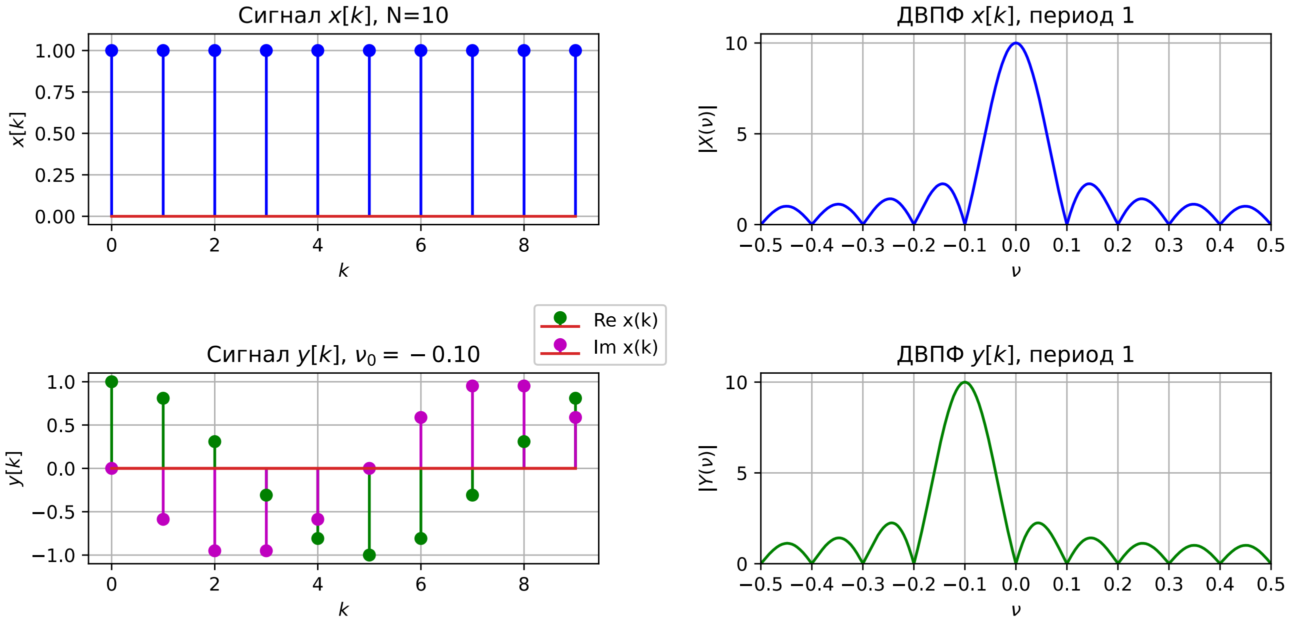
Лекция 6 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

11 марта 2025 г.

4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема смещения, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.



Различные формы записи ДВПФ

Различные формы записи ДВПФ (повторение)

На прошлой лекции мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi f k\Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_Д} \int_{-f_д/2}^{f_д/2} X(f)\exp(j2\pi f k\Delta t)df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_д = f\Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_д = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} X(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\exp(j\theta k)d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
f	Гц	$f_Д = 1/\Delta t$	$[-f_Д/2; f_Д/2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_Д = 2\pi/\Delta t$	$[-\omega_Д/2; \omega_Д/2]$
$\nu = f / f_Д$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_Д$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Линейность

Свойства ДВПФ

1) Линейность

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$\alpha x[k]+\beta y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \alpha X(\nu)+\beta Y(\nu)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

ДВПФ взвешенной суммы сигналов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\alpha x[k]+\beta y[k]\right)\exp(-j2\pi fk\Delta t)=$$

$$=\alpha\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t)+\beta\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t)=$$

$$=\alpha X(\nu)+\beta Y(\nu).$$

Обратное ДВПФ взвешенной суммы спектров

$$\frac{1}{f_{\text{Д}}}\int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2}\left(\alpha X(\nu)+\beta Y(\nu)\right)\exp(j2\pi fk\Delta t)df=$$

$$=\frac{\alpha}{f_{\text{Д}}}\int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2} X(\nu)\exp(j2\pi fk\Delta t)df+\frac{\beta}{f_{\text{Д}}}\int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2} Y(\nu)\exp(j2\pi fk\Delta t)df=$$

$$=\alpha x[k]+\beta y[k].$$

Теорема запаздывания

2) Теорема запаздывания

Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $x[k-l]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)$.

