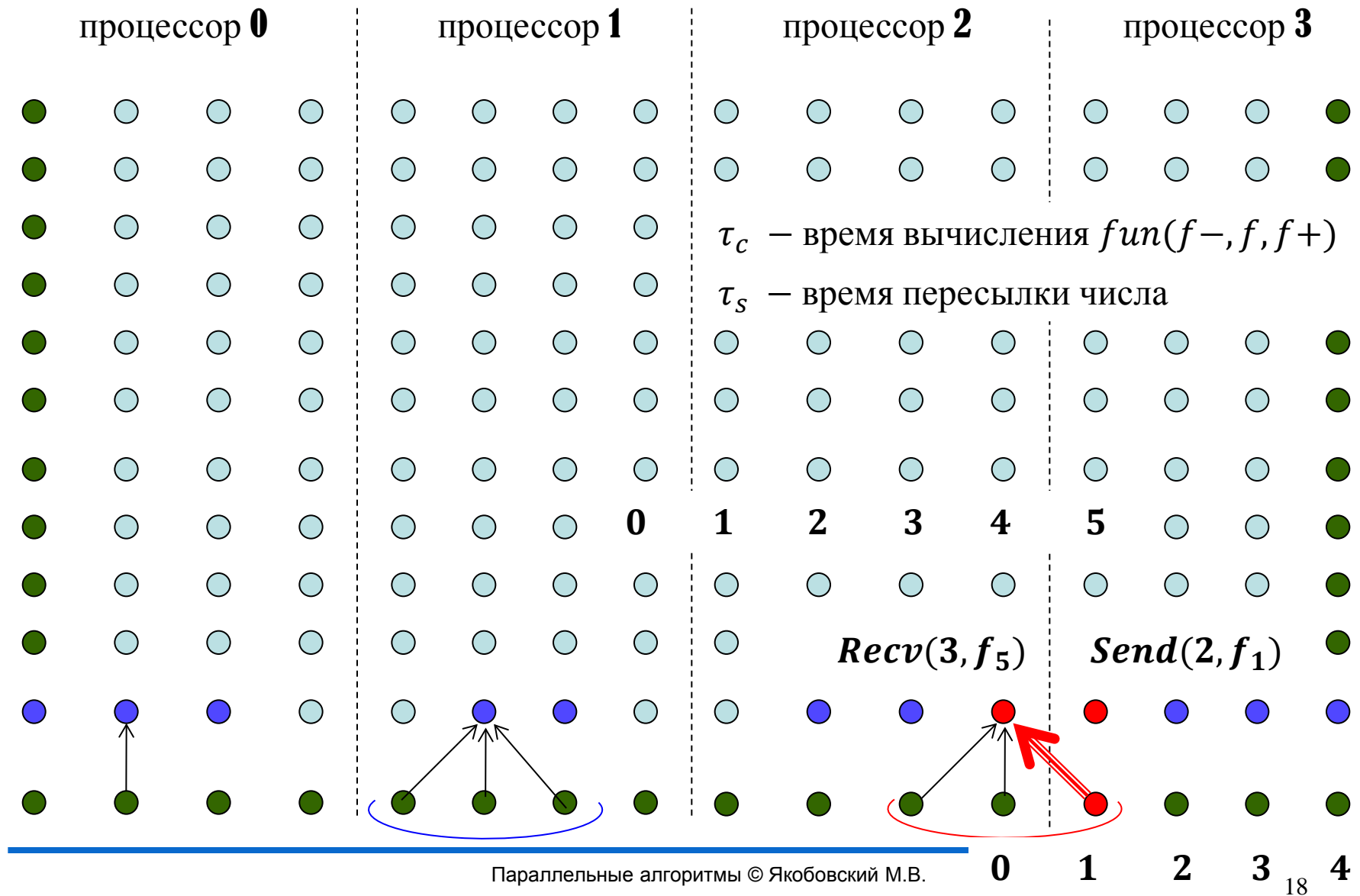
Метод геометрического параллелизма



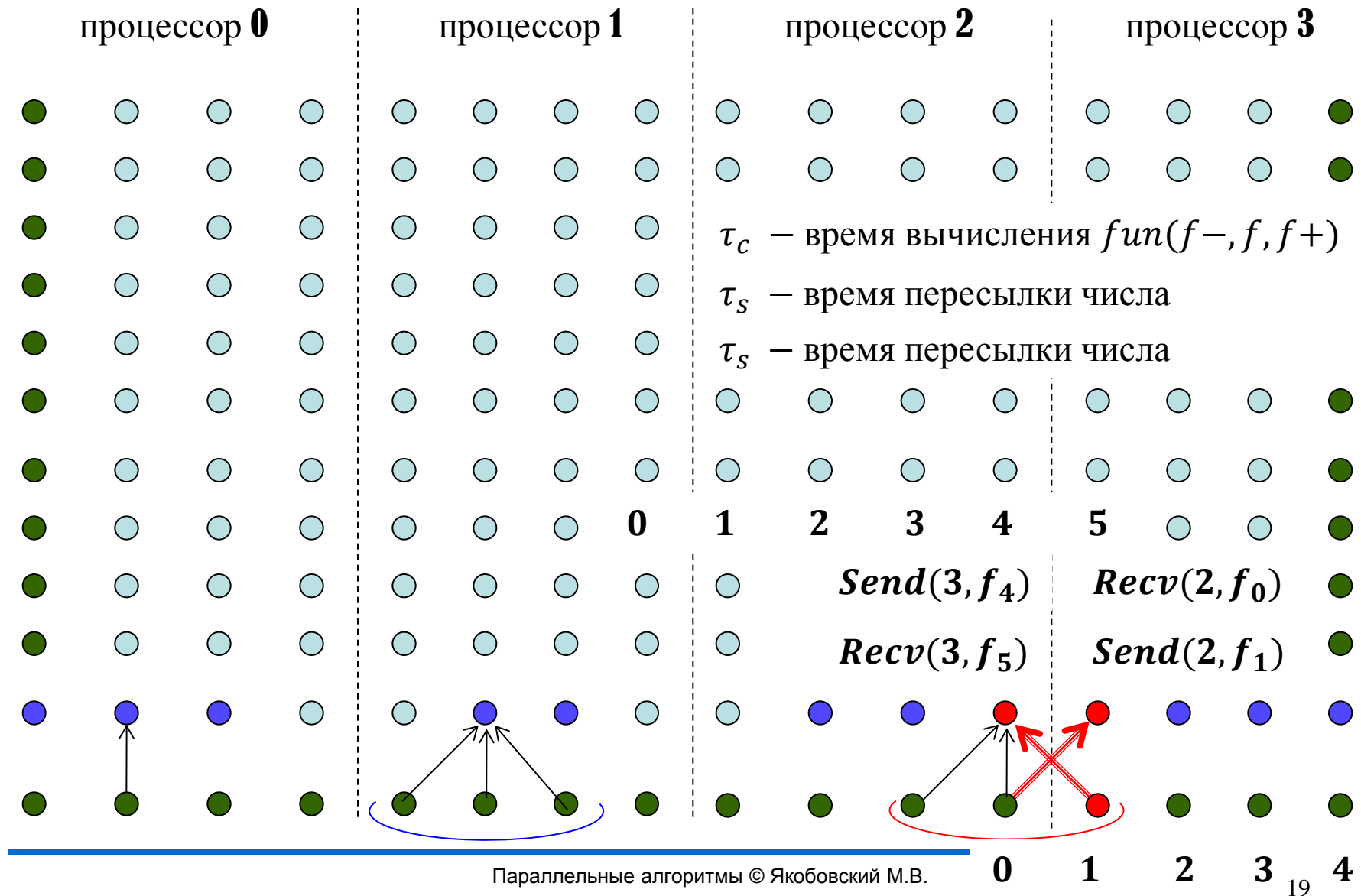
Метод геометрического параллелизма



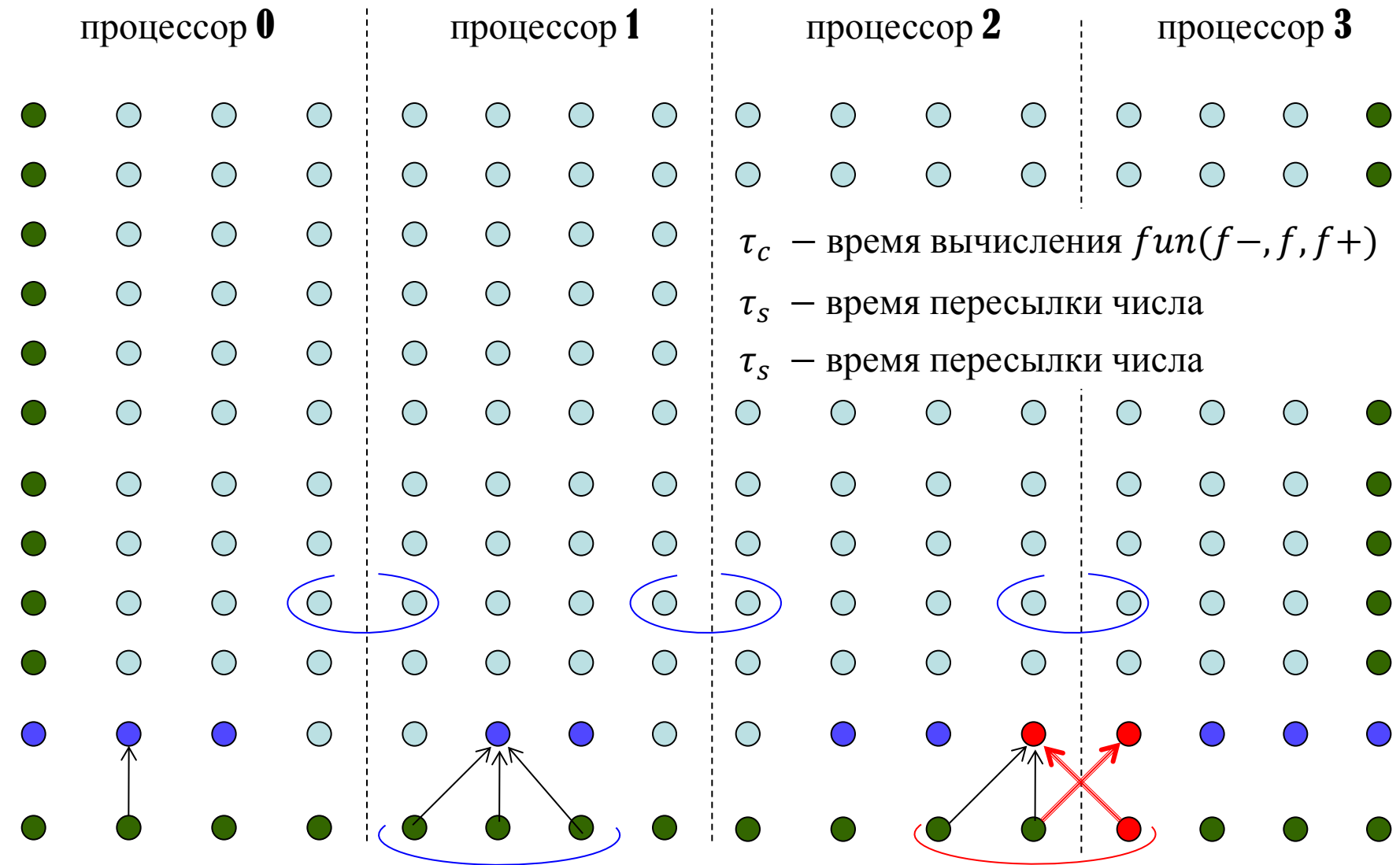
Метод геометрического параллелизма



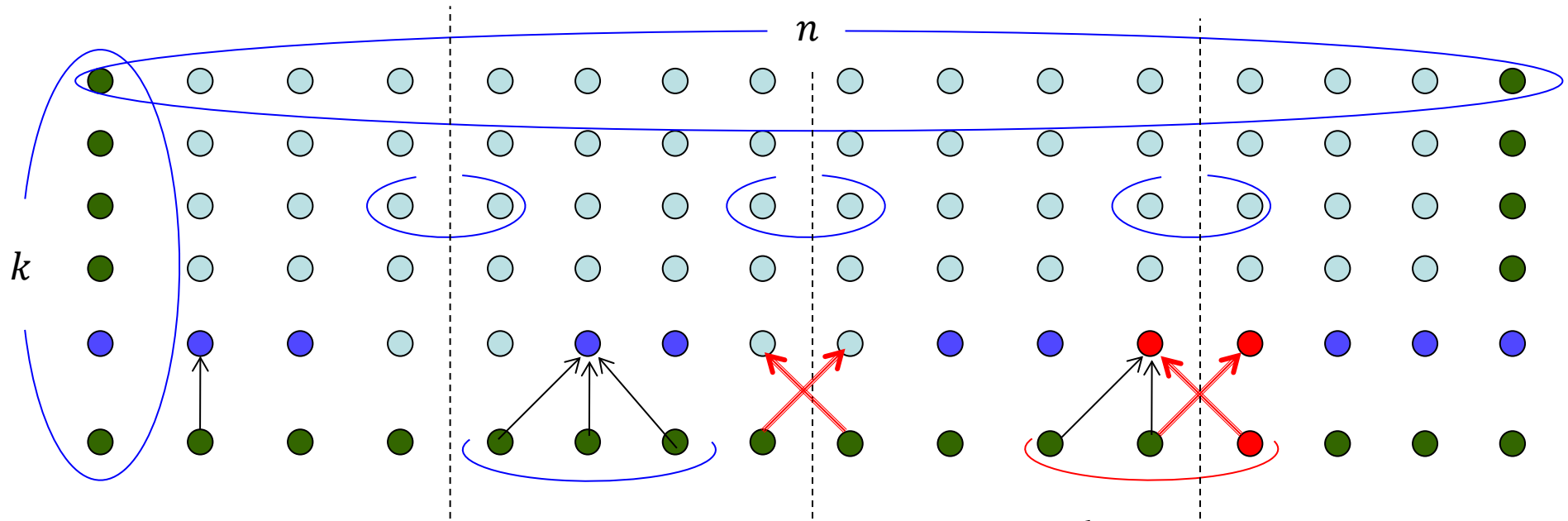
Метод геометрического параллелизма



Метод геометрического параллелизма



Метод геометрического параллелизма p — число процессов



$$T_1(kn) = \tau_c kn$$

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

