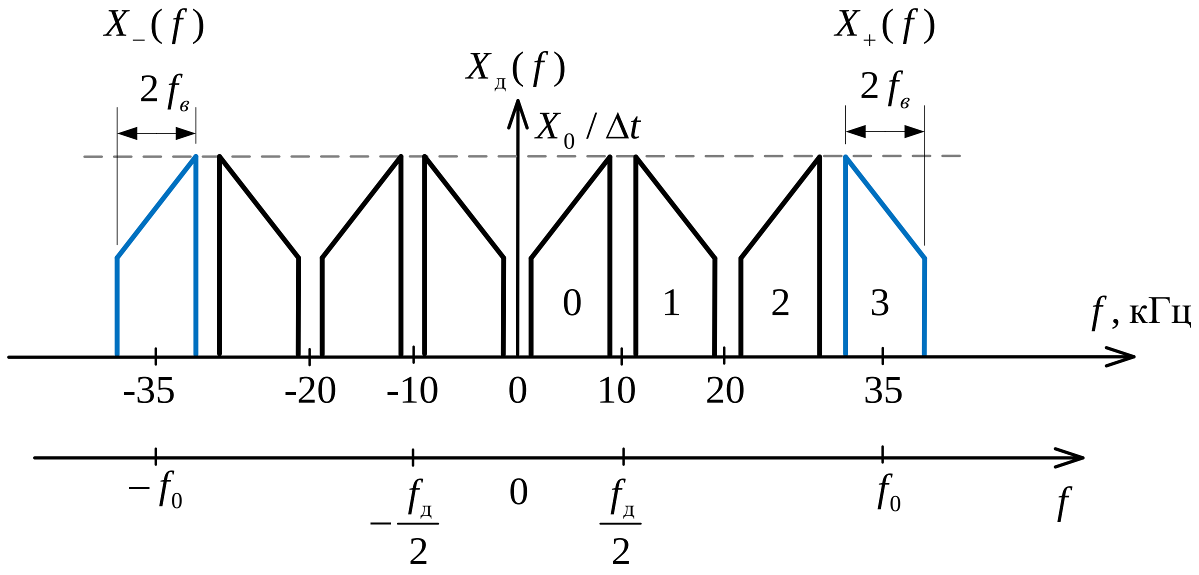
Лабораторная работа №4 «Цифровой осциллограф»

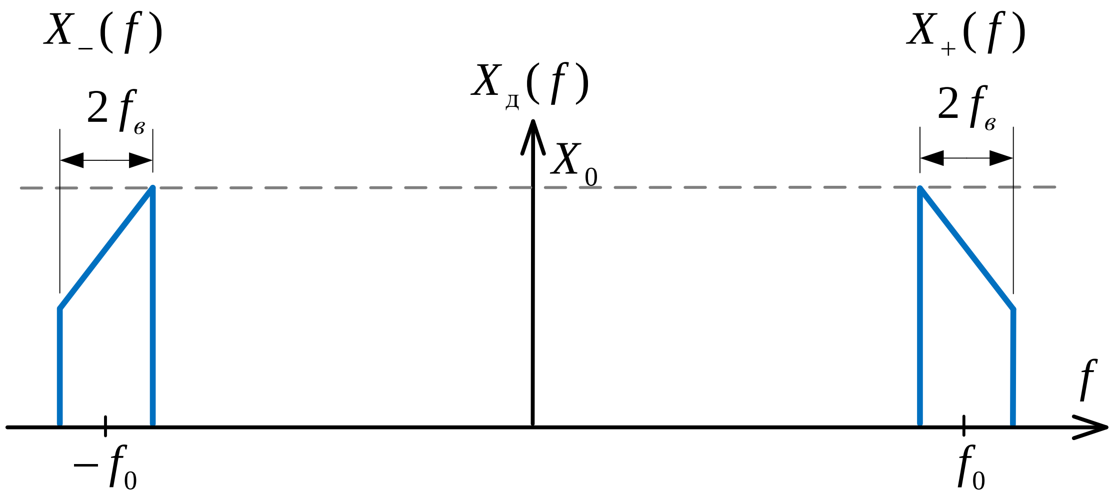
Модуль 2. Субдискретизация полосовых радиосигналов

- Введение. Понятие субдискретизации.
- Случай целочисленных полос.
- Случай нецелочисленных полос.
- Моделирование субдискретизации с помощью осциллографа PV6501



Введение. Понятие субдискретизации.