Здесь $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l>0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l<0$.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)\exp(j2\pi\nu k)d\nu =$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu(k-l))d\nu = x[k-l].$$

Пример

$$\mathbf{1}[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}1$$

$$\mathbf{1}[k-1]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}e^{-j2\pi\nu}$$

$$\mathbf{1}[k+1]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}e^{j2\pi\nu}$$

Стоит отметить, что $|X(\nu)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков:

$$|X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)| = |X(\nu)|\cdot|\exp(-j2\pi\nu l)| = |X(\nu)|.$$

Это означает, что АЧХ сигнала не зависит от выбора нулевого отсчета времени ($k=0$).

Теорема смещения

3) Теорема смещения

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu-\nu_0)$.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k),\ \nu_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на ν_0 вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

Пример.

$$y[k] = x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k), \text{где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

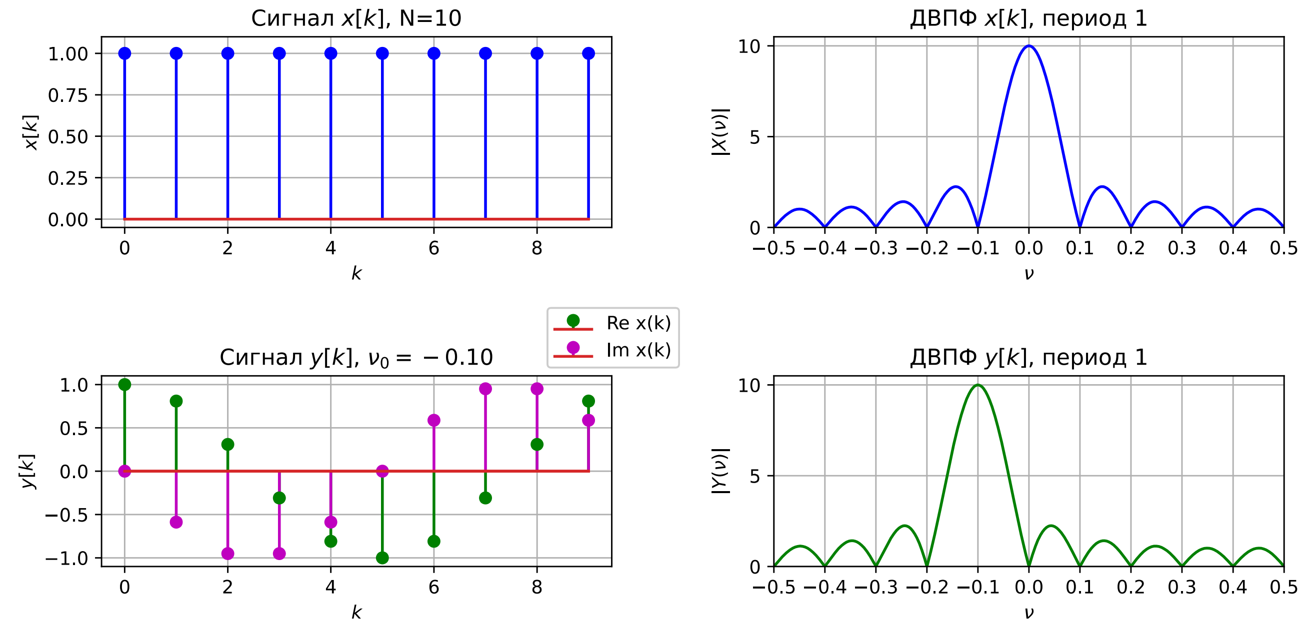
$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)} =$$

$$= \frac{2j}{2j}\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N}-e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu-\nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu-\nu_0))$$



4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|x[k]\right|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left|X(\nu)\right|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu$$

Пример.

