Параллельное программирование 20250422_10

Параллельные алгоритмы численного интегрирования

Якобовский Михаил Владимирович

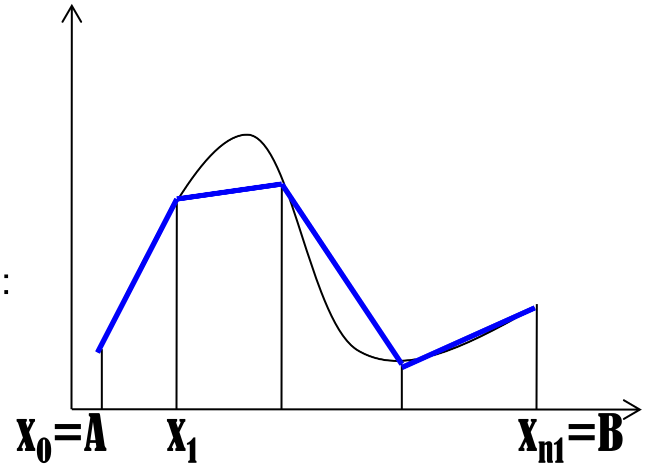
Постановка задачи

Вычислить с точностью ε значение определенного интеграла

$$J(A,B)=\int_A^B f(x)dx$$

Пусть на отрезке [*A,B*] задана равномерная сетка, содержащая *n+1* узел:

$$x_i = A+\frac{B-A}{n}i,\quad i=0,\cdots,n$$



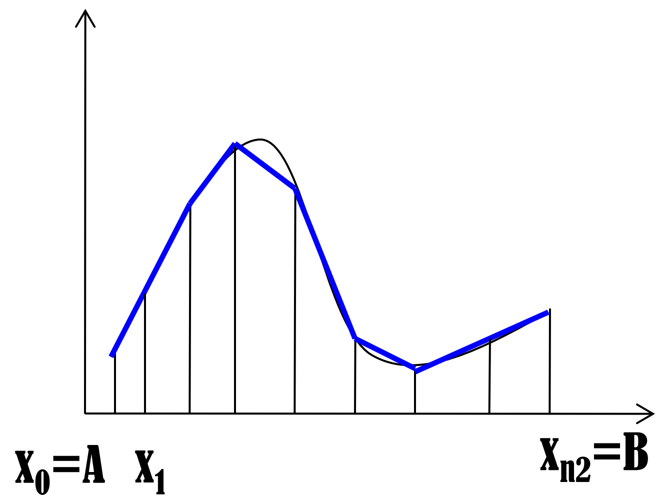
Тогда, согласно методу трапеций, можно численно найти определенный интеграл от функции на отрезке [A,B]:

$$J_n(A,B)=\frac{B-A}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Будем полагать значение *J* найденным с точностью ε, если выполнено условие:

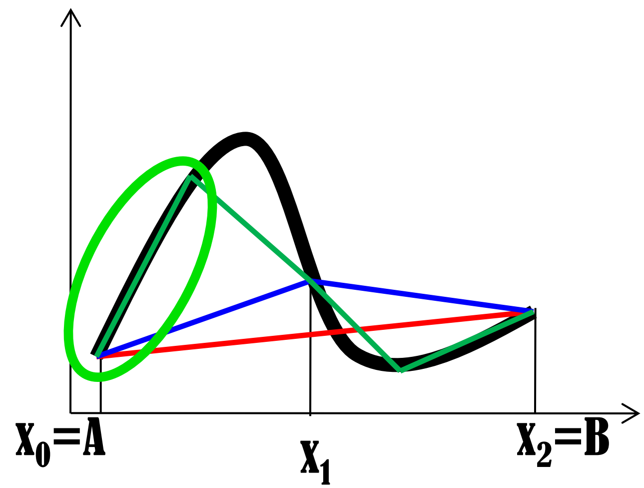
$$|J_{n1}-J_{n2}|\le\varepsilon|J_{n2}|$$

$$n_2>n_1$$



Последовательный алгоритм интегрирования

```
IntTrap01(A,B)
{
n=1
J_2n=(f(A)+f(B))(B-A)/2

        do
        {
        J_n= J_2n

        n=2n

        s=f(A)+f(B)

        for(i=1;i<n;i++)
          s+=2f(A+(B-A)i/n);

        J_2n=s(B-A)/n;
        }
        while(|J_2n- J_n|≥ε J_2n)

return J_2n
}
```

