



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ПОЛЕЙ

ДМИТРИЕВ  
КОНСТАНТИН ВЯЧЕСЛАВОВИЧ  
—  
ФИЗФАК МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЛОСОФСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**ТУМАНОВУ ДАРЬЮ ПЕТРОВНУ**

---

## Оглавление:

Лекция 1. Введение .....	6
План курса.....	6
Что такое сигналы? .....	7
Виды сигналов .....	8
Как исследовать сигналы?.....	10
Построение моделей .....	12
Некоторые типичные примеры моделей .....	12
Прямые и обратные задачи.....	14
<b>Лекция 2. Линейные системы. Z и Фурье преобразования .....</b>	<b>15</b>
Разложение сигнала по базисным функциям .....	15
Линейные инвариантные по времени системы .....	16
Z-преобразование .....	20
Преобразование Фурье .....	21
<b>Лекция 3. Огибающая сигнала. Мгновенная частота и фаза.....</b>	<b>25</b>
Преобразование Фурье. Мгновенная фаза и огибающая .....	25
Гармонический сигнал.....	26
Огибающая произвольного сигнала. Как её построить? .....	26
Огибающая произвольного сигнала. Дополнение до аналитического сигнала .....	29
Мгновенная частота .....	30
Мгновенная частота или частота в спектре .....	34
Частотно-модулированный альтиметр.....	36
<b>Лекция 4. Преобразование Гильберта. Причинность и дисперсия.....</b>	<b>38</b>
Аналитические сигналы .....	38
Преобразование Гильberta .....	38
Свойства преобразования Гильберта .....	39
Принцип причинности .....	40
Гармонический осциллятор с затуханием .....	41
Отражение волны от плоского слоя .....	43
Линейные инвариантные по времени системы .....	44
<b>Лекция 5. Дискретизация сигнала.....</b>	<b>47</b>
Процедура дискретизации сигнала.....	47
Спектр дискретизованного сигнала.....	48
Частота Найквиста .....	50
Теорема Котельникова.....	50
Oversampling .....	52
Ограниченностъ сигнала по времени .....	55
Оконное преобразование Фурье .....	56

Вейвлет-преобразование. Определение и свойства .....	60
Оконное преобразование Фурье. Прямое и обратное преобразование.....	67
Дискретные преобразования. Частотно-временная плотность.....	68
Базис Хаара .....	69
Преобразование Вигнера-Вилля .....	70
<b>Лекция 7. Фреймы .....</b>	<b>75</b>
Разложение по жесткому фрейму .....	76
Фреймовый оператор .....	77
Двойственный фрейм. Свойства фреймовых операторов .....	78
Разложение по фрейму и восстановление.....	79
Определение векторов двойственного фрейма по векторам исходного.....	80
Фреймы и вейвлеты.....	81
Двойственные фреймы для вейвлетов.....	82
"Многоголосые" вейвлеты.....	83
Фреймы и оконное преобразование Фурье. Достаточное условие существования фрейма .	85
Двойственные фреймы для оконного преобразования Фурье .....	86
Избыточность фреймов.....	87
<b>Лекция 8. Методы определения параметров линейных систем .....</b>	<b>89</b>
Функция отклика линейной инвариантной по времени системы (ЛИВС) .....	89
Корреляционная функция.....	90
Автокорреляционная функция. Свойства. Теорема Винера-Хинчина.....	91
Функция отклика ЛИВС. Корреляционный метод .....	92
Модель авторегрессии - скользящего среднего (АРСС) ЛИВС .....	95
Сведение модели АРСС ( $p, q$ ) к модели авторегрессии ( $\infty$ ).....	97
Сведение модели АРСС ( $p, q$ ) к модели скользящего среднего ( $\infty$ ).....	98
Определение $a[n]$ и $b[n]$ . Уравнения Юла-Уокера.....	98
<b>Лекция 9. Оценивание параметров сигналов. Часть 1 .....</b>	<b>102</b>
Классификация объектов по параметрам. Типы признаков.....	102
Определение областей. Регуляризация. Метод $k$ ближайших соседей .....	103
Предварительная обработка данных .....	105
Принятие решений в бинарной ситуации. Метод Байеса .....	106
Наивный байесовский классификатор .....	109
<b>Лекция 9. Оценивание параметров сигналов. Часть 2 .....</b>	<b>111</b>
Оценка постоянных параметров сигнала. Байесовский подход .....	111
Примеры функции потерь .....	112
Функция правдоподобия. Наблюдения параметра на фоне гауссовского шума .....	114
Линейная регрессия .....	117
Определение вероятностей исходов .....	119

---

Логистическая функция ошибки .....	121
Логистическая регрессия.....	123
Линейный классификатор. Стохастический градиентный спуск (SGD) .....	124
Введение нелинейной функции .....	125
Метод моментов .....	126
<b>Лекция 10. Рекуррентные оценки. Фильтр Калмана .....</b>	<b>131</b>
Дискретная полиномиальная модель .....	131
Рекуррентная оценка.....	132
Фильтр Калмана .....	134
<b>Лекция 11. Критерии качества оценок .....</b>	<b>136</b>
Критерии оценок параметра.....	136
Минимально возможная дисперсия оценки .....	136
Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки .....	138
Переход неравенства Рао-Крамера в равенство .....	142
<b>Лекция 12. Винеровская фильтрация .....</b>	<b>144</b>
Фильтрующая линейная система.....	144
Оценка среднеквадратичной ошибки.....	145
Минимум среднеквадратичной ошибки. Уравнение Винера-Хопфа.....	148
Известные спектры сигнала и помехи.....	149
Параметрическая оптимизация фильтра .....	150

## Лекция 1. Введение

### План курса

Лекционный курс "Теория и практика обработки сигналов и полей" состоит из четырех блоков. План курса представляет собой перечень тем, а не список лекций. Часть тем будет рассмотрена в рамках нескольких лекций, также в курс включен практикум.

- 
- 1. Введение
  - 2. Линейные системы. Z- и Фурье преобразования
  - 3. Огибающая сигнала. Мгновенная частота и фаза
  - 4. Преобразование Гильберта. Причинность и дисперсия

**Первый блок курса** посвящен понятию "частота сигнала". Отметим, что понятий несколько, между ними есть определенная взаимосвязь. Иногда понятия путают, что приводит к довольно неприятным последствиям. Также будет рассмотрено: понятие "огибающая сигнала"; что можно сказать о форме сигнала.

- 
- 5. Дискретное преобразование Фурье
  - 6. Частотно-временные представления сигналов
  - 7. Фреймы

**В рамках второго блока** будут рассмотрены: свойства дискретного преобразования Фурье; вопрос о зависимости частоты сигнала от времени, частотно-временные представления сигналов (Вейвлет-преобразование, оконное преобразование Фурье и др.). Во втором блоке понятие "частота сигнала" будет рассмотрено более широко.

- 
- 8. Методы определения параметров линейных систем
  - 9. Оценивание параметров сигналов
  - 10. Рекуррентные оценки
  - 11. Критерии качества оценок

**Третий блок:** сигнал будет рассмотрен как объект, свойства (параметры) которого мы будем определять. Это можно делать на основании методов теории вероятности, математической статистики, предлагать гипотезы, строить оценки, определять качество оценок. Методы, представленные в рамках третьего блока (метод максимального правдоподобия, метод апостериорной плотности распределения, байесовские методы и др.), лежат в основе современных методов машинного обучения, искусственного интеллекта.

- 
- 12. Винеровская фильтрация

**Четвертый блок** продемонстрирует как можно заниматься фильтрацией, как из сигнала в эксперименте отдельно получить полезную информативную часть, отдельно - шумы, неизбежно сопровождающие любой процесс физических измерений.

## Что такое сигналы?

**Определение 1.1:** Сигнал - изменение физической величины во времени и/или в пространстве, несущее кодированную определённым способом информацию, либо синхронизированное (заранее оговоренное с получателем) отсутствие изменения физической величины

Объект нашего изучения - сигнал, но ответить на вопрос "что такое сигнал?" довольно сложно, потому что под сигналом можно понимать по большому счету все, что угодно. "Изменение физической величины во времени" в приведенном определении означает, например, речь: человек, записывает свой голос на диктофон; это мы будем понимать, как сигнал; физическая величина - акустическое давление, оно зависит от времени в той области пространства, где расположен микрофон. Фиксируя это, получаем зависимость  $p(t)$ . Такое изменение будем называть сигналом, то есть сигналом будет называться некая функция. Если аргумент - пространство, то типичным примером является фотография: в фотоаппарате есть двумерная матрица, в неё попадает свет, матрица фиксирует изображение, и таким образом осуществляется фотосъемка. То, что мы получаем в результате фотосъемки (фотография), - тоже сигнал, который часто можно обрабатывать теми же методами, что и временную зависимость (зависимость акустического давления от времени и зависимость яркости от координат  $x, y$  в фотографии). Отметим, что присутствует и существенное отличие. Факторы отличия пространства и времени: время - одномерное, пространство - многомерное (двумерное, трехмерное, и т.д.). При этом есть возможность измерять физическую величину вдоль одной линии. Тогда результатом будет некая одномерная зависимость (также, как и со временем). Мы можем взять, с одной стороны, сигнал  $p(t)$ , где аргументом является время, с другой стороны - выделить ось  $x$ , поставить много микрофонов и получить зависимость  $p(x)$ .

Если данные зависимости могут быть примерно одинаковыми, то в чем заключается разница, если происходит только замена переменных? Присутствует ещё один существенный аспект, связанный с тем, что время необратимо: на временной оси есть точка  $t(0)$  - настоящее время, и если мы обладаем памятью, то в принципе можем заглянуть в прошлое и понять, как сигнал вел себя в предыдущий момент времени. Таким образом, у нас есть вся форма зависимости  $p(t)$  при  $t \leq 0$ . С другой стороны, заглянуть в будущее мы не можем, то есть значения  $t$  при  $t \geq 0$  никакой физический прибор измерить не даст. Если величина не  $t$ , а  $x$ , может быть аналогичный график, но проблемы с невозможностью сдвига вправо не будет, например, можно сдвинуть датчик правее и измерить то значение параметра  $p$ , которое нас интересует, в чем и заключается принципиальная разница. Данный принцип также называется **принципом причинности**. Его суть состоит в том, что вначале наступает причина, и только потом наступает следствие - некий физический процесс, физическое изменение. Следствие не может предшествовать причине, если причина и следствие являются событиями на временной оси. Если эти два события находятся на пространственной оси, левее или правее – разница отсутствует. В этом смысле и временное, и пространственное представление дают нам два разных типа сигналов.

Возможно, что изменение физической величины происходит одновременно и во времени, и в пространстве. Например, если мы записываем видео, а не делаем фотографию. В этом случае сигнал становится многомерным, при этом оси многомерного пространства обладают разными свойствами: одна ось - временная, одна или несколько осей - пространственные.

В приведенном выше определении понятия "сигнал" содержится понятие "отсутствие изменения физической величины". Оно тоже может быть сигналом. Например, группа альпинистов поднимается в горы, при этом есть договоренность с базовой станцией о том, что группа будет держать радиосвязь утром и вечером. Если базовая станция понимает, что группа не вышла на связь, это также будет информацией - сигналом о том, что необходимо спасать людей. Определение 1.1. является достаточно общим, но не покрывающим все возможные случаи.

## Виды сигналов

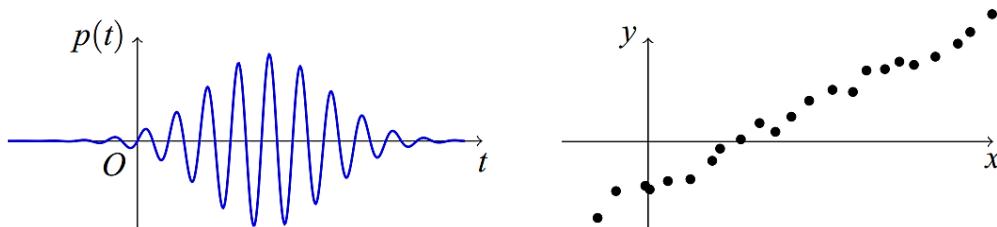
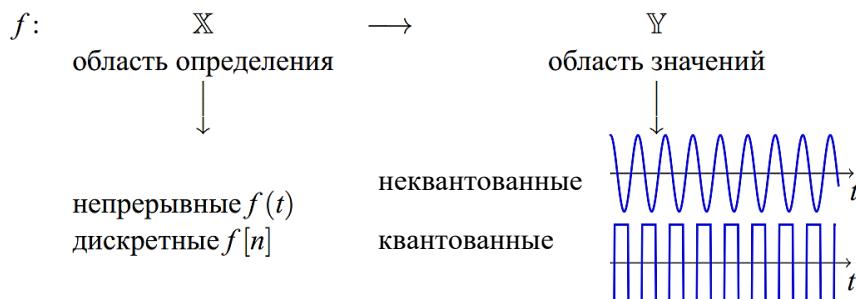


Рис. 1.1. Скалярный сигнал (слева), векторный сигнал (справа)

### • Скалярные и векторные сигналы

На рис. 1.1. слева представлена зависимость акустического давления от времени, в данном случае она является единственной величиной. Соответственно, такой сигнал является скалярным. Справа представлен пример фотографии, введены оси  $x, y$ . Поскольку одновременно фиксируются две оси, такой сигнал является векторным.

### ◦ По типу отображения



Если сигнал является некоторой функцией отображения, которая возникает между, например, пространственной либо временной координатой и некоторой одной или несколькими физическими величинами, то у функции вводятся область определения  $\mathbb{X}$  и область значений  $\mathbb{Y}$ , которые в самом общем случае могут быть следующими:

- **область определения** может представлять собой: некий континуум или набор отдельных значений. В соответствии с этим сигналы можно разделить на **непрерывные** (сигналы с непрерывным временем) и **дискретные** (сигналы с дискретным временем). Отметим, что кроме времени это могут быть координаты. Обозначения:  $f$  - отображение либо сигнал,  $(t)$  - переменная, которая принимает континуум значений,  $[n]$  - квадратные скобки обозначают, что переменная принимает целочисленные значения. Если говорить про реально физически реализуемый процесс, то время является непрерывным, и мы имеем зависимость  $f(t)$ ; для любого  $t$  есть значение физической величины  $f$ . С другой стороны, при осуществлении обработки на компьютере чаще всего мы работаем не с непрерывным временем, а с отчетами сигнала. Например, произведена видеосъемка некоторого процесса, тогда  $[n]$  - номер кадра. Далее необходимо поставить задачу - как дискретный сигнал  $f[n]$  связан с непрерывным сигналом  $f(t)$ , который происходит в природе, где все сигналы являются непрерывными, при этом мы часто обрабатываем их как дискретные.
  - **область значений** делится на два класса: **неквантованные** сигналы, если множество значений - континуум, **квантованные** сигналы - есть несколько возможных вариантов значений. Типичный квантованный сигнал - представление в виде нуля и единиц, которое очень удобно для цифровой обработки. Когда с помощью цифро-аналогового преобразователя заданному числу генерируется физический сигнал (данная процедура происходит в любой звуковоспроизводящей цифровой аппаратуре), он всегда изначально представлен в виде числа с определенным, но конечным количеством знаков после запятой. На выходе из цифро-аналогового преобразователя сигнал будет иметь ступенчатый характер, то есть будет иметь конкретное количество уровней (что можно сгладить за счет RC-цепочек). Например, если в каждый момент времени кодировать уровень физической переменной одним байтом, который имеет 256 возможных значений, получится 256 уровней.
- **Аналоговый сигнал** - непрерывный, неквантованный. Данные сигналы присутствуют в природе; это то, с чем мы работаем в действительности.
- **Цифровой сигнал** - непрерывный квантованный.

Идеальное представление в компьютере невозможно, сигнал часто дискретный и квантованный, также можно сделать дискретный, но неквантованный сигнал (когда мы перешли к дискретному времени, но уровней нет). Сигнал может быть непрерывным, при этом квантованным, то есть в каждый момент времени есть некое значение, как и уровни.

- **Детерминированные и случайные сигналы**

Здесь мы, по сути, говорим не столько о самих сигналах, сколько об их обработке. При обработке детерминированного сигнала играет роль его форма. Например, в случае синусоиды или сигнала, близкого к синусоиде, имеется понятие "период", соответственно, вводятся понятия "частота", "амплитуда", "фаза". Случайные

сигналы интересуют нас не столько формой, сколько статистическими характеристиками. Например, можно измерять интенсивность света (имеет шумовой характер) в какой-то точке или громкость звука в комнате, где звуки возникают за счет различных факторов, поэтому говорить о конкретной форме сигналов не приходится. При этом можно говорить о статистических характеристиках сигналов, например, о среднеквадратичном отклонении акустического давления. Если уровень звука в комнате будет выше среднего порога, мы начнем предпринимать определенные действия - звонить соседям, которые в ходе ремонта превысили норму.

- **Периодические сигналы**

Периодические сигналы - класс сигналов, у которых можно выделить период, то есть класс сигналов, которые через некоторое время или по прошествии некоторого пространственного расстояния повторяют себя.

- **Зависящие и независящие от времени и/или координат в пространстве**

Сигналы могут зависеть либо не зависеть от двух параметров - время и координаты. За счет наличия принципа причинности и всего того, что с ним связано, типы сигналов будут вести себя и обрабатываться по-разному.

## Как исследовать сигналы?

- **Непосредственное измерение характеристик сигнала**

Есть некоторые сигналы и функциональная зависимость  $f(t)$ , тогда можно непосредственно измерить характеристики сигнала. Если мы не оговариваем форму зависимости сигнала, то измерить можно:

- Энергия сигнала  $f(t)$ :  $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$

возводим сигнал в квадрат, интегрируем от  $-\infty$  до  $\infty$ ;

- Энергия сигнала за время  $T$ :  $E_T = \int_0^T f^2(t) dt$

в эксперименте бесконечности нет, измеряется конечное время, поэтому проинтегрируем за конечное время;

- Средняя мощность сигнала за время  $T$ :  $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$
- Средняя мощность сигнала:  $P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$

с помощью данного определения можно работать, например, со средней мощностью шума.

- **Преобразование сигналов**

Вторая возможность - преобразование сигналов. Оно часто применяется в случае, когда с сигналом работать неудобно. Соответственно, переводим его в представление, с которым это делать удобно. Например, сигнал радиоприемника

передается на высокой частоте - волны УКВ-диапазона. Такие частоты человек не слышит, поэтому необходимо обеспечить передачу информации с последующим воспроизведением в звуковой диапазон частот. Для этого в радиоприемнике выполняется преобразование сигнала из электромагнитного в звуковой тип колебаний.

- **Оценка параметров исследуемых объектов**

Оценка параметров исследуемых объектов - ещё один тип задач. Если мы хотим узнать, какая температура на поверхности Солнца, то необходимо определить, что такое поверхность Солнца, во-вторых - каким-то образом развить теорию, которая поможет это сделать, в-третьих - зафиксировать спектр солнечного излучения, понять, как он соотносится со спектром излучения, например, абсолютно черного тела. В итоге - в рамках описанной модели по данным признакам оценить температуру. В качестве сигнала мы имеем солнечный свет, в качестве параметра - температуру, из сигнала восстанавливаем параметр. Любой процесс измерения сколько-нибудь сложных величин так или иначе опирается на оценку параметров. Даже такая простая процедура, как измерение стола, также будет связана с сигналом, которым в данном случае является изображение на сетчатке глаза. Он обрабатывается с помощью мозга или некой системы распознавания, если это необходимо. Показание линейки считывается в конкретное значение - конкретный параметр длины стола. Важно учесть, что длина стола подвержена погрешностям, поэтому будет необходимо применить статистику, то есть провести измерения несколько раз.

- **Проверка гипотез**

Более строгая в плане определения параметров теория связана с проверкой статистических гипотез. Её суть состоит в следующем: исходя из неких соображений, исследователь выдвигает гипотезу, например, длина стола соответствует 100 см; выдвигается альтернатива гипотезе - длина стола  $\neq$  100 см или длина стола  $>$  100 см; с помощью методов математической статистики и с использованием результатов физических измерений необходимо сделать выбор: в одном случае мы говорим о том, что гипотеза неверна, и её следует отклонить, в другом - что не имеем достаточно данных для того, чтобы отклонить гипотезу, соответственно, необходимо собрать больше данных либо удовлетвориться полученным результатом. Данный подход является математически строгим, именно таким образом необходимо принимать решения об оценке тех или иных параметров. Отметим, что чаще используются более простые процедуры.

- **Выявление взаимосвязей между несколькими сигналами**

Это метод, который используется в случае, когда одновременно приходит несколько сигналов, и необходимо определить, как они между собой связаны, за счет каких явлений возникли данные связи. В качестве примера можно взять курсы валют на фондовой бирже (иены, евро, швейцарского франка) и посмотреть, как они себя ведут. Иногда все три валюты двигаются в одном направлении, например, падают к курсу рубля, который растет. Таким образом, могут существовать определенные взаимосвязи.

Какое-то явление (стихийное бедствие или благоприятный случай) оказывает влияние сразу на несколько сигналов. Анализируя совокупность данных, можно понять, например, какое явление произошло, и что именно вызвало некие движения. Здесь часто используется корреляционный анализ.

## Построение моделей

Говоря об описании реальных, физически существующих сигналов либо об объектах, необходимо понимать, что физическая суть всегда очень сложна. Любой существующий объект всегда заведомо сложнее, чем возможность человека его понять и адекватно математически описать, поэтому вместо того, чтобы работать с каким-то конкретным физическим объектом, исследователи чаще переходят к тому, что выдвигают некоторую модель и работают именно с ней.

**Определение 1.2:** Модель - совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Модель позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

За счет того, что параметров относительно немного, модели все-таки могут быть математически описаны, кроме того, благодаря этому можно говорить об обобщениях. Например, можно сделать модель, но не конкретного стола, а модель, которая будет относиться ко всем столам данного типа. С одной стороны, это удобно, поскольку описывает всего несколько параметров, с другой - не придется описывать каждый стол в отдельности, ведь два стола всегда друг от друга немного отличаются, но на не очень существенные для нас параметры.

Рассмотрим модели функций. Сложный объект в виде функции мы будем пытаться свести к более простому описанию.

## Некоторые типичные примеры моделей

- **Полиномиальная модель:**  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$

Если есть некоторая функция  $f(x)$ , но мы не знаем, как она себя ведет, и хотим описать с помощью небольшого количества параметров, то полиномиальная модель может быть одним из вариантов. Для этого функция раскладывается в ряд в окрестности, например, нуля, тогда вместо функции имеем несколько коэффициентов. Отметим, что модель по отношению к объекту имеет определенную область применимости. Например, рассматриваемая модель может вести себя адекватно вблизи нуля, при удалении от него - коэффициентов и зависимостей будет не хватать. Тогда будет необходимо либо расширить ряд, либо отметить, что модель за пределами некой области становится неприменимой. При этом вблизи нуля она будет описывать поведение функции очень хорошо, поскольку небольшое количество параметров можно быстро посчитать.

- **Циклическая модель:**  $f(x) = A_1\sin(\omega_1x) + A_2\sin(\omega_2x) + \dots$

Циклическая модель: сигнал представлен какими-то периодическими явлениями. Например, функцию  $f(x)$  можно представить в виде совокупности синусов или косинусов, каждый из которых обладает частотами  $\omega_1, \omega_2$  и т.д., амплитудами  $A_1, A_2$  и т.д. В данном случае также используется всего несколько параметров.

- **Модель скользящего среднего:**

$$f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m g_{n-m} + \xi_n$$

Модель скользящего среднего представляет собой модель устройства, где выход связан со входом следующим образом: выход зависит от значения входного для устройства сигнала в предыдущие моменты времени, которые предшествуют данному измерению, когда  $m = 1$ , в момент времени на два такта назад (здесь рассматривается дискретное представление), на три такта и т.д. до  $m$ . На устройство пришел сигнал, мы его зафиксировали в  $m$  предыдущих моментах времени, далее складываем с определенными весовыми множителями  $\alpha_m$ , добавляем величину  $\xi_n$ , которая зависит от конкретного момента времени. Устройство может быть крайне сложным, но мы сводим описание его работы к набору определенных коэффициентов.

- **Авторегрессионная модель:**

$$f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m f_{n-m} + \xi_n$$

Данный вариант описания устройства предполагает, что функция  $g$ , которая была на входе данного устройства, заменяется на функцию  $f$ , которая работает на выходе. Таким образом, мы связываем сигнал на выходе устройства с сигналом на выходе этого же устройства, который связан сам с собой, но в предыдущие моменты времени. То, что он автосвязан, находит свое отражение в названии модели.  $\xi_n$  - некоторая величина, зависящая от конкретного момента времени.

- **Модель гауссовского процесса:**

$$N(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Рассмотренные ранее модели устройств были в детерминированном виде. Что происходит, если сигнал является случайным? Можно рассматривать случайный процесс как некоторую функциональную зависимость  $f(t)$ , но в таком представлении это не будет иметь большого смысла, потому что один шум от другого принципиально отличается формой, но может не сильно отличаться другими характеристиками. В данном случае мы описываем случайные процессы статистическими характеристиками. Например, для описания гауссовского процесса достаточно выделить среднее значение  $\bar{x}$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Тогда мы описываем не значение физической величины в каждый момент времени, а вероятность того, что физическая величина в данный момент

времени принимает значение  $x$ . Таким образом, мы описываем её двумя параметрами, хотя сам случайный процесс является очень сложным.

Отметим, что модели могут быть очень разнообразными и сложными, представленный список является далеко неисчерпывающим. Главное, что от очень сложного объекта, от сложного сигнала, который определяется миллионами параметров, существующих в физическом мире, мы переходим к удобному и компактному математическому описанию.

### Прямые и обратные задачи

**Определение 1.3: Прямая задача** - необходимо определить, как будет вести себя модель, все характеристики которой заданы

**Определение 1.4: Обратная задача** - необходимо по заданному поведению объекта построить модель и определить все ее характеристики. В ряде случаев для этого объект можно подвергнуть заданному внешнему воздействию

Обратные задачи являются гораздо более сложными. Когда объект подвергается внешнему воздействию, то в соответствии с результатом воздействия можно говорить о том, что расположено внутри объекта. Пример обратной задачи: предположим, что есть система типа "черный ящик", при подаче на вход сигнала  $f$ , на выходе появляется сигнал  $g$ ; необходимо узнать - каким образом система из сигнала  $f$  получает сигнал  $g$ . Это необходимо в следующем случае: когда мы подадим системе другой сигнал  $f'$ , то заранее будем иметь предсказание - какой сигнал  $g'$  выдаст система.

Обратные задачи могут быть конструкторского типа. Проведем аналогию с самолетом: предположим, что есть модель самолета, про которую все известно (из каких элементов состоит самолет, из каких материалов выполнены элементы, внешние условия, включая параметры погоды); мы хотим узнать, каким образом самолет будет летать. Для решения задачи можно провести сложное математическое моделирование, сделать физическую модель самолета и запустить её. Это примеры прямой задачи. Обратная задача предполагает, что мы задаем характеристики полета самолета ( дальность полета с неким запасом топлива, размеры и грузоподъемность, максимальную высоту подъема, управляемость и др.) и предлагаем конструкцию, разработанную в соответствии с исходными параметрами. Построить самолет на основе ряда параметров - сложная задача, которой занимаются крупные конструкторские бюро, при этом такая задача является некорректной, поскольку у нее может быть не единственное решение. Можно предложить две совершенно разные конструкции самолетов, может оказаться, что для поставленной задачи нет решения, то есть физически невозможно создать самолет, который обладает заданными характеристиками. Несмотря на то, что обратные задачи являются более сложными, именно с ними чаще всего и приходится работать, при этом они представляют наибольший интерес.

## Лекция 2. Линейные системы. Z и Фурье преобразования

### Разложение сигнала по базисным функциям

В ходе первой лекции курса "Теория и практика обработки сигналов и полей" было рассмотрено понятие "система обработки сигнала" - некоторый "черный ящик", в который попадает сигнал на вход, и есть сигнал на выходе. Возникают вопросы: как создать модель "черного ящика"? каким образом её можно эффективно описать, чтобы параметров модели было относительно немного? Для этого во многих случаях работает подход, основанный на разложении сигнала по базисным функциям.