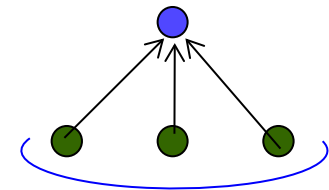
$$S_p(kn) = p \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

$$E_p(kn) = \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

Верно или нет ?

```
for( шаг = 0; шаг < k ; шаг++ )  $T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$ 
{
    for( i=rank*n/p; i<(rank+1)*n/p ; i++)
        fun( i-1, i, i+1 )

    if(rank > 0      ) Send(rank-1, f )
    if(rank < p-1    ) Send(rank+1, f )
    if(rank > 0      ) Recv(rank-1, f )
    if(rank < p-1    ) Recv(rank+1, f )
}
```

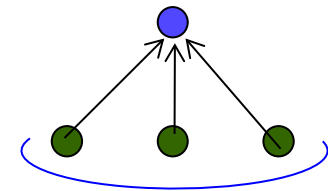


$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s \leftarrow$$

Верно ли, что именно 4 ?

```
for( шаг=0; шаг<k; шаг++)
{
    for( i=rank*n/p; i<(rank+1)*n/p ; i++)
        fun( i-1, i, i+1 )

    if(rank > 0 )    Send(rank-1, f )
    if(rank < p-1 ) Send(rank+1, f )
    if(rank > 0 )    Recv(rank-1, f )
    if(rank < p-1 ) Recv(rank+1, f )
}
```



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----|----|----|----|----|----|
| | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ |
| ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | |
| | >= | >= | >= | >= | >= |
| =< | =< | =< | =< | =< | |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s \longleftarrow$$

Верно ли, что именно 4 ?

```
for( шаг=0; шаг<k; шаг++)
{
    for( i=rank*n/p; i<(rank+1)*n/p ; i++)
        fun( i-1, i, i+1 )

    if(rank > 0      ) Send(rank-1, f )
    if(rank < p-1   ) Send(rank+1, f )
    if(rank > 0      ) Recv(rank-1, f )
    if(rank < p-1   ) Recv(rank+1, f )
}
```