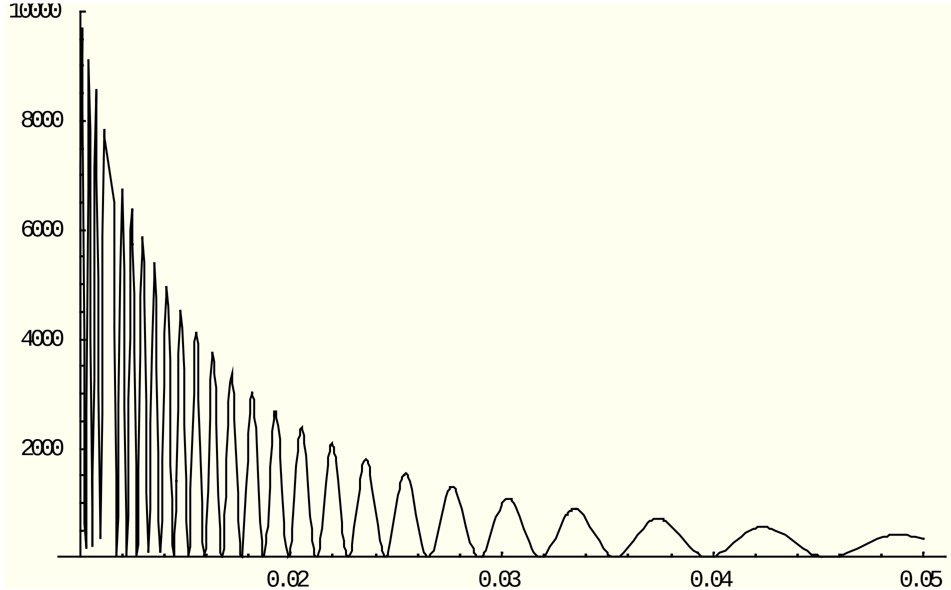


Недостатки:

- в некоторых точках значение подынтегральной функции вычисляется более одного раза
- на всем интервале интегрирования используется равномерная сетка, тогда как число узлов сетки на единицу длины на разных участках интервала интегрирования, необходимое для достижения заданной точности, зависит от вида функции

Пример функции

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right),\quad 0<A<<1$$



$$J(A,B)=\int_A^B\frac{1}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\Bigg|_A^B$$

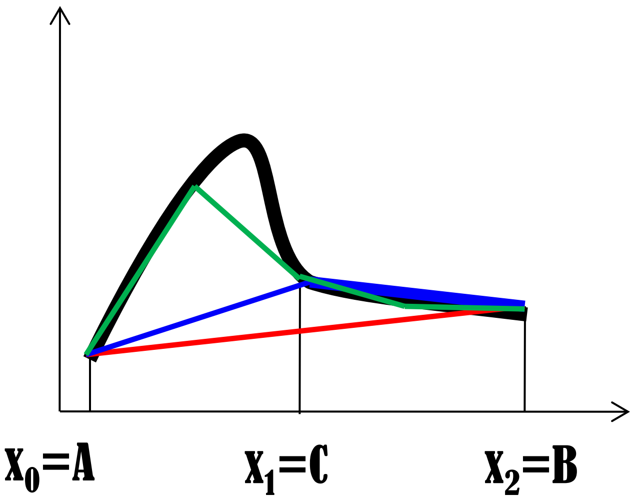
$$J(A,B)=\frac{1}{4}\left(2\frac{B-A}{AB}+\sin\left(\frac{2}{B}\right)-\sin\left(\frac{2}{A}\right)\right)$$

Результаты вычисления интеграла на разных отрезках [A,B]

A	B	Npoints	eps real	time, c
0.00001	0.0001	1 553 568 289	-2.77E-11	434.55
0.0001	0.001	1 726 123 903	1.90E-10	470.99
0.001	0.01	360 075 831	2.05E-11	74.12
0.01	0.1	79 973 845	-2.22E-12	16.44
0.1	1	105 108 653	8.67E-11	21.42
1	10	396 149	-6.00E-11	0.094
10	100	412 331	-6.30E-11	0.096

Адаптивный алгоритм

```
main()
{
J= IntTrap03(  A,  B,  f(A),f(B)   )
}
```



Недостаток:

координаты концов отрезков хранятся в программном стеке процесса и фактически недоступны программисту

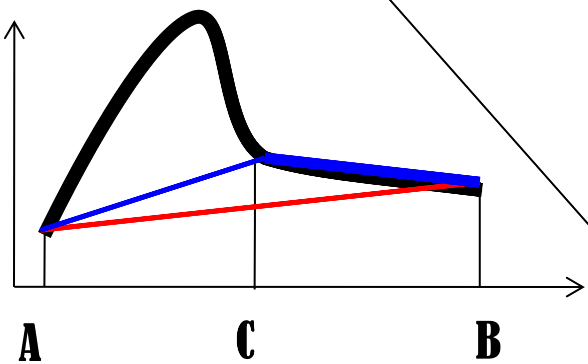
```
IntTrap03(A,B,fA,fB)
{
J=0

C=(A+B)/2

fC=f(C)

sAB=(fA+fB)*(B-A)/2

sAC=(fA+fC)*(C-A)/2
sCB=(fC+fB)*(B-C)/2

sACB=sAC+sCB

if(|sAB-sACB|≥ε|sACB|)

    J=IntTrap03(A,C,fA,fC)+IntTrap03(C,B,fC,fB)

else
    J=    sACB

return J
}
```

Преимущества:

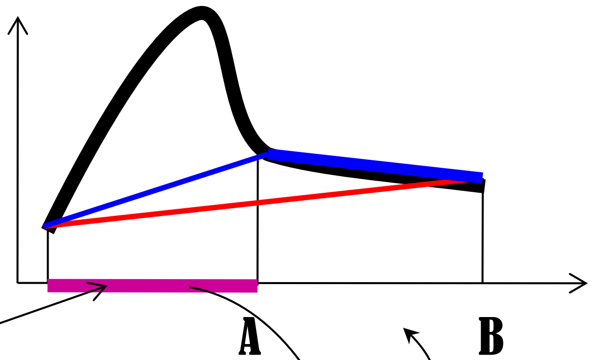
- нет повторных вычислений функции
- малое число вычислений на гладких участках