представление для непрерывного случая

$$f(t) = \int_S \tilde{f}(s)\Psi(s, t)ds$$

представление для дискретного случая

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

- пусть есть сигнал  $f(t)$ , набор функций  $\Psi(s, t)$  в непрерывном случае, либо  $\Psi_n(t)$  - функции двух переменных, переменная  $n$  - дискретная,  $t$  - непрерывная; функция  $f(t)$  может быть представлена в виде коэффициентов разложения  $\tilde{f}$  либо  $\tilde{f}_n$ ;
- выбор "удобных" базисных функций определяется задачей



- предположим, что описываемая система линейная; пусть система описывается оператором  $\hat{A}$ , сигнал на входе -  $f(t)$ ; сигнал на выходе -  $g(t)$ , представленный в виде  $\hat{A}f(t)$ ;
- $\hat{A}$  - линейный оператор, у которого можно указать собственные значения и функции:  $\hat{A}\Psi_n(t) = \alpha_n\Psi_n(t)$ . Из теории линейных операторов известно, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, например, взаимно перпендикулярны, их можно ортого нормировать, поэтому такое представление удобно;
- используем собственные функции в качестве базиса для разложения функции  $f(t)$  в данной задаче. Если часть собственных значений является вырожденными, в этом случае все пространство может не покрываться. Тогда для базиса необходимо добавить в пространство собственных векторов некоторые векторы, которые позволяют работать со всей совокупностью  $\alpha_n\Psi_n(t)$

$$\hat{A}f(t) = \hat{A} \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \hat{A}\Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \alpha_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{g}_n \Psi_n(t) = g(t)$$

- подвергаем функцию  $f(t)$  действию линейного оператора  $\hat{A}$ ; представляем функцию  $f(t)$  в виде разложения  $\sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$  по базису  $\Psi_n$ ;

- оператор  $\hat{A}$  - линейный, им можно подействовать на каждое слагаемое из суммы; получаем векторы, не вошедшие в совокупность  $\alpha_n \Psi_n(t)$ , - не будет векторов, для которых действие оператора на вектор = 0. С другой стороны, векторы, дающие ненулевые собственные значения, останутся, получаем:  $\sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$ ; из  $\alpha_n \Psi_n(t)$  можно вынести коэффициент  $\alpha_n(t)$  (собственное число); обозначим  $\tilde{g}_n(t)$  произведение коэффициента  $\alpha_n$  и  $\tilde{f}_n$ ; обратим внимание, что  $\tilde{g}_n(t)$  - число, поскольку  $\alpha_n(t)$  и  $\tilde{f}_n(t)$  - числа;
- итог:  $\sum_n \tilde{g}_n \Psi_n(t)$  - сигнал на выходе линейной системы, заданной оператором  $\hat{A}$ , то есть функция  $g(t)$  - оператор  $\hat{A}$ , действующий на функцию  $f(t)$ ;
- коэффициенты разложения  $\tilde{f}_n(t), \tilde{g}_n(t)$  связаны между собой:  $\tilde{g}_n = \alpha_n \cdot \tilde{f}_n$ . Соответственно, достаточно знать только коэффициенты  $\alpha_n$ , собственные значения оператора  $\alpha_n \Psi_n(t)$ , чтобы описать, каким образом происходит преобразование из функции  $f(t)$  в функцию  $g(t)$ .

Это удобное пространство для работы с сигналами: в зависимости от того, какой в задаче линейный оператор, выделяем его собственные векторы, собственные значения, представляем исходную функцию в виде разложения, каждый из коэффициентов  $\tilde{f}_n$  умножаем на соответствующее собственное значение  $\alpha_n$ .

### Линейные инвариантные по времени системы

**Определение 2.1: Линейная система** - система, сигнал на выходе которой  $g$  связан с сигналом на ее входе  $f$  с помощью линейного оператора  $\hat{A}$

- **непрерывный сигнал:**

$$g(t) = \hat{A}(\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)) = \underbrace{\xi_1 \hat{A}f_1(t)}_{g_1(t)} + \underbrace{\xi_2 \hat{A}f_2(t)}_{g_2(t)}$$

- **сигнал с дискретным представлением:**

$$g(n) = \underbrace{\xi_1 \hat{A}f_1[n]}_{g_1[n]} + \underbrace{\xi_2 \hat{A}f_2[n]}_{g_2[n]}$$

Если на вход системы подать суперпозицию двух сигналов  $f_1$  и  $f_2$  с амплитудами  $\xi_1, \xi_2$ , то результат  $g(t)$  будет в точности равен амплитудам  $\xi_1, \xi_2$ , умноженным на функции  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ , которые являются преобразованиями из исходных функций  $f_1$  и  $f_2$ . В случае сигнала с дискретным представлением выполняется то же преобразование; круглые скобки, обозначающие непрерывную величину, меняются на квадратные, обозначающие дискретную величину.

**Определение 2.2: Инвариантная по времени система** - система, сигнал на выходе которой  $g$  связан с сигналом на ее входе  $f$  с помощью оператора  $\hat{A}$ , который не зависит от времени

Обратим внимание, что в данном определении отсутствует слово "линейный", то есть может быть нелинейная инвариантная по времени система. Пример из

радиотехники - диод. Идеальный диод ведет себя одинаковым образом в каждый момент времени. Если он не сгорел, то будет вести себя так всегда, при этом сигнал, проходя через диод, существенным образом меняет форму. Это - нелинейное преобразование. Пример линейной системы, неинвариантной по времени, - усилитель. Часто бывает, что у усилителя коэффициент усиления зависит от температуры. Чтобы это исключить, в нем должны быть специальные термокомпенсирующие цепи. Представим гипотетическую ситуацию: усилитель вынесли на улицу, где он записывает сигналы и днем, и ночью при разной температуре, соответственно, меняется коэффициент усиления. Такая система, хотя она будет удовлетворять принципу линейности, не будет удовлетворять принципу инвариантности по времени: если сдвинуть сигналы по времени, они умножатся на другие коэффициенты. Таким образом, оператор  $\hat{A}$  будет зависеть от времени, но косвенно - за счет изменения температуры, которая зависит от времени.

Наиболее интересный случай - объединение рассмотренных классов систем и получение линейной инвариантной по времени системы (ЛИВС). Такие системы обладают полезными свойствами и часто встречаются на практике. Различные, в том числе радиотехнические цепи, часто можно рассматривать именно как ЛИВС.

$$\begin{aligned} g(t) &= \hat{A}f(t) = \hat{A} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{A}\delta(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Предположим, что оператор  $\hat{A}$ , отвечает данной системе, подадим на вход функцию  $f(t)$  и зафиксируем на выходе функцию  $g(t)$ . Выполним математический "трюк": запишем функцию  $f(t)$  через дельта-функцию; по её определению интеграл  $\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$  в точности равен функции  $f(t)$ .  $\hat{A}$  -оператор, независящий от времени, с другой стороны - является линейным. Меняем порядок интегрирования и взятие оператора  $\hat{A}$ , получаем - функцию  $f(\tau)$  и функцию, которую обозначим  $h(t-\tau)$ ; вторая функция является результатом действия оператора  $\hat{A}$  на  $\delta(t-\tau)$ .

- **свойство линейности** оператора  $\hat{A}$  - использовано там, где мы внесли его под интеграл. Если бы оператор  $\hat{A}$  не был линейным, такое внесение было бы неправомочным;
- **свойство инвариантности** оператора  $\hat{A}$  по времени - когда мы действуем оператором  $\hat{A}$  на некоторую функцию с аргументом  $(t-\tau)$ , то получаем результат  $h(t-\tau)$ ; таким образом, если мы сдвигаем исходную функцию на  $\tau$ , результат тоже сдвигается на  $\tau$ . Синхронность обеспечивается именно инвариантностью по времени, поэтому применены оба свойства оператора.

Когда мы используем такие интегралы, то с помощью замены переменных  $(t-\tau)$  на  $\tau$ , можно перейти к более удобной записи. В итоге: сигнал на выходе

линейной инвариантной по времени системы  $g(t)$  связан с сигналом на входе этой системы  $f(t)$  с помощью интегрального соотношения  $\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau$

Все, чем определяется линейная инвариантная по времени система, - функция  $h(\tau)$ , все параметры сосредоточены именно в ней. Чтобы полностью описать поведение такой системы, необходимо знать только данную функцию.

**Определение 2.3:** Сигнал  $g$  на выходе ЛИВС связан с сигналом  $f$  на ее входе с помощью **импульсной функции отклика**

$h(\tau)$  для непрерывных сигналов:

$h[m]$  для дискретных сигналов:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] f[n - m]$$

Импульсная функция отклика имеет свое название, поскольку была введена следующим образом: оператор  $\hat{A}$  действует на дельта-функцию; функция  $h$  образуется, если на вход системы подать дельта-функцию, то есть импульс; получаем некоторый отклик  $h = \hat{A}\delta$ . Вторая запись выводится аналогичным образом, в ней используется дельта-функция дискретного характера.

### Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t) \quad g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \delta[n - m] = h[n]$$

Если на вход системы подается дельта-функция  $\delta(t - \tau)$ , подставляем по первой формуле; дельта-функция и интеграл взаимно уничтожаются, на выходе - функция  $h(t)$ . Таким образом, если мы подаем на линейную инвариантную по времени систему дельта-функцию - на выходе будет импульсная функция отклика. Если подать дельта-функцию на вход дискретной системы - получим тот же результат. Отметим, что во втором случае дельта-функция немного иная. Под дискретной дельта-функцией понимается функция, которая = 0 всегда, за исключением единственной точки, когда её аргумент = 0, в этой точке она = 1.

### Собственные функции и собственные значения

Рассмотрим ситуацию, когда водятся собственные функции и собственные значения оператора  $\hat{A}$ , который записывается не абстрактно, а с помощью преобразования в виде интеграла:

$$g(t) = \hat{A}f(t) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Пусть  $f(t) = z^t$  - комплексная величина,  $t$  - аргумент функции, тогда

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) z^{t-\tau} d\tau = z^t \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) z^{-\tau} d\tau = f(t) \overbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) z^{-\tau} d\tau}^{H(z)}$$

Обозначим результат выполнения, как  $H(z)$ ; интегрирование производится по переменной  $\tau$ , переменная  $z$  является параметром данной функции.

#### Определение 2.4:

$$H(z) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) z^{-\tau} d\tau \quad \text{- непрерывная системная функция}$$

Функция называется непрерывной не в том смысле, как в математическом анализе: аппарат вводится для непрерывных линейных инвариантных во времени систем, то есть мы работаем в рамках непрерывного времени.

- $f(t) = z^t$  - собственные функции оператора  $\hat{A}$
- $H(z)$  - собственные значения оператора  $\hat{A}$

Именно с такими объектами удобно работать. Собственные функции необходимы как функции, по которым мы будем раскладывать как по базису исходную произвольную функцию  $f(t)$ . Собственные значения необходимы, чтобы быстро выполнять преобразования со входа на выход системы.

Если система является дискретной по времени:

$$g[n] = \hat{A}f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] f[n-m]$$

Пусть  $f[n] = z^n$ , тогда

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m} = f[n] \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}}^{H(z)}$$

#### Определение 2.5:

$$H[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} \quad \text{- дискретная системная функция}$$

По параметру  $z$  (своему аргументу) данная функция является непрерывной, но называется дискретной, потому что при рассмотрении таких систем мы работаем в дискретном времени, заданном отсчетами  $n, m$  и т.д.

- $f[n] = z^n$  - собственные функции оператора  $\hat{A}$
- $H[z]$  - собственные значения оператора  $\hat{A}$

В данном случае мы также переходим в базис собственных функций и используем собственные значения, чтобы быстро выполнять вычисления в базисе (определение, какой сигнал будет на выходе системы).

## Z-преобразование

Определение:

**прямое преобразование:**

$$\mathbb{Z}\{h[n]\} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

**обратное преобразование:**

$$\mathbb{Z}^{-1}\{H(z)\} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(z)z^{n-1} dz$$

Обратное преобразование является более сложным; вычисляется в рамках теории функции комплексной переменной. Контур  $C$  охватывает область сходимости  $H(z)$  и содержит все вычеты  $H(z)$ . Мы будем работать в основном с прямым преобразованием и изучать его свойства. Прямое преобразование часто используется в радиотехнике.

### Свойства Z-преобразования:

- Линейность** -  $\mathbb{Z}\{\xi_1 f_1[n] + \xi_2 f_2[n]\} = \xi_1 \mathbb{Z}\{f_1[n]\} + \xi_2 \mathbb{Z}\{f_2[n]\}$

Подаем на вход преобразованию сумму двух сигналов: на выходе получаем с теми же весами сумму преобразованных сигналов  $f_1, f_2$ .

- Задержка**

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\{f[n-k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n-k]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n-k]z^{-(n-k)}z^{-k} \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]z^{-m} = z^{-k} \mathbb{Z}\{f[n]\} \end{aligned}$$

Данное свойство является важным: пусть сигнал, который подается на вход Z-преобразованию, был задержан на  $k$  отсчетов; на вход подаем функцию  $f[n-k]$ : по определению раскрываем Z-преобразование;  $z^k$  и  $z^{-k}$  - взаимно уничтожаются, то есть преобразование тождественно; выносим  $z^{-k}$  за знак суммы;  $[n-k]$  обозначим переменной  $m$ , получаем выражение - сумма есть Z-преобразование от функции  $f[n]$  с точностью до замены переменной. Поэтому задержка переменной на  $k$  отсчетов - есть умножение результата на величину  $z^{-k}$ . На различных блок-схемах изображается линия задержки - элемент, выполняющий операцию задержки на один отсчет, в общем случае - на  $k$  отсчетов. Часто блоки обозначают  $z^{-1}$ , поскольку умножение на величину  $z^{-1}$  соответствует задержке на один такт.

- Теорема о свертке**

$$\mathbb{Z}\{f[n] * g[n]\} \equiv \mathbb{Z}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m] \right\} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m] \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-m] z^{-n} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] Z\{g[n]\} z^{-m} = \mathbb{Z}\{f[n]\} \cdot \mathbb{Z}\{g[n]\}$$

Если на вход Z-преобразованию подается свертка из двух последовательностей  $f[n] * g[n]$  (знак "\*" обозначает операцию свертки), то свертка определяется как сумма двух последовательностей  $f[m]g[n-m]$ ; применим Z-преобразование. Далее в таких конструкциях используется прием - изменение местами порядка сумм;  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} g[n-m] z^{-n}$  по теореме о задержке - результат Z-преобразования от функции  $g[n]$ , сдвинутое на  $m$  отсчетов, поэтому он умножается на  $z^{-m}$ . Z-преобразование от  $g[n]$  не зависит от  $m$ , можно вынести его за знак суммы, где остается  $f[m] z^{-m}$  - по определению Z-преобразование от последовательности  $f$ . Результат: произведение двух Z-преобразований, соответственно, Z-преобразование от свертки есть произведение Z-преобразований двух функций или двух последовательностей.

## Преобразование Фурье

Есть положить  $z = e^{-i\omega}$

**прямое образование:**

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \mathbb{F}\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

**обратное преобразование:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

## Свойства преобразования Фурье

Первые три свойства переходят из Z-преобразования как следствие:

- **Линейность:**

$$\mathbb{F}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{F}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{F}\{f_2(t)\}$$

- **Задержка:**

$$\mathbb{F}\{f(t - \tau)\} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F}\{f(t)\}$$

- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F}\{f(t) * g(t)\} \equiv \mathbb{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) dt \right\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \mathbb{F}\{g(t)\}$$

- **Обратная теорема о свертке:**

$$\mathbb{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} * \mathbb{F}\{g(t)\}$$

Если применить Фурье-преобразование к произведению двух функций, результатом будет свертка Фурье-преобразованных функций по отдельности, что легко

доказать: прямое и обратное преобразование Фурье отличаются только множителем и комплексным сопряжением.

- **Равенство Парсеваля:**

$$\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |\mathbb{F}\{f(t)\}|^2 d\omega = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Если исходную функцию  $f(t)$  взять  $|f(t)|^2$  и проинтегрировать по всему времени, то результат вычисления будет полной энергией, которая сосредоточена в сигнале  $f(t)$ . Если применить аналогичную процедуру к спектру - получим энергию с точки зрения спектра. Отметим, что энергия сохраняется при переходе из спектрального пространства во временное, либо обратно. Обратим внимание: модуль в квадрате стоит потому, что спектр всегда может быть комплексным, кроме того, сигнал тоже можно рассматривать как комплексный, в этом случае равенство не нарушается.

- **Дифференцирование:**

$$\mathbb{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \mathbb{F}\{f(t)\}$$

С помощью преобразования Фурье полезно проводить интегральные и дифференциальные процедуры. Если применить преобразование к  $f^{(n)}(t)$ , каждый раз при вычислении производной вычисляется множитель  $e^{-i\omega}$ . Соответственно, множитель  $i\omega$  выносится за знак преобразования Фурье, получаем  $(i\omega)^n$ . Интегрирование – процедура, обратная дифференцированию, поэтому в целом можно ожидать аналогичную формулу, однако это не так, поскольку при интегрировании величины появляется некая константа; первообразная вычисляется с точностью до константы.

- **Интегрирование:**

$$\mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) dt \right\} = \frac{1}{i\omega} \mathbb{F}\{f(\tau)\} + \frac{\delta(\omega)}{2} \mathbb{F}_{\omega=0}\{f(t)\}$$

Интегрирование – процедура, обратная дифференцированию, поэтому в целом можно ожидать аналогичную формулу, однако это не так, поскольку при интегрировании величины появляется некая константа; первообразная вычисляется с точностью до константы. Важная добавка –  $\frac{\delta(\omega)}{2}$ , умноженная на значение спектра от функции  $f(t)$  на нулевой частоте; то есть значение спектра на нулевой частоте соответствует некоторой постоянной добавке к функции. Если функция  $f(t)$  в среднем  $\neq 0$ , имеет постоянную добавку.

### Свойства симметрии:

Пусть сигнал  $f(t) \in \Re$ ;

- $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где
- $f_1(-t) = -f_1(t)$  - нечетная функция  $t$
- $f_2(-t) = f_2(t)$  - четная функция  $t$

Про сигнал  $f(t)$  известно, что он действительный

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} \cos \omega t + i \sin \omega t &\rightarrow \mathbb{F}\{f_1(t)\} \in \Re \\ \mathbb{F}\{f_2(t)\} &\in \Im \end{aligned}$$

Косинус - функция четная, синус - нечетная; если умножить четную функцию на нечетную, результатом произведения будет нечетная функция (интегрирование нечетных функций в симметричных пределах даст 0). Остается два возможных варианта: когда выбирается нечетная функция, она умножается на нечетную, когда выбирается четная функция, она умножается на четную.

- нечетная функция  $f_1(t)$  - умножается на нечетную функцию  $i \sin \omega t$ , получаем результат, который в общем случае отличен от 0; наибольшее значение имеет мнимая единица  $i$ ; результат выполнения такого интеграла заведомо будет мнимым, то есть результат Фурье-преобразования функции  $f_1(t)$  будет чисто мнимым;
- четная функция  $f_2(t)$  - из двух произведений  $f_2(t)$  на косинус и  $f_2(t)$  на синус после интегрирования важным будет первое, потому что только оно дает четную функцию; результат - обычное действительное число.

В общем случае, когда берется преобразование Фурье от всей суммы  $f_1(t) + f_2(t)$ , результат будет содержать как действительную часть, так и мнимую.

Другое свойство симметрии состоит в том, что действительная часть Фурье преобразования любой функции  $f(t)$  без разбивки будет четной функцией  $\omega$ , мнимая часть - нечетной функцией  $\omega$ .

- $\operatorname{Re} \mathbb{F}\{f(t)\}$  - четная функция  $\omega$
- $\operatorname{Im} \mathbb{F}\{f(t)\}$  - нечетная функция  $\omega$

Действительная часть спектра действительной функции - симметрична, мнимая часть спектра действительной функции - антисимметрична.

Рассмотрим преобразование Фурье от некоторых конкретных функций:

- $\mathbb{F}\{\delta(t)\} = 1; \mathbb{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{i\omega}$

Функция  $\operatorname{sgn}(t) = 0$ , при  $t = 0$ ;  $\operatorname{sgn}(t) = 1$ , при положительных  $t$ ,  $\operatorname{sgn}(t) = -1$  при отрицательных  $t$ ;  $\mathbb{F}\{\delta(t)\} = 1$ , функция знака - интеграл от дельта-функции (дельта-функция везде равна нулю, в нуле - настолько большой выброс, что если включить ноль в пределы интегрирования, это будет единица), соответственно, если взять первообразную от дельта-функции, то на отрицательных числах результат будет равен нулю, на положительных - единичный скачок, ступенька. Функция  $\operatorname{sgn}(t)$

является преобразованной ступенькой от -1 до 1, амплитуда - 2, при этом скачок смещен так, что его среднее значение = 0; применим формулу для интегрирования функции под знаком Фурье-преобразования.

- $\mathbb{F}\{\theta(t)\} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$

$\theta$  - функция Хевисайда, ступенчатая функция, которая немного сдвинута относительно функции  $\text{sgn}(t)$ ;

амплитуда - 1, среднее значение функции  $\neq 0$ , поэтому есть добавка  $\pi\delta(\omega)$ .

- $\mathbb{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $\mathbb{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
- $\mathbb{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \pi i(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$

Иллюстрация свойств симметрии, которая была рассмотрена ранее. Преобразование Фурье у косинуса симметричное, у синуса - антисимметричное, при этом ещё и мнимое.

- $\mathbb{F}\left\{\frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)\right\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$

Функция sinc - это функция типа  $\frac{\sin(x)}{x}$ , если в качестве аргумента функции взять  $\omega_0 t$ , множитель  $\frac{\omega_0}{\pi}$  поставить в качестве амплитуды, то Фурье-образ функции sinc будет прямоугольником с центром в нуле и шириной  $\frac{\omega}{2\omega_0}$ . Таким образом, мы знаем, какая функция необходима, чтобы её спектр был четко (с математической четкостью) прямоугольным.

## Лекция 3. Огибающая сигнала. Мгновенная частота и фаза

### Преобразование Фурье. Мгновенная фаза и огибающая

Функция  $f(t) \leftrightarrow$  Спектр  $\tilde{f}(\omega)$

Есть сигнал, который представляется в виде функции  $f(t)$ , будем подразумевать, что  $t$  - функция времени; на данном этапе не будет разницы, если переменную  $t$  заменить на переменную  $x$  и рассматривать её, например, как функцию координат. Есть функция  $f(t)$ , по приведенным ниже правилам ставим в соответствие её спектр  $\tilde{f}(\omega)$ ;  $\omega$  - называется **частотой в смысле спектрального представления** функции  $f(t)$ .

прямое образование:

обратное преобразование

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \mathbb{F}\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Когда мы говорим о частоте, то в целом подразумеваем, что есть некоторый сигнал, он каким-то образом с течением времени сам себя повторяет (полностью или не совсем полностью). Для такого сигнала выделяем единичный промежуток времени и смотрим, сколько раз за данный промежуток сигнал повторит сам себя. Это количество будет частотой. Если сигнал  $f(t)$  не полностью себя повторяет, а видоизменяется с течением времени, то у него может меняться амплитуда. Сигнал, у которого одновременно меняется амплитуда, но при этом форма колебаний остается постоянной, можно представить следующим образом: вместо функции  $f(t)$  вводим две: функция  $A(t)$  описывает изменения амплитуды с течением времени, функция  $\Phi(t)$  - ответственна за то, как форма одного колебания себя передает, функция  $\cos$  отражает, что множитель  $\cos \Phi(t)$  обладает периодичностью. Из эмпирических интуитивных представлений приходим к формуле:

$$f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

- $A(t)$  - огибающая сигнала; косинус для действительного аргумента заключен в диапазоне от -1 до 1, следовательно, функция  $A(t)$  будет описывать максимальное отклонение сигнала от нулевого значения; таким образом, если просто изобразить функцию  $A(t)$ , то сигнал  $f(t)$  будет заключен в промежутке от  $-A(t)$  до  $+A(t)$ , то есть функция  $A(t)$  будет огибать форму сигнала;
- $\Phi(t)$  - мгновенная фаза;
- $\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$  - если продифференцировать мгновенную фазу по времени, получится мгновенная частота - **второе понятие частоты**.

Функцию  $f(t)$  всегда можно представить, как  $A(t) \cos \Phi(t)$ . В общем случае удобно делать следующее распределение функций:  $A(t)$  - слабо зависит от времени, описывает медленно меняющиеся характеристики сигнала;  $\Phi(t)$  - зависит от времени

сильно, быстро меняется со временем, описывает мелкие подробности сигнала. Такое представление не является однозначным, потому что пространство из двух функций всегда более богато, чем из одной. Если из одной функции восстановить одновременно две, будет неоднозначность. Попробуем формализовать данный переход и наложить такие дополнительные условия на функции  $A(t)$  и  $\Phi(t)$ , которые позволят сделать определение более четким.

## Гармонический сигнал

$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$

Для перехода от функции  $u(t)$  к функциям  $A(t)$  и  $\omega_0$  предлагается не очень очевидный шаг, который легко обобщить на более сложные сигналы:

- $v(t) = A \sin \omega_0 t$  - сигнал, сдвинутый на  $\pi/2$
- $U(t) = u(t) + iv(t) = A \exp(i\omega_0 t)$

Сигнал  $U(t)$  формируем по принципу комплексного сложения. Из такого сигнала легко можно получить изначальный сигнал  $u(t)$  путем взятия действительной части; сигнал  $v(t)$  - путем взятия мнимой части.

$$A(t) = |U(t)|; \Phi(t) = \arg(U(t))$$

Функции  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  можно получить взятием модуля и аргумента сигнала.

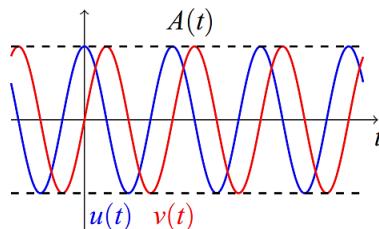


Рис. 3.1. Гармонические сигналы  $u(t)$  и  $v(t)$

Данный подход позволяет из функции  $u(t)$  сразу получить необходимые функции огибающей и фазы.

## Огибающая произвольного сигнала. Как её построить?

Чтобы построить огибающую произвольного сигнала, необходимо правило, сопоставляющее функции  $u(t)$  и  $v(t)$ :

1.  $A(t) \geq |u(t)|$  для всех  $t$  - огибающая по своему смыслу охватывает форму сигнала, поэтому не может пересекать её;
2. Общая касательная  $A'(t) = u'(t)$  при  $A(t) = u(t)$  огибающая может касаться функции; требование - в точках пересечения происходит именно касание - можно реализовать путем приравнивания производных функций.
3. Для гармонического сигнала правило - огибающая и мгновенная частота должны совпадать с "обычными" параметрами, характеризующими гармонические сигналы, то есть с  $\omega_0$  и амплитудой сигнала.

**Пример:**  $v(t) = -u'(t)\sqrt{u(t) / u''(t)}$

Если вычислять функцию  $v(t)$  согласно правилу, то в целом получим удовлетворение функции трем условиям. Удачно ли выбрана функция  $v(t)$  в этом случае? Ответ – неудачно, поскольку для гармонического сигнала должно быть выполнено третье условие. Обратим внимание на участок сигнала вблизи точки, где он пересекает горизонтальную ось (рис. 3.2.): вблизи этой точки синусоидальная зависимость близка к линейной. Отклонение от прямолинейной зависимости можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно малую окрестность точки пересечения. Тогда вблизи данной точки можно заменить синусоидальную зависимость на прямолинейную.

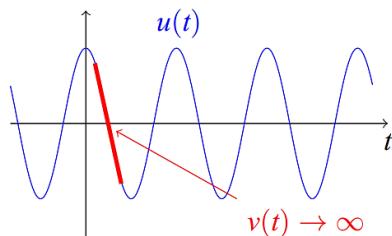


Рис. 3.2. Функция  $v(t)$  устремляется к бесконечности

#### 4. Устойчивость: малое изменение $u(t)$ мало изменяет $v(t)$

В реальных сигналах всегда есть добавки в виде шумов, которые будут искажать форму сигнала. Предположим, что дополнительные шумы, прибавляющиеся к основной синусоидальной зависимости, сложились так, что из синусоидального сигнала сделали прямолинейный. Вторая производная  $u''(t)$  стоит в формуле в знаменателе. Вторая производная в линейной зависимости – 0, тогда функция  $v(t)$  для замененной зависимости внезапно устремляется к бесконечности (рис. 3.2.). В соответствии с первым пунктом правила, этого достаточно, чтобы вся функция  $A(t)$  в этой точке тоже стремилась к бесконечности, что не имеет разумного физического смысла. Несмотря на то, что выполнены первые три требования, появляется ещё одно – внесение малых изменений в сигнал не должно приводить к неустойчивости.