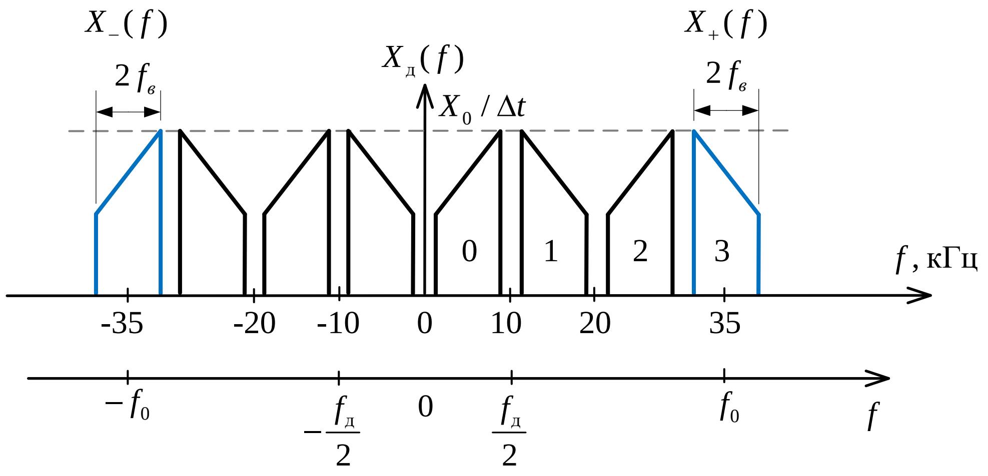
Рассмотрим *действительный* полосовой сигнал со спектром, изображенным на рисунке.



- Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат
- Компонента $X_+(f)$ носит название прямого спектра, а компонента $X_-(f)$ – инверсного.
- Для такого сигнала необходимая в соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации $f_д = 2(f_0 + f_в)$ может оказаться очень высокой, находящейся за пределами быстродействия АЦП.

- Для узкополосных радиосигналов ($f_0 \gg f_в$) существуют методы дискретизации с частотой $f_д < 2(f_0 + f_в)$, позволяющие сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.
- Одним из таких методов является субдискретизация. Субдискретизация заключается в том, что частота дискретизации $f_д$ выбирается такой, что эффект наложения проявляется без перекрытия копий прямого и инверсного спектра исходного сигнала.

Пример.



Рассмотрим для субдискретизации ограничения на выбор частоты $f_д$.

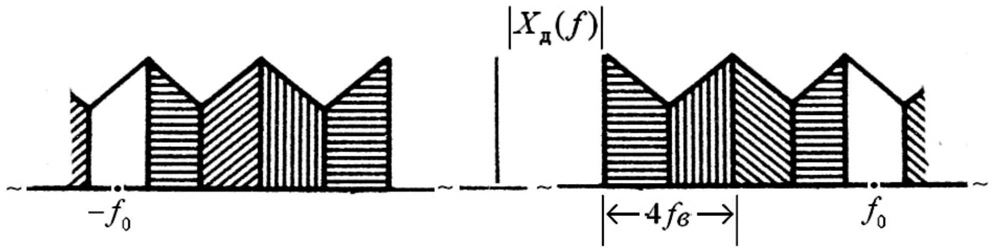
Субдискретизация: случай целочисленных полос

Случай целочисленных полос

Если граничные частоты спектра $f_0 - f_в$ и $f_0 + f_в$ кратны его ширине $2f_в$, т. е. если

$$f_0 - f_в = m(2f_в), \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (1)$$

то минимальную частоту дискретизации можно взять равной $f_{\text{д}\min} = 4f_в$.