Метод локального стека

```
IntTrap04(A,B)
{
J=0

fA=f(A)
fB=f(B)

sAB=(fA+fB)*(B-A)/2

while(1)
      {
      Обработка отрезка
      }
return J
}
```




```
C=(A+B)/2

fC=f(C)

sAC=(fA+fC)*(C-A)/2
sCB=(fC+fB)*(B-C)/2

sACB=sAC+sCB

if(|sAB-sACB|≥ε|sACB|)
      {
      PUT_INTO_STACK( A, C, fA, fC, sAC)
      A=C
      fA=fC
      sAB=sCB
      }
else
      {
      J+=sACB

      if(STACK_IS_FREE)
          break

      GET_FROM_STACK( A, B, fA, fB, sAB)
      }
```



Процедуры и данные обеспечивающие стек

```
// данные, описывающие стек

// указатель вершины стека
sp=0

// массив структур в которых
// хранятся отложенные задания
struct
    {
    A,B,fA,fB,s
    }
    stk[1000]
```

```
// макроопределения доступа к стеку

#define STACK_IS_FREE (sp==0)

#define PUT_INTO_STACK(A,B,fA,fB,s)
    {
    stk[sp].A=A
    stk[sp].B=B
    stk[sp].fA=fA
    stk[sp].fB=fB
    stk[sp].s=s
    sp++
    }

#define GET_FROM_STACK(A,B,fA,fB,s)
    {
    sp--
    A=stk[sp].A
    B=stk[sp].B
    fA=stk[sp].fA
    fB=stk[sp].fB
    s=stk[sp].s
    }
```

К вопросу о времени выполнения

- Тестирование показало, что при расчете с помощью алгоритма локального стека ***IntTrap04*** время работы было меньше, примерно на 5%, чем при использовании ***IntTrap03***

- Примем алгоритм ***IntTrap04*** за «наилучший» последовательный алгоритм

Параллельный алгоритм интегрирования

- Метод геометрического параллелизма?
- Метод коллективного решения?
- ?

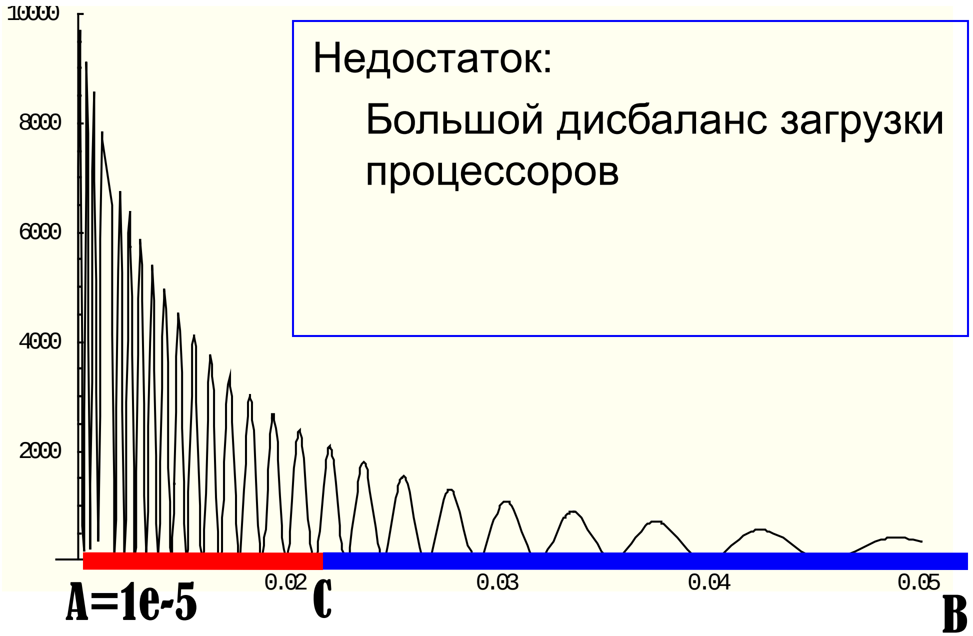
Метод геометрического параллелизма

```
main()
{
…
 for(i=0;i<p;i++)
   StartParallelProcess
          ( IntTrap04, A+(B-A)*i/p, A+(B-A)*(i+1)/p, &(s[i]) )

 WaitAllParallelProcess
 J=0

 for(i=0;i<p;i++)
   J+=s[i]

}
```

Недостаток:

Значительный дисбаланс загрузки процессоров

Расчет интеграла на разных отрезках



Недостаток:

Большой дисбаланс загрузки процессоров

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

p, (B-C)/ (C-A)	интервал 1	интервал2	время1, с	время2, с
10	[1e-5, 0.10000900000]	[0.10000900000, 1]	**37.679**	**0.004**
100	[1e-5, 0.01000990000]	[0.01000990000, 1]	**37.274**	**0.037**
1 000	[1e-5, 0.00100999000]	[0.00100999000, 1]	**36.989**	**0.369**
10 000	[1e-5, 0.00010999900]	[0.00010999900, 1]	**34.064**	**3.364**
100 000	**[1e-5, 0.00001999990]**	**[0.00001999990, 1]**	**18.869**	**18.822**