Предположим, что имеется финитная последовательность

$x[k] = \{1;\ \underset{k=0}{1};\ 1\}$. Тогда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left|x[k]\right|^2 = 3$. При этом

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi\nu k} = x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} =$$

$$= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu).$$

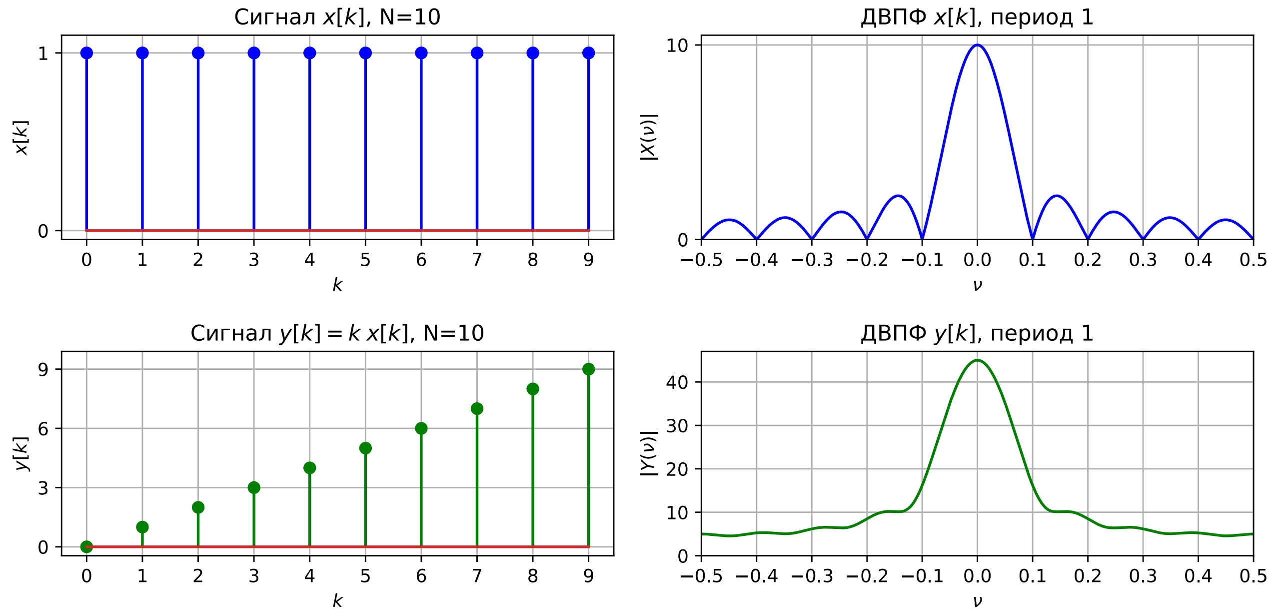
$$\int_{-1/2}^{1/2} \left|X(\nu)\right|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} \left|1 + 2\cos(2\pi\nu)\right|^2 d\nu = 3.$$

5) Умножение на k и дифференцирование по частоте

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $y[k] = kx[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \dfrac{j}{2\pi} \dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$.

Пример.

$$x[k] = \sum_{m=0}^{9} \mathbf{1}[k-m].$$



6) Изменение масштаба

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\exp(-j2\pi(\nu L)m)=X(\nu L).$$

Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов. $x[k]=\sum\limits_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}[k-m]$.

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j2\pi\nu k)=$$

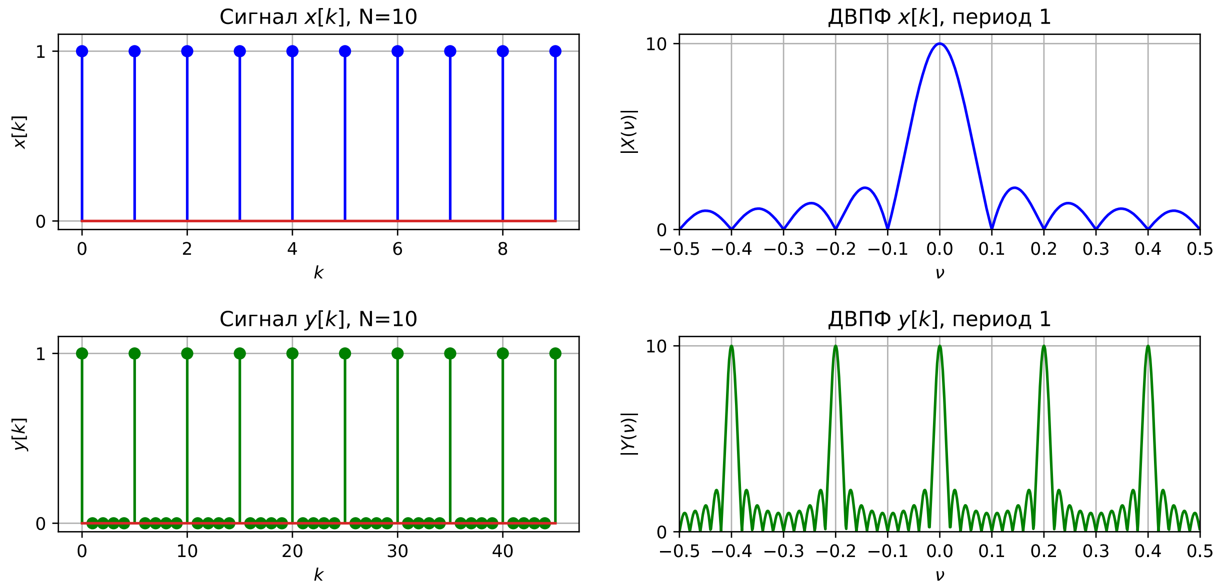
$$=\frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)}=$$