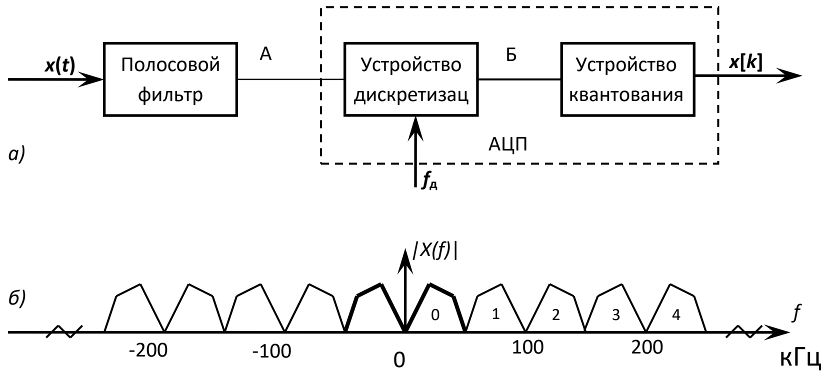


Число m показывает, сколько переносов прямого спектра нужно совершить, чтобы точка $f_0 - f_в$ попала в начало координат.

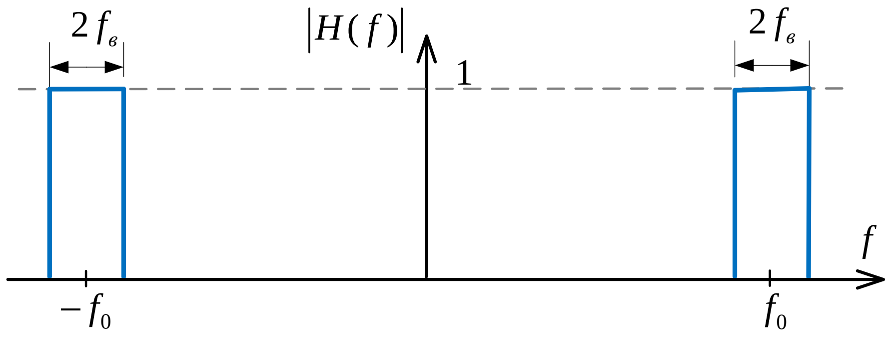
Такая плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$ практически может быть использована при условии, что компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции.

В этом случае эффект наложения частичных спектров друг на друга будет отсутствовать. Этот метод дискретизации называется ещё *полосовой дискретизацией с недостаточной выборкой для целочисленных полос*.

Пример. На рисунке *а)* показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи. $2f_в = f_д/2 = 50$ кГц.



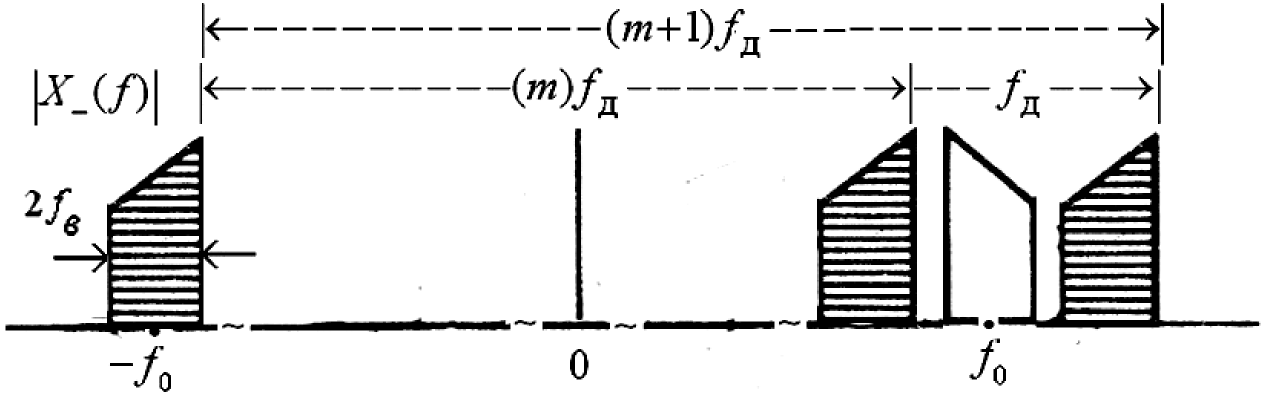
Спектр принимаемого сигнала показан на рисунке *б)* с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед дискретизацией с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр, АЧХ идеального фильтра представлена на рисунке ниже.



Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

Случай нецелочисленных полос

- Плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$, если компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции и выполняется условие (1) для целочисленных полос.
- В общем случае компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ имеют «хвосты» и нецелочисленные полосы.