Метод коллективного решения

```
main()
{
// Порождение p параллельных процессов,
// каждый из которых выполняет процедуру slave

for(k=0;k<p;k++)
    StartParallel(slave #k)

i=0 // число переданных для обработки интервалов
    // n – число отрезков интегрирования

for(k=0;k<p;k++)
    { // Передача концов отрезков интегрирования
    Send(slave k, A+(B-A)*i/n, A+(B-A)*(i+1)/n)
    i++
    }

// J - значение интеграла на всем интервале [A,B]
J=0
```

Недостаток: **n = ?**

- Либо большой дисбаланс загрузки процессоров
- Либо большой объем лишних вычислений

```
Пока есть отрезки, не переданные для отработки,
следует дождаться сообщения от любого из процессов slave,
вычислившего  частичную сумму на переданном ему отрезке,
Получить значение этой суммы, прибавить к общему значению
Интеграла и передать освободившемуся процессу очередной
отрезок

while(i<n)
    {
    k = Recv(slave ANY, s)
    J+=s
    Send(slave k, A+(B-A)*i/n, A+(B-A)*(i+1)/n)
    i++
    }

// Получить результаты вычислений переданных отрезков
// и прибавить их к общей сумме

for(k=0;k<p;k++)
    {
    Recv(slave any, s)
    J+=s
    }
}
```

```
slave()
{
подчиненный процесс, вычисляющий
    значение интеграла на отрезке
    [a,b]

while(1){  Recv(main,a,b)
           s=IntTrap04(a,b)
           Send(main,s)
        }
}
```

Вывод

Практически непригодны для решения поставленной задачи методы

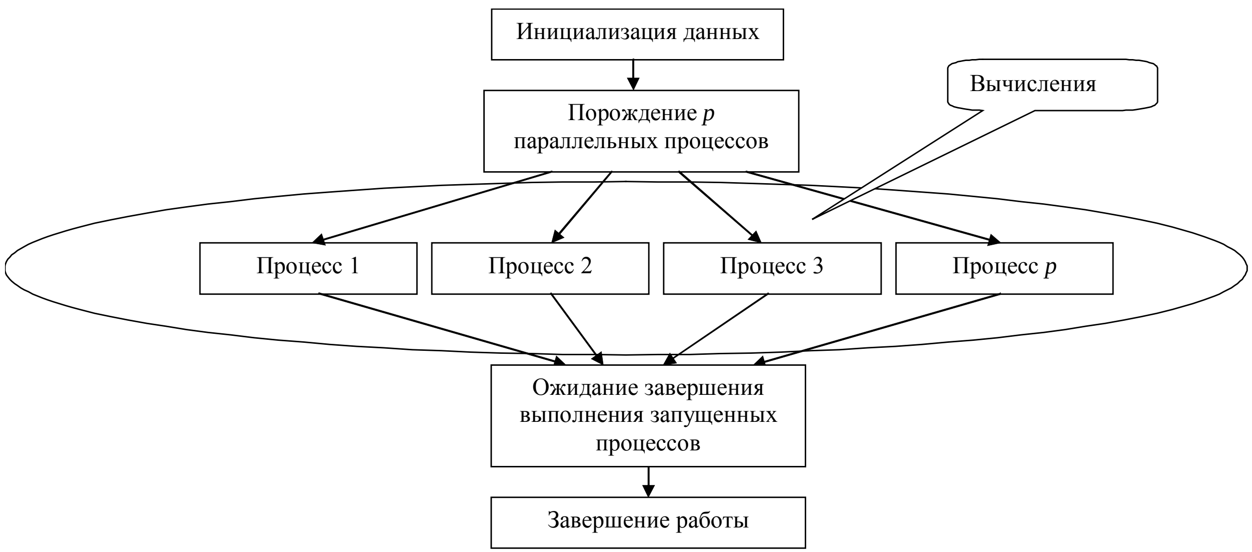
геометрического параллелизма (статическая балансировка)

и

коллективного решения (динамическая балансировка)