$$=\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N}-e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})}=\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)|=\left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

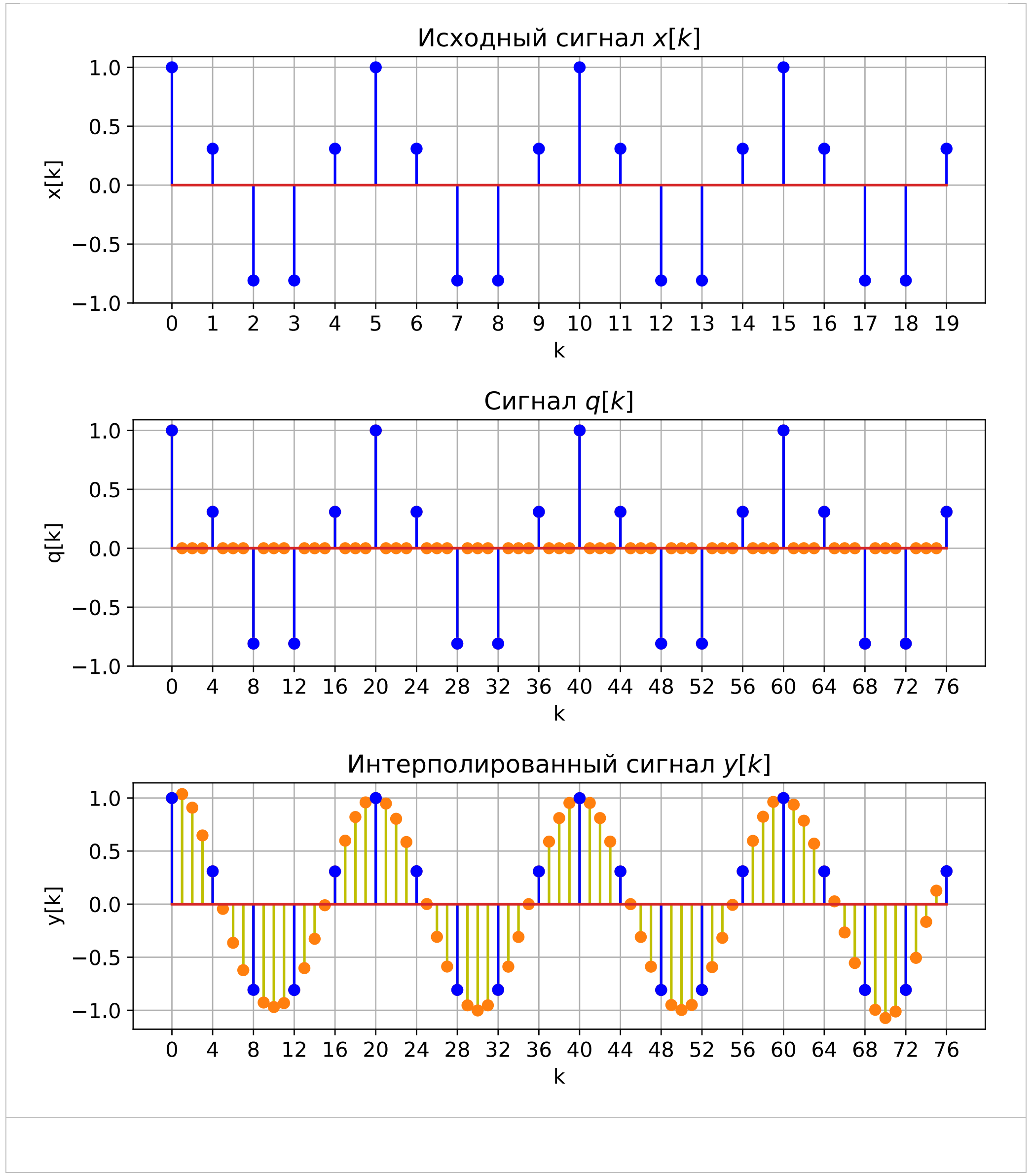
Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