Для нахождения частоты дискретизации $f_Д$ необходимо использовать условие, что m и $m+1$ переносов $X_-(f)$ не дают пересечений с $X_+(f)$:

$$\begin{aligned} -f_0 + f_в + m f_Д &< f_0 - f_в, \\ -f_0 - f_в + (m+1) f_Д &> f_0 + f_в. \end{aligned} \qquad (2)$$

Из (2) получаем

$$m f_Д < 2(f_0 - f_в), \qquad (m+1) f_Д > 2(f_0 + f_в) \qquad (3)$$

или

$$\frac{2(f_0 + f_в)}{m+1} < f_Д < \frac{2(f_0 - f_в)}{m}. \qquad (4)$$

Из (4) Субдискретизация возможна, если

$$\frac{(f_0 + f_в)}{m+1} < \frac{f_0 - f_в}{m},$$

т. е.

$$m < \frac{f_0 - f_в}{2 f_в}. \qquad (5)$$

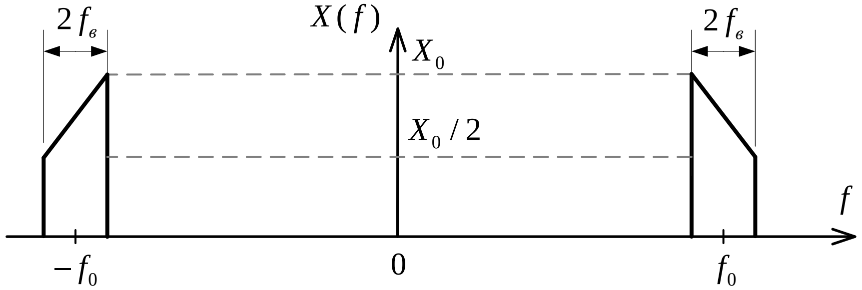
Число m называется *порядком субдискретизации*.

Поскольку общая протяженность спектра $X_-(f)$ и $X_+(f)$ равна $4 f_в$, то при отсутствии перекрытий должно быть выполнено неравенство

$$f_Д > 4 f_в. \qquad (6)$$

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос. Пример.

Пример. Спектр $X(f)$ некоторого полосового сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже, f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$, $2f_в = 9{,}5$ кГц.



Изобразить спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой $f_д$, обеспечивающей центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста для случаев: а) $f_0 = 45$ кГц, б) $f_0 = 35$ кГц.

Решение для случая а) $f_0 = 45$ кГц**.**

Границы выбора частоты дискретизации определяются неравенством

$$\frac{2(f_0 + f_в)}{m+1} < f_д < \frac{2(f_0 - f_в)}{m}.$$

где m – порядок субдискретизации.

$f_д$ может быть выбрана в соответствии с этим неравенством при условии

$$m < \frac{f_0 - f_в}{2f_в},$$

откуда $m < 4{,}24$.

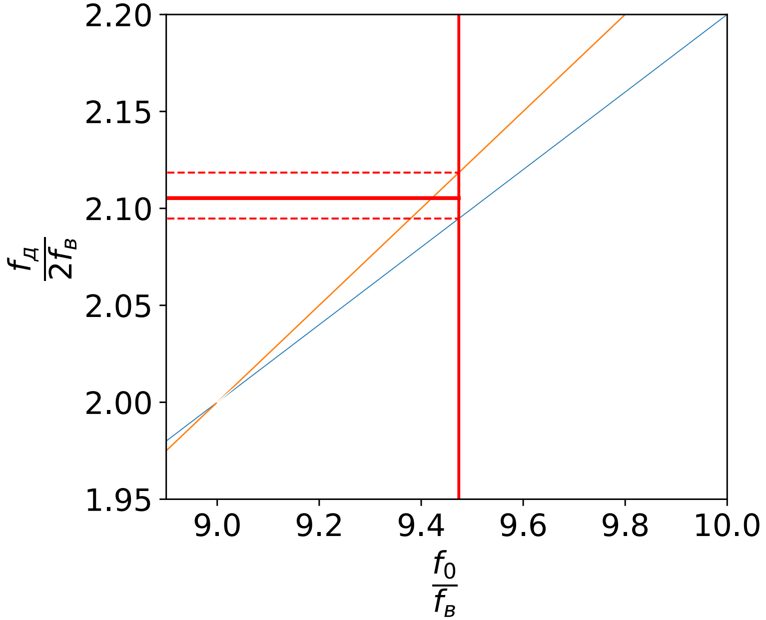
Порядок субдискретизации является натуральным числом, а значит максимально возможный порядок субдискретизации равен $m = 4$.