#### 5. Линейность: мгновенная частота и фаза не зависят от мощности сигнала

Если умножить сигнал на число, то мгновенная частота и фаза не должны измениться, при этом должна измениться амплитуда сигнала; будет пропорционально меняться огибающая. Это требование фактически обозначает запрет на применение сложных нелинейных методов обработки сигнала, потому что они будут вносить существенные искажения.

**Пример:**  $v(t) = -u'(t)/\omega_0$  – не удовлетворяет пункту 3 при  $\omega \neq \omega_0$

Формула была предложена В.И. Тихоновым. Данный метод хорош, когда известна средняя частота сигнала  $\omega_0$ . У него достаточно хорошая локализация по спектру, то есть ширина полосы, которую сигнал занимает, должна быть небольшой. Если частоты отличаются в несколько раз, то неясно, какую выбирать в качестве  $\omega_0$ .

Метод удовлетворяет почти всем пунктам правила, но подвержен ошибкам. **Заключение:** построить огибающую и определить мгновенную частоту в общем случае довольно сложно (например, для квадратичной функции). Для многих сигналов, в частности, для радиоимпульсов, когда есть сигнал с узкой полосой, сосредоточенной вблизи средней частоты  $\omega_0$ , понятие огибающей имеет большое значение.

Рассмотрим другой подход к построению огибающей произвольного сигнала:

- Исходная функция  $u(t) = \sum A_n \cos(\omega_n t) + \sum B_n \sin(\omega_n t)$

Сигнал  $u(t)$  является периодическим. Если сигнал не раскладывается в ряд Фурье, тогда суммы в разложении заменяются на соответствующие интегралы, параметры  $A_n(t)$  и  $B_n(t)$  на функциональные зависимости  $A(\omega), B(\omega)$ .

- Сопоставим исходной функции:  $v(t) = -\sum A_n \sin(\omega_n t) + \sum B_n \cos(\omega_n t)$

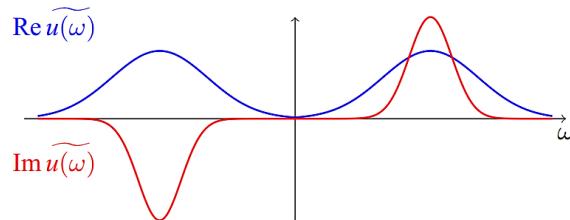


Рис. 3.3. Преобразование с точки зрения спектра действительного сигнала

Мы предполагаем, что функция  $v(t)$  — действительная. В ходе второй лекции были рассмотрены свойства симметрии спектра действительного сигнала: действительная часть (синяя линия на рис. 3.3.), является симметричной, то есть четной функцией; мнимая часть (красная линия) — антисимметричной, то есть нечетной функцией. Преобразование: исходная функция  $u(t)$  содержит в качестве компонент некоторое количество косинусов и синусов. Если делать Фурье-преобразование — взять спектр всей суммы, то косинусные и синусные функции дадут вклады в разные части спектра. Сопоставление функции  $u(t)$  функции  $v(t)$ :

- синяя линия — косинусная компонента, четная функция, симметричный спектр, соответствует действительной части спектра функции  $u(t)$ ; функция  $v(t)$  — присутствуют те же амплитуды в синусной части, из спектра необходимо сделать такую же функцию и те же амплитуды, но из симметричной сделать антисимметричной, тем самым осуществить преобразование из косинуса в синус. Второе: необходимо перейти от действительного сигнала к комплексному. Спектр косинуса — действительный, симметричный; спектр синуса — комплексный, антисимметричный. Для того, чтобы работать с коэффициентами  $A_n$ , переворачиваем часть синего графика, лежащую на отрицательных частотах; из части, лежащей во второй координатной четверти, делаем часть, лежащую в третьей координатной четверти.
- красная линия — синусная компонента; функция синуса нечетная, после преобразования спектр должен соответствовать косинусной компоненте.

Аналогично: компоненты спектра, лежащие на отрицательных значениях частот, поворачиваем наверх и получаем симметрично отраженную часть.

➤ **На языке преобразования Фурье:**  $\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$

Есть спектр функции  $u(t)$ , из косинусной части делаем синусную, из синусной - косинусную. С точки зрения действительной и мнимой части, они меняются местами, для этого достаточно умножить на  $-i$ . Поскольку при преобразовании меняется местами и четность функций, результат необходимо умножить на функцию знака частоты  $\operatorname{sgn}(\omega)$ . Данная функция = 1 на положительных частотах, -1 - на отрицательных, значит - выполняет отражение относительно горизонтальной оси. Соответственно, преобразование позволяет получить функцию  $v(t)$  по функции  $u(t)$ . В отличие от рассмотренного ранее, формула дает результат для любых функций, которые могут быть представлены таким образом.

**Огибающая произвольного сигнала. Дополнение до аналитического сигнала**

$$U(t) = u(t) + iv(t)$$
$$\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$

Функции  $u(t) + iv(t)$  связаны между собой соотношением  $-i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$ , выведенным с помощью рассмотрения графика на рис. 3.3. Спектр функции  $U(t)$ : действуем по определению, применяем преобразование Фурье, пользуемся тем, что оно линейное, значит

$$\mathbb{F}\{U(t)\} = \mathbb{F}\{u(t)\} + i \mathbb{F}\{v(t)\} = \mathbb{F}\{u(t)\} + \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\} = 2\theta(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$

Результат - функция  $U(t)$ , от которой будем брать модуль, либо аргумент, чтобы восстанавливать огибающую. Она имеет такой же спектр, как и исходная функция  $u(t)$ , но умноженная на двойную функцию Хевисайда, которая означает, что мы положили спектр строго равным нулю.

**Определение 3.1: Аналитический сигнал** - сигнал, спектр которого равен нулю на отрицательных частотах:  $F_{\omega < 0}\{U(t)\} = 0$

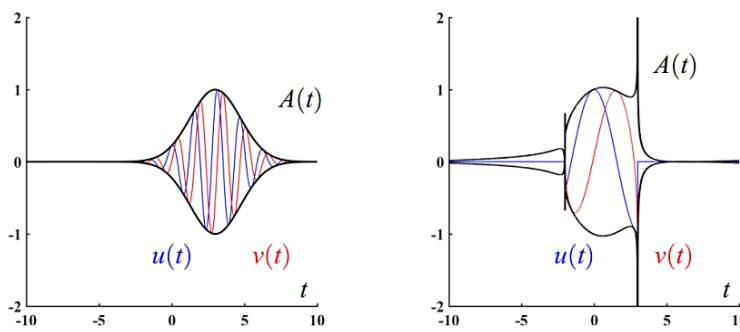


Рис. 3.4. Примеры применения метода

**Примеры:** Моделирование проводилось в среде Matplotlib. Функция  $u(t)$  - синяя линия, к ней с помощью рассмотренного преобразования построена функция  $v(t)$

- красная линия, вычислена функция  $U(t)$ , модуль от нее - функция  $A(t)$  - черная линия (огибающая должна охватывать сигнал сверху и снизу).

- **левый график:** радиоимпульс - сигнал, у которого постоянная несущая частота; огибающая задана в виде гауссовой формы. Обратим внимание на то, насколько хорошо данным методом была восстановлена огибающая. В отличие от метода Тихонова результат получается автоматически.
- **правый график:** в качестве исходной огибающей была взятая прямоугольная форма; синусоида в некоторый момент времени ( -2 сек - включается, +2/2,5 сек - выключается, в начале и в конце происходят щелчки); уровень сигнала растет скачком либо от 0 до некоторой величины, либо обращается в ноль. При моделировании задана довольно низкая частота, поэтому умещается меньше одного периода колебаний. Результат применения метода: внутри промежутка от -2 до 2 сек восстановлена относительно адекватная огибающая, в момент включения и выключения - происходит резкий выброс, проявляется явление неустойчивости, кроме того - там, где не было сигнала, все должно быть строго  $= 0$ , но функция  $A(t) \neq 0$ . Если отвлечься от того, как был сделан сигнал общей формы, то не очень ясно, что можно называть огибающей, которую в данном случае можно провести по-разному. Проблемы в момент щелчков могут быть связаны с тем, что при резком скачке сигнал обладает крайне широким спектром, то есть меняется на конечную величину за короткое время, соответствующее щелчу; условную частоту изменения сигнала указать нельзя. Соответственно, для процессов, где затруднительно указать само понятие огибающей, присутствуют скачки функции (если функция является непрерывной, но у нее присутствует скачок производной, будут аналогичные явления) - рассмотренный метод дает плохие результаты.

## Мгновенная частота

- **Амплитудно-модулированный сигнал**

Сигналы типа радиоимпульса активно используются в радиовещании, телевидении и т.д. Чтобы передавать информацию, необходимо что-то менять в сигнале. Один из способов изменения - представление сигнала следующим образом:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$\omega_0 t$  - относительно высокая частота,  $A(t)$  - медленно меняющаяся амплитуда. Сигналы такого типа называются медленно-модулированными. Если передавать гармоническую информацию, амплитуда сигнала будет изменяться гармонически.

$$\begin{aligned} s(t) &= A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t + \phi_0) = \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{m}{2} A \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \phi_0] \\ &\quad + \frac{m}{2} A \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \phi_0] \end{aligned}$$

Итог - сумма трех компонент.

Соответственно, если мы меняем амплитуду по гармоническому закону, спектр будет представлен в виде трех частот, две из них расположены симметрично относительно несущей частоты (рис. 3.5.).

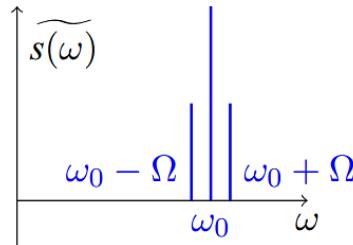


Рис. 3.5. Спектр амплитудно-модулированного сигнала

Предположим, что в городе N необходимо обеспечить вещание нескольких радиостанций. Если они будут работать на одной частоте, сигналы будут складываться и мешать друг другу.

- **Первый вариант** выделения частот под радиостанции (рис. 3.6., слева): частотная ось разбивается на интервалы, определяется максимальное значение  $\Omega$ , которое может передаваться в данном диапазоне, что даст ограничение на выделяемую полосу. С таким шагом можно расставить радиостанции. Человеческое ухо слышит в диапазоне от 22 кГц (в среднем). Пусть  $\Omega = 22$  кГц, тогда между несущими частотами соседних радиостанций необходимо обеспечить 44 кГц. Во избежание нежелательных эффектов данное значение можно увеличить до 50 кГц. Возникает проблема - в городе нельзя будет поставить много радиостанций. Диапазон частот, в которых реально можно работать, - небольшой, частоты - ограниченные, включая чисто физические ограничения (на очень высоких частотах начинается сильное поглощение радиоволн и пр.).



Рис. 3.6. Слева- вариант 1 выделения частот, справа – вариант 2

- **Второй вариант** (рис. 3.6., справа): сигнал представляет из себя несущую частоту  $\cos(\omega_0 t)$ ; мгновенная частота  $\phi_0$ ; амплитуда - функция, меняющаяся от времени. Тогда каждая радиостанция может вещать на своей частоте.

Отметим противоречие: гармонически-моделированный сигнал представляется в виде трех компонент, ширина спектра конечна (что не дает возможности располагать радиостанции близко друг к другу), с другой стороны - есть единственная компонента на несущей частоте, у нее меняется амплитуда (радиостанции можно ставить близко). В

споре победила практика - более корректен первый вариант. Рядом расположенные радиостанции мешают друг другу. Ошибка возникает, если радиотехнические цепи рассматривать в парадигме сигналов плана  $s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ . Если сигнал представлять в виде трех компонент, то для каждой радиостанции есть определенная полоса, проходящая через входные цепи радиоприемника. Приемник должен обладать селективностью - уметь отделять сигнал одной радиостанции от сигнала другой (сигналы на одной несущей частоте от сигналов на другой). Для этого необходим фильтр. Простейший способ - поставить колебательный контур, который имеет колоколообразную амплитудно-частотную характеристику. Если он настроен на частоту  $\omega_1$ , то будет максимально чувствителен именно к ней, а сигналы на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  слышать практически не будет - радиостанции будут подавлены.

Вспомним о том, что в природе нет ничего идеального, контур - тоже не идеальный. Степень неидеальности определяется таким параметром, как добротность. **Добротность** определяется несколькими способами, которые эквивалентны, при этом приводят к одному числу:

- Отношение центральной частоты колебательного контура к полосе частот, которые эта характеристика занимает. Чем более добротный контур, тем уже полоса частот, которые он слышит. Для того, чтобы максимальное число радиостанций поставить близко друг к другу, контур должен быть более добротный - полоса частот, которые он слышит, должна быть очень узкой;
- Количество колебаний  $n$ , которое должна сделать колебательная система. При этом за время колебаний амплитуда должна установиться. Например, подаем сигнал на колебательный контур, в течении 10 колебаний амплитуда будет постепенно нарастать, пока не станет примерно постоянной, следовательно, 10 - добротность контура. Если контур добротный, то время для установления постоянного режима колебаний будет большим.

Функция  $A(t)$  предполагает, что описывает внешнее воздействие, которое мы оказываем на контур. Таким образом, чем более добротный контур, тем более медленно он будет реагировать на внешнее воздействие, то есть функция  $A(t)$  не может быть быстроменяющейся относительно контура. Следовательно, когда мы хотим поставить три радиостанции близко друг к другу, необходимо использовать добротный элемент для селекции колебаний. Тем самым накладывается ограничение на скорость изменения функции  $A(t)$ , связанной с частотой  $\Omega$ . Тогда частота  $\Omega$  должна быть малой, соответственно, в первом варианте (на рис. 3.6., слева) расстояние между несущей и двумя боковыми частотами тоже оказывается небольшим. Таким образом, между первым и вторым вариантом на физическом (радиотехническом) уровне нет противоречия: если задать максимальную частоту  $\Omega$ , то в обоих вариантах необходимо будет учесть и заложить на каждую радиостанцию определенную полосу. В первом варианте полоса будет определяться боковыми частотами, во втором - амплитудно-частотной характеристикой контура, которая сторонниками второго варианта была не отражена. Вывод: для одновременной работы большого количества радиостанций будет необходима большая выделенная полоса частот. Иначе это можно интерпретировать

следующим образом: пусть работает одна радиостанция, но в широком диапазоне частот; скорость передачи информации по широкополосному каналу ограничена, чем больше частот, тем больше информации в единицу времени удастся прокачивать через канал.

- **Частотно-модулированный сигнал**

$$s(t) = A \cos(\omega(t) + \phi_0); \omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot x(t)$$

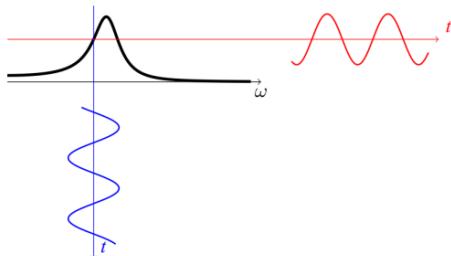


Рис. 3.7. Частотно-модулированный сигнал

Амплитуда или огибающая сигнала  $A$  все время остается постоянной, частота - меняется.  $x(t)$  - функция, осуществляющая передачу информации,  $\Delta\omega$  - амплитуда изменения частоты (насколько мгновенная частота может отклоняться от несущей частоты  $\omega_0$ ).

**Определение 3.2:**  $\Delta\omega$  называется девиацией частоты

Для того, чтобы осуществить выделение исходной функции  $x(t)$  из частотно-модулированного сигнала, можно применить частотно-модулированный детектор. На рис. 3.7. черная линия показывает характерную особенность колебательного контура. Настроим его таким образом, что центральная частота  $\omega_0$  будет находиться на одном из склонов амплитудно-частотной характеристики контура. Обратим внимание: на середине склона амплитудно-частотная характеристика приблизительно линейна. Соответственно, мгновенная частота сигнала меняется - колеблется возле величины  $\omega_0$ , тогда при перемещении характеристики будет меняться установившаяся амплитуда колебаний на контуре, то есть изменение частоты (синяя линия на рис. 3.7.) преобразовывается в изменение амплитуды (красная линия), с которым можно работать, как с обычным частотно-модулированным сигналом.

Работая только с частотной модуляцией, можно постараться обойти ограничение на выделенную радиостанции полосу: величина  $\Delta\omega$  - константа, если её взять малой, то на формулы это влияния не окажет. Тогда несколько радиостанций можно поставить близко друг к другу, распределив их по частотам, чтобы каждой выделялся интервал не нулевой ширины ( $\Delta\omega$ ). При рассмотрении спектра частотно-модулированного сигнала оказывается, что он не только не уже, чем спектр амплитудно-модулированного сигнала, но и гораздо шире:  $\omega_n = \omega_0 \pm k\Omega$ . Спектр не ограничен по полосе,  $k$  - целое число - получается, что он бесконечен, то есть радиостанции в любом случае будут друг другу мешать. При рассмотрении реального колебательного контура физически необходимо закладывать определенное время на то, что колебания в нем будут

обязательно устанавливаться, поэтому быстрое изменение функции  $x(t)$  не приведет к тому, что при малом  $\Delta\omega$  получится передавать повышенное количество информации.

Частотно-модулированные сигналы нашли серьезное применение, поскольку в одном случае сигнал строго ограничен по полосе от  $\omega_0 \pm \Omega$ , в другом - не ограничен. С точки зрения радиосвязи это означает: частотно-модулированные сигналы занимают меньше полос, с другой стороны - именно то обстоятельство, что они занимают большую полосу, приводит к тому, что они более устойчивы. Предположим, что в системе присутствуют шумы, тогда для того, чтобы существенно повлиять на восстановляемый сигнал в случае амплитудной модуляции, достаточно с помощью шума повлиять на амплитуды на трех частотах. Для частотно-модулированного сигнала это сделать гораздо сложнее, потому что частот получается много, необходимо повлиять сразу на все. Это приводит к тому, что качество передачи для частотно-модулированных сигналов становится значительно лучше. У современных радиоприемников обычно предусмотрено два режима работы: AM (amplitude modulation) и FM (frequency modulation) - амплитудная и частотная модуляция. С целью обеспечения высококачественного звука современное радиовещание почти всегда использует в городах частотную модуляцию. Амплитудная модуляция также очень полезна. Это связано с тем, как физически распространяются электромагнитные волны. С ростом частоты сильно уменьшается длина волны (обратно пропорциональна частоте). Чем больше длина волны, тем больше проявляются эффекты, связанные с дифракцией: волна, имеющая большую длину, легко может огибать препятствия и распространяться на большие расстояния. С другой стороны, сигнал с высокой частотой и малой длиной волны распространяется скорее как свет, то есть более применимо лучевое приближение, когда сигнал радиостанции можно слышать очень хорошо, но только в пределах практически прямой видимости передатчика. Отсюда интересная особенность: AM-радиостанцию весьма вероятно можно будет принимать на значительном расстоянии (тысячи километров) от передатчика, волна без проблем огибает земной шар и её везде слышно; FM-радиостанцию слышно только в городе, при этом в различных городах на одной и той же частоте могут работать разные радиостанции, поскольку они локализованы в пространстве и разделены.

### Мгновенная частота или частота в спектре

В ходе текущей лекции были рассмотрены: частота в рамках Фурье преобразования - частота в спектре сигнала и мгновенная частота. Оба понятия содержат в себе слово "частота", что вызывает путаницу, которая приводит к парадоксам, противоречиям. Например, с точки зрения мгновенной частоты, в узкой полосе частот иногда можно расположить большое количество радиостанций, с точки зрения частоты в спектре - нельзя. В этом смысле "мгновенная частота" кажется менее удобным термином, чем частота в смысле Фурье преобразования. Проведем сравнение:

Мгновенная частота	Частота в спектре
Зависит от времени	Не зависит от времени

В каждый момент времени принимает единственное значение	Существует конечное, счетное или несчетное число частот
Изменяется линейная инвариантная по времени система (ЛИВС)	Не изменяется ЛИВС
Если рассматривать сигнал в виде мгновенной частоты и огибающей и подать его на вход ЛИВС, то его форма может существенно измениться, как следствие может существенно измениться и мгновенная частота. Например, подадим прямоугольный сигнал на ЛИВС в виде РЦ-цепочки. В зависимости от того, является ли она интегрирующей или дифференцирующей, сигнал будет сильно изменяться. Следствие - мгновенная частота будет иной, чем была на входе.	Если подать спектральную компоненту (гармонический сигнал) на ЛИВС, - такие функции являются собственными функциями систем. При прохождении через систему функция не меняет форму, но меняет амплитуду (умножается на соответствующее собственное значение линейного оператора, характеризующего ЛИВС). Если форма сигнала не меняется, частота в спектре у данной компоненты тоже не меняется; так происходит для каждой из спектральных компонент, содержащихся в сигнале.
Не служит аргументом $h(\omega)$	Служит аргументом $h(\omega)$
Определяется частотным детектором	Определяется анализатором спектра
Частотным детектором может быть колебательный контур, настроенный на склон своей характеристики. В зависимости от амплитуды установившихся колебаний определяется частота.	В спектре сигнала априори присутствуют все частоты, необходимо определить амплитуду соответствующей спектральной компоненты, для этого сигнал пропускается через набор фильтров в анализаторе спектра: первый осуществляет фильтрацию сигнала от $\omega_1$ до $\omega_2$ , второй от $\omega_2$ до $\omega_3$ и т.д. Если фильтров много - можно отразить весь спектр. Также можно записать сигнал и применить к нему Фурье преобразование.
Удобна в безынерционных нелинейных системах	Удобна в линейных системах. ЛИВС не изменяет частоты спектральных компонент
Если нет РЦ-цепочек, конденсаторов, осуществляющих изменение формы сигнала, системы не обязательно могут быть линейными. Если на диодный мост подать сигнал с частотой 50 Гц (мы хотим сделать из переменного постоянное, пульсирующее напряжение), то можно взять сигнал по модулю, соответственно, частота сигнала становится 100 Гц.	Частота в спектре представляется более надежной, в случае её использования мы не попадем в различные парадоксы, которые будут вынуждать рассматривать радиотехнический смысл различных преобразователей сигнала.

В некоторых случаях именно мгновенная частота позволяет получить быстрое и безошибочное представление о том, как работает система, рассматривая которую в спектре, можно столкнуться со сложностями. Рассмотрим именно такую систему.

## Частотно-модулированный альтиметр

Частотно-модулированный альтиметр (ЧМ альтиметр) - прибор для измерения высоты над уровнем местности. Предположим, что необходимо определить, на какой высоте летит самолет. Сигнал задается в виде линейно-частотно модулированного сигнала, у которого мгновенная частота меняется линейно, получается пилообразная зависимость мгновенной частоты сигнала от времени. Если излучить такой сигнал с борта самолета, появится отраженный от поверхности сигнал, сдвинутый на величину  $\tau$ . Мгновенная частота будет такой же, амплитуда - меньше, потому что коэффициент отражения можно усилить и получить два сигнала. Электромагнитные волны распространяются со скоростью света, поэтому время  $\tau$  - незначительная величина. В случае сложения излученного и принятого сигнала в каждый момент времени - есть два сигнала, близких по форме к синусоидальным, при этом отличающихся по частоте на некоторую постоянную величину, за исключением моментов, когда происходит переселк сигналов (рис. 3.8. слева). Отличие оказывается пропорциональным времени  $\tau$ , соответственно, зная разность частот  $\omega(t)$  и  $\omega(t - \tau)$ , можно определить  $\tau$ . Разность частот определяется следующим образом: если есть два гармонических сигналов, отличающихся друг от друга на постоянную величину  $\Delta\omega$ , то при сложении колебаний возникают биения. Биения возникают именно на разностной частоте.

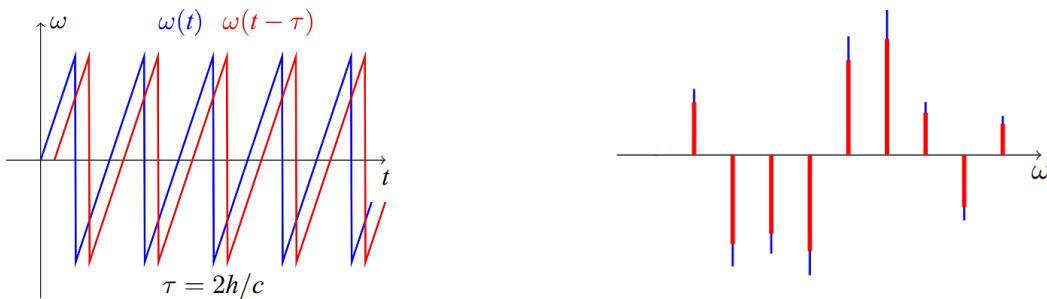


Рис. 3.8. Задача в контексте применения мгновенной частоты (слева) и с точки зрения частот в спектре (справа)

Можно рассуждать иначе: зачем делать сложную систему, если можно излучить сигнал и непосредственно измерить время  $\tau$  - распространение сигнала до поверхности и назад? Время  $\tau$  - малое, для того чтобы надежно зафиксировать, чему оно равно, необходимо с большой точностью осуществить измерение сигнала, но для этого нужна дорогостоящая техника. С другой стороны, разность между частотами  $\omega(t)$  и  $\omega(t - \tau)$  тоже малая, соответственно, период биений - большой, поэтому его измерение не представляет сложности.

Мы рассмотрели задачу в контексте применения мгновенной частоты, однако её можно рассмотреть и с точки зрения частот в спектре (рис. 3.8., слева): исходный сигнал является периодическим, тогда его спектр будет дискретным (в этом случае преобразование Фурье сводится к разложению сигнала в ряд Фурье), то есть будет представлен дискретными компонентами (изображены синим цветом). Отраженный сигнал будет представлен теми же палками, но с другой амплитудой. Таким образом,

при отражении каждой спектральной компоненты от поверхности не будет изменения частоты сигнала. Значит, красные и синие палки будут расположены на оси частот в одних и тех же точках. При сложении значений будут получены суммарные значения, лежащие на тех же позициях. Раз все частоты в исходном и отраженном сигнале совпадают, то биений быть не должно. Если рассматривать ЧМ альтиметр и механизм его работы с точки зрения мгновенной частоты, то должны быть биения, если с точки зрения спектров - биений нет. Это противоречие, возникает вопрос: будет ли работать данное устройство? Ответ: ЧМ альтиметр был сделан и поставлен в самолеты, то есть биения есть. Вопрос: почему они присутствуют, если нет сдвигов по частотам? Для ответа рассмотрим процесс работы прибора детально:  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  - сигналы;  $\Phi_1(t)$  и  $\Phi_2(t)$  - фазы сигналов;  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды сигналов;  $\Delta(t)$  - разность фаз каждого из сигналов. Для сложения сигналов делается ряд арифметических преобразований:

$$\begin{aligned} s_1(t) + s_2(t) &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t) = / \Delta(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) / = \\ &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos(\Phi_1(t) + \Delta(t)) = \\ &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_1(t) \cos \Delta(t) - A_2 \sin \Phi_1(t) \sin \Delta(t) = \\ &= \underbrace{(A_1(t) + A_2(t) \cos \Delta(t))^2 + A_2^2 \sin^2 \Delta(t)}_{\approx A_1(1 + \frac{A_2}{A_1} \cos \Delta(t))} \cos(\Phi_1(t) + \Psi(t)) \end{aligned}$$

Выполним упрощение: предположим, что амплитуда сигнала  $A_2$  значительно меньше амплитуды сигнала  $A_1$ . Тогда можно воспользоваться сокращенными формулами: есть медленно меняющаяся огибающая и быстро меняющаяся функция. Если  $\Delta(t)$  для огибающей - величина/разность фаз, её можно продифференцировать по времени, посмотреть, чему равна мгновенная частота изменения огибающей.  $\omega_2(t)$  –  $\omega_1(t)$  - две мгновенные частоты, которые соответствуют двум сигналам  $\Phi_2(t) - \Phi_1(t)$ .

$$\tan \Psi = \frac{-A_2(t) \sin \Delta(t)}{A_1(t) + A_2(t) \cos \Delta(t)} \quad \frac{d \Delta(t)}{d(t)} = \omega_2(t) - \omega_1(t)$$

Итог: сумма двух сигналов описывается сигналом с огибающей, которая представляет собой амплитудно-модулированный сигнал, частота модуляции в точности равна разности мгновенных частот сигналов  $A_1$  и  $A_2$ . Таким образом, мы доказываем теорию, основанную на мгновенных частотах. Это доказательство является строгим - разность мгновенных частот дает биения. Из утверждения о том, что есть два гармонических сигнала, отличающихся по частотам на небольшую добавку, следует, что их сумма будет проявляться в виде биений. В ходе рассуждения с точки зрения частот в спектре - из того, что в исходном сигнале нет двух компонент, отличающихся по частоте, - делаем вывод, что биений нет, что логически неверно: если из А следует В, это не означает, что если А не выполнено, то и В не выполнено. В данном случае биения могут проявляться и возникать не только по причине, что есть разница в частотах спектральных компонент. Когда есть два сигнала  $A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t)$  - биение есть. Соответственно, ЧМ альтиметр - рабочее устройство, использовавшееся до появления более современных систем позиционирования.