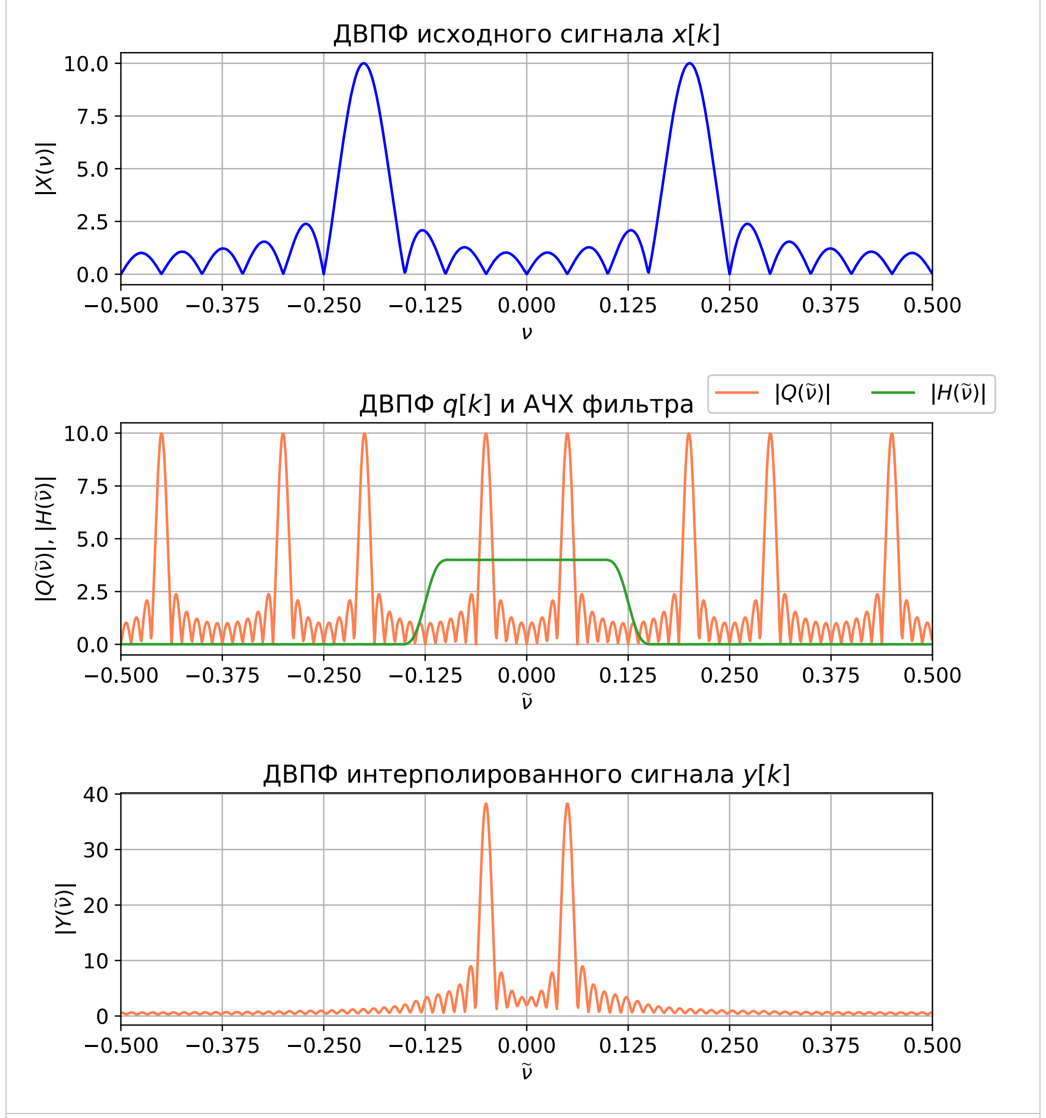
$$|X_L(\nu)|=\left|\frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)}\right|.$$