Для этого порядка субдискретизации условия выбора $f_д$ $19{,}9 \text{ кГц} < f_д < 20{,}125$ кГц.

Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать

$$f_д \geq 2(f_0 + f_в) = 99{,}5 \text{ кГц}$$

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос. Пример.

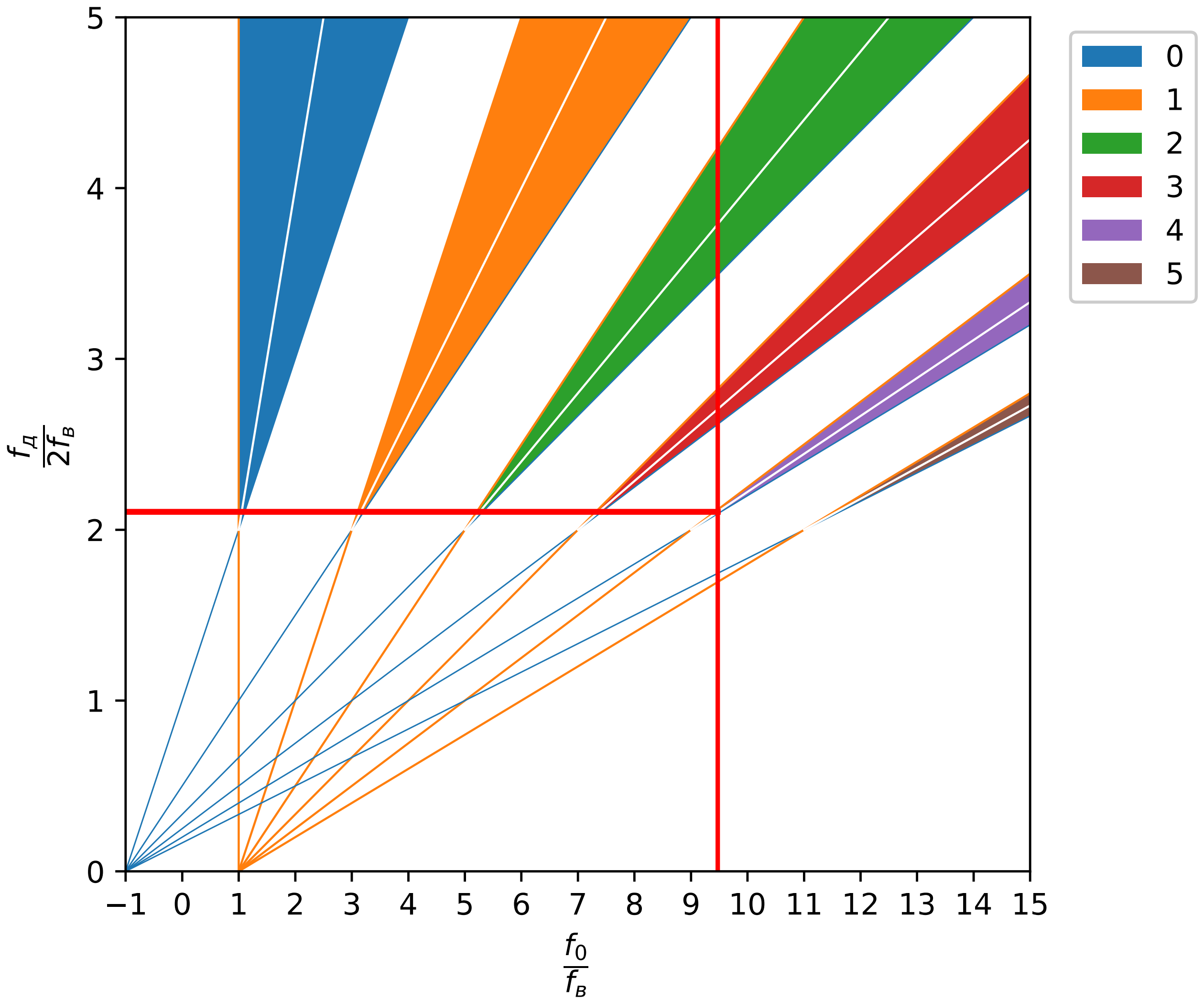


Область допустимых значений $f_д$

$$\frac{2(f_0+f_в)}{m+1} < f_д < \frac{2(f_0-f_в)}{m}.$$

для каждого порядка m может быть описана диаграммой, где случай центрирования субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста отвечает попаданием на биссектрису зоны выбора $f_д$:

$$f_д = \frac{4f_0}{2m+1} = 20\ кГц.$$

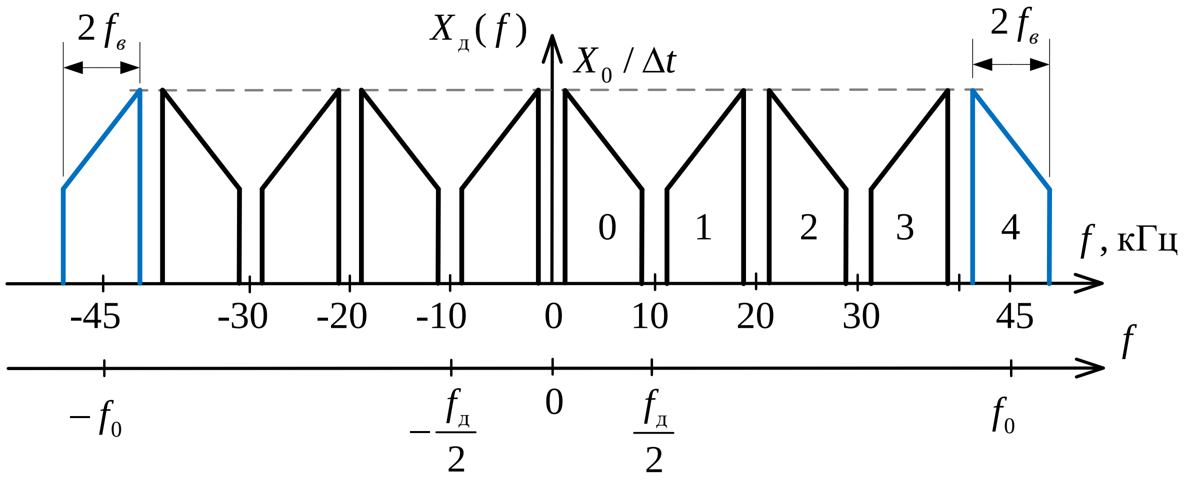


Цвета на диаграмме соответствуют разным значениям m.

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос. Пример.

Построим график спектра сигнала после его дискретизации с частотой $f_д = 20\ кГц$.

Правильный выбор частоты субдискретизации позволяет избежать (для реального сигнала – минимизировать) перекрытия отдельных копий спектра.



Порядок субдискретизации $m = 4$ означает, что прямой спектр сигнала и его несущая частота находятся в пятой зоне Найквиста (на рисунке обозначен как канал 4).

На частотах от 0 до $f_д/2$ находится копия прямого спектра $X_+(f)$.

При $f_д = 20\ кГц$ копии прямого и инверсного спектра оказываются центрованным в полосе Найквиста (между копиями одинаковые зазоры), что позволяет для реального сигнала минимизировать перекрытие неизбежно возникающих хвостов спектра вблизи границы полосы.

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос. Пример.