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----|----|----|----|----|----|
| | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ |
| ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | |
| | >= | >= | >= | >= | >= |
| =< | =< | =< | =< | =< | |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

```
for ( шаг=0 ; шаг<k ; шаг++ )
```

```
{
```

```
    for ( кирпич=rank*n/p ; кирпич<(rank+1)*n/p ; кирпич++ )
```

```
        Уложить ( кирпич )
```

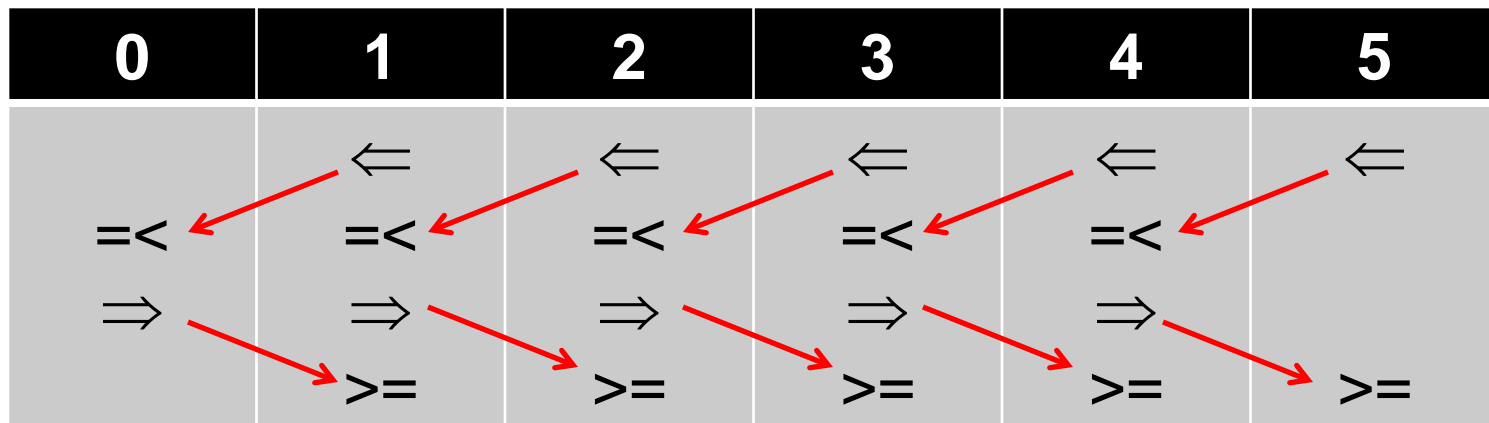
```
    if (rank>0)      Send(rank-1, кирпич уложен! )
```

```
    if (rank<p-1)    Recv(rank+1, место готово? )
```

```
    if (rank<p-1)    Send(rank+1, кирпич уложен! )
```

```
    if (rank>0)      Recv(rank-1, место готово? )
```

```
}
```



$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| \leq | \leftarrow | \leftarrow | \leftarrow | \leftarrow | \leftarrow |
| \Rightarrow | \leq | \leq | \leq | \leq | \geq |
| | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | |
| | \geq | \geq | \geq | \geq | |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 1k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow |
| \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow |
| \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow |
| \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow |
| \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow | \Leftarrow |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 2k\tau_s$$

[illegible]

$$+ 3k\tau_s$$

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

[illegible]

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + pk\tau_s$$

[illegible]

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + (p+1)k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------|---|--|--|--|-------------------------------|
| \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + (p+2)k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------|---|--|--|--|-------------------------------|
| \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow | \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + (p+3)k\tau_s$$

[illegible]

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + (p+4)k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------|---|---|---|---|-------------------------------|
| \Rightarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow \Leftarrow | \Rightarrow \Leftarrow |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 2pk\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------|---|---|---|---|------------------------------|
| \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Leftarrow \Rightarrow \Leftarrow | \Leftarrow \Leftarrow |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $=<$ | \leftarrow | $=<$ | \leftarrow | $=<$ | \leftarrow |
| \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow |
| | $=<$ | \leftarrow | $=<$ | \leftarrow | |
| | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | \Rightarrow | |