## Лекция 4. Преобразование Гильберта. Причинность и дисперсия

### Аналитические сигналы

В ходе предыдущей лекции в рассмотрение были введены аналитические сигналы. По определению так называются сигналы, у которых спектр на отрицательных частотах тождественно равен нулю. Рассмотрим сигнал  $f(t)$ , в общем случае – комплексный. У сигнала есть действительная часть  $\operatorname{Re} f(t)$ , мнимая часть  $\operatorname{Im} f(t)$ , для краткости обозначим их  $a(t)$  и  $b(t)$ .

$$f(t) = \underbrace{\operatorname{Re} f(t)}_{a(t)} + i \underbrace{\operatorname{Im} f(t)}_{b(t)} = a(t) + ib(t)$$

**Пример:** комплексная экспонента  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

Такая экспонента является аналитическим сигналом, потому что в её спектре присутствует единственная  $\omega$ . В то время, как косинус и синус аналитическими сигналами не являются: спектр каждой из функций представлен двумя спектральными компонентами на частотах  $\omega$  и  $-\omega$ . Раз задано ограничение - сигнал  $f(t)$  – аналитический, функции  $a(t)$  и  $b(t)$  не могут быть произвольными, должны быть связаны друг с другом.

$$\mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t) + ib(t)\} = \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} + i\mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} = 0$$

С одной стороны, ноль получается по определению аналитического сигнала, с другой - если применяется преобразование Фурье от  $a(t) + ib(t)$  и рассматриваются частоты  $< 0$ . Поскольку равенство нулю должно выполняться по отдельности для действительной и мнимой части выражения, оно трансформируется в систему из уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} = \operatorname{Im} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} \\ \operatorname{Im} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} = -\operatorname{Re} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} \end{cases}$$

Рассмотрим отрицательные частоты: действительная часть спектра функции  $a$  на отрицательных частотах равна мнимой части функции  $b$ , мнимая часть спектра функции  $a$  – равна действительной части функции  $b$ . Таким образом, действительная и мнимая части спектра связаны крест-накрест.

### Преобразование Гильберта

#### Определение

$f(t)$  – аналитический сигнал;  $f(t) = a(t) + ib(t)$

Воспользуемся для вывода соотношения интересным приемом: на отрицательных частотах спектр функции  $f(t)$  должен зануляться. Это равносильно тому, что спектр равен самому себе, умноженному на функцию Хэвисайда, потому что функция на положительных частотах = 1, - на отрицательных = 0. На отрицательных частотах спектр и так равен нулю, поэтому при умножении ничего не меняется.

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

Применим к равенству обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\} = \frac{1}{2} f(t) * \left( \delta(t) - \frac{1}{\pi i t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left( \delta(t-t') - \frac{1}{\pi i (t-t')} \right) dt' = \frac{f(t)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \end{aligned}$$

По свойствам преобразования Фурье (Фурье от произведения есть свертка Фурье-образов каждого из множителей): первый элемент свертки - обратное Фурье преобразование, примененное к прямому Фурье-преобразованию от функции  $f(t)$ , - сама функция  $f(t)$ ; второй элемент свертки - обратное преобразование Фурье от функции Хэвисайда. Распишем свертку в виде интеграла, чтобы выполнить упрощения. С учетом, что  $t$  в  $\frac{1}{2} f(t) * \left( \delta(t) - \frac{1}{\pi i t} \right)$  стоит в знаменателе, мы не можем взять интеграл простым образом, поэтому он берется в смысле главного значения и обозначается знаком  $\int$ .

Функция  $f(t)$  представляется в виде суммы действительной компоненты  $a(t) + i$ , умноженное на мнимую компоненту  $b(t)$ ; полученное равенство можно расписать отдельно для действительной и мнимой части:

$$\begin{cases} b(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t')}{t-t'} dt' = \mathbb{H}\{a(t)\} \\ a(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t')}{t-t'} dt' = \mathbb{H}^{-1}\{b(t)\} \end{cases}$$

Данный вид преобразования называется "преобразование Гильберта". Прямое преобразование Гильберта: связывает между собой функцию  $b(t)$  и функцию  $a(t)$ ; обратное преобразование Гильберта: связывает функцию  $a(t)$  и функцию  $b(t)$ . Они одинаковы по своей форме, отличаются только знаком.

## Свойства преобразования Гильберта

**прямое преобразование Гильберта      обратное преобразование Гильберта**

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \quad \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:**  $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$

Оба преобразования линейны, поскольку это простое интегральное преобразование от функции  $f$ .

- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t - t'} dt dt' = 0$$

Применим преобразование Гильберта или обратное преобразование Гильберта к функции  $f(t)$ . Интеграл в бесконечных пределах в пространстве функций является скалярным произведением. Если значение равно нулю, функция  $f(t)$  и функция  $\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\}$  перпендикулярны друг другу в смысле скалярного произведения. Полученный интеграл равен нулю, поскольку мы интегрируем по двум переменным  $t$  и  $t'$ . Тогда произведение в числителе дроби не будет зависеть от порядка множителей; в знаменателе стоит разность  $t - t'$ ; для одного члена пары будет положительное значение, для другого - отрицательное, в сумме они дадут ноль. Поскольку для любой пары переменных  $t$  и  $t'$  всегда найдется соответствующая пара переменных  $t'$  и  $t$  (взаимозаменяемы), весь интеграл = 0. Вывод: преобразование Гильберта в функциональном пространстве выполняет поворот сигнала на  $90^\circ$ .

- **Двукратное преобразование:**  $\mathbb{H}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -f(t)$

Если применить к функции  $f(t)$  прямое преобразование Гильберта, второй раз - обратное, получим исходную функцию  $f(t)$ . Прямое и обратное преобразование отличаются знаком, соответственно, двукратное преобразование Гильберта:  $-f(t)$ .

- **Связь с преобразованием Фурье:**

$$\mathbb{F}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -i\text{sgn}(\omega)\mathbb{F}\{f(t)\}$$

- **Сигнал  $f(t) + i\mathbb{H}\{f(t)\}$  является аналитическим**

Спектр сигнала на отрицательных частотах будет равен нулю, соответственно, сигнал является аналитическим по определению.

- **Интегрирование ведется по всей временной оси**

Замечание, принципиальное для преобразования Гильберта: интегралы берутся в бесконечных пределах (от  $-\infty$  до  $\infty$ ); интеграл взят в смысле главного значения, поэтому точка  $t$ , равная  $t'$ , автоматически исключается. В случае невозможности обеспечения бесконечного предела интегрирования преобразование Гильберта не будет давать точного результата: могут быть не выполнены свойства типа ортогональности, не все следствия будут корректными.

## Принцип причинности

**Определение 4.1: Простое условие причинности** - следствие не может предшествовать причине

Рассматривая аналитические сигналы, выводя преобразование Гильберта, мы работали с сигналами во временном представлении - в виде функции  $f(t)$ . На систему (черный ящик) падает сигнал  $f(t)$ , на выходе - сигнал  $g(t)$ ;  $g(t)$  только после  $f(t)$ , и никак не наоборот.



В каждом конкретном случае сложно сказать, что является "следствием" и "причиной", их необходимо строго определить, чтобы данным принципом можно было воспользоваться. Например, мы прикладываем внешнюю силу к телу, под действием силы тело деформируется. Если причиной является сила, деформация тела будет являться следствием. Наоборот: при деформировании тело создает силу реакции, связанную с деформацией. Закон Гука:  $F = k\Delta x$ , деформация тела на  $\Delta x$  приводит к возникновению силы упругости  $F$ . Далее будет рассмотрено, на что влияет выбор в качестве причины или следствия одной, или другой величины.

**Определение 4.2: Релятивистское условие причинности** - не существует сигналов, распространяющихся быстрее скорости света

Учитывается не только невозможность следствия предшествовать причине, но и то, что любые сигналы распространяются со скоростями, меньшими или равными скорости света. Данное условие вносит оговорку: если причина и следствие произошли в разных точках пространства, то между двумя событиями должно пройти определенное время, связанное с расстояниями между точками. В рамках данного курса релятивистское условие причинности использоваться не будет.

### Гармонический осциллятор с затуханием

Решим задачу о колебаниях гармонического осциллятора с затуханием под действием внешних сил в общем виде. Дифференциальное уравнение описывает колебания осциллятора для временной зависимости  $\ddot{x}(t)$ :

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = f(t)$$

Временная зависимость:  $\sim e^{i\omega t}$ , представим функцию  $\ddot{x}(t)$  в виде фурье-разложения, аналогичное разложение вводим для функции  $f(t)$ . После подстановки получаем линейное алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{x}(\omega) &= -\frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega} = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \tilde{f}(\omega) = \tilde{G}(\omega)\tilde{f}(\omega) \\ \omega_{1,2} &= \pm \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} - i\gamma \end{aligned}$$

Принципиальный момент:  $\omega_{1,2}$  имеют разные знаки в действительной части, один и тот же знак - в мнимой, а именно - отрицательный. Если представить комплексную плоскость, то  $\omega_{1,2}$  лежат в нижней полуплоскости.

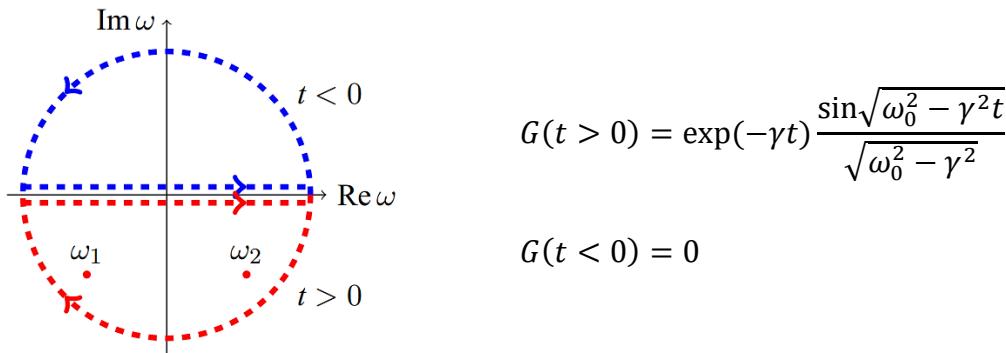
$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) G(t - \tau) d\tau$$

Чтобы найти  $x(t)$ , применим обратное Фурье преобразование к функции  $\tilde{x}(\omega)$ , тогда обратное преобразование от произведения - свертка Фурье-образов функций  $\tilde{G}(\omega)\tilde{f}(\omega)$ . Система в виде гармонического осциллятора является типичным примером линейной инвариантной по времени системы:  $f(t)$  - сигнал на входе системы,  $x(t)$  - сигнал на выходе, они связаны друг с другом через импульсную функцию отклика  $G$ . Подобные функции также называют функциями Грина.

Гармонический осциллятор должен удовлетворять принципу причинности

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \quad G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Чтобы вычислить функцию  $\tilde{G}(\omega)$  необходимо выполнить Фурье-преобразование от её спектра. Воспользуемся методами теории функций комплексных переменных: необходимо взять интеграл вдоль действительной оси в плоскости частот; вместо этого можно дополнить интеграл, замыкая линию либо по нижней, либо по верхней полуплоскости, то есть перейти от интеграла по вещественной оси к интегралу по контуру.



Необходимо выбрать, каким образом будет выполняться замыкание.

- Если  $t < 0$ ,  $\omega$  - комплексная величина, то по мере того, как модуль  $\omega$  будет увеличиваться, устремляясь к бесконечности, экспонента будет давать быстрый спад, тем самым интеграл по верхней полуокружности при стремлении радиуса к бесконечности будет стремится к нулю. Это означает, что для отрицательных времен контур необходимо замыкать по верхней полуплоскости.
- Для вычисления интеграла для  $t > 0$  необходимо замыкать контур по нижней полуплоскости. Будем делать это по теории вычетов: когда мы замыкаем контур по верхней полуплоскости, то в ней нет особых точек;  $\omega_1, \omega_2$  имеют отрицательные мнимые части, то есть лежат в нижней полуплоскости.

Из наличия физически реализуемого гармонического осциллятора математически строго выведена импульсная функция отклика. Она получилась причинная: до того, как в нулевой момент времени было оказано влияние на осциллятор, он находится в покое, то есть колебаний не происходит. Рассмотрим пример из совсем иной области, где будут получены аналогичные результаты.

## Отражение волны от плоского слоя

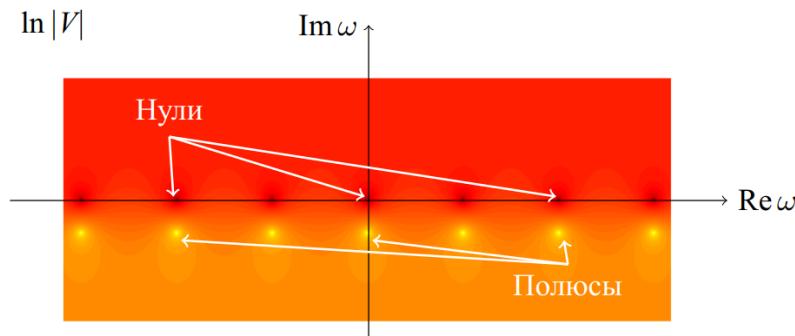


Рис. 4.1. Отражение волны от плоского слоя

Есть задача падения акустической волны на слой вещества. Сложная модель достаточно просто расписывается аналитически:  $\psi = k_2 d \cos \theta$ ;  $\theta$  – угол падения волны;  $Z_n = \rho_n c_n$  – нормальные импедансы сред. Таким образом, есть три среды: первая – среда, из которой падает акустическая волна; вторая – задает слой; третья – среда, расположенная за слоем. Все они характеризуются плотностью  $\rho_n$ , скоростью звука  $c_n$ ;  $d$  – толщина слоя;  $k$  – волновые числа; считаются через частоты и скорости звука в каждой из сред. Коэффициент отражения от плоского слоя задается формулой:

$$V = \frac{Z_2(Z_1 - Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin \psi}{Z_2(Z_1 + Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin \psi}$$

Нас интересует зависимость величины  $V$  от частоты. Подставим в формулу как действительное, так и мнимое значение частоты, изобразим профиль функции  $V$ . Коэффициент отражения комплексный, потому что при отражении меняется амплитуда волны, с другой стороны – может измениться фаза. Возьмем его по модулю, для гармоничного графика будем рисовать логарифм модуля. С точки зрения сравнения, не важно, где на графике (рис. 4.1.) впадина и вершина, логарифм – функция монотонная, при этом увеличивает читаемость графика. Подставив действительные и мнимые частоты, можем наблюдать, что коэффициент отражения для некоторых частот обращается в ноль. Все они лежат на действительной оси, то есть на реально реализуемых в эксперименте частотах может оказаться, что данный слой ничего не отражает. Таким образом, происходит полное прохождение волны из первой в третью среду.

На данном эффекте может работать просветленная оптика. Если рассматривать линзу фотоаппарата под некоторыми углами, можно заметить, что у нее появляется фиолетовый или зеленый оттенок. Это происходит из-за просветляющего покрытия, которое предназначено для того, чтобы коэффициент прохождения был максимальным. При этом коэффициент отражения должен быть минимальным. За счет того, что он зависит от частоты, а на всех частотах сделать его нулевым невозможно, в каких-то происходит отражение. Зеленые или фиолетовые блики – области между нулями, которые соответствуют тому, что волна проходит хорошо. Приведенный с точки зрения оптики пример применим и к акустике, потому что волновая природа примерно в обоих

случаях примерно одинакова. Полюсы системы (обозначены на рис. 4.1. желтыми точками) реализуются в нижней полуплоскости. Это означает следующее: если рассматривать плоский слой как линейную систему, падающую волну - как причину, отраженную волну - как следствие, - коэффициент  $V$  будет причиной функции отклика. Его вполне можно таким образом применять, как и теорию линейных систем, которую мы постепенно развиваем.

## Линейные инвариантные по времени системы

### Причинная функция отклика

Сигнал  $g$  на выходе ЛИВС связан с сигналом  $f$  на ее входе с помощью импульсной функции отклика  $h(\tau)$ :

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

С учетом принципа причинности уравнение переписывается одним из двух способов.

- $g(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$

Не очень удобный способ: интегрирование от  $-\infty$  до  $\infty$  заменяется интегрированием от 0 до  $\infty$ . Если  $\tau < 0$ , то будущее не оказывает влияние на настоящее, то есть на сигнал в момент времени  $t$ . Только те значения от  $f$  дают отклик в функции  $g$ , где величина  $\tau$  строго  $> 0$ ;

- $h(\tau < 0) \equiv 0$

Накладываем на функцию отклика жесткое условие: на отрицательных временах она точно должна быть  $= 0$ . Условие может привести к любопытным следствиям: коль скоро функция  $h(\tau)$  зануляется на отрицательных временах, её спектр должен обладать определенными свойствами.

$$\tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt$$

### Квадратично интегрируемая причинная функция отклика

Наложим ограничение: функция отклика  $h(\tau)$  и её спектр являются квадратично интегрируемыми, при этом удовлетворяют принципу причинности.

$$\int_0^{\infty} |\tilde{h}(\omega)|^2 d\omega < C$$

Когда мы строим спектр, например, от действительной функции  $h(\tau)$ , то получаем две функции: действительную часть спектра и мнимую часть спектра.

Обычно на них не накладываются ограничения, но с учетом того, что функция  $h(\tau)$  является причинной, они появляются.

$$\tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \operatorname{Re} \tilde{h}(\omega) + i\operatorname{Im} \tilde{h}(\omega)$$

Введем преобразование Гильберта. Ранее мы использовали данное преобразование для того, чтобы из обычного сигнала получить аналитический, спектр которого на отрицательных частотах тождественно равен нулю. Мы рассматриваем такую функцию  $h(\tau)$ , что на отрицательных временах она должна быть  $\equiv$ . Здесь есть серьезная аналогия с аналитическим сигналом, только причинная функция отклика на отрицательных временах сама должна быть  $= 0$ . У аналитического сигнала есть связь между его действительной и мнимой частью, для функции отклика мы аналогичным образом должны получить связь между действительной и мнимой частью спектра. Они связаны преобразованием Гильберта:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \tilde{h}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{h}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \equiv \mathbb{H}\{\operatorname{Im} \tilde{h}(\omega)\} \\ \operatorname{Im} \tilde{h}(\omega') = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \tilde{h}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \equiv \mathbb{H}^{-1}\{\operatorname{Re} \tilde{h}(\omega)\} \end{cases}$$

Всегда можно измерить действительную часть спектра функции отклика и получить мнимую часть, измерить мнимую часть - получить действительную. Достаточно измерить что-то одно. Данное наблюдение может быть широко применено на практике. В частности, рассмотрим пример из оптики.

### Пример: диэлектрическая проницаемость среды

Есть два вектора, связанных диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega)$$

Можно предположить, что вектор  $\vec{E}$  является причиной, вектор  $\vec{D}$  - следствием,  $\epsilon$  - функция отклика.

Диэлектрическая проницаемость зависит от частоты, у нее есть как мнимая, так и действительная часть:

- действительная часть - функция, оказывающая влияние на скорость света, распространяющегося в веществе.
- мнимая часть - оказывает влияние на поглощение света в веществе.

Применим преобразование Гильберта.

### Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига

$$\begin{cases} \varepsilon_r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \\ \varepsilon_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \end{cases}$$

Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига связывают между собой дисперсию - изменение скорости света с частотой и поглощение света в материале. Если есть диспергирующая среда, в которой скорость распространения волны (света или звука) зависит от частоты, - в веществе присутствует поглощение. Аналогично: если есть поглощение, на каких-то частотах обязательно должна проявляться дисперсия. Контрпример к утверждению: из обычного оконного стекла можно сделать призму и пропустить свет под правильным углом, свет распадется на спектр - мы увидим радугу, потому что показатель преломления зависит от частоты (длины волны света). Лучи с разной длиной волны по-разному преломляются и образуют радугу. Таким образом, дисперсия в стекле точно есть, с другой стороны - стекло прозрачное, то есть поглощения света вроде как отсутствует. Это не верно, поскольку стекло не пропускает ультрафиолетовую часть излучения, которую человек не видит, при этом получает загар.

Вывод: дисперсия связана с поглощением, но не прямым образом. В уравнении стоит интеграл, то есть дисперсия может присутствовать в одном диапазоне частот, как это, например, свойственно для стекла - в видимом диапазоне световых волн; поглощение присутствует в ином диапазоне частот - в ультрафиолетовом. Поскольку соотношения Крамерса-Кронига являются примером и одним из частных случаев преобразования Гильберта, это необходимо понимать в интегральном смысле: где-то дисперсия есть, где-то - должно быть поглощение, при этом они не обязательно взаимосвязаны. Интегрирование от  $-\infty$  до  $\infty$  тоже не добавляет определенности. Зная о том, что есть дисперсия, необходимо сказать, что есть поглощение, но на каких частотах - мы сказать не можем. Тем не менее, рассмотренная пара соотношений является очень плодотворной. Предположим, что в эксперименте можно легко измерить скорость волны в веществе, измерение поглощения - сложная задача. Или возможно измерить поглощение, скорость распространения сигнала - измерить затруднительно. Тогда с помощью рассмотренных соотношений иногда удается восстановить недостающую информацию. Это довольно сложная наука, которой в настоящее время занимаются группы ученых.

## Лекция 5. Дискретизация сигнала

### Процедура дискретизации сигнала

Данная лекция курса "Теория и практика обработки сигналов и полей" посвящена задаче дискретизации сигнала. Когда в ходе предыдущих лекций вводилось преобразование Фурье и преобразование Гильберта, под сигналом в основном подразумевалась некоторая физическая величина, которая непрерывным образом меняется со временем. Что делать, если мы работаем с сигналом в виде отсчетов  $f[n]$ ? Время непрерывно, с помощью компьютера мы не можем его разумно обрабатывать, а должны работать в рамках какого-то конечного набора данных. Тогда встает задача представления сигнала в виде дискретного набора отсчетов и установления связи между отсчетами и исходным сигналом. Преобразование Фурье будет играть в дальнейшем анализе центральную роль. Мы будем работать как с непрерывным временем, так и в рамках дискретного: круглыми скобками обозначается функция от непрерывного аргумента, квадратными - случаи, когда функция зависит от дискретного номера отсчета.

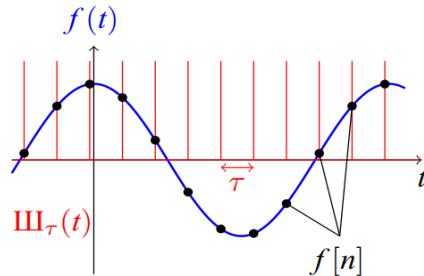


Рис. 5.1. Представление сигнала дискретной последовательностью отсчетов

Есть сигнал  $f(t)$  и непрерывное время  $t$ , соответственно, работаем с отчетами - в некоторые моменты времени проводим измерения сигнала, от момента времени  $t$  переходим к конкретным моментам на оси  $t$ . Чаще всего будем подразумевать, что моменты, в которых проводятся измерения физической величины, отстоят друг от друга на равные промежутки. Расстояние между соседними отсчетами будет обозначаться  $\tau$ . Задача: поставим в соответствие исходному сигналу  $f(t)$  сигнал  $f[n]$ :

$$f(t) \leftrightarrow f[n] = f(nt)$$

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - nt)$$

Наложим на сигнал специальную функцию  $\text{Ш}_\tau(t)$  типа гребенки - сумму бесконечного количества дельта-функций, сдвинутых относительно друг друга на расстояние по времени  $\tau$ . Соответственно,  $\tau$  - параметр функции. Рассмотрим функцию при различных параметрах  $\tau$ . Когда дельта-функции поставлены густо, можно предположить, что мы получим больше информации о сигнале, потому что будем знать его в большем количестве точек. Когда дельта-функции поставлены редко, скорее всего, какие-то особенности сигнала будут пропущены. Вопрос: насколько часто необходимо поставить дельта-функции, ведь мы не можем сильно уменьшать число  $\tau$ ?

Чем больше мы снимаем данных, тем больше информации о сигнале, но и больше места, например, на жестком диске компьютера отводится под её хранение. Здесь необходимо найти баланс, что и будет сделано в рамках данной лекции.

Будем считать, что в результате эксперимента получена функция  $f_{discr}(t)$

$$f_{discr}(t) = f(t)\mathbb{W}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)f(t)$$

Значения сигнала в точках, где концентрируется каждая из дельта-функций, будем обозначать  $f[n]$ .

### Спектр дискретизованного сигнала

$$\mathbb{W}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{discr}(t) = f(t)\mathbb{W}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{discr}}(\omega) &= \mathbb{F}\{f_{discr}(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} * \mathbb{F}\{\mathbb{W}_\tau(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} * \mathbb{W}_{2\pi/\tau}(\omega) = \\ &= \mathbb{F}\{f(t)\} * \left( \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right) \right) = \\ &= \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}}\{f(t)\} = \sum_n \tilde{f}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим, как связаны спектры величин: спектр  $f_{discr}(t)$  по свойствам преобразования Фурье спектр произведения функций  $f(t)$  и  $\mathbb{W}_\tau(t)$  есть свертка каждой из функций; спектром функции  $f(t)$  мы управлять не можем; спектр функции  $\mathbb{W}_\tau(t)$  необходимо посчитать. Функция  $\mathbb{W}_\tau(t)$  является периодической, образована большим набором дельта-функций, которые следуют с определенным периодом  $\tau$ . Второе наблюдение - данная функция является дискретной, то есть состоит из отдельных дельта-функций. Выполняя преобразование Фурье от периодической функции, мы занимаемся представлением функции в ряд Фурье, то есть в спектре периодической функции будет наблюдаться определенное количество частот, которое будет образовывать дискретный спектр. Наоборот: если функция дискретная - можно воспользоваться обратным преобразованием Фурье. Тогда верно утверждение: если функция состоит из отдельных дельта-функций - её спектр будет периодическим. Функция  $\mathbb{W}_\tau(t)$  является и дискретной, и периодической. Это означает, что её спектр будет и дискретным, и периодическим; равен функции  $\mathbb{W}$  с другими аргументами: аргумент в скобках - частота  $\omega$ ; второй параметр - расстояние между дельта-функциями, в частотном представлении - расстояние по частоте, равное  $2\pi/\tau$ . Получаем: спектр дискретизированного сигнала - свертка спектра исходного сигнала с функцией  $\mathbb{W}_{2\pi/\tau}(\omega)$ . Результатом последующих преобразований является сумма спектров функции  $f(t)$ , сложенных со сдвигом  $2\pi n/\tau$ . Чтобы не использовать два аргумента, обратимся к записи, когда спектр функции  $f(t)$  обозначается  $\tilde{f}$ . Таким образом, спектр дискретизированного сигнала  $\widetilde{f_{discr}}(\omega) \neq$  спектру исходного сигнала; представляет собой сумму исходных спектров, сдвинутых относительно друг друга.