Решение для случая б) $f_0 = 35$ кГц**.**

В соответствии с условием

$$m < \frac{f_0 - f_в}{2 f_в},$$

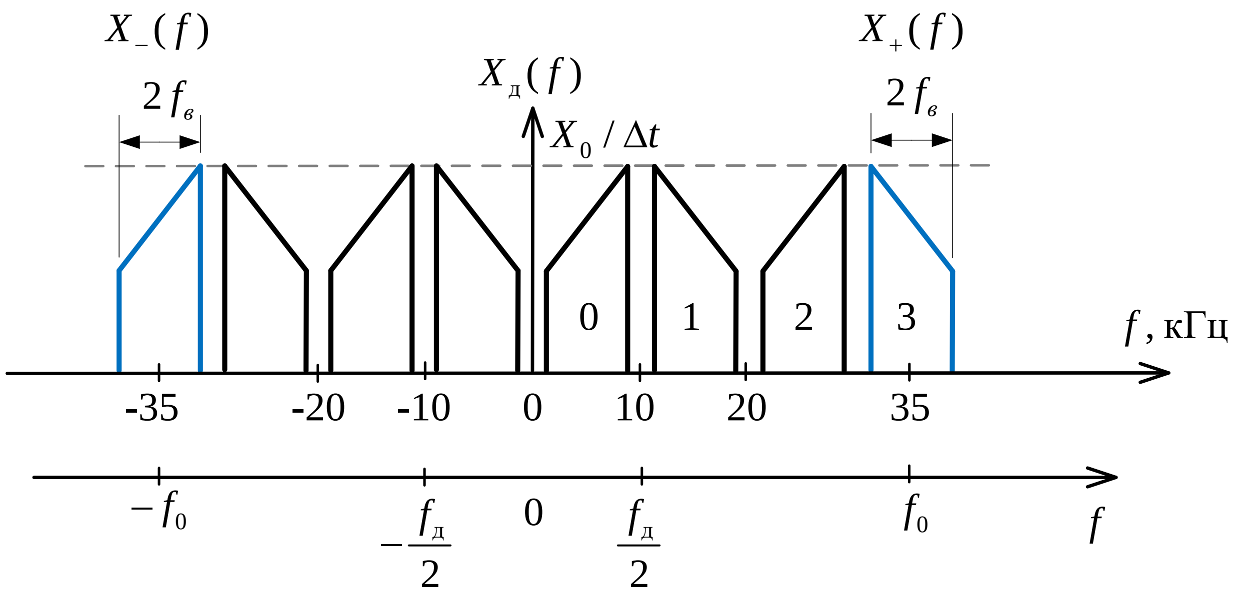
находим, что $m < 3{,}19$.

Наибольший возможный порядок субдискретизации $m = 3$.

Наименьшая частота дискретизации, обеспечивающая центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста, равна

$$f_д = \frac{4 f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц}.$$

То, что порядок субдискретизации $m = 3$ является нечетным, означает, что частотах от 0 до $f_д / 2$ находится копия инверсного спектра $X_-(f)$, а на частотах от $-f_д / 2$ до 0 — копия прямого спектра $X_+(f)$.

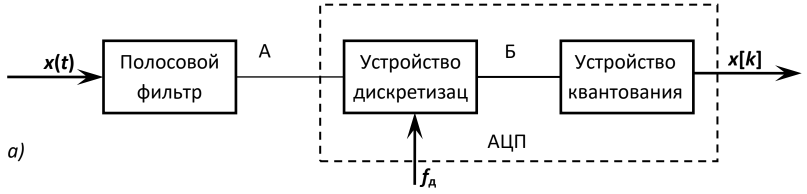


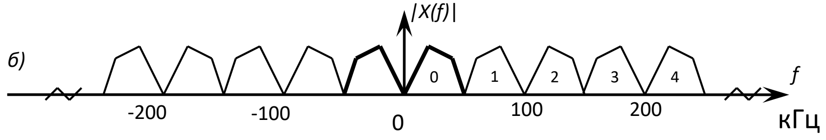
Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать

$$f_д \geq 2\left(f_0 + f_в\right) = 79{,}5 \text{ кГц}.$$

Моделирование субдискретизации с помощью осциллографа PV6501

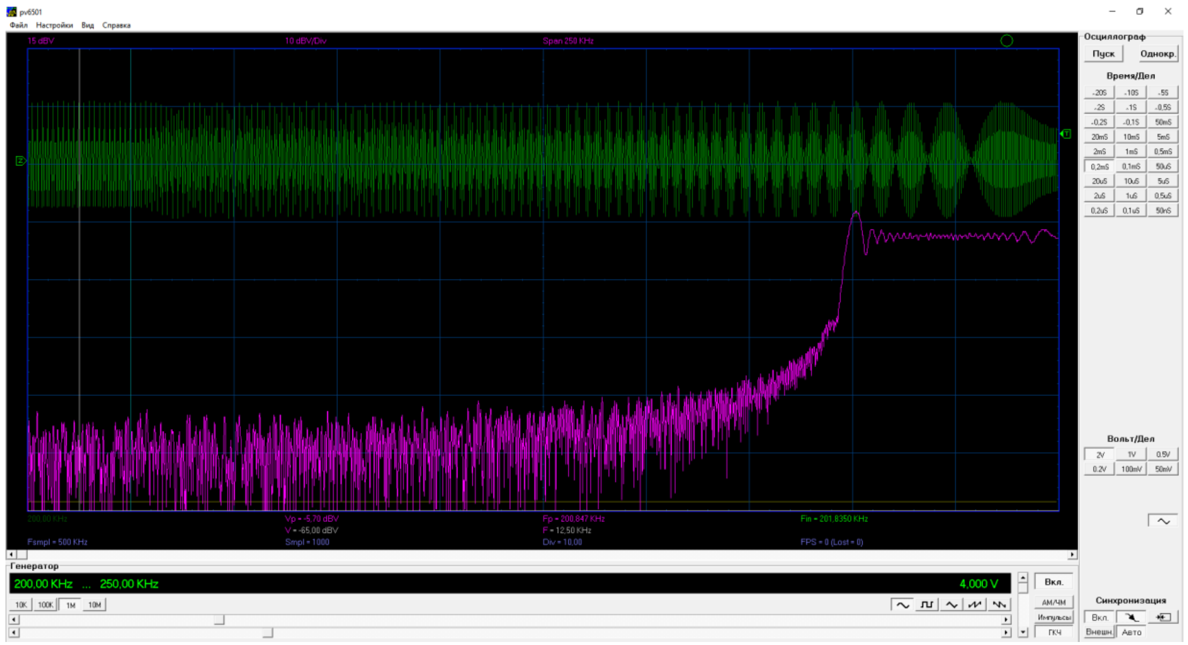
Примером сигнала с полосовым спектром является сигнал с ГКЧ синусоидальной формы. Возьмём сигнал с диапазоном изменения мгновенной частоты от 200 до 250 кГц (соответствует каналу 4 на рисунке).



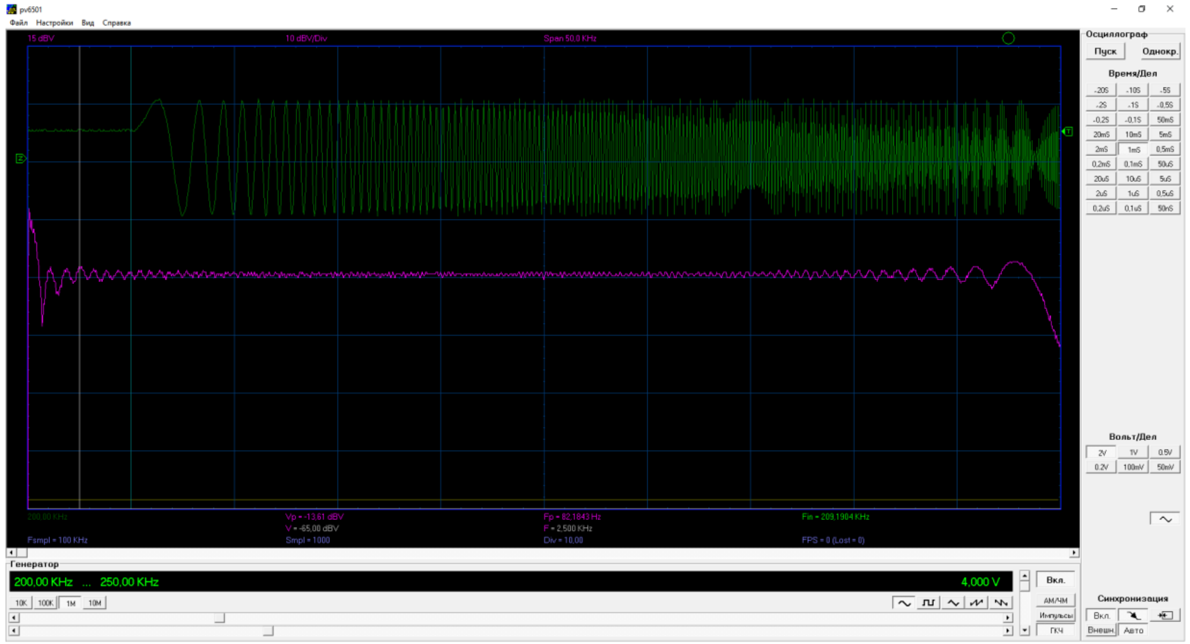


Минимальная частота дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов $f_{д} = 500\ кГц$ (рис. а).

Минимальная частота при субдискретизации $f_{д} = 100\ кГц$ (рис. б).



а)



б)