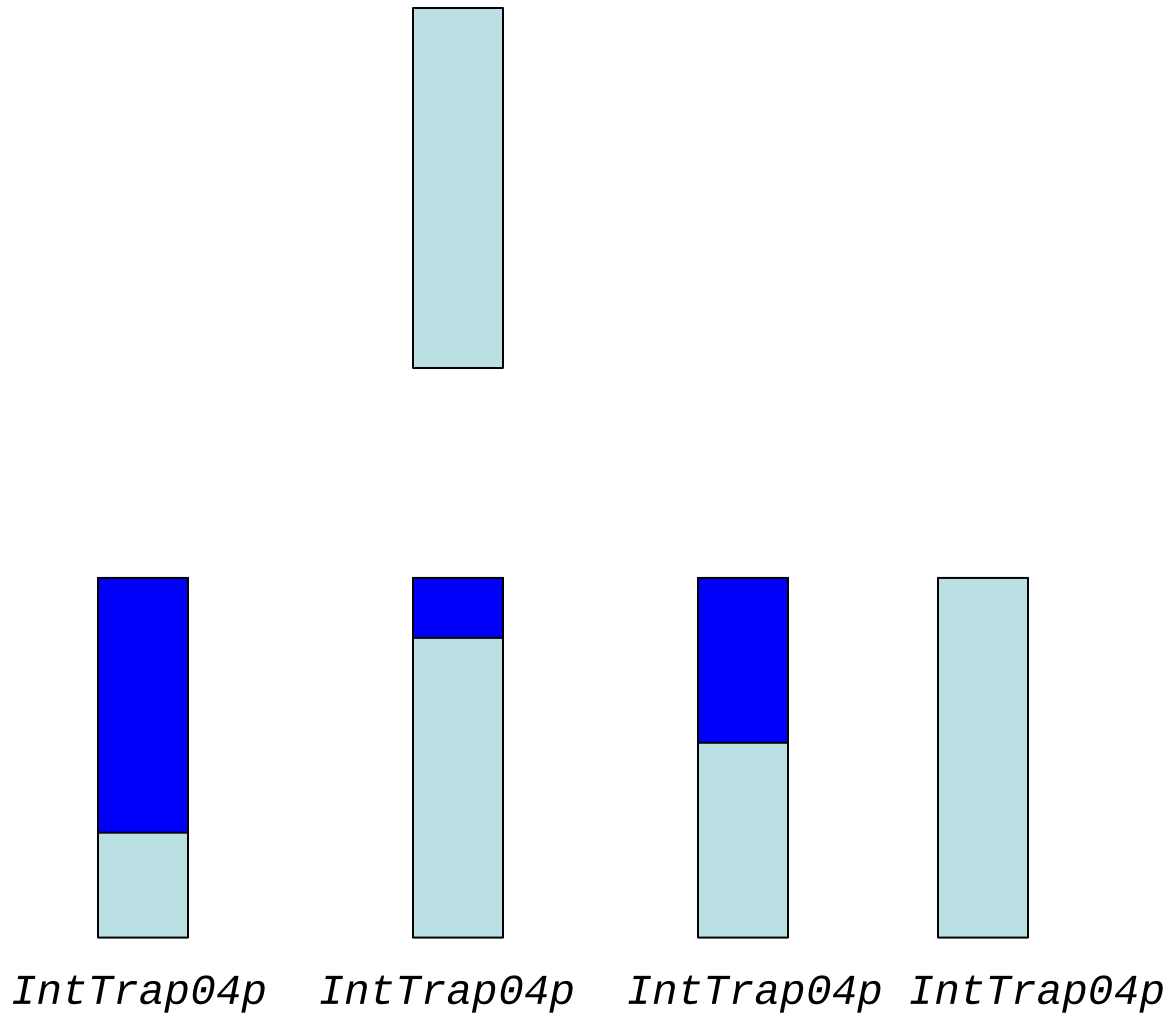
Метод глобального стека

- Вычислительные системы с общей памятью
- Динамическая балансировка загрузки
- Отсутствие централизованного управления