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

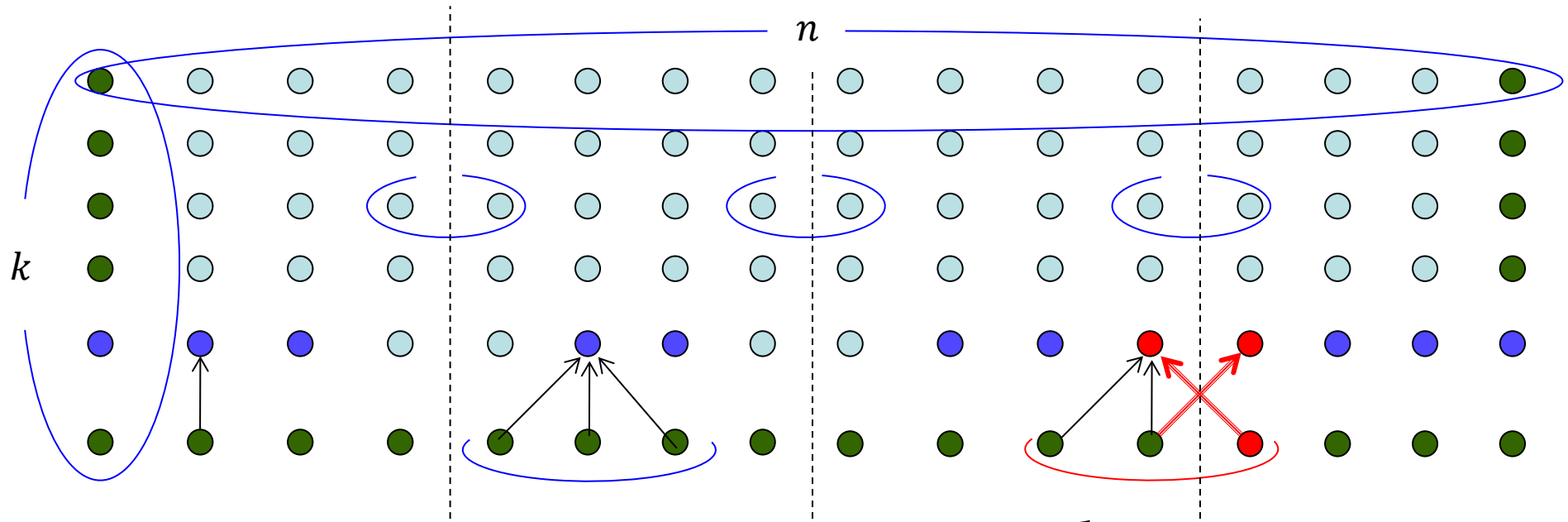
```

for( шаг=0; шаг<k; шаг++)
{
    for( кирпич=rank*n/p; кирпич<(rank+1)*n/p; кирпич++)
        Уложить( кирпич )

    if(rank%2)
    {
        if(rank>0)    Send(rank-1, кирпич уложен! )
        if(rank>0)    Recv(rank-1, место готово?  )
        if(rank<p-1)  Recv(rank+1, место готово?  )
        if(rank<p-1)  Send(rank+1, кирпич уложен! )
    }
    else
    {
        if(rank<p-1)  Recv(rank+1, место готово?  )
        if(rank<p-1)  Send(rank+1, кирпич уложен! )
        if(rank>0)    Send(rank-1, кирпич уложен! )
        if(rank>0)    Recv(rank-1, место готово?  )
    }
}
}