Есть частотная ось  $\omega$ , сигнал  $f(t)$ , спектр которого представляет собой кривую (синяя линия, рис. 5.2.). Вносим дискретизацию, получаем спектр дискретного сигнала: многократно копируем спектр исходного сигнала, каждую копию сдвигаем на величину  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$  и складываем. Результат - периодический спектр. Вопрос: можно ли, зная спектр дискретизованного сигнала  $\widetilde{f}_{\text{discr}}(\omega)$ , найти спектр исходного сигнала  $\widetilde{f}(\omega)$ ?

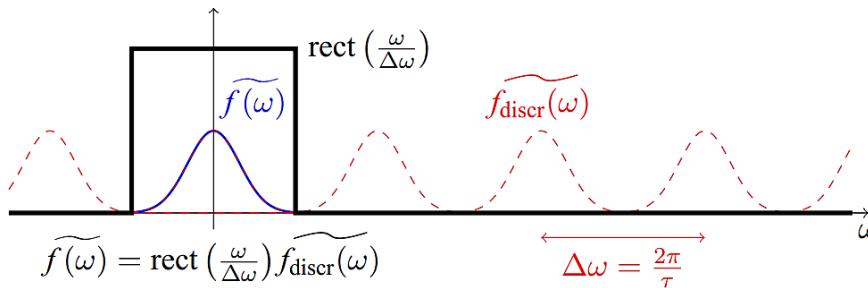


Рис. 5.2. Спектр дискретизованного сигнала

Наложим прямоугольное окно - функцию  $\text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)$ , ширина окна в точности равна сдвигу между копиями спектра. Если спектр  $\widetilde{f}_{\text{discr}}(\omega)$  умножить на прямоугольное окно, получим спектр исходного сигнала. Если удастся выполнить данную процедуру, то результат дискретизации полностью эквивалентен работе с исходным сигналом. Возможно ли, что по какой-то причине прямоугольное окно нельзя будет наложить? Такой случай показан на рис. 5.3.

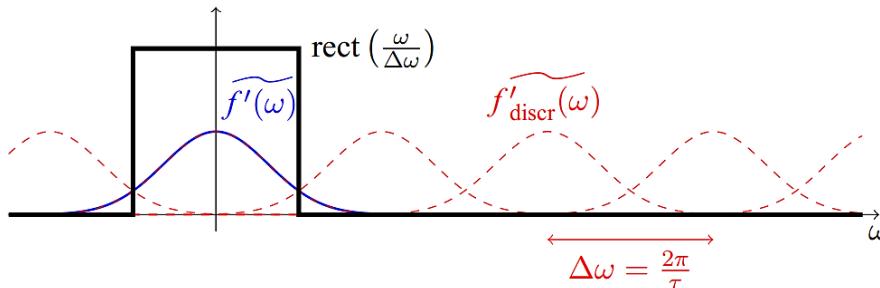


Рис. 5.3. Пример спектра, более широкого, чем прямоугольное окно

Отличие графиков на рис. 5.2. и 5.3. состоит в том, что спектр функции  $\widetilde{f}'(\omega)$  - более широкий, чем прямоугольное окно. Действуя по рассмотренному выше алгоритму, можно обнаружить участки спектра, которые накладываются друг на друга. В ходе рассмотрения функции  $\widetilde{f}'_{\text{discr}}(\omega)$  необходимо сложить копии. Тогда то, что мы получим внутри окна, будет относиться не только к синей линии, отвечающей за исходный сигнал, - появятся добавки в виде артефактов от боковых копий исходного спектра, которые называются "алиасы". Они не позволяют восстановить исходный спектр путем умножения на прямоугольное окно. Важно отметить: если присутствует более широкий спектр, то проблемы с его восстановлением возникают не только за пределами прямоугольного окна, но и внутри. Отсюда делаем вывод: в зависимости от того, какую полосу занимает спектр, необходимо выбирать расстояние между

алиасами. Говорить о том, что мы его выбираем, можно потому, что  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ ,  $\tau$  - промежуток времени между соседними отсчетами, обратная величина  $1/\tau$  - частота дискретизации,  $2\pi/\tau$  - соответствующая круговая частота. Если уменьшать  $\tau$ , тем самым будет увеличиваться  $\Delta\omega$ . Если  $\Delta\omega$  будет достаточно большой, алиасы не "заползут" внутрь прямоугольного окна. Сформулируем иначе: предположим, что есть максимальная частота спектра, тогда ширина прямоугольника должна быть по крайней мере в два раза больше, чем максимальная ширина спектра; если это условие не будет выполнено, восстановление не пройдет.

## Частота Найквиста

**Определение 5.1:** Частота Найквиста - частота, равная половине частоты дискретизации:  $f_{Nq} = \frac{1}{2\tau}$

Зафиксируем промежуток времени между соседними отсчетами  $\tau$ ; частоту дискретизации, которая будет равна ширине прямоугольного окна. Если максимальная частота в спектре будет меньше, чем частота Найквиста (половина окна), сигнал может быть воспроизведен точно. Значит ли это, что все спектральные компоненты с частотами ниже  $f_{Nq}$  воспроизводятся точно? Если в спектре есть частоты выше частоты Найквиста, то после дискретизации не будут воспроизводиться не только соответствующие им спектральные компоненты, они окажут влияние на спектральные компоненты, лежащие ниже  $f_{Nq}$ . Соответственно, лежащие ниже компоненты, в этом случае точно воспроизводиться не будут.

## Теорема Котельникова

Теорема Котельникова существует в большом количестве вариантов, рассмотрим один из них. Каким образом можно восстанавливать сигнал, если известны его значения в отсчетах:

$$\widetilde{f(\omega)} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)}$$

Есть спектр сигнала  $\widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)}$ , чтобы перейти от него к исходному сигналу, умножим его на прямоугольное окно с шириной  $\Delta\omega$ . Перейдем к временному представлению сигналов: возьмем обратное преобразование Фурье от левой и правой части уравнения. Фурье преобразование от двух функций - свертка Фурье-образов каждой функции.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)} \right\} = \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * f_{\text{discr}}(t) \\ &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * \left( f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) \right) = \sum_n f(\tau n) \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t - \pi n\right) \end{aligned}$$

Содержание теоремы Котельникова: если выполнены условия - спектр функции  $f(t)$  ограничен; частота дискретизации по крайней мере в два раза больше, чем максимальная частота спектра функции  $f(t)$  - тогда функцию  $f(t)$  в любой момент

времени можно однозначно восстановить, имея в распоряжении только отсчеты, - значения  $f(\tau n)$ . Мы воспроизводим функцию не только в самих отсчетах, но способны это сделать между ними, причем точно. Теорема Котельникова очень важна в обработке сигналов, без нее нельзя было бы говорить о цифровом способе передачи, записи и воспроизведении сигналов.

Если  $f_{\max} \leq f_{Nq}$ , то  $\sum_n f(\tau n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau} t - \pi n\right)$

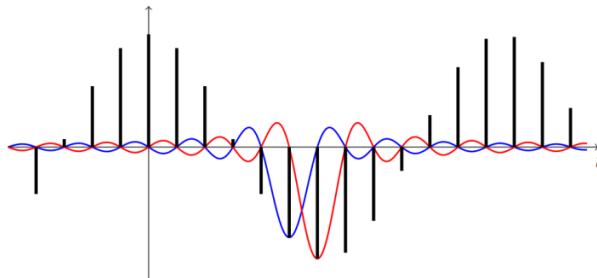


Рис. 5.4. Отсчеты дают независимую информацию о сигнале

Рассмотрим, как происходит суммирование и восстановление функции графически: есть сложная функция, заданная отсчетами (черные линии на рис. 5.4. - экспериментальные данные). Условия теоремы Котельникова выполнены; каким образом можно по точкам восстанавливать сигнал на всей временной оси? Чтобы получить функцию  $f(t)$ , необходимо просуммировать выражение по всем  $n$ , выражение представляет собой значение функции в некотором  $n$ -ом отсчете. Выберем отсчет (посередине графика) и зафиксируем для него значение функции  $f(\tau n)$ . Это значение умножается на функцию  $\operatorname{sinc}$ , то есть на функцию  $\frac{\sin(x)}{x}$ . Известно:  $\sin(x)$  периодически обращается в ноль, а именно - при  $x = \pi n$ . Если в аргументе  $\operatorname{sinc}$  стоит величина, которая соответствует целому количеству  $\pi$ , результат = 0 во всех точках, за исключением случая, когда аргументом является ноль - возникает неопределенность - замечательный предел. Из курса математического анализа известно, что замечательный предел раскрывается:  $\frac{\sin(x)}{x} = 1$  (при  $x \rightarrow 0$ ). Нулевой аргумент выражения  $\frac{\pi}{\tau t} - \pi n$ : значение  $t$  в точности соответствует времени, где берется  $n$ -ый отсчет функции  $f$  (значение, которое мы рассматриваем) - в этот момент образуется вершина  $\operatorname{sinc}$ .

Аналогично можно рассмотреть изменение аргумента выражения до следующего значения, аргумент =  $\pi$ : в этом случае мы перемещаемся в какую-то точку по оси времени и оказываемся в соседнем отсчете.  $\operatorname{sinc}$  умножается на значение самой функции, тогда итоговое произведение описывает кривую, которая изображена на графике красной линией, соседний отсчет (синяя линия). Составим вектор из всех значений функции на всех точках, где взяты отсчеты. Он будет иметь нулевые компоненты везде, и только одну ненулевую компоненту. Если взять два вектора, соответствующих двум разным отсчетам, и перемножить их по правилу скалярного произведения, - получим ноль. Не ноль будет только в том случае, когда берется один и тот же отсчет. Тем самым векторы являются перпендикулярными, отсчеты несут

независимую информацию о сигнале. Если какой-то отсчет был пропущен, то восстановить его за счет других отсчетов будет невозможно. Если выполнить бесконечное суммирование, можно все восстановить корректно. Для этого необходимо сложить в каждой точке большое количество функций sinc. Функция sinc убывает на бесконечности, то есть остальные отсчеты, по мере убывания от центрального, будут все меньше оказывать влияние на восстанавливаемое значение. Тем не менее, они будут его оказывать. Асимптотика типа  $\sin(x)/x$  не обеспечивает достаточно быстрого убывания. Чтобы точно восстанавливать сигнал, необходимо уйти довольно далеко и использовать информацию с большого количества отсчетов. Это не очень удобно, но существуют техники, позволяющие избежать данную процедуру.

## Oversampling

Oversampling: искусственно увеличиваем частоту дискретизации и делаем количество отчетов большим, чем необходимо. Есть частота Найквиста, чтобы полностью описать сигнал, достаточно осуществить дискретизацию сигнала с частотой, равной удвоенной частоте Найквиста, то есть равной удвоенной максимальной частоте в спектре сигнала. Увеличение частоты дискретизации предоставит дополнительные возможности. В ходе выводения теоремы Котельникова было необходимо отделить спектр от алиасов, для чего было использовано прямоугольное окно.

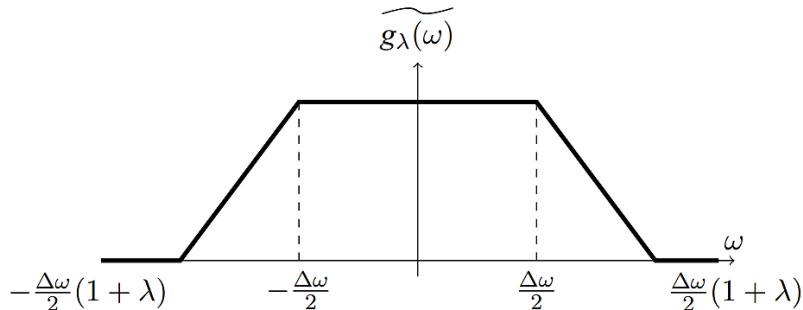


Рис. 5.5. Трапецидальное фильтрующее окно

Рассмотрим применение трапецидального окна: функция  $\widetilde{g}_\lambda(\omega)$ ;  $\Delta\omega$  - ширина спектра с учетом отрицательных широт. Возьмем фильтрующую трапецию более широкой, чем спектр сигнала. Параметр  $\lambda$  отвечает за то, насколько она будет широкой: если  $\lambda = 0$ , трапеция вырождается в прямоугольник; если  $\lambda > 0$ , фильтрующие свойства будут более слабыми. С учетом повышения частоты дискретизации и увеличения в  $1 + \lambda$  раз, не происходит наложения алиасов на прямоугольную область. Тогда спектр дискретизованного сигнала можно умножить на трапецию: спектр умножается на единицу, поэтому не видоизменяется, наклонные участки трапеции умножаются на ноль, потому что здесь спектр = 0. Соответственно, умножение на фильтрующую трапецию не меняет сигнал.

$$\widetilde{g}_\lambda(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \Delta\omega/2; \\ 1 - \frac{|\omega| - \Delta\omega/2}{\lambda\Delta\omega/2} & \Delta\omega/2 \leq |\omega| \leq (1 + \lambda)\Delta\omega/2; \\ 0 & |\omega| \geq (1 + \lambda)\Delta\omega/2 \end{cases}$$

Выведем теорему Котельникова, но с фильтрующим непрямоугольным окном:

$$f(t) = \sum_n f\left(\frac{\pi n}{(1 + \lambda)\Delta\omega/2}\right) G_\lambda\left(t - \frac{\pi n}{(1 + \lambda)\Delta\omega/2}\right)$$

$$G_\lambda(x) = \frac{8 \operatorname{sinc}[x(1 + \lambda/2)\Delta\omega/2] \sin[x\lambda\Delta\omega/4]}{\lambda\Delta\omega^2(1 + \lambda)x^2}$$

- В качестве аргумента функции  $f$  вместо исходной частоты дискретизации используется величина в  $1 - \lambda$  раз больше, то есть мы берем большее количество отсчетов, они становятся более частыми - частота дискретизации растет.
- Функция  $G_\lambda$ : необходимо посчитать спектр от функции в виде трапеции, выкладка получается довольно громоздкой. Отметим, что возникает зависимость типа  $1/x^2$ , то есть функция  $G_\lambda$  убывает более быстро. Тогда для вычисления её значений в каждый момент времени в рамках суммы можно ограничиться меньшим количеством слагаемых, что является положительным свойством.

$G_\lambda(x)$  убывает быстрее, чем  $\operatorname{sinc}(x)$

При  $\lambda \rightarrow 0$   $G_\lambda(x) \rightarrow \operatorname{sinc}(x)$

## Oversampling и реальные устройства

Oversampling целесообразно применять для решения задач звукозаписи и звуковоспроизведения практического плана. В среднем, человеческое ухо слышит звуки до 22 кГц. Примем, что звуковой диапазон - 22 кГц. Можно заключить, что для дискретизации таких сигналов и последующего воспроизведения звуков, музыки и т.д., необходимо выбрать частоту дискретизации в два раза выше - 44 кГц. Отметим, что в файлах, которые содержат музыку, мы не найдем такой частоты. Стандартами для звукозаписи являются: 44.1, 48, 96 и 192 кГц. Возникает вопрос: почему в индустрии принято, что частота дискретизации выше, чем должна быть по расчетам? На первый взгляд значение 44.1 кГц выглядит нелогично, как и 48 кГц. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим, как осуществляется переход от дискретного представления сигнала к исходному непрерывному сигналу.

На рис. 5.6. показаны: синяя линия - исходный спектр сигнала; красный пунктир - возникающие алиасы, которые необходимо отфильтровать; черная линия - прямоугольное окно. Практическое наложение прямоугольного фильтра - довольно сложная задача. Представим, что есть сигнал, который каким-то образом продискретизован и проквантован, чтобы его можно было воспроизводить с цифрового устройства. Есть дискретный сигнал, который непосредственно подается на излучатель. Мы работаем с сигналом, обозначенным красным пунктиром, его необходимо отфильтровать. В данном случае фильтр аналоговый. Для того, чтобы сделать прямоугольный фильтр, потребуется очень сложная схемотехника, при этом он будет крайне неустойчив (чувствителен к изменениям внутренней температуры, к различным

внешним факторам - влажность, вибрация). Сделать обладающий стабильностью прямоугольный фильтр не получается, возможно сделать - близкий к прямоугольному, при этом он будет иметь "хвосты", то есть его характеристика будет более плавной. В этом случае необходимо заложить частотную полосу с учетом ширины характеристики. Дополнительный зазор обеспечивается за счет увеличения частоты дискретизации. Если частоту дискретизации сделать 96, вместо 44 кГц, то наверняка получится простой фильтр, который справится с проблемой.

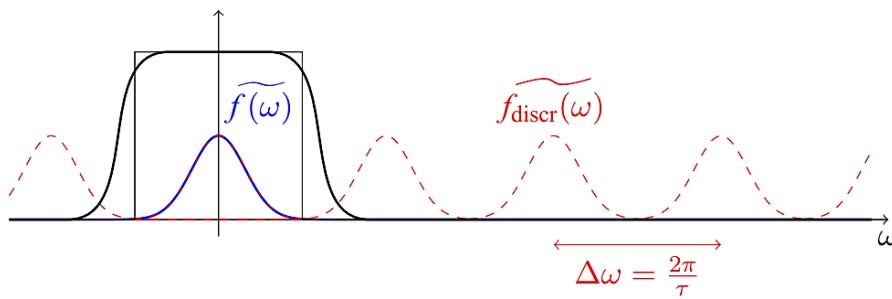


Рис. 5.6. Переход от дискретного представления сигнала к исходному непрерывному сигналу

Еще один фактор, говорящий в пользу Oversampling (почему можно применять дискретизацию с повышенной частотой): Oversampling третьего рода полезен в случае, когда необходимо получить очень высокое качество сигнала с низким уровнем шума. Представим, что необходимо записать звуковой сигнал (речь, музыку), который в дальнейшем сможет прослушать человек, то есть ограничимся полосой сигнала, заключенной в 22 кГц. В некоторых аналого-цифровых преобразователях частоту дискретизации для подобных задач "задирают" до мегагерца. Сигнал (синяя линия на рис. 5.6.) заведомо сосредоточен в той полосе, которая была оговорена, то есть сигналы, лежащие вне диапазона 22 кГц, не пропускаются. Однако, это нельзя сказать про шумы: в реальных устройствах всегда присутствуют электромагнитные помехи, посторонние примеси, поэтому используется следующий прием: продискретизуем функцию с частотой в мегагерц, тогда расстояние между функцией и алиасами будет большим; различные спектральные компоненты шума, подающегося на систему, будут распределены по всему интервалу равномерно (от -500 кГц до 500 кГц). Далее можно работать с сигналом как с цифровым, то есть можно отфильтровать цифровым образом: накладываем прямоугольный фильтр, ограничивающий сигнал областью 22 кГц. Вся энергия шума падала от 0 до 500 кГц, что-то упало в диапазон от 0 до 22 кГц. То, что было от 22 до 500 кГц, мы занулили, тем самым неизбежно присутствующий шум был подавлен за счет процедуры. За счет применения цифрового фильтра, который может быть сделан идеально, поскольку является математическим преобразованием, существенно повышается соотношение сигнал-помеха. Современные технологии позволяют много раз в секунду снимать данные и быстро их обрабатывать, поэтому рассмотренные выше приемы реализуются даже в рамках одной микросхемы. На выходе микросхемы цифровой сигнал уже преобразован, незаметно для пользователя, - как будто исходная частота дискретизации соответствует 44 кГц.

## Ограниченнность сигнала по времени

Предположим, что есть сигнал, который приходит на сэмплирующее устройство (на рис. 5.7. представлен красной линией).

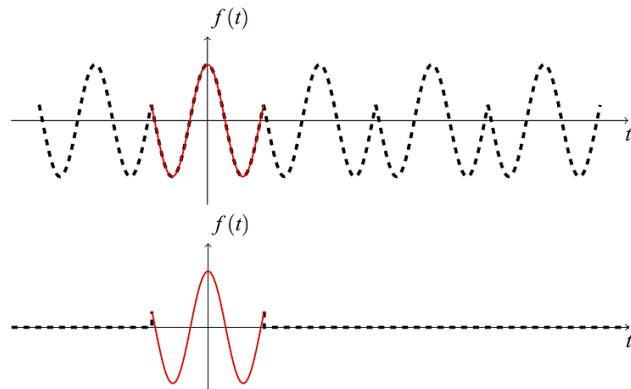


Рис. 5.7. Продление сигнала до бесконечности: верхний график - периодическое продолжение сигнала; нижний график - сигнал равен нулю за пределами окна наблюдения

Когда производятся дискретизация и операции со спектрами, необходимо каким-то неявным образом проинтегрировать сигнал в бесконечных пределах, но сигнал известен в конечных пределах, там где мы его измерили. Возникает вопрос: каким образом можно продлить сигнал до бесконечности? На него может быть два ответа: первый - переизодически продолжаем сигнал (верхний график); второй - считаем сигнал равным нулю за пределами окна наблюдения (нижний график). Красная линия показывает участок синусоиды. В целом, ни один из вариантов синусоиду не отражает. Если работать с такого рода дискретизованными сигналами, это будет необходимо учитывать. Отметим: скорее всего будут получены артефакты. В спектре сигнала, представленного на нижнем графике, за счет того, что происходит излом, разрывная функция после Фурье-преобразования будет содержать дополнительные особенности. Чтобы спектр сигнала после дискретизации соответствовал физическому процессу, прежде чем проводить манипуляции со спектром, на функцию накладывается окно в виде сглаживания. Окно равно нулю везде, от нуля - плавно растет до единицы, от единицы - плавно спадает до нуля. Такого рода окна могут быть использованы, чтобы подавлять артефакты при начальной обработке сигналов.

## Лекция 6. Частотно-временные представления сигналов

### Оконное преобразование Фурье

На протяжении предыдущих лекций курса были рассмотрены различные понятия, связанные со словом "частота", и различные способы реализации частоты.

- **Частота спектральной компоненты** – частота, характеризующая разложение сигнала как функции времени в интеграл Фурье; аргумент функции, получающийся в результате преобразования;
- **Мгновенная частота** – понятие введено в ходе представления сигнала как функции времени в специальном виде.

Ранее рассмотрено, как данные понятия согласовываются. Несмотря на то, что оба называются словом "частота", они являются принципиально разными. В одном случае удобно использовать мгновенную частоту, в другом – частоту спектральной компоненты (при анализе сигналов). Когда мы говорим о частоте спектральной компоненты, то теряем возможность анализа зависимости частоты от времени. Действительно, при выполнении преобразования Фурье берется интеграл по времени, результат – функция частоты, а не времени. При этом сигнал и его спектр могут принципиально меняться с течением времени. Например, при анализе человеческой речи спектральный состав одной фонемы может значительно отличаться от спектрального состава другой. Если, как предписывает математика, взять сигнал, проинтегрировать, взять преобразование Фурье – результатом будет спектр всего сигнала, отдельных компонент (фонем) не обнаружится.

С одной стороны, нам хотелось бы работать с частотами спектральных компонент, с другой – получить зависимость спектра сигнала от времени. Такая зависимость есть у мгновенной частоты, при этом она не отражает совокупность всех спектральных компонент. Таким образом, оба определения не являются вполне полными. Необходимо найти компромисс, который позволит использовать преимущества и одного, и другого метода одновременно. В ходе лекции будет рассмотрено, как это можно сделать. Одним из способов является оконное преобразование Фурье.

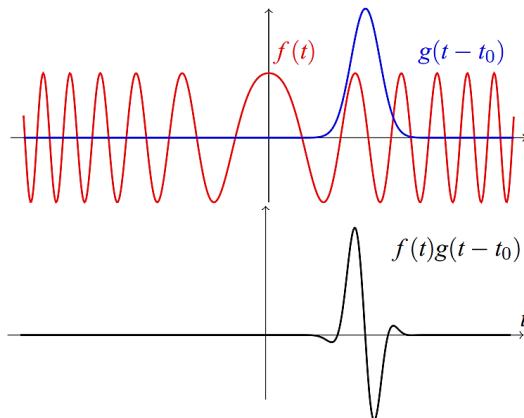


Рис. 6.1. Окноное преобразование Фурье

Верхний график на рис. 6.1. демонстрирует, что период функции растет, вблизи  $t = 0$  он достаточно большой, далее - уменьшается, то есть частота вначале большая, низкая, и снова большая. Оконное преобразование Фурье позволит отразить характер изменения частоты со временем. Помимо функции  $f(t)$  (красная линия), рассмотрим функцию  $g(t)$  (синяя линия). Поскольку в аргументе имеем разность, параметр  $t_0$  определяет временной сдвиг от функции  $g(t)$ , тем самым мы можем настраиваться на разные участки временной оси. При умножении функций, происходит выделение интересующих элементов функции  $f(t)$ , к результату применяется Фурье-преобразование.

### Оконное преобразование Фурье. Определение

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\}((\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s - t) \exp(-i\omega s) ds$$
$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\}((m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s - nt_0) \exp(-im\omega_0 s) ds$$

Первое определение относится к случаю, когда частота  $\omega$  и время  $t$  - непрерывные, второе - частота и время заданы в некоторой дискретной сетке; используется в случае обработки сигнала на компьютере.

Сигнал  $f(s)$  умножается на оконную функцию  $g(s - t)$ ;  $t$  - параметр временного сдвига, заложенный в окно. Результат подвергаем преобразованию Фурье, он зависит от частоты и времени. Если положим  $\omega$  равной  $mt\omega_0$ , то перейдем от непрерывной частоты к дискретной, частоты будут с шагом  $\omega_0$ . Аналогично: от переменной  $t$  переходим к переменной  $mt_0$  - получаем дискретное преобразование, которое зависит от параметров  $m$  и  $n$ . В отличие от обычного преобразования Фурье, оконное преобразование - двухпараметрическое. Это соотносится с задачей: результат одновременно зависит и от частоты, и от времени.

### Выбор оконной функции

Общее эмпирическое требование гласит: функция  $g(t)$  должна быть хорошо локализована как по частоте, так и по времени.

- **локализация по времени:** при умножении функции  $f(t)$  и функции  $g(t)$  получен результат вблизи интересующего момента по времени. Если функция  $g(t)$  занимает большой интервал времени, то неясно, к чему конкретно будет относиться результат Фурье-преобразования. В предельном случае предположим, что функция  $g(t)$  равна константе, например, единице: оконное преобразование Фурье перейдет в обычное, зависимость от времени формально будет, но в действительности результат не зависит от временной переменной.
- **локализация по частоте:** спектр функции  $g(t)$  должен лежать в определенном диапазоне частот, желательно узком, поскольку задача состоит в том, чтобы исследовать поведение функции  $f(t)$  и её спектра в зависимости от времени.

Если спектр функции  $g(t)$  не будет локализован, функция  $f(t)$  будет иметь широкий спектр. Тогда в результате произведения функций появится значительное количество артефактов, то есть в результат оконного преобразования Фурье будет привнесено некоторое количество частот, которые в исходной функции  $f(t)$  не присутствовали. В этом случае будет восстановлено что-то, очень далекое от истины.

Чтобы определить, сколько существует линейно независимых функций  $g(t)$ , введем два оператора:

$$\mathbb{Q}_T f(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq T \\ 0 & |x| > T \end{cases} \quad \widetilde{\mathbb{P}_\Omega f}(x) = \begin{cases} \widetilde{f(x)} & |x| \leq \Omega \\ 0 & |x| > \Omega \end{cases}$$

- $\mathbb{Q}_T$  - оператор ограничения функции  $f(t)$  по времени - для значений  $x$ , лежащих от  $-T$  до  $T$ , функция остается равной себе, вне этого промежутка оператор её зануляет. Предположим, что функция  $f(t)$  хорошо локализована по времени, лежит внутри всего интервала  $T$ . Тогда операция зануления будет менять функцию слабо - в тех местах, где она очень близка к нулю. Поэтому оператор  $\mathbb{Q}_T$  практически не влияет на такие функции. Если функция  $f(t)$  сосредоточена плохо, тогда при  $|x| > T$  её значение будет отлично от нуля, соответственно, результат будет сильно отличаться от исходной функции  $f(t)$ .
- $\mathbb{P}_\Omega$  - оператор устроен аналогичным образом, но действует в частотном пространстве. На вход оператору подается функция  $f(t)$ , он рассматривает её спектр и зануляет в точках  $|x| > \Omega$
- двойной оператор  $\mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega$  ограничивает сигнал и по частоте, и по временем. Чтобы понять, изменится ли результат, используем выражение:

$$\|\mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f\|^2 / \|f\|^2 = \langle \mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f | f \rangle / \|f\|^2$$

Деление производится, поскольку операторы  $\mathbb{Q}_T$  и  $\mathbb{P}_\Omega$  линейны относительно функции  $f(t)$ . Если умножить функцию на число, результат действия оператора умножится на то же число. Чтобы понять, сильно или слабо осуществлено влияние, необходимо пронормировать. Если функция  $f(t)$  хорошо локализована и по времени, и по частоте, оператор  $\mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega$  оставит функцию такой же, какой она была; результат = 1. Если функция локализована плохо, получим результат  $< 1$ . После преобразования оператора посчитаем, сколько у него собственных значений. Это нетривиальная задача, имеющая строгое математическое решение.