Теорема смещения

P.S. Применение свойства изменения масштаба для однократной интерполяции с коэффициентом $L=4$.

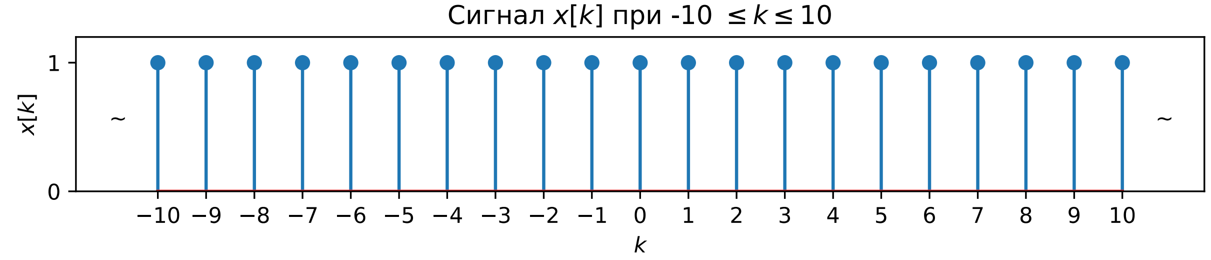


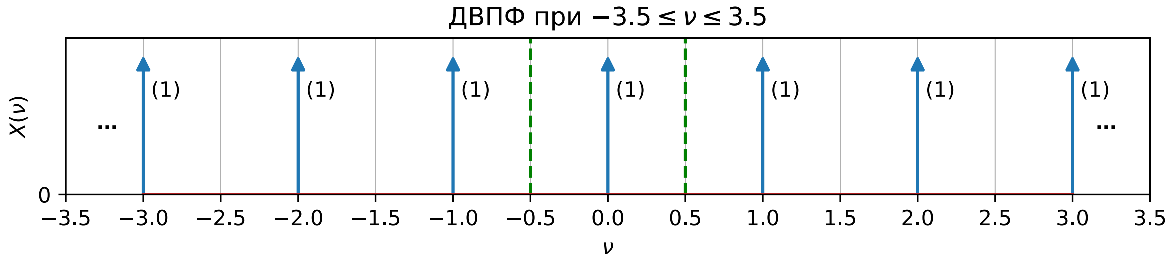


7) ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$





Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\right)\exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(-j2\pi\nu k).$$

$$X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m).$$

Заметим, что $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ-функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m}\exp(-j2\pi\nu m),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu)\exp(j2\pi\nu m)d\nu = e^0 = 1.$$

Тогда получаем, что

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

Теорема смещения

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL]$.

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L),$$ из

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$ получаем

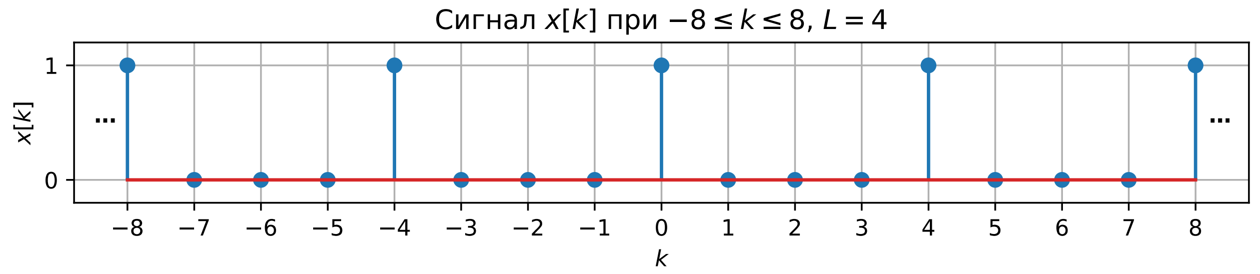
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L-n)$$