```

Метод геометрического параллелизма p — число процессов



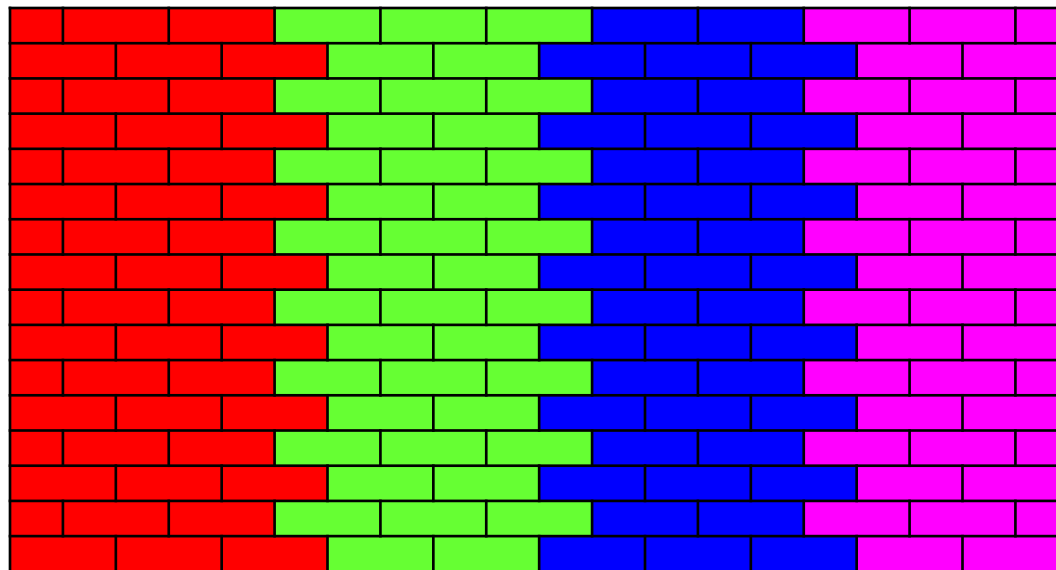
$$T_1(kn) = \tau_c kn$$

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

$$S_p(kn) = p \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

$$E_p(kn) = \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

Возможные причины потери эффективности?



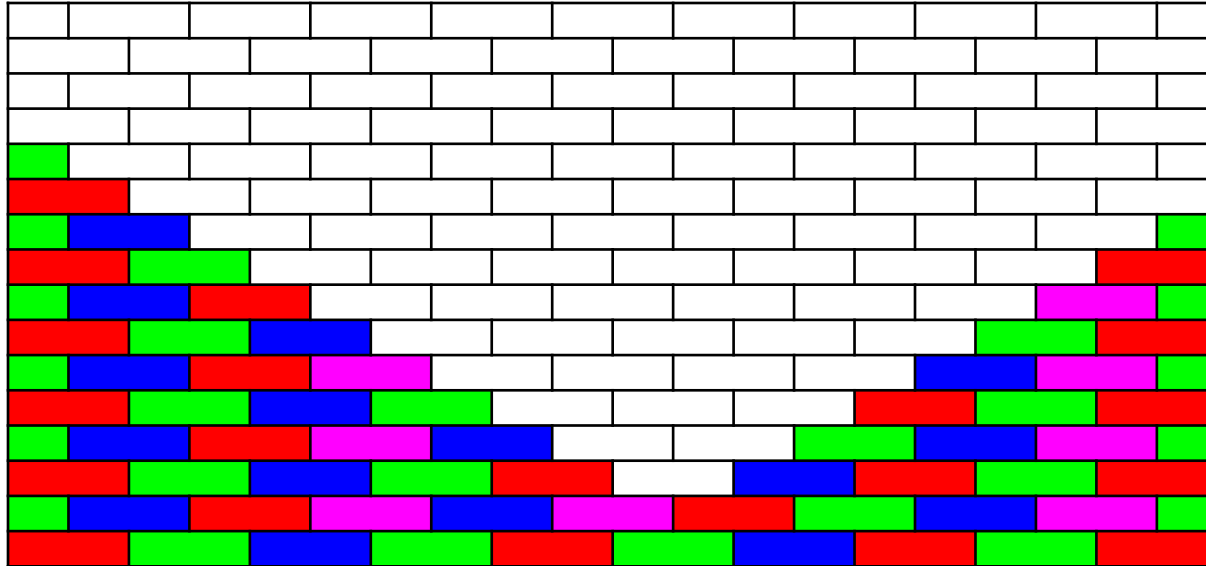
$$T_1(kn) = \tau_c kn$$

$$T_p(kn) = \tau_c \frac{kn}{p} + 4k\tau_s$$

$$S_p(kn) = p \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

$$E_p(kn) = \frac{1}{1 + 4 \frac{p}{n} \frac{\tau_s}{\tau_c}}$$

Возможные причины потери эффективности?



n – ширина стены

k – высота стены

Контакты

Якововский М.В.

*чл.-корр. РАН, проф., д.ф.-м.н.,
заместитель директора по научной работе
Института прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук*

[mail: lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)

[web: http://lira.imamod.ru](http://lira.imamod.ru)