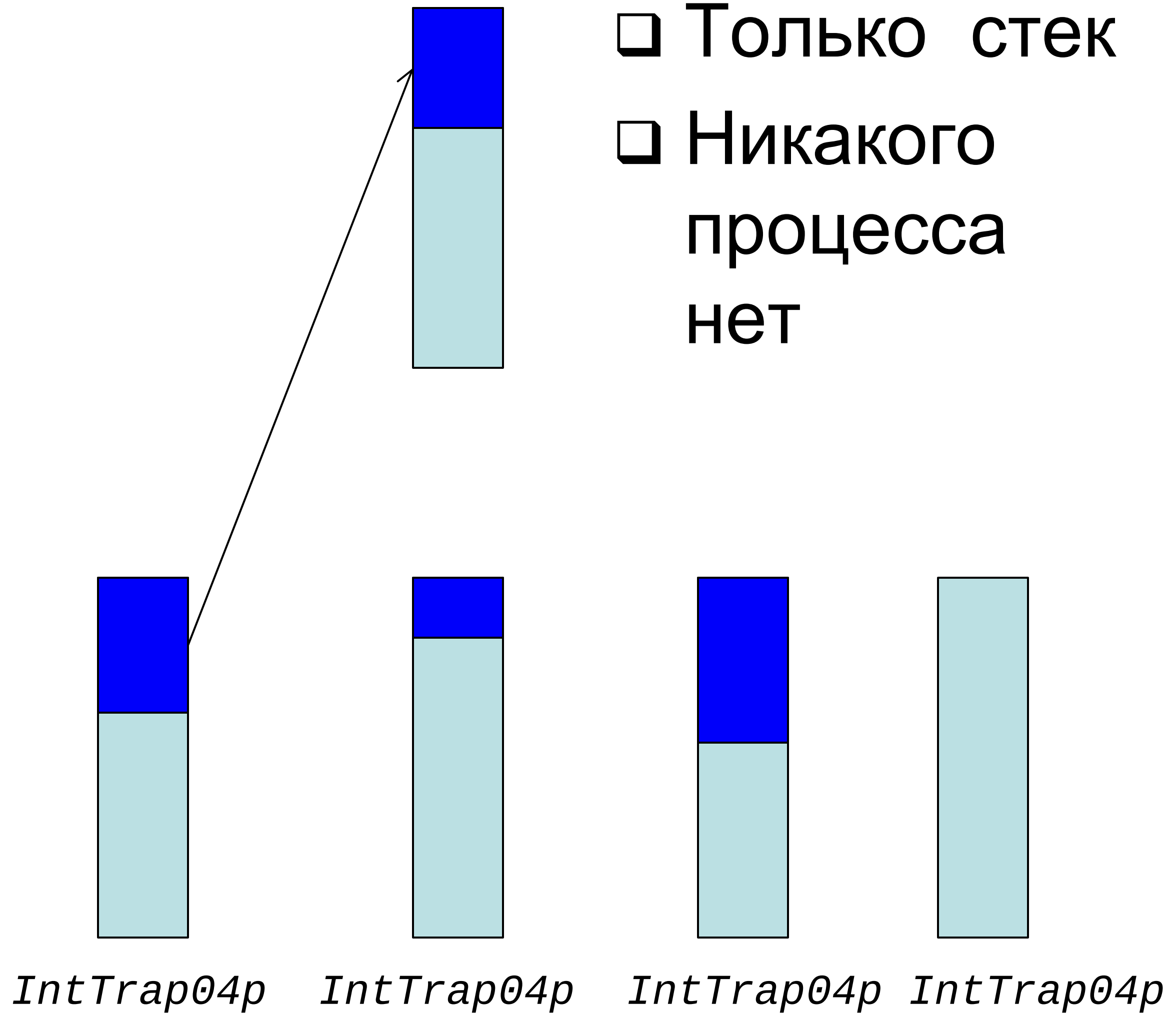
Стеки алгоритма

- Глобальный стек
- Локальные стеки



Стеки алгоритма

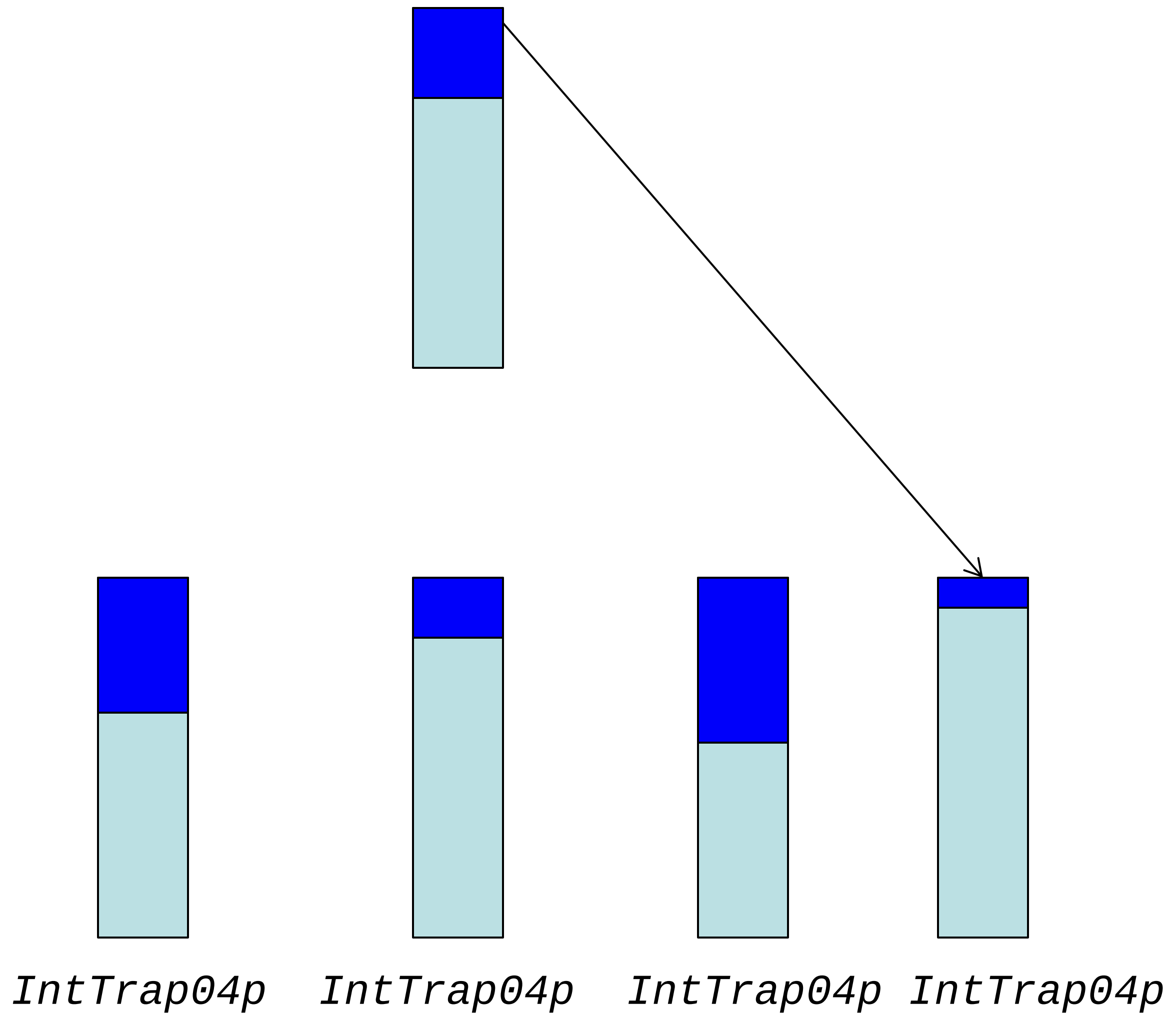
- Глобальный стек
- Только стек
- Никакого процесса нет
- Локальные стеки