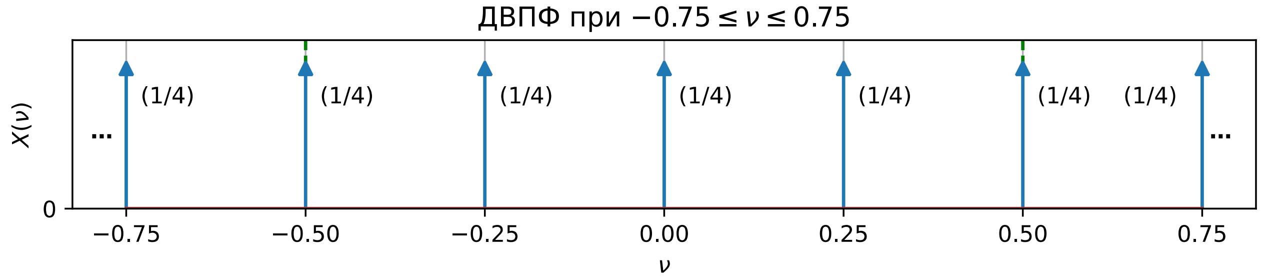
Воспользовавшись свойством δ-функции

$$\delta(a\nu-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(\nu-\frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$





Теорема смещения

в) Гармонические сигналы

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0-n).$$

Докажем свойство.

1) По теореме смешения для ДВПФ если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то

$$x[k]\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu-\nu_0).$$

2) ДВПФ последовательности единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n).$$

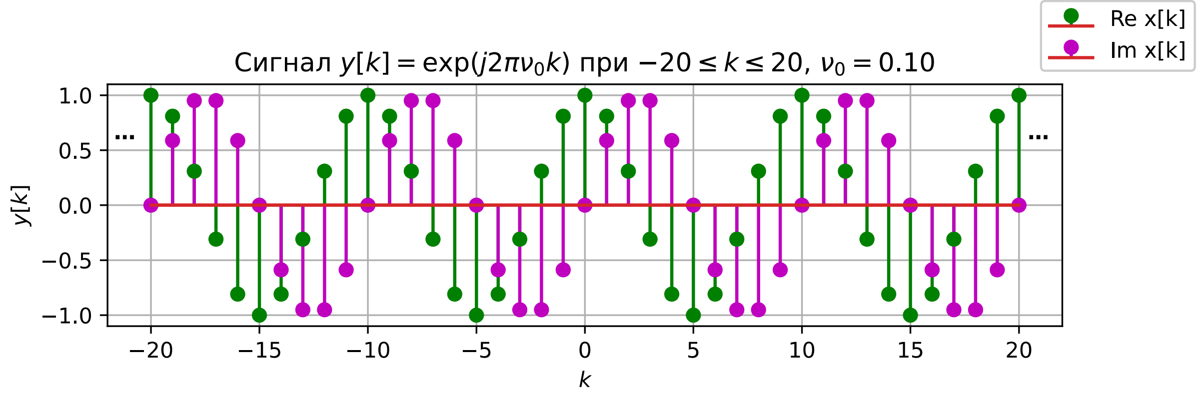
3) Получаем, что

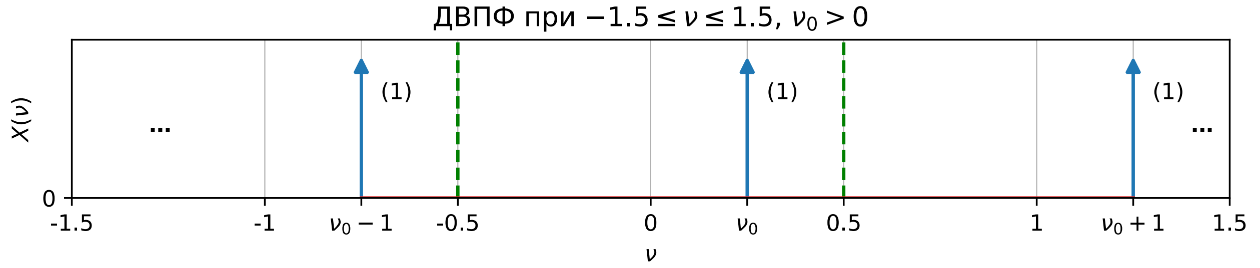
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0-n).$$