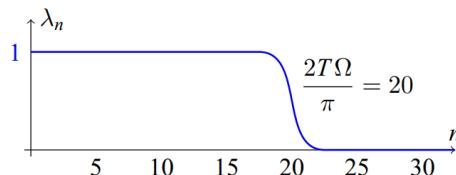


Рис. 6.2. Решение задачи на собственные значения оператора

Упорядочим собственные значения оператора в порядке убывания и отразим на графике: в начале значения  $\lambda_n$  лежат вблизи единицы, начиная с некоторого номера -

быстро убывают и находятся на уровне, близком к нулю. Можно показать, что количество близких к единице собственных значений удовлетворяет равенству  $\frac{2T\Omega}{\pi} = 20$ . Соответственно, чем больше промежуток времени, который занимает функция  $g(t)$ , и ширина её спектра, тем больше может быть функций. Если есть серьезное ограничение по частоте и одновременно по времени, таких сигналов мало. Чем больше и одна, и другая переменная, тем сигналов больше.

**Математическое представление** результатов решения задачи:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon : \{n; \lambda_n \geq 1 - \epsilon\} \leq \frac{2T\Omega}{\pi} - C_\epsilon \log T\Omega$$

$$\{n; 1 - \epsilon \geq \lambda_n \geq \epsilon\} \leq 2C_\epsilon \log T\Omega$$

$$\text{При } T\Omega \rightarrow \infty \quad N = \frac{2T\cdot 2\Omega}{2\pi}$$

Чем шире по спектру и длиннее сигнал, тем больше  $N$ , потому что логарифмическими асимптотиками можно пренебречь по сравнению с главным членом  $T\Omega$ .

**Примеры:** Рассмотрим, как функция окна влияет на результат оконного преобразования Фурье. На рис. 6.3. и 6.4. приведены результаты моделирования в среде MatLab, где процедура взятия оконного преобразования Фурье называется "функция спектрограмм", поскольку оконное преобразование также называют спектрограммой.

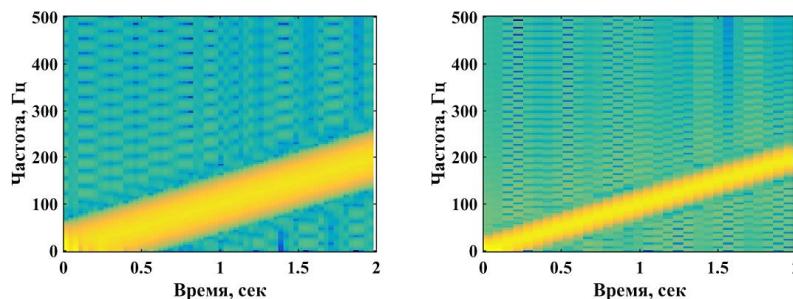


Рис. 6.3. Слева - ширина окна 32; справа - ширина окна 64

Есть сигнал длительностью 2 сек, за это время у него была линейная частотная модуляция (при этом - единичная амплитуда), в рамках которой мгновенная частота менялась от 0 Гц до 200 Гц. В качестве окна задана функция вида прямоугольник, которая заранее хорошо локализована по времени, но не по частоте.

- **ширина окна 32 отсчета** - левый график на рис. 6.3. показывает результат применения к сигналу функции спектрограмма: есть зависимость спектра от времени, если построить срез вдоль каждой вертикальной прямой, получим спектр; частоты, на которых присутствует сигнал, плавно меняются от низких до более высоких. У качества изображения есть два параметра: первый - насколько хорошо воспроизведено изменение спектра сигнала от одного момента времени к другому; второй - разрешение по частоте; насколько мы отличаем одну частоту в спектре от другой. График демонстрирует хорошее разрешение по

времени (изображение плавное), разрешение по частоте - полоса широкая, хотя мгновенная частота сигнала в каждый момент времени принимает единственное значение.

- **ширина окна 64 отсчета** - для увеличения разрешения по частоте необходимо взять оконную функцию Фурье с более широким спектром. Следствие: разрешение по времени улучшилось; ширина полосы уменьшилась, но мы не так хорошо знаем, что происходит в каждый момент времени. Функция  $g(t)$  умножается на сигнал, к результату применяется преобразование Фурье. Соответственно, будут получены одинаковые результаты для всех точек, что проявляется в виде прямоугольников на графике.

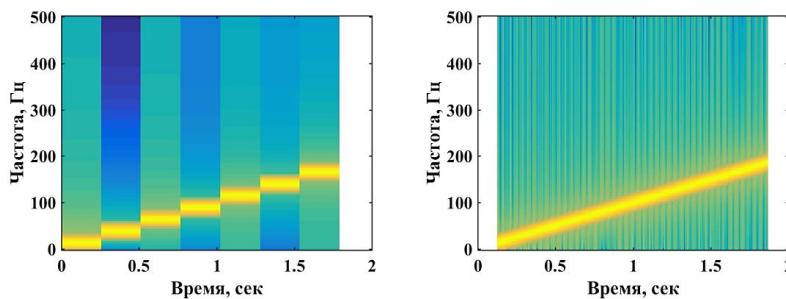


Рис. 6.4. Слева - ширина окна 256; справа - ширина окна 256, наложение 250

- **ширина окна 256 отсчетов** - левый график показывает улучшенное разрешение по частоте и ухудшение разрешения по времени, внутри окна (0,25 сек) мгновенная частота меняется. В результате преобразования Фурье получаем спектр, который будет одинаковым для всех элементов времени. Тем самым сильно загрублется разрешение по частоте.
- **ширина окна 256 отсчетов, наложение 250** (правый график) - из дилеммы есть изящный выход - сделать шаг по времени от одного окна до другого меньше, тогда преобразование Фурье будет браться с наложением. Наложение 250 означает: для первого столбца данных берется сигнал от нулевого до 255-го отсчета, далее сдвигаемся на 6 отсчетов, последние 250 отсчетов остаются теми же (сдвигаемся с большим перекрытием); следующий столбец данных будет содержать небольшое количество новых данных. Первые 6 изымаем, берем 6 новых, тем самым происходит сглаживание функции. Она одновременно является хорошо локализованной по частоте (толщина линии на обоих графиках примерно равна), при этом отсутствуют характерные ступеньки. Наложение - стандартный прием при вычислении оконного преобразования Фурье, позволяющий получить хорошие результаты. При этом данные не являются независимыми - каждый столбец во многом будет пересекаться с информацией из соседнего столбца.

## Вейвлет-преобразование. Определение и свойства

Непрерывное Вейвлет-преобразование - двухпараметрическое преобразование.

Оконное преобразование Фурье имеет своими параметрами  $\omega, t$  - частоту и время, в данном случае параметрами являются переменные  $a$  и  $b$ .

$$\mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

**Определение 6.1:** Материнский вейвлет - функция  $\psi(s)$ , где  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0$

**Дискретное Вейвлет-преобразование** - полная аналогия с дискретным оконным преобразованием Фурье:  $a = a_0^m$ ;  $b = nb_0a_0^m$ , где  $a_0 > 1$ ;  $b_0 > 1$ ;  $m, z \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{T}_{wl}\{f\}(m, n) = |a|^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt$$

### Примеры материнских вейвлетов

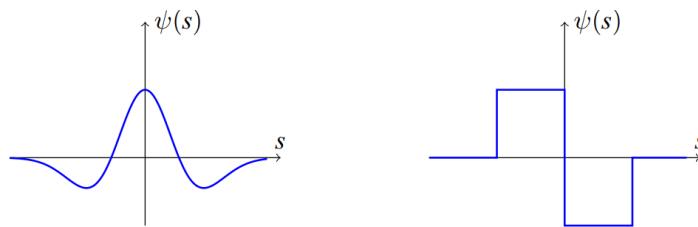
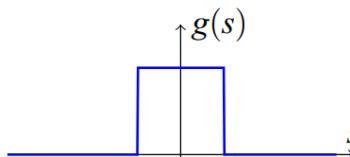
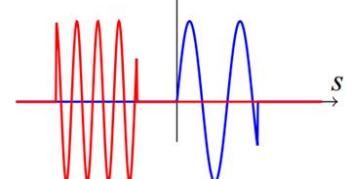
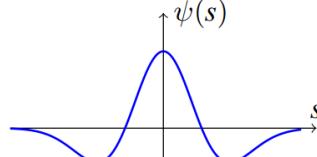
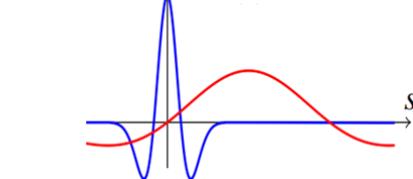


Рис. 6.5. Слева - Мексиканская шляпа; справа - Вейвлет Хаара

- Мексиканская шляпа - типичный вейвлет, вторая производная гауссианы  $\psi(s) = (1 - s^2) \exp(-s^2/2)$ ;
- Вейвлет Хаара - вейвлеты могут быть разрывными

### Сравнение с оконным преобразованием Фурье

Оконное преобразование Фурье	Вейвлет-преобразование
 	 
параметры: $\omega$ - частота, $s$ – смещение $g^{\omega, t}(s) = g(s - t) e^{i\omega t}$	параметры: $ a $ – масштаб, $b$ – смещение $\psi^{a, b}(s) =  a ^{-1/2} \psi\left(\frac{s-b}{a}\right)$

Принципиальная особенность: параметры не влияют на ширину окна, Принципиальное отличие: параметр  $a$  влияет на разность целиком; меняется

она остается постоянной. не только частота или ширина, косвенно меняется отношение функции к сдвигу.

С помощью вейвлет-преобразования были просмотрены более высокие частоты: перебирая различные значения  $b$ , мы сдвигали функцию с малым шагом. Выбрав функцию более широкой, перебирая те же значения  $b$ , красная кривая была эффективно перемещена с гораздо большим шагом по времени. Это представляется имеющим больший физический смысл, чем независимое от частоты перемещение функций с постоянной шириной в случае оконного преобразования Фурье.

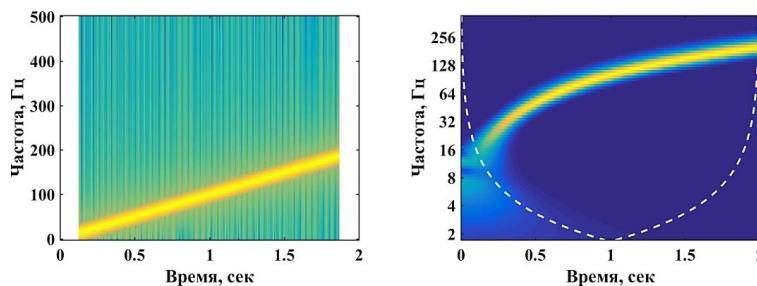


Рис. 6.6. Сравнение результатов преобразований

Левый график показывает результат применения оконного преобразования Фурье. Ширина окна 256 семплов, наложение - 250, линейный частотно-модулированный сигнал. Правый график показывает результат применения вейвлет-преобразования. Ширина линий на графиках визуально примерно одинакова, при этом ось частот разная - равномерная и логарифмическая, соответственно. Что называть частотой для Вейвлет-преобразования? - сложный вопрос. Например, частотой можно считать среднюю частоту спектра вейвлета, соответствующего параметрам  $a$  и  $b$ . Это хорошо соотносится с понятием частоты при выполнении оконного преобразования Фурье. Вейвлет-преобразование по своей природе дает логарифмическую шкалу частот. Ширина линии остается постоянной, значит, разрешение по частоте для вейвлет-преобразования разное на разных частотах: на высоких - разрешение довольно плохое, потому что ширина линии соответствует большому диапазону частот; на низких - разрешение отличное; частота 16 и 32 Гц, 32 и 64 Гц существенно отличаются. В случае оконного преобразования Фурье толщина линии постоянная, с большой точностью передавать низкие частоты преобразование не может. Разрешение по частоте можно повысить, для этого придется увеличить ширину окна, но не существенно, поскольку это повлечет за собой плохое разрешение по времени.

Низкие частоты: предположим, что один сигнал имеет частоту 1000 Гц, второй - 1001 Гц. Насколько сигналы различны? С точки зрения преобразования Фурье, сигналы - разные, поскольку их частота отличается на 1 Гц. С точки зрения вейвлет-преобразования - влияние на результат будет оказывать частное частот (1001 Гц/1000 Гц), представляющее при анализе сигналов и построении спектров больший интерес. Например, соседние ноты музыкального произведения обычно отличаются по частотам в некоторое количество раз, у них нет строго заданного диапазона.

Применим оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, чтобы представить анализируемый сигнал в виде компонент и определить, как рассматриваемые методы справляются с поставленной задачей.

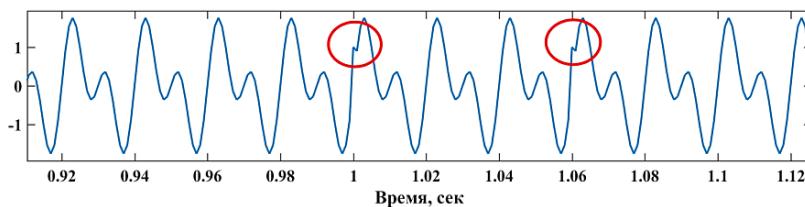


Рис. 6.7. Сигнал в виде суммы гармонических синусоидальных компонент

Пример взят из книги **И. Добеши "Десять лекций по вейвлетам"**, рекомендованной к прочтению. Результаты моделирования:

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 50t) + \sin(2\pi \cdot 100t) + \delta(t - 1.00) + \delta(t - 1.06)$$

Сигнал  $f(t)$  представлен в виде суммы гармонических синусоидальных компонент с частотами 50 и 100 условных единиц и добавки в виде щелчков, которые задаются дельта-функциями. Щелчки добавляются к значению сигнала в момент времени  $t = 1$  и  $t = 1.06$ , обозначенными на рис. 6.7. красными кругами. Задача: в результате обработки все четыре компонента хорошо разделяются.

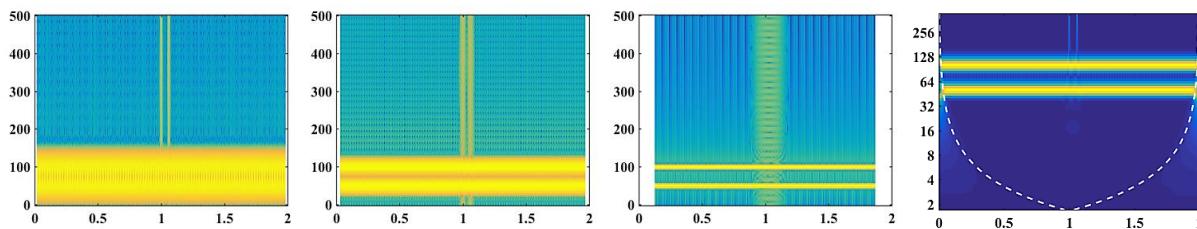


Рис. 6.8. Окноное преобразование Фурье - 1-3 график, ширина окна 32, 64, 256, соответственно; Вейвлет-преобразование - 4 график

**Окноное преобразование Фурье** - ширина окна принципиально влияет на результат и на то, как мы видим сигнал:

- **ширина окна 32** - окно узкое; есть положения, когда внутрь окна попадает только один щелчок. Это приводит к возникновению в некоторых значениях всплеска по всем частотам - две тонкие вертикальные линии. С помощью узкого окна можно наблюдать переменные процессы типа щелчок, с другой стороны - важно наблюдать медленные процессы. В данном случае - две гармонические компоненты на частотах 50 и 100 Гц (постоянны). График показывает, что окноное преобразование Фурье не смогло с ними разобраться адекватно. Итог: хорошее разрешение по времени, плохое - по частоте.
- **ширина окна 64** - компромиссный вариант: щелчки в целом видны хорошо, но место их проявления не так четко локализовано; спектральные компоненты (50 и 100 Гц) явно разделены - разрешение по частоте улучшилось;

- ширина окна **256** - спектральные компоненты разделены четко, но ценой слияния щелчков в единый артефакт - быстрые переменные компоненты сигнала практически не разрешаются.

## Вейвлет-преобразование

- ширина окна не фиксирована - логарифмическая шкала позволяет одновременно с высоким разрешением по частоте видеть низкие частоты, с высоким разрешением по времени – высокие. Итог: все четыре компоненты видны хорошо. У преобразования Фурье с широким окном (256) разрешающая способность по частоте лучше, при этом полностью теряется информация о быстрых компонентах. В случае вейвлет-преобразования они разрешаются лучше, чем в случае оконного преобразования с узким окном (32).

Вывод: для выбора метода необходим анализ задачи, с которой мы работаем, в зависимости от сигналов (низкие и высокие частоты, разнообразие форм и длин).

## Непрерывное вейвлет-преобразование

Пусть  $\psi^{a,b}(s) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{s-b}{a}\right)$ , где  $C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi\xi}|^2}{|\xi|} < \infty$  и  $\|\psi\| = 1$

$$\mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b) = \langle f; \psi^{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \overline{\psi^{a,b}(s)} ds$$

Обобщение Вейвлет-преобразования на случай, когда вейвлет является комплексным:  $\overline{\psi^{a,b}(s)}$ . Чертка обозначает комплексное сопряжение.  $\mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b)$  - по определению - Вейвлет-преобразование для общего случая комплексно-значимого вейвлета. Скалярное произведение функции  $f$  и  $\psi^{a,b}$ , тем самым мы работаем с евклидовым функциональным пространством.

Для Фурье-преобразования существуют формулы, позволяющие восстановить исходную функцию из фурье-образа. Задача: восстановить исходное значение сигнала по результату Вейвлет-преобразования. Первый шаг: определим спектр от вейвлета  $\psi^{a,b}(s)$ ; для вычисления интеграла воспользуемся двумя свойствами Фурье-преобразования - сдвиг по времени, растяжение сжатия:

$$\mathbb{F}\{\psi^{a,b}(s)\} = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{s-b}{a}\right) \exp(-is\xi) ds = \sqrt{|a|} \exp(-i\xi b) - \widetilde{\psi(a\xi)}$$

Запишем вейвлет-преобразование от функции в другой форме: подставим обратное Фурье-преобразование от спектра функции; изменим порядок интегрирования.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \exp(-i\xi s) \overline{\psi^{a,b}(s)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} ds \exp(-i\xi s) \psi^{a,b}(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\mathbb{F}\{\psi^{a,b}(s)\}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}}$$

Мы смогли перейти от формулы для вейвлет-преобразования во временном представлении к формуле, когда все задано с помощью спектров. Для следующего шага подвергнем вейвлет-преобразованию две функции  $f, g$ , распишем в частотном виде, изменим порядок интегрирования.

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b) \overline{\mathbb{T}_{wl}\{g\}(a, b)} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \times \\ & \quad \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-i\xi' b) \overline{\widetilde{g(\xi')}} \overline{\widetilde{\psi(a\xi')}} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{|\widetilde{\psi(a\xi)}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \overline{\widetilde{g(\xi')}} \overline{\widetilde{\psi(a\xi')}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} db \exp(i(\xi - \xi')b)}_{2\pi\delta(\xi - \xi')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{g(\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da\xi}{|a\xi|} |\widetilde{\psi(a\xi)}|^2 = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{g(\xi)}}}_{\langle \tilde{f}; \tilde{g} \rangle = 2\pi \langle f; g \rangle} \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|\xi|} |\widetilde{\psi(a\xi)}|^2}_{C_\psi} \end{aligned}$$

Обратим внимание:  $\int_{-\infty}^{\infty} db \exp(i(\xi - \xi')b)$  - интегрирование в бесконечных пределах от экспоненты, то есть  $-2\pi\delta$ , поскольку Фурье-преобразование от функции = 1 (табличный интеграл для Фурье-преобразования, сводится к дельта-функции). Произведение спектров  $f, g$  по равенству Парсеваля можно преобразовать в скалярное произведение от самих функций  $f, g$ . Когда константа  $C_\psi < \infty$ , это некоторое число.

### Прямое и обратное преобразование

Пусть  $f, g \in \mathbb{L}^2$ , тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{wl}\{f\}(a, b) \overline{\mathbb{T}_{wl}\{g\}(a, b)} = C_\psi \langle f; g \rangle \\ & C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi(a\xi)}|^2}{|\xi|} < \infty \end{aligned}$$

Константа  $C_\psi$  не зависит от функций, а определяется видом материнского вейвлета. Когда функции  $f, g$  раскладываются в вейвлет-преобразование, каждое

можно записать как скалярное произведение функции с соответствующим вейвлетом. Разный порядок в скалярных произведениях обусловлен тем, что второе - комплексно-сопряженное.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi^{a,b} \rangle \langle \psi^{a,b}; g \rangle = C_{\psi} \langle f; g \rangle$$

Обратим внимание: функции  $f, g$  - произвольные, значит:

$$\begin{cases} f(s) = C_{\psi}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{wl} \{f\}(a, b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \\ \mathbb{T}_{wl} \{f\}(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \psi\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \end{cases}$$

формула для обратного представления функции  $f(s)$  через её вейвлет-преобразование

прямая формула для вейвлет-преобразования

Данные выкладки работают в том случае, когда прямое и обратное преобразование относятся к случаю непрерывных зависимостей: время и параметры  $a, b$  подразумеваются непрерывными.

Важно отметить кажущуюся логическую неувязку:

- Есть формулы для прямого и обратного вейвлет-преобразования; константа  $C_{\psi} < \infty$ . Для того, чтобы константа была меньше бесконечности, должно быть выполнено требование:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0$
- В формуле для обратного вейвлет-преобразования функция  $f(s)$  представляется в виде интеграла (в некотором смысле - аналог суммы), то есть суммы коэффициентов, каждый из которых умножается на сдвинутую и растянутую функцию  $\psi$ . Если она подвергается сдвигу, растяжению или сжатию по времени, то интеграл в бесконечных пределах по-прежнему = 0. Это означает, что интеграл в бесконечных пределах от любого интегрального выражения = 0. Логично предположить: когда мы восстановим интеграл функции  $f(s)$  в бесконечных пределах, результат процедуры будет = 0. Отметим, что не накладывали на функцию  $f(s)$  подобных требований, то есть:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \neq 0$

Когда интеграл берется в бесконечных пределах, он понимается в виде предела при стремлении конечных значений пределов интегрирования к бесконечным значениям. Поэтому равенство  $f(s)$  и интеграла в теории вейвлетов понимается следующим образом:

$$\lim_{A_1 \rightarrow 0, A_2, B \rightarrow \infty} \left\| f(s) - C_{\psi}^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{wl} \{f\}(a, b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \right\| = 0$$

Ключевым является, что к нулю стремится норма разности функций. Пример:

$$g_L(x) = \begin{cases} (2L)^{-1} & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} g_L(x) dx = 2L \cdot (2L)^{-1} = 1 \\ \|g_L\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_L^2(x) dx = 2L \cdot (2L)^{-2} = (2L)^{-1} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right.$$

Функция  $g_L$  в среднем равна единице; если  $L \rightarrow \infty$ , то квадрат нормы функции  $g_L \rightarrow 0$ , соответственно, норма  $\rightarrow 0$ .

### Разные вейвлеты для разложения и восстановления

Для разложения некоторой функции по вейвлетам и для обратного восстановления можно применять разные семейства вейвлетов. Введем константу  $C_{\psi_1 \psi_2}$ , предполагается, что результат вычисления интеграла - конечная величина.

$$C_{\psi_1 \psi_2} \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widehat{\psi}_1(\xi)| |\widehat{\psi}_2(\xi)|}{|\xi|} < \infty$$

Можно показать, что для произвольных функций  $f, g$  выполнено равенство

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi_1^{a,b} \rangle \langle \psi_2^{a,b}; g \rangle = C_{\psi_1 \psi_2} \langle f; g \rangle$$

Итог: исходная функция  $f(s)$ , которая выражается через вейвлет-разложение. Раскладываем функцию по вейвлетам  $\psi_1^{a,b}$ , получаем коэффициенты разложения, используем их для восстановления исходной функции  $f(s)$ , но используем другие вейвлеты, которые могут иметь самые разные свойства. Например, одно семейство будет непрерывным, второе - кусочно-непрерывным. Если выполнены рассмотренные требования, метод можно применять в анализе сигналов.

$$f(s) = C_{\psi_1 \psi_2}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b}(s)$$

### Оконное преобразование Фурье. Прямое и обратное преобразование

Можно ли с помощью оконного преобразования Фурье осуществить разложение и восстановление сигнала с использованием полученных коэффициентов? Функции  $f_1, f_2$  - произвольные.

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s-t) \exp(-i\omega s) ds = \langle f; g^{\omega t} \rangle$$

$$g^{\omega t} = g(s-t) e^{i\omega t}$$

$$C_{\text{win}} \equiv \|g\|^2$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \langle f_1; g \rangle \langle g; f_2 \rangle = C_{\text{win}} \langle f_1; f_2 \rangle$$

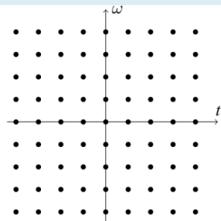
$$f(s) = C_{\text{win}}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \langle f; g^{\omega,t} \rangle g^{\omega,t}(s)$$

Ответ: если рассматривать непрерывные преобразования, то коэффициентов разложения по оконному преобразованию Фурье достаточно для восстановления исходной функции.

## Дискретные преобразования. Частотно-временная плотность

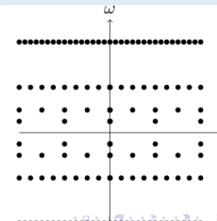
### Оконное преобразование Фурье

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\}(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s - nt_0)\exp(-im\omega_0 s)ds$$



### Вейвлет-преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\}(m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(a_0^{-m}t - nb_0)dt$$



**Оконное преобразование Фурье.** Окнаная функция  $g$  берется в разные моменты времени; преобразования дискретные, поэтому сдвиг принимает отдельные значения; несущая частота задается с помощью экспоненты. Окнаная функция одновременно представляет собой сущность, сдвинутую по времени в точку  $nt_0$ , по частоте - будет находиться вблизи  $it\omega_0$ . Изобразив точки на плоскости, получим сетку из узлов. Каждый узел соответствует той или иной функции, на которую скалярно умножается функция  $f(s)$ .

### Вейвлет-преобразование

- Параметр  $a_0$  отвечает за растяжение и сжатие функции;  $b_0$  - за сдвиг. Представляется, что результат будет сходным: у вейвлета есть центральная частота и центральная точка по времени; перебирая параметры, мы должны получить набор узлов, но за счет того, что значение параметра  $a$  оказывает влияние на параметр  $b$ , в итоге - набор точек на частотно-временной плоскости.
- Для высоких частот значения  $b_0$  малые, это означает, что узкий вейвлет описывает высокие частоты, смещение (увеличение или уменьшение на 1) приводит к сдвигу на незначительные интервалы. Если увеличить ширину вейвлета в два раза, в два раза уменьшится частота, но и расстояние, на которое сдвигается вейвлет, при изменении параметра  $n$  тоже увеличивается. Если увеличить вейвлет еще в два раза - у него падает частота, при этом расстояние между соседними сдвинутыми значениями еще больше увеличивается. Это имеет под собой физический смысл: есть сигнал, в котором присутствуют и высокие, и низкие частоты; значения амплитуд спектральных компонент для тех и других зависит от времени. Низкие частоты низкие сами по себе, поэтому

ожидать, что изменение амплитуды низкой частоты произойдет быстро, не приходится. Логично предположить: если частота является низкой, то амплитуда соответствующей спектральной компоненты будет изменяться медленней, чем частота. Это означает, что необходимо дискретизовать сигнал на низких частотах редкими точками. Если мы рассмотрим одновременно происходящий быстрый процесс, то для быстрых компонент с высокими частотами логично ожидать быстрое изменение амплитуды, тогда можно дискретизовать с большей плотностью.