Стеки алгоритма

- Глобальный стек

- Локальные стеки



Идея алгоритма

- Всем параллельным процессам доступен список отрезков интегрирования, организованный в виде стека. Назовем его **глобальным стеком**.
- Каждому процессу доступен свой, доступный только этому процессу, локальный стек
- Перед запуском параллельных процессов в глобальный стек помещается единственная запись (в дальнейшем "**отрезок**"):
  - координаты концов отрезка интегрирования,
  - значения функции на концах,
  - приближенное значение интеграла на этом отрезке.

- Каждый из параллельных процессов выполняет следующий алгоритм:

Пока в глобальном стеке есть отрезки:

- взять один **отрезок** из **глобального стека**
- выполнить алгоритм локального стека, но,

  если в момент обращения к **локальному стеку** в нем уже есть несколько отрезков, а в **глобальном стеке** отрезки отсутствуют, то:

  - переместить часть **отрезков** из **локального стека** в **глобальный стек**.

Вопросы

- какую часть отрезков следует перемещать из локального стека в глобальный стек?
- в какой момент интеграл вычислен?
- что должен делать процесс у которого пуст локальный стек, если глобальный стек тоже пуст?
  - должен ли процесс закончить работу, если в его локальном и в глобальном стеке отрезков нет?

Схема Интегрирующего процесса

```
IntTrap04p()
{
  // цикла обработки стека отрезков

 while(sdat.ntask>0)
   {
   // чтение одного интервала из списка интервалов

   sdat.ntask-- // указатель глобального стека
   GET_FROM_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](a,b,fa,fb,sab)

   ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО ОТРЕЗКА
   }

 sdat.s_all = sdat.s_all + s
}
```

Правильное определение общей суммы

```
main()
{
.
Sem_init(sdat.sem_sum,1) //доступ к глобальной сумме открыт
.
}

IntTrap04p()
{
…
 // Начало критической секции сложения частичных сумм
 sem_wait(sdat.sem_sum)
 sdat.s_all = sdat.s_all + s
 sem_post(sdat.sem_sum)
// Конец критической секции сложения частичных сумм
}
```

Схема Интегрирующего процесса

```
IntTrap04p()
{
  // цикла обработки стека отрезков

 while(sdat.ntask>0)
    {
    // чтение одного интервала из списка интервалов

      sdat.ntask-- // указатель глобального стека
      GET_FROM_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](a,b,fa,fb,sab)

    ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО ОТРЕЗКА
    }

  sem_wait(sdat.sem_sum)
  sdat.s_all = sdat.s_all + s
  sem_post(sdat.sem_sum)
 }
```

Схема интегрирования отрезка

```
// интегрирование одного отрезка
while(1)
 {
 Инициализация
 Точность на части отрезка достигнута?
 Добавлять отрезки в глобальный стек?
 }
```

```
c=(a+b)/2;
fc=f(c)

sac=(fa+fc)*(c-a)/2
scb=(fc+fb)*(b-c)/2
sacb=sac+scb
```

Схема интегрирования отрезка

```
// интегрирование одного отрезка
while(1)
 {
 Инициализация
 Точность на части отрезка достигнута?
 Добавлять отрезки в глобальный стек?
 }
```

```
if(!BreakCond(sacb,sab))

 {  // Точность на части отрезка достигнута
 s+=sacb
 if(sp==0) break; // локальный стек пуст, выход

 sp--;
 GET_FROM_LOCAL_STACK[sp]( a, b, fa, fb, sab)
 }
else
{
 PUT_INTO_LOCAL_STACK[sp]( a, c, fa, fc, sac);
 sp++

 a=c
 fa=fc
 sab=scb
}
```

Схема интегрирования отрезка

```
// интегрирование одного отрезка
while(1)
 {
 Инициализация
 Точность на части отрезка достигнута?
 Добавлять отрезки в глобальный стек?
 }
```

```
if((sp>SPK) && (!sdat.ntask)) // перемещение части
    локального стека в общий список интервалов
{
    while((sp>1) && (sdat.ntask<sdat.maxtask))
     {
     sp--;
     GET_FROM_LOCAL_STACK[sp](a,b,fa,fb,sab)

     PUT_INTO_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](a,b,fa,fb,sab);
     sdat.ntask++
     }
}
```

Преждевременное окончание работы процесса

```
while(1)
    {
     // Начало критической секции чтения из глобального
     // стека очередного интервала интегрирования
    sem_wait(sdat.sem_list)

    if(sdat.ntask≤0)
          {
          sem_post(sdat.sem_list)   // разрешить другим процессам
                                    // доступ к глобальному стеку
          break
          }

    sdat.ntask-- // указатель глобального стека
    GET_FROM_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](a,b,fa,fb,sab)

    sem_post(sdat.sem_list)
    // Конец критической секции чтения из глобального
    // стека очередного интервала интегрирования
    …
    }
```

Преждевременный выход

- Плохое условие выхода из *цикла обработки стека интервалов*
- Интегрирующие процессы не должны заканчивать работу до тех пор, пока все отрезки интервала интегрирования не будут полностью обработаны
- Преждевременное завершение работы приведет к получению верного ответа, но за большее время

Если глобальный и локальный стеки пусты

Отрезок интегрирования может находиться в нескольких состояниях:

- находится в глобальном стеке интервалов;
- обрабатывается некоторым интегрирующим процессом;
- находится в локальном стеке интервалов некоторого процесса;
- полностью обработан: известно значение интеграла на этом отрезке и оно прибавлено к локальной частичной сумме соответствующего процесса.