Это эквивалентно

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0-n).$$

$$y[k] = \exp\left(j2\pi\nu_0 k\right)$$





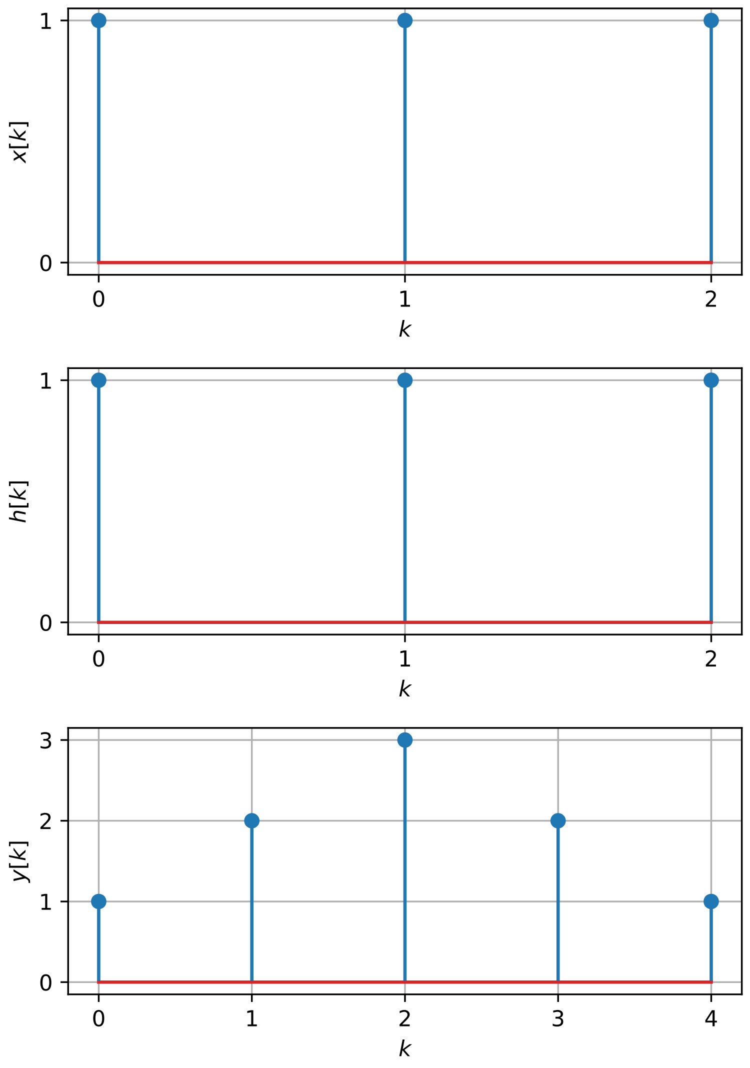
Теорема смещения

8) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)Y(\nu).$$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.



9) Теорема о свертке в частотной области (теорема о спектре произведения).

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$$x[k]y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}.$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть $X(\nu)$ — ДВПФ спектр некоторой последовательности $x[k]$. Как нужно изменить последовательность $x[k]$, чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на $\nu_0 = 1/10$?

№2. Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x[k] = \{1;\ 5;\ \underset{k=0}{2};\ 4;\ 1;\ 1;\ 3\}.$$

Определите значения следующих выражений:

$$X(0);\ X(1/2);\ \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)d\nu;\ \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu;\ \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{dX(\nu)}{d\nu}\right|^2 d\nu.$$

№3. Докажите для ДВПФ свойство: если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то

$$kx[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{j}{2\pi}\frac{dX(\nu)}{d\nu}.$$

Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности) $k^M x[k]$, где M — натуральное число.

№4. Используя свойство

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

получить ДВПФ последовательностей отсчетов $\sin(2\pi\nu_0 k)$ и $\cos(2\pi\nu_0 k)$, где $\nu_0 = 0,1$.

№5. Определить ДВПФ изображенного на рисунке отсчетов треугольного импульса $y[k]$, который может быть представлен как свертка двух одинаковых последовательностей вида

$$x[k] = \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1] + \mathbf{1}[k-2].$$