С точки зрения оконного преобразования Фурье, не делаем различия - с одинаковой частотой дискретизуем и высокочастотные, и низкочастотные сигналы. Нулевая частота - константа, когда мы делаем оконное преобразование, несмотря на то, что её не нужно много раз передавать, мы это делаем, в случае вейвлет-преобразования - не делаем. В этом заключается различие.

## Базис Хаара

Вейвлет Хаара - характерный пример вейвлета. С его помощью удается построить базис в конечномерных пространствах. Процедура раскладывания и восстановления функции по вейвлетам может выполняться очень хорошо, если множество вейвлетов будет образовывать базис. Покажем, что вейвлет Хаара образует базис; что с его помощью можно представлять любую функцию в виде коэффициентов разложения.

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 1 & 0 \leq s < 0 \\ -1 & 0.5 \leq s < 1 \\ 0 & 1 \leq s \end{cases}$$

материнский вейвлет

$$\psi_{mn} = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

по данной формуле делаются обычные вейвлеты, задаются параметры сжатия, растяжения и сдвига

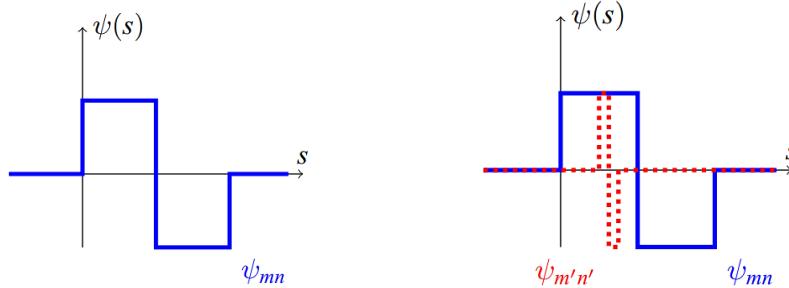


Рис. 6.9. Вейвлет Хаара образует базис

Проверим несколько утверждений, чтобы доказать, что данный набор вейвлетов действительно является ортогональным базисом:

1. Базисные векторы должны быть взаимно ортогональны. Рассмотрим два вейвлета (левый график на рис. 6.9.) с одинаковым  $t$  и разным  $n$ . Для вейвлета  $\psi_{mn}$  его носитель, множество значений  $s$ , для которых функция  $\psi(s)$  отлична от

нуля (отрезок):  $\text{supp } \psi_{mn} = [2^m n; 2^m(n+1)]$ . При равном  $m$  вейвлеты не перекрываются. Когда  $n$  равны, интеграл = 1, тем самым вейвлеты будут нормированными.

2. Параметры вейвлетов  $\psi_{mn}$  и  $\psi_{m'n'}$  - разные (правый график). Тогда носители либо не перекрываются, либо перекрываются. Во втором случае один из вейвлетов более широкий; менее широкий полностью лежит внутри широкого. Интеграл от произведения равен нулю в силу того, что функция меняет знак (красный пунктир на рис. 6.9.), отсюда следует, что произведение вейвлетов = 0, то есть они являются взаимно ортогональными:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(s) \psi_{m'n'}(s) ds = 0$

Докажем, что любую функцию можно разложить по набору вейвлетов

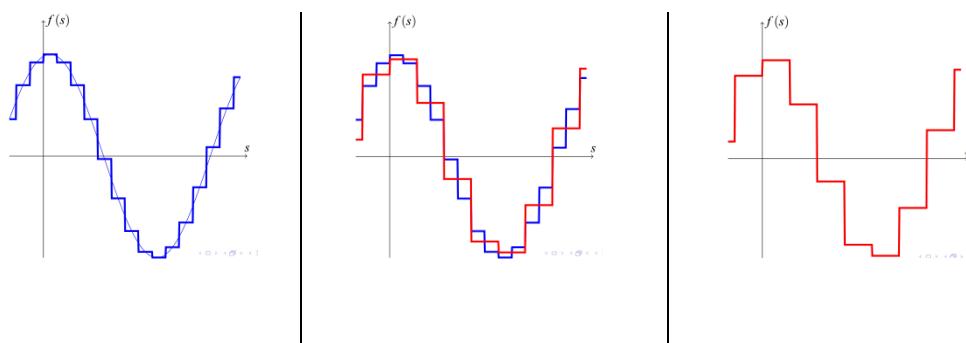


Рис. 6.10. Приближение кусочно-постоянной функции с помощью базиса Хаара

- **левый график** на рис. 6.10.: зададим  $\varepsilon$  - максимальное отклонение функции  $f(s)$  и равномерную сетку точек по оси  $s$ . Если функция  $f(s)$  непрерывная, её отклонение от кусочно-постоянной функции всегда можно будет сделать сколь угодно малым, если выбрать малые ступеньки.
- **средний график:** с помощью базиса Хаара приблизим кусочно-постоянную функцию (синяя линия), то есть создадим набор вейвлетов, которые в сумме дадут именно её; выделяем ступеньку, состоящую из двух последовательно идущих значений функции. Проведем новую кусочно-постоянную функцию (красная линия) таким образом, что её значение равно среднему значению пары. Разность функций для каждой из пар является вейвлетом Хаара, умноженным на амплитудное значение. Соответственно, разницу между красной и синей кривой можно записать в виде суммы вейвлетов Хаара.
- **правый график:** повторяем процедуру с красной кривой; новая кривая – приближаемая; длина ступеньки увеличивается в 2 раза на каждом шаге. Постепенно берем все более широкие вельветы, в итоге приближаем кусочно-постоянную функцию с помощью базиса Хаара. Поскольку исходная кусочно-постоянная функция не отличалась от функции  $f(s)$  больше, чем на  $\varepsilon$ , сумма также не будет отличаться. Соответственно, для любого  $\varepsilon$  можно подобрать такой набор вейвлетов Хаара, что данное разложение будет справедливо. Таким образом, базис Хаара правомерно называть базисом.

## Преобразование Вигнера-Вилля

Преобразование Вигнера-Вилля позволяет получить для анализа сигналов более хорошее разрешение по времени и частоте. Данное преобразование не является линейным, поэтому при вычислении спектров будут происходить различные взаимодействия между спектральными компонентами. Это приводит к возникновению значительного количества артефактов, поэтому данный тип преобразований необходимо применять с осторожностью.

$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + t/2)\overline{s(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$

- **эксперимент 1:** левый график показывает линейный частотно-модулированный сигнал (от 0 до 100 Гц за 2 сек) в результате преобразования Вигнера-Вилля; для сравнения рассматриваются только положительные частоты. Верхняя линия хорошо передает зависимость частоты от времени, её толщина существенно меньше линий, которые были рассмотрены ранее. Оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование не дают такого качества разрешения. Ромб - артефакт, таких спектральных компонент в исходном сигнале не было. В целом компоненты имеют меньшую амплитуду, чем основная зависимость, поэтому её можно прописать достаточно точно.
- **эксперимент 2:** правый график (рис. 6.11.) показывает квадратичный частотно-модулированный сигнал. Отметим, что артефактов стало больше. Таким образом, вид модуляции влияет на изображение.

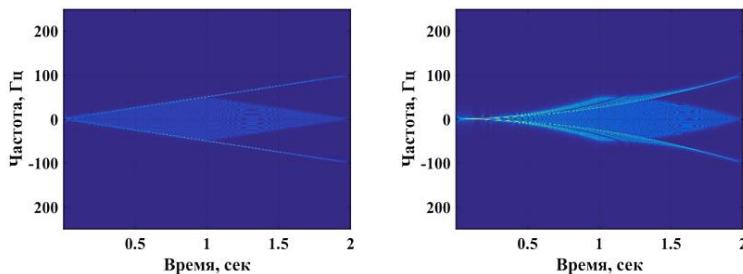


Рис. 6.11. Частотно-модулированный сигнал: слева - линейный, справа - квадратичный  
**Интерференция частотных компонент**

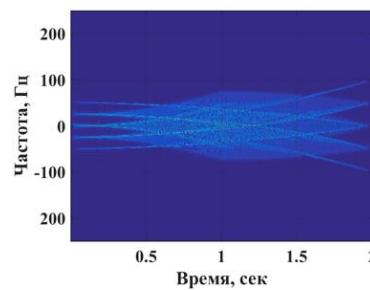


Рис. 6.12. Квадратичные частотно-модулированные сигналы

Анализируя сигнал, мы не знаем, что в нем изначально присутствует.

Рассмотрим сумму двух сигналов: частота первого меняется от 0 до 100 Гц, второго - от 50 до 0. В результате преобразования Вигнера-Вилля даже в положительной области частот получается не два сигнала, а три - возник артефакт - линия, которая по своим свойствам близка к наблюдаемым в действительности. Сказать, что из этого реально, а что получилось в результате нелинейного взаимодействия гармоник, невозможно. Поэтому для такого рода сигнала преобразование Вигнера-Вилля в данном виде представляется неудачным.

### Дополнение до аналитического сигнала

Уменьшим количество частотных компонент, чтобы побороть неудачные проявления. У действительного сигнала есть отрицательные и положительные частоты, сделав дополнение сигнала до аналитического, уберем из него отрицательные. От аналитического сигнала выполним преобразование Вигнера-Вилля.

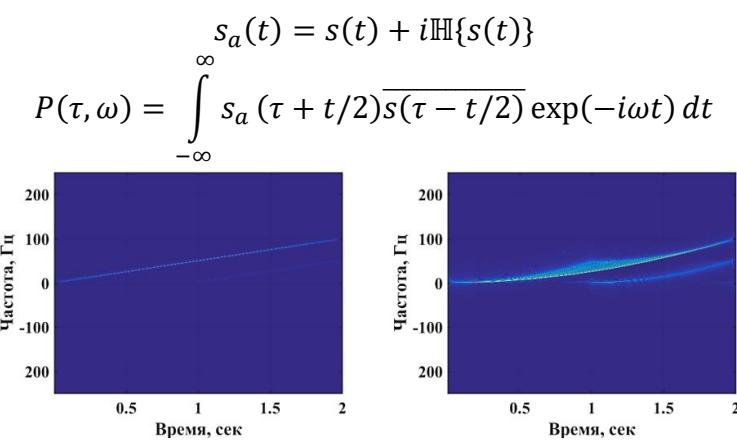


Рис. 6.13. Частотно-модулированный сигнал: слева - линейный, справа - квадратичный

Качество восстановления существенно улучшилось и для линейного частотно-модулированного сигнала, который теперь четко виден, и для квадратичного, хотя хорошо виден артефакт. Отметим, что метод не работает для случая, когда есть несколько типов модуляции, поскольку они начинают нелинейно взаимодействовать.

### Использование окна во временной области

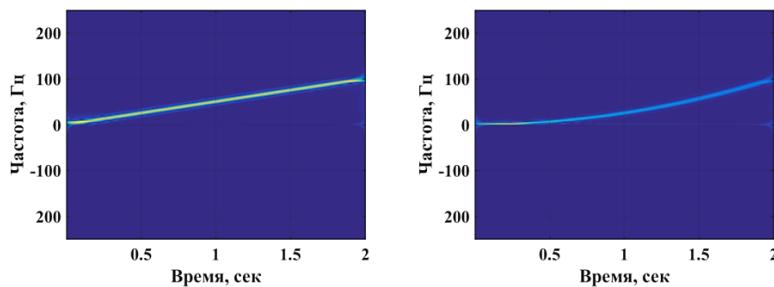


Рис. 6.14. Частотно-модулированный сигнал: слева - линейный, справа - квадратичный

Для получения более качественного представления вводится дополнительное использование окна во временной области. К полученному преобразованию Вигнера-

Вилля добавляем окно  $h(t)$ . Его использование ограничивает для каждого момента  $t$  область, где множители взаимодействуют нелинейным образом, что уменьшает артефакты и способствует лучшему воспроизведению сигнала.

Результаты моделирования показывают: артефакты отсутствуют в обоих случаях, толщина линии существенно увеличилась, при этом она уже, чем линии, которые дают представления в виде вейвлет-преобразования и оконного преобразования Фурье.

### Разные размеры окна

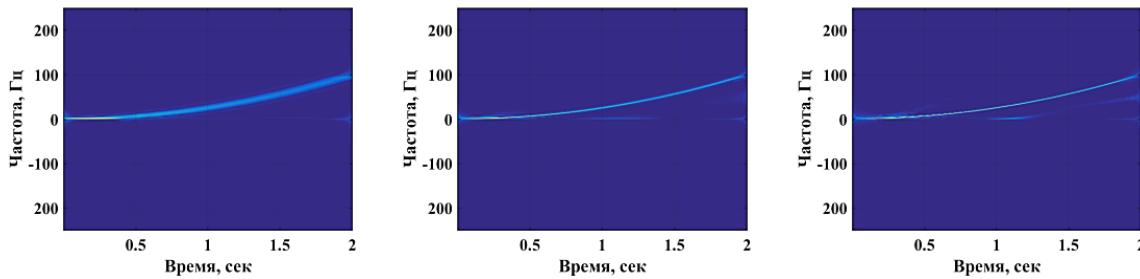


Рис. 6.15. Слева направо: узкое окно, среднее окно, широкое окно

Результаты моделирования показывают:

- чем более узкое окно, тем лучше подавляется паразитное влияние различных компонент (двух множителей), соответственно, подавляются артефакты. При этом узкое окно способствует тому, что частотное разрешение падает - получается довольно широкая линия;
- широкое окно - наличие артефактов, поскольку мы не полностью избавляемся от взаимодействия между гармониками; хорошее разрешение по частоте и времени.

### Взаимодействие спектральных компонент

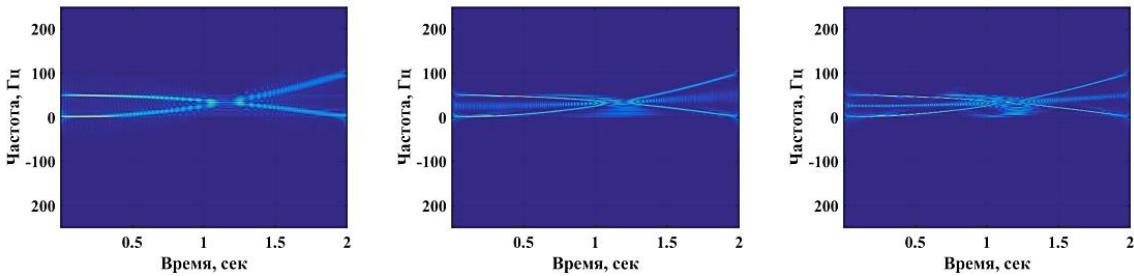


Рис. 6.16. Слева направо: узкое окно, среднее окно, широкое окно

Зададим несколько отдельных компонент, по-разному зависящих от времени: узкое окно - артефакты практически отсутствуют; хорошо видно, как частота каждой компоненты зависит от времени; среднее окно - появляются артефакты; широкое окно - картина получается испорченной.

### Сравнение с оконным преобразование Фурье

Объединим преобразование Вигнера-Вилля с оконным преобразованием Фурье.

- оконное Фурье-преобразование (правый график): артефакты отсутствуют; линии четко видны, при этом значительной толщины. Вывод: преобразование дает плохое разрешение по частоте и по времени;
- два квадратично-модулированных сигнала, преобразование Вигнера-Вилля: широкое окно (левый график) - наличие серьезного артефакта; узкое окно (средний график) - артефакт ослабляется, но теряется качество - плохое разрешение.

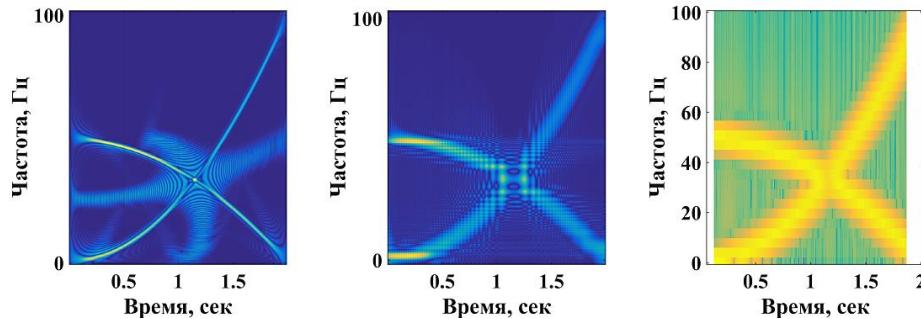


Рис. 6.17. Слева направо: широкое окно, ППВ; узкое окно, ППВ; окно 256, ОПФ

Суть объединения методов состоит в следующем: правый график позволяет сказать, какие из компонент левого графика действительно имеют отношение к сигналу; левый график позволяет достаточно точно восстановить значение частоты в каждый момент времени для каждой из спектральных компонент.

## Лекция 7. Фреймы

### Фреймы. Определение

В ходе предыдущей лекции курса были рассмотрены время-частотные преобразования: оконное преобразование Фурье и Вейвлет-преобразование. С их помощью исходный сигнал можно представить в виде двумерной функции, зависящей от времени и частоты. С одной стороны, можно выполнить прямое преобразование - представить сигнал во время-частотном виде, с другой - поставить вопрос об обратном преобразовании: можно ли восстановить исходный сигнал, имея перед собой двумерное изображение, на котором по осям отложены время и частота? В некоторых случаях мы положительно ответили на данный вопрос и рассмотрели формулы, позволяющие это осуществить, однако они оказались необычными. Например, в ходе рассмотрения Вейвлет-преобразования было определено: преобразование возможно делать с одним набором вейвлетов, обратное преобразование - с другим набором. Это не очень согласуется с понятиями курса линейной алгебры, где есть понятие базиса: процедура получения коэффициентов разложения выполняется по векторам, по ним же выполняется обратное восстановление. Рассмотрим фреймы - обобщение понятия "базис".

**Определение 7.1:** **Фрейм** - множество векторов  $\vec{\phi}_j$ , константы  $A > 0; B < \infty$  такие, что для любого вектора  $\vec{f}$  из пространства выполнено двойное неравенство

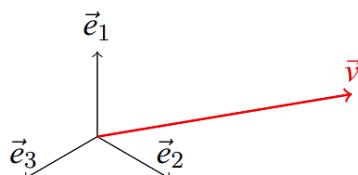
$$\forall \vec{f} A \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$$

$A$  и  $B$  – границы фрейма

**Определение 7.2:** **Жесткий фрейм** - фрейм, у которого границы совпадают;  $\exists A > 0$

$$\forall \vec{f} A \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

Если  $A = B = 1$  и  $\|\vec{\phi}_j\| = 1$ , будет выполнено равенство - квадрат нормы любого вектора равен сумме квадратов модулей скалярных произведений, что по теореме функционального анализа эквивалентно тому, что фрейм является ортонормированным базисом. Таким образом, есть понятие "фрейм", более узкое понятие "жесткий фрейм" и ещё более узкое понятие - "**ортонормированный базис**".



Rис. 7.1. Пример фрейма

Векторы на плоскости:  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  по норме = 1, углы -  $120^\circ$ . Запишем координаты векторов в декартовой системе координат:  $\forall \vec{v} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2)$ . Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  образуют

жесткий фрейм, при этом не образуют базис, потому что любой из них может быть выражен через два других, то есть векторы не являются линейно независимыми. Количество векторов является избыточным для двумерной плоскости, коэффициент  $3/2$  называется **отношением избыточности**. Это же число для рассматриваемой ситуации будет левой и правой границами фрейма.

$$\sum_j |\langle \vec{v}_j; \vec{e}_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2$$

## Разложение по жесткому фрейму

**Тождество поляризации:**

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left( \|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i\|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i\|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм:  $A\|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$  выполнено для любого вектора  $\vec{f}$ ; используя равенство для всех векторов, сделаем подстановку; умножим обе части на константу  $A$

$$\begin{aligned} A\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle &= \frac{1}{4} \left( A\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - A\|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + iA\|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - iA\|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left( \underbrace{|\langle \vec{f} + \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2}_{\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{\phi}_j \rangle} - |\langle \vec{f} - \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 + i|\langle \vec{f} + i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 - i|\langle \vec{f} - i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left( |f_j + g_j|^2 - |f_j - g_j|^2 + i|f_j + ig_j|^2 - i|f_j - ig_j|^2 \right) = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle \end{aligned}$$

Для каждого скалярного произведения можно воспользоваться свойством линейности по первому аргументу и представить их в виде суммы. Комплексные числа берутся по модулю в квадрате, что проще делать умножением суммы  $\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle + \langle \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle$  на неё же, но комплексно-сопряженную. Жесткий фрейм задается равенством

$$A\|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$A\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Докажем утверждение: когда есть произвольный вектор  $\vec{g}$  и скалярные произведения, то на вектор можно сократить. Пусть  $\vec{e}_k$  - базис в пространстве, тогда для любого вектора можем записать коэффициент разложения  $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$  и восстановить исходный вектор  $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$ . Воспользуемся процедурами разложения и восстановления по базису:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle = \frac{1}{A} \sum_k \vec{e}_k \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle = \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j \end{aligned}$$

В выражении  $A\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$  происходит виртуальное сокращение на вектор  $\vec{g}$ . Обратим внимание: неформальное сокращение можно выполнять только в случае, когда вектор  $\vec{g}$  является произвольным. Это использовано при подстановке: в качестве  $\vec{g}$  использовались различные базисные векторы  $\vec{e}_k$ . С другой стороны, результат - восстановление вектора  $\vec{f}$  по коэффициентам его разложения по фреймовым векторам  $\vec{\phi}_j$ . Таким образом, с точки зрения восстановления исходного вектора, базис от жесткого фрейма отличается множителем  $1/A$ .

### Механизм разложения по жесткому фрейму

$$A\|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

### Механизм восстановления исходного вектора по жесткому фрейму

$$\vec{f} = \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j$$

Как действовать, если фрейм не является жестким? В данном случае мы не сможем воспользоваться подходом, основанным на применении тождества поляризации.

### Фреймовый оператор

**Определение 7.3: Фреймовый оператор** - оператор  $F$ , заданный как  $(F\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$

Вектор  $\vec{f}$  скалярно умножаем на набор фреймовых векторов  $\vec{\phi}_j$ , получаем набор коэффициентов. Он представляет собой вектор, находящийся в другом пространстве (в общем случае - другой размерности), - результат работы фреймового оператора  $F$ .

Фреймовый оператор ограничен:  $\|F\vec{f}\|^2 \leq B\|\vec{f}\|^2$

**Определение 7.4: Сопряженный оператор** - оператор  $F^*$ , заданный как

$$(F^*\vec{c}; \vec{f}) = \langle \vec{c}; F\vec{f} \rangle$$

Обратим внимание: оператор, сопряженный не в смысле комплексного сопряжения, а в смысле выполнения равенства.

$$(F^*\vec{c}; \vec{f}) = \langle \vec{c}; F\vec{f} \rangle = \sum_j c_j \overline{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle} = \sum_j c_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \Rightarrow F^*\vec{c} = \sum_j c_j \vec{\phi}_j$$

Для вычисления скалярного произведения коэффициенты  $c_j$  вектора  $\vec{c}$  последовательно умножаем на комплексно-сопряженное скалярное число  $F\vec{f}$ , что по определению -  $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$ . По свойству скалярного произведения меняем порядок аргументов  $\vec{f}; \vec{\phi}_j$ , при этом скалярные произведения становятся комплексно-сопряженными. Равенство выполнено для любого вектора  $\vec{f}$ , тогда на него можно виртуально сократить. Для любого вектора  $\vec{c}$  результат действия на него сопряженного оператора  $F^* = \sum_j c_j \vec{\phi}_j$

## Двойственный фрейм. Свойства фреймовых операторов

$$\sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 = \|F\vec{f}\|^2 = \langle F\vec{f}; F\vec{f} \rangle = \langle F^*F\vec{f}; \vec{f} \rangle$$

Средняя часть определения фрейма: квадрат нормы фреймового оператора можно записать как скалярное произведение одинаковых векторов; по определению сопряженного оператора возможен перенос оператора  $F$  из правого в левый аргумент, при этом он становится сопряженным.

$$A\|\vec{f}\|^2 \leq (F^*F\vec{f}; \vec{f}) \leq B\|\vec{f}\|^2$$

Оператор, где одновременно участвуют фреймовый и сопряженный фреймовый оператор, ограничен величиной  $A\mathcal{E}$  и  $B\mathcal{E}$  где  $\mathcal{E}$  - единичный оператор.

$$A\mathcal{E} \leq F^*F \leq B\mathcal{E}$$

На данном этапе основную роль играет ограниченность снизу величиной  $A\mathcal{E}$ , что означает: раз величина  $A\mathcal{E}$  не обращается в ноль, ведь  $A$  положительна, оператор  $F^*F$  обратим; для обратного оператора выполнено:

$$B^{-1}\mathcal{E} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathcal{E}$$

Отсюда следует, что обратный оператор позволит создать новый фрейм.

**Определение 7.5: Двойственный фрейм** - фрейм, образованный векторами

$$\vec{\phi}'_j = (F^*F)^{-1} \vec{\phi}_j$$

### Свойства фреймовых операторов

$$B^{-1}\|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|\vec{f}\|^2$$

Для двойственного фрейма запишем новый фреймовый оператор  $F'$ , для которого по определению выполнено равенство:

$$(F'\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (F^*F)^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$$

В силу того, что вектор  $\vec{f}$  является произвольным, можем заключить операторное равенство  $F' = F(F^*F)^{-1}$

Если по определению фреймовых операторов расписать различные выражения, то аналогичным образом можно получить выражения:

$$F'^*F' = (F^*F)^{-1}$$

$$F'F'^* = FF'^*$$

$F'^*F = F^*F' = \mathcal{E}$  - дает возможность проводить процедуры восстановления и разложение по фреймам. Умножим его на произвольный вектор  $\vec{f}$ , распишем по координатам и получим условие

## Разложение по фрейму и восстановление

$$F'^*F = F^*F' = \mathcal{E}$$

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}'_j = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle \vec{\phi}_j$$

Есть исходный и двойственный фрейм: если разложение идет по исходному, вектор восстанавливается по двойственному; если разложение идет по двойственному, то восстанавливается по исходному. Соответственно, разложение и восстановление идут по двойственным друг другу векторам. Осталось найти алгоритм, позволяющий определять двойственные фреймовые векторы  $\vec{\phi}'$  по исходным фреймовым векторам  $\vec{\phi}'_j$ . Именно на этом этапе возникают сложности. Рассмотрим, как их преодолеть.

### Пример фрейма

Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  образуют фрейм, тогда для любого  $\vec{v}$  можно выполнить разложение и восстановление:

$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j \quad \vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha) \vec{e}_j$$

Исходный фрейм -  $\vec{e}_j$ ; двойственный фрейм представляется векторами  $\vec{e}_j$ , умноженными на 2/3. Если мы раскладываем вектор  $\vec{v}$  по фреймовым векторам, то получаем единственное разложение - набор коэффициентов  $\vec{v}; \vec{e}_j$  строго определен.

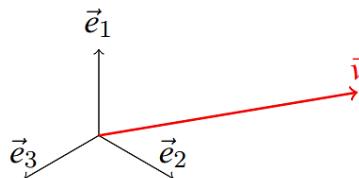


Рис. 7.2. Пример фрейма

При восстановлении вектора  $\vec{v}$  по коэффициентам (обратная процедура) есть определенный волюнтаризм, который проявляется следующим образом: добавим произвольное число  $\alpha$ . Если просуммировать векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , получим ноль. Если вынести  $\alpha$  за знак суммы, получим сумму  $\vec{e}_j = 0$ , тем самым добавка числа  $\alpha$  к каждому из коэффициентов не меняет сумму. Соответственно, можно получить один и тот же вектор  $\vec{v}$ , если использовать совершенно разные коэффициенты разложения по фрейму.

$$\sum_j |\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2 \quad \sum_j |\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha|^2 = \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2 + 3\alpha^2 > \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2$$

Если число  $\alpha$  отлично от нуля, коэффициенты дают больший результат, следовательно, можно дополнительно накладывать ограничение: сумма квадратов модулей коэффициентов должна быть минимальна, то есть из всех коэффициентов выбираем минимальное. Правило выбора минимальности суммы позволяет установить

единственность разложения вектора  $\vec{v}$  по фреймовым векторам, соответственно, из всех  $\alpha$  выбираем  $\alpha = 0$ .

## Определение векторов двойственного фрейма по векторам исходного

"Почти жесткий" фрейм: Пусть фрейм, который мы рассматриваем, не является жестким, при этом является почти жестким:

$$\begin{aligned} A\mathcal{E} &\leq F^*F \leq B\mathcal{E} \\ \vec{\phi}'_j &= (F^*F)^{-1}\vec{\phi}_j \end{aligned}$$

Введем коэффициент  $r = B/A - 1 \ll 1$ , данное условие будет определением почти жесткого фрейма. Если  $r = 0$ , то  $B/A = 1$ , то есть  $A = B$  - жесткий фрейм. Если величина  $r$  близка к нулю, отсюда следует, что величина  $B$  почти равна  $A$ , тогда

$$F^*F \approx \frac{A+B}{2}\mathcal{E}$$

Обратный оператор:

$$(F^*F)^{-1} \approx \frac{2}{A+B}\mathcal{E}$$

Тогда вектор легко рассчитывается через исходные векторы:

$$\vec{\phi}'_j \approx \frac{2}{A+B}\vec{\phi}_j$$

Введем оператор  $R = \mathcal{E} - \frac{2}{A+B}F^*F$  и воспользуемся неравенством  $A\mathcal{E} \leq F^*F \leq B\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} -\frac{B-A}{B+A}\mathcal{E} &\leq R \leq \frac{B-A}{B+A}\mathcal{E} \\ \|R\| &\leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Не жесткий фрейм:** Что делать, если  $r$  не мало? Воспользуемся оператором  $R$

$$F^*F = \frac{A+B}{2}(\mathcal{E} - R) \Rightarrow (F^*F)^{-1} = \frac{2}{A+B}(\mathcal{E} - R)^{-1}$$

Введя оператор  $R$ , о полученном равенстве можно говорить, как о точном. Есть ограничение, работающее для любых величин  $B > A$ , в том числе для фреймов любой жесткости. Числитель дроби всегда будет меньше, чем знаменатель:  $A > 0; B > A$

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \frac{B-A}{B+A} < 1 \Rightarrow \text{ряд } (\mathcal{E} - R)^{-1} = \sum_0^\infty R^k - \text{сходится} \\ \vec{\phi}'_j &= (F^*F)^{-1}\vec{\phi}_j = \frac{2}{A+B} \sum_0^\infty R^k \vec{\phi}'_j \end{aligned}$$

## Итерационное определение

Задача определения векторов двойственного фрейма по векторам исходного фрейма фактически решена. При этом целесообразно сократить количество операций.

$$\vec{\phi}'_j = \frac{2}{A+B} \sum_0^{\infty} R^k \vec{\phi}'_j$$

Используем рекуррентные соотношения. Предположим, что на  $N$ -ом шаге были посчитаны все слагаемые, включительно до  $N$ -го (частичная сумма ряда). С другой стороны, сумму можно представить как искомый вектор  $\vec{\phi}'_j$  - часть суммы, которая берется от  $N + 1$  элемента до  $\infty$

$$\begin{aligned}\vec{\phi}'_j^N &= \frac{2}{A+B} \sum_0^N R^k \vec{\phi}_j = \vec{\phi}'_j - \frac{2}{A+B} \sum_{N+1}^{\infty} R^k \vec{\phi}_j \\ \vec{\phi}'_j^N &= \frac{2}{A+B} \vec{\phi}_j + R \vec{\phi}'_j^{N-1}\end{aligned}$$

Вектор  $\vec{\phi}'_j^N$  можно выразить через предыдущую оценку: используя левую часть формулы; предположим, что есть значение суммы на  $N - 1$  шаге, умножим вектор  $R \vec{\phi}'_j^{N-1}$  на оператор  $R$ , тогда сумма в пределах от 1 до  $N + 1$  - происходит сдвиг. Рекуррентная формула позволяет итерационно определить все значения  $\vec{\phi}'_j^N$ . Поскольку норма оператора  $R < 1$ , ряды будут сходиться. Ряд будет сходиться тем быстрее, чем меньше норма оператора  $R$ . Если она стремится к нулю, мы переходим к случаю почти жесткого фрейма, либо жесткого фрейма. Тогда ряды считать гораздо проще, и это то, к чему мы стремимся.

## Фреймы и вейвлеты

- Векторами  $\vec{\phi}_j$  являются вейвлеты  $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$   
Данные функции будем считать векторами; они претендуют на то, чтобы в своей совокупности называться фреймом.
- Если есть образованные вейвлетами фреймы, за счет рассмотренного аппарата есть алгоритм восстановления  $\vec{f}$  по разложению  $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если множество функций  $\psi_{mn}$  образуют фрейм,  $\psi$  - допустимая функция - можно раскладывать и обратно восстанавливать функцию.
- Желательно, чтобы фрейм был близок к жесткому, в идеале - жесткий. Важно отношение границ фрейма. Чем меньше величина  $B/A - 1$  (параметр  $r$ ), тем лучше, потому что для вычисления двойственного фрейма будет достаточно посчитать меньшее количество членов ряда.
- Функция  $\psi_{mn}$  задается тройкой: самой функцией  $\psi$  - материнским вейвлетом; параметрами  $a_0, b_0$ . Итоговые функции  $\psi_{mn}$  не обязательно образуют фрейм. Для этого необходимо выполнить условие на убывание функции  $\psi$  по частоте и времени.
- Можно выбрать некоторые функции  $\psi$ , при  $a \neq 1$  и  $b \neq 0$ . Тройка дает набор векторов  $\psi_{mn}$ , которые образуют фрейм. Тройка не дает фрейм в случае, когда  $a_0$  довольно большая величина. Когда  $t$  изменяется на 1, функция меняется существенно. Если функция  $f$  является средним между функцией, полученной

при  $m$ , и функцией, полученной при  $m + 1$ , переключение масштабов на 1 пропускает форму функции. В итоге она будет плохо описываться и вейвлетом с параметрами  $m$  и  $m + 1$ . Это относится и к параметру  $b$ : если двигаться с довольно крупным шагом по времени, значительно перемещать окно - можно пропустить область, где функция  $f$  существенно отлична от нуля. Тогда может оказаться, что все коэффициенты разложения  $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$  близки к нулю. В этом случае при обратном восстановлении получим что-то близкое к нулю, вместо той функции, которую хотели получить. Если  $a$  вблизи единицы, функции медленно меняют свою форму при изменении  $m$ , тем самым мы покрываем любые возможные функции  $f$ . Если  $b$  близко к нулю, мыдвигаем окно с густым шагом, точно попадаем на функцию  $f$ . Удивительно, что некоторые функции образуют фрейм, когда  $a \neq 1$  и  $b \neq 0$ . Это заслуживает серьезного внимания, поскольку означает, что мы можем любой сигнал  $f$  описывать относительно малым количеством функций. Работать с такими разложениями - просто и эффективно, в том числе обрабатывать на компьютере, не испытывая проблем с оперативной памятью.

## Двойственные фреймы для вейвлетов

Зная общий алгоритм определения  $\psi'_{mn}$ , применим технику к вейвлетам:

$$\psi'_{mn} = (F^* F)^{-1} \psi_{mn}, \text{ где } F^* F \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}$$

Обратное восстановление:

$$f = \sum_j \langle f; \psi_{mn} \rangle \psi'_{mn} = \sum_j \langle f; \psi'_{mn} \rangle \psi_{mn}$$

Параметры  $m, n$  пробегают целочисленные значения, функций  $\psi'_{mn}$  - бесконечное количество. Проблема: необходимо знать бесконечное число  $\psi'_{mn}$ ; для вычисления даже одного вейвлета  $\psi'_{mn}$  необходимо просуммировать бесконечное количество членов ряда. Можно прервать ряд и сказать, что есть ограничение по точности и мы её достигли, но не очень ясно, что делать с коэффициентами. В данном случае поможет то, что мы рассматриваем именно вейвлеты, а не любые произвольные функции.

## Операторы $D$ и $T$

Представим вейвлет в ином виде, для чего введем два оператора:

- $(D^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m} x)$  - оператор растяжения, сжатия
- $(T^n f)(x) = f(x - nb_0)$

Совокупность операторов  $D^m$ ,  $T^n$ , действующих на функцию  $\psi$ , дают весь набор вейвлетов.

- Операторы  $(F^* F)^{-1}$  и  $D^m$  перестановочны:  $F^* F D^m f = D^m F^* F f$
- Операторы  $(F^* F)^{-1}$  и  $T^n$  не перестановочны

$$\psi'_{mn} = (F^*F)^{-1} \psi_{mn} = (F^*F)^{-1} \mathcal{D}^m \mathcal{T}^n \psi = \mathcal{D}^m (F^*F)^{-1} \mathcal{T}^n \psi = a_0^{-m/2} \psi'_{0n} (a_0^{-m} x)$$

$a_0$  возникает, поскольку мы применяем оператор  $\mathcal{D}^m$ ;  $\psi_{0n}$  получаем из материнского вейвлета  $\psi$  путем применения оператора  $\mathcal{T}^n$ ; штрих возникает из-за оператора  $(F^*F)^{-1}$ . Вывод: за счет вейвлетов задача двумерного вычисления векторов  $\psi'_{mn}$  сведена к одномерному вычислению - необходимо рассчитывать только векторы  $\psi'_{0n}$ . Это упрощает задачу, поскольку векторов меньше. Несмотря на это, необходимо знать бесконечное число  $\psi'_{0n}$ . Для каждого  $n$  придется рассчитать ряд, поэтому необходимо стремится к тому, чтобы фрейм был максимально жестким.

### "Многоголосые" вейвлеты

Если параметр  $a_0$  достаточно близок к единице, то совокупность векторов будет образовывать фрейм. Удобно, когда параметр отличен от 1, в частности, на практике удобно положить  $a_0 = 2$ , тогда при увеличении  $m$  на 1, будет происходить растяжение-сжатие вейвлета в два раза. Соображение удобства может противоречить условию жесткости  $B/A - 1 \ll 1$ . Если оно выполнено, фрейм - жесткий, легко рассчитать все вейвлеты двойственного фрейма. В противном случае - придется считать длинный ряд.

$$\psi^v(x) = 2^{-(v-1)/N} \psi(2^{-(v-1)/N} x)$$

Решение - использовать вейвлеты, которые представляют исходные растянутые вейвлеты  $\psi$  и сжатые в  $2^{-v(1)/N}$  раз. Параметр  $v$  пробегает значение от единицы, включительно, до  $N$  (число голосов). Положим  $N = 4$ , тогда из одного получим четыре вейвлета, идущих с логарифмическим шагом. Теперь вельветы  $\psi^v$  используются как материнские, в совокупности -  $\psi_{mn}^v$ . Когда мы подвергаем материнский вейвлет видоизменениям - применяем операторы  $\mathcal{D}^m \mathcal{T}^n$ , то сдвигаем вейвлет ( $\mathcal{T}^n$ ) либо делаем растяжение сжатие ( $\mathcal{D}^m$ ). Сдвиг по времени и растяжение-сжатие - связаны. Получается диаграмма, отмеченная на рис. 7.3. черными точками.

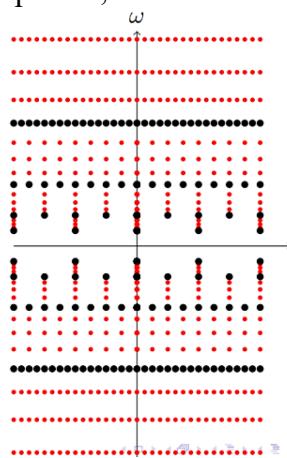


Рис. 7.3. Диаграмма частотно-временной плотности вейвлетов

При растяжении вейвлета точки идут редко на меньшей частоте, при сжатии - частота увеличивается, точки идут часто. При добавлении голосов - использовании вместо одного вейвлета четырех - к каждой черной точке добавляется три красные.

Если между черными точками отношение частот отличается в 2 раза, красные отличаются  $\sqrt[4]{2}$  раз. Диаграмма показывает, что добавление голосов фактически уменьшило параметр  $a_0 = \sqrt[4]{2}$ , тогда параметр  $B/A - 1$  становится ближе к нулю. Соответственно, образованный совокупностью красных и черных точек фрейм ближе к жесткому, то есть его будет проще считать, при этом в некоторой степени сохранено удобное положение  $a_0 = 2$

$N = 1$				$N = 2$			
$b_0$	$A$	$B$	$B/A$	$b_0$	$A$	$B$	$B/A$
0.25	13.091	14.183	1.083	0.25	27.273	27.278	1.0002
0.50	6.546	7.092	1.083	0.50	13.673	13.676	1.0002
0.75	4.364	4.728	1.083	0.75	9.091	9.093	1.0002
1.00	3.223	3.596	1.116	1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	2.001	3.454	1.726	1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	0.325	4.221	12.986	1.50	2.609	6.483	2.485
				1.75	0.517	7.276	14.061

$N = 3$				$N = 4$			
$b_0$	$A$	$B$	$B/A$	$b_0$	$A$	$B$	$B/A$
0.25	40.914	40.914	1.0000	0.25	54.552	54.552	1.0000
0.50	20.457	20.457	1.0000	0.50	27.276	27.276	1.0000
0.75	13.638	13.638	1.0000	0.75	18.184	18.184	1.0000
1.00	10.178	10.279	1.010	1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	7.530	8.835	1.173	1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	4.629	9.009	1.947	1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	1.747	9.942	5.691	1.75	2.928	12.659	4.324

Рис. 7.4. Добеши И., Десять лекций по вейвлетам, 464 с.

Рассмотрим, чему равны численные значения параметров для конкретного вейвлета. Границы фреймов вейвлетов, полученных из функции:

$$\psi(x) = 2/\sqrt{3}\pi^{-1/4}(1 - x^2/2)\exp(-x^2/2) \text{ при } a_0 = 2$$

Вейвлеты такого плана называются "мексиканская шляпа" - вторая производная Гаусса. Выбираем различное количество голосов:  $N = 1$  - один голос,  $N = 2$  - два голоса, и т.д. Параметр  $b_0$  связан со сдвигом по времени. Зафиксируем, чему равны константы  $A, B, B/A$ :

- $N = 1$ : ■  $b_0 = 0.25; B/A = 1.083$  - ряд будет хорошо сходиться;  
■ начиная с  $b_0 = 1.00$  и выше,  $B/A$  быстро растет, при значении  $B/A = 12.986$  ряд будет сходиться очень долго.

Соответственно, необходимо ограничиваться малыми значениями  $b_0$

- $N = 2$ : ■ при малых значениях  $b_0$  ( $0.25 - 0.75$ ) отношение  $B/A$  падает существенно 1.0002  
■  $b_0 = 1.25; B/A = 1.257$  - значение  $b_0$  увеличено в 4 раза, шаг по времени в 4 раза более редкий, при этом вейвлеты образуют более жесткий фрейм, чем при  $N = 1$ :  $b_0 = 0.25; B/A = 1.083$

Соответственно, можно ограничиваться предположением, что фрейм является жестким, процедура расчета двойственных вейвлетов не будет оказывать сопротивления.

- $N = 4$ : можно использовать больший сдвиг по времени  $b_0$ , даже при  $b_0 = 1.50$   $B/A = 1.758$

Применение голосов - полезный метод, активно используемый в практике. Данная функция есть во всех пакетах прикладных программ, включая MatLab.

### Фреймы и оконное преобразование Фурье. Достаточное условие существования фрейма

- $\vec{\phi}_j$  - функция  $g_{mn} = \exp(im\omega_0 x)g(x - nt_0)$
- Есть алгоритм восстановления  $\vec{f}$  по разложению  $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$  - фреймовый математический аппарат.
- Если функция  $g_{mn}$  образуют фрейм, то  $g$  - допустимая функция (то, к чему мы стремимся).
- Важно отношение границ фрейма. Желательно, чтобы фрейм был жестким, в этом случае ряды будут сходиться быстрее.
- $g_{mn}$  не при всех  $\{g; \omega_0; t_0\}$  образуют фрейм, для этого необходимо выполнить условия.

Определим условия, чтобы выбор функции  $g$ , частоты  $\omega_0$ , сдвига  $t_0$  давал фрейм. Оценка для границ фрейма:

$$A \leq \frac{2\pi}{\omega_0 t_0} \|g\|^2 \leq B$$

- Жесткий фрейм при выборе  $\|g\| = 1$  имеет границу  $A = \frac{2\pi}{\omega_0 t_0}$
- Если  $\omega_0 t_0 = 2\pi$ , то фрейм - ортонормированный базис - лучший вариант.
- Параметры  $\omega_0; t_0$  не могут быть произвольны, в частности, при  $\omega_0 t_0 > 2\pi$  мы всегда можем, независимо от выбора функции  $\forall g$ , найти  $\exists f \neq 0: \langle f; g_{mn} \rangle = 0$

Утверждение говорит о том, что выбирать значения  $\omega_0; t_0$  необходимо с осмотрительностью: если при заданной  $\omega_0$  увеличивать  $t_0$ , может получиться слишком большой шаг.

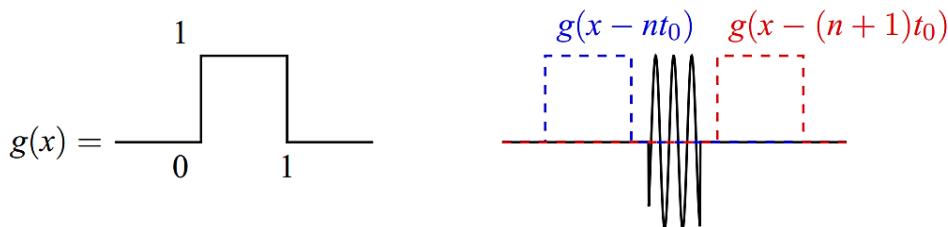


Рис. 7.5. Слева - оконная функция  $g(x)$ , справа – положения функции при разных  $n$

Оконная функция  $g(x)$  - прямоугольник, высота и длина = 1, если взять интеграл, он будет = 1, поэтому функция является нормированной (на рис. 7.5. слева). Если сдвинуть оконную функцию на  $t_0 > 1$ , тогда синий и красный пунктир (на рис. 7.5 справа) - положения функции при разных  $n$ . Поскольку  $t_0 > 1$  - между окнами есть

зазор. Если функция везде равна нулю, кроме промежутка, тогда частота будет оказывать влияние только внутри окна, то есть  $\langle f; g_{mn} \rangle = 0$

### Достаточное условие существования фрейма

Теорема представляет собой достаточное условие фрейма и строго говорит о том, каким образом можно избежать рассмотренную выше ситуацию.

$$\text{Если } \begin{cases} \inf_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 > 0 \\ \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 < \infty \end{cases}$$

$$\beta(s) = \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)| |g(x - nt_0 + s)|$$

Убывает по крайней мере как  $(1 + |s|)^{-1-\epsilon}$ ;  $\epsilon > 0$ , существует пороговое значение  $\exists \omega_{\text{threshold}}$ , для  $\forall \omega_0 < \omega_{\text{threshold}}$  набор функций

$g_{mn}(x) = \exp(i\omega_0 x)g(x - nt_0)$  образует фрейм

Иными словами: если функция  $g(x)$  достаточно быстро убывает, хорошо локализована, параметр  $t_0$  согласован с шириной функции, можно взять достаточно малое  $\omega_0$  и получить фрейм. Например, если функция  $g(x)$  мажорируется сверху  $|g(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}$  для  $\gamma > 1$

### Двойственные фреймы для оконного преобразования Фурье

#### Операторы $W$ и $T$

В случае Вейвлет-преобразования вычисление двойственных вейвлетов можно упростить за счет введения операторов и соблюдения условия их перестановки с оператором  $(F^*F)^{-1}$ . Рассмотрим, что происходит в случае оконного преобразования Фурье. Двойственные функции вычисляются через исходные:

$$g'_{mn} = (F^*F)^{-1}g_{mn}, \text{ где } F^*F\vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

Введем два оператора:

- Оператор  $(Tf)(x) = f(x - t_0)$
- Оператор  $(Wf)(x) = \exp(i\omega_0 x)f(x)$
- Операторы  $(F^*F)^{-1}$  и  $T$  перестановочны
- Операторы  $(F^*F)^{-1}$  и  $W$  перестановочны

$$g'_{mn} = (F^*F)^{-1}g_{mn} = (F^*F)^{-1}W^m T^n g = W^m T^n (F^*F)^{-1}g = \exp(im\omega_0 x)g'(x - nt_0)$$

Действуем по аналогии с вейвлетами: расписываем функцию  $g'_{mn}$  через функцию  $g_{mn}$ , представляем  $g_{mn}$  через исходную функцию  $g$ , к которой  $m$  раз

применен оператор  $\mathcal{W}$  и  $n$  раз оператор  $\mathcal{T}$ ; поскольку они перестановочны, меняем операторы местами. К функции  $g$  один раз применим оператор  $(F^*F)^{-1}$ , один раз считаем ряд, применим к результату введенные операторы. Таким образом,  $g'$  необходимо посчитать всего один раз - для нулевых значений величин  $m; n$ . Тогда для оконного преобразования Фурье не важно условие жесткости фрейма  $B/A - 1 \ll 1$ , поскольку для любой функции всегда можно заранее протабулировать векторы. Соответственно, оконное Фурье-преобразование в этом плане имеет преимущество.

## Избыточность фреймов

Фрейм - математическое обобщение понятия базис. В многомерном пространстве можно ввести ортонормированный базис, с помощью которого всегда можно раскладывать любой вектор из данного пространства, вводить коэффициент вектора в виде скалярных произведений и восстанавливать исходный вектор. У фреймов количество векторов больше, чем в базисе. Пусть есть фрейм, состоящий из одного вектора, тогда найдется вектор  $f$ , который, будучи скалярно умноженным на вектор  $\vec{e}$ , даст ноль. Это означает, что по определению фрейма коэффициент  $A = 0$ , но для фрейма  $A > 0$ , поэтому единственный вектор не может являться фреймом. Таким образом, в фрейме количество векторов всегда будет больше или такое же, как в базисе. Тогда имеем большее количество коэффициентов, для чего потребуется большее количество памяти. С этой точки зрения базис является предпочтительнее фрейма. В действительности это не совсем верно. Рассмотрим пример.



Рис. 7.6. Слева - жесткий фрейм с границами 3/2, справа - ортонормированный базис

- $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  - векторы, образующие ортонормированный базис
- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  - жесткий фрейм с границами 3/2, угол между фреймовыми векторами -  $120^\circ$
- связь между ними дается выражениями:  $\vec{e}_1 = \vec{u}_1$

$$\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_1 - \frac{1}{2} \vec{u}_2 \quad \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_1 + \frac{1}{2} \vec{u}_2$$

Жесткий фрейм с границами 3/2 означает, что вектор можно представить в виде разложения и восстановления по базису  $\vec{u}_1$  и по фрейму:

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j \quad \vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

Предположим, что были получены значения, добавим к ним шум. Введем:

$\mathcal{M}$  – операцию математического ожидания

$\alpha_j$  - независимые случайные величины;  $M\alpha_j = 0; M\alpha_j^2 = 1$

Рассмотрим математическое ожидание квадрата нормы разности между вектором  $\vec{f}$  и тем, что получается из процедуры разложения-восстановления, если к каждому коэффициенту добавить соответствующую величину  $\alpha_j \epsilon$ .  $\alpha_j \epsilon$  - шум, определяется параметром  $\epsilon$ .

С точки зрения базиса:

$$\mathcal{M} = \left\| \vec{f} - \sum_j (\langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle + \alpha_j \epsilon) \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M} \left\| \sum_j \alpha_j \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 2\epsilon^2$$

С точки зрения фрейма:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\| \vec{f} - \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle + \alpha_j \epsilon) \vec{e}_j \right\|^2 &= \frac{4}{9} \epsilon^2 \mathcal{M} \left\| \sum_j \alpha_j \vec{e}_j \right\|^2 = \frac{4}{9} \epsilon^2 \mathcal{M} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \frac{4}{3} \epsilon^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\epsilon^2 \end{aligned}$$

Сравнение математических ожиданий показывает: при разложении по фрейму итоговая дисперсия позволяет оценить, насколько хорошо мы восстанавливаем исходный вектор. Иными словами: ошибка восстановления вектора в первом случае равна  $2\epsilon^2$ , во втором -  $2/3 \cdot 2\epsilon^2$  - возникло отношение избыточности. В случае использования фрейма: во сколько раз больше векторов, в такое же количество раз больше ошибка. Таким образом, когда применяются фреймы, используется большее количество коэффициентов, зато выигрываем в такое же количество раз по точности восстановления исходного вектора. Если отношение избыточности достаточно большое, то вместо того, чтобы хранить избыточную информацию о коэффициенте  $\langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle$  в виде числа с большим количеством знаков после запятой, можно сохранять только один вид информации о коэффициенте. Этого достаточно, чтобы с большой точностью восстанавливать исходную функцию  $f$ . Тем самым, не происходит потери информации при представлении вектора  $\vec{f}$  в виде процедуры разложения и восстановления по фрейму по отношению к представлению по базису.

## Лекция 8. Методы определения параметров линейных систем

### Функция отклика линейной инвариантной по времени системы (ЛИВС)

В рамках предыдущих лекций курса был рассмотрен ряд преобразований, позволяющих перейти из области определения, где заданы исходные сигналы, в область, где обработка сигналов в ряде случаев может быть более простой:

- **преобразование Фурье** - переход от временного представления сигналов к спектральному;
- **время-частотные преобразования**: оконное преобразование Фурье, Вейвлет-преобразование, преобразование Вигнера-Вилля - возможность отслеживать изменения частоты сигнала с течением времени, что удобно и может быть применено на практике.

Самый простой способ обработки сигнала - применение линейных систем. Сигнал  $g(t)$  на выходе линейной инвариантной по времени системы (ЛИВС) связан с сигналом  $f(t)$  на ее входе с помощью импульсной функции отклика  $h(\tau)$ :

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

**Импульсная функция отклика** полностью определяет отклик системы: функция  $g(t)$  при воздействии на систему входным сигналом  $f(t)$ . Соответственно, если задать  $g(t)$ , полностью задается система обработки - ЛИВС. Преобразование Вигнера-Вилля является нелинейным и в рамках такой логики не определяется. При этом значительное количество реально осуществимых систем в радиотехнике и различных цифровых приложениях удовлетворяет модели ЛИВС.

Задача в общем виде: в эксперименте набор сигналов подается на систему (черный ящик), есть возможность регистрировать сигналы на выходе. Предположим, что на систему оказано воздействие сигналом  $f(t)$ . Спрашивается: какой будет функция  $g(t)$  на выходе системы? как из результатов предыдущих измерений это можно определить? Если мы работаем с линейными системами, алгоритм решения задачи будет простым: по данным определить функцию  $h(\tau)$ , путем взятия интеграла найти отклик на любой сигнал  $f(t)$ . Как в эксперименте определить  $h(t)$ ? Следствия из определения:  $h(t)$  - импульсная функция отклика; фактически представляет собой реакцию системы на импульсное воздействие.

$h(\tau)$  для непрерывных сигналов:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)$$

$h[m]$  для дискретных сигналов:

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \delta[n-m] = h[n]$$

Если в эксперименте есть возможность подать на вход системы дельта-функцию (отдельный импульс) - функция  $g(t)$  на выходе будет строго равна  $h(t)$ .

Если время задано в виде отдельных отсчетов, вместо непрерывного времени  $t$  и временного сдвига  $\tau$  используются дискретные целые значения отсчетов  $n, m$ .

### Определение с помощью импульсного воздействия

На ЛИВС подан дельта-импульс, получен сигнал на выходе, совпадающий с импульсной функцией отклика; используя её, определяем реакцию системы на любое внешнее воздействие. Данный метод имеет право на существование, но не лишен недостатков:

- Если мы работаем в области практики, необходимо создать импульс бесконечно малой длительности. Это большая проблема.
- Импульс конечной энергии имеет высокую амплитуду и может приводить к нелинейным процессам, поскольку интеграл от дельта-функции по всем значениям аргумента = 1, то есть энергия остается конечной, импульс - очень короткий. Значит, амплитуда