"Время жизни" отрезка, после того, как некоторый процесс начал его обработку, относительно невелико - отрезок разбивается на две части и перестает существовать, породив два новых отрезка. Таким образом, требование "*все отрезки интервала интегрирования полностью обработаны*" означает, что:

- функция проинтегрирована на всех отрезках, покрывающих исходный интервал интегрирования;
- полученные на отрезках интегрирования значения интегралов добавлены к частичным суммам соответствующих процессов.

Необходимые глобальные переменные

	семафоры доступа:
sdat.sem_list	семафор доступа к глобальному стеку отрезков
sdat.sem_all	семафор доступа к значению интеграла
	семафоры состояния:
sdat.sem_task_present	семафор наличия записей в глобальном стеке отрезков
	переменные:
sdat.list_of_tasks	глобальный стек отрезков
sdat.ntask	число записей в глобальном стеке отрезков - указатель глобального стека отрезков
sdat.nactive	число активных процессов
sdat.s_all	значение интеграла

Доступ процесса *IntTrap04p* к глобальному стеку

```
// начало цикла обработки глобального стека
 while(1)
   {
   // ожидание появления в глобальном стеке интервалов для обработки

   sem_wait(sdat.sem_task_present) // наличие записей в глобальном стеке

        // чтение одного интервала из списка интервалов
        sem_wait(sdat.sem_list)

             sdat.ntask-- // указатель глобального стека
             GET_OF_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](a,b,fa,fb,sab)

             if(sdat.ntask) // в глобальном стеке остались задания
                   sem_post(&sdat.sem_task_present)

             if(a<=b) // очередной отрезок не является терминальным
                   sdat.nactive++  // увеличить число процессов, имеющих интервал для
             интегрирования

        sem_post(sdat.sem_list)

   if(a>b) // отрезок является терминальным
         break // выйти из цикла обработки стека интервалов
```

Запись терминальных отрезков

```
// Начало критической секции заполнения глобального
// стека терминальными отрезками (a>b)

    sem_wait(&sdat.sem_list)

              sdat.nactive--

              if( (!sdat.nactive) && (!sdat.ntask) )
                     {
                     // запись в глобальный стек списка терминальных отрезков
                     for(i=0;i<nproc;i++)
                               {
                               PUT_TO_GLOBAL_STACK[sdat.ntask](2,1,-,-,-)
                               sdat.ntask++;
                               }

                     // в глобальном стеке есть записи
                     sem_post(sdat.sem_task_present)
                     }

    sem_post(sdat.sem_list)
//
// Конец критической секции заполнения глобального
// стека терминальными отрезками
```

Результаты тестирования

$$J = \int_{10^{-5}}^{1} \frac{1}{x^2} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Время выполнения

Np	***1***	***2***	***3***	***4***
tiger.jscc.ru	***31.39***	***15.61***	***10.29***	***7.83***
ga03.imamod.ru	***37.48***	***19.00***	***-***	***-***

Ускорение

Np	***1***	***2***	***3***	***4***
tiger.jscc.ru	***1***	***2.01***	***3.05***	***4.01***
ga03.imamod.ru	***1***	***1.97***		

Эффективность

np	***1***	***2***	***3***	***4***
tiger.jscc.ru	***100%***	***101%***	***102%***	***100%***
ga03.imamod.ru	***100%***	***99%***		

Вопросы

- какую часть отрезков следует перемещать из локального стека в глобальный стек?
- в какой момент интеграл вычислен?
- что должен делать процесс у которого пуст локальный стек, если глобальный стек тоже пуст?
  - должен ли процесс закончить работу, если в его локальном и в глобальном стеке отрезков нет?
- На сколько отрезков изначально разбить отрезок?

Заключение

- Рассмотрен ряд методов вычисления интегралов на многопроцессорных системах, проанализированы их преимущества и недостатки
- Показано, что методы геометрического параллелизма и коллективного решения неприменимы для эффективного численного интегрирования функций общего вида
- Показано, что идея децентрализованного управления расчетом эффективно решает задачу

Литература

- Якобовский М.В. Введение в параллельные методы решения задач: Учебное пособие / Предисл.: В. А. Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2013. – 328 с., илл. – (Серия «Суперкомпьютерное образование») ISBN 978-5-211-06382-2

- *Якобовский М.В., Кулькова Е.Ю.* Решение задач на многопроцессорных вычислительных системах с разделяемой памятью. - М.: СТАНКИН, 2004. – 30 с. http://www.imamod.ru/~serge/arc/stud/Jackob_2.pdf

Контакты

Якобовский М.В.

Член.-корр. РАН, проф., д.ф.-м.н.,

и.о. директора

Института прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук

mail: lira@imamod.ru

web: http://lira.imamod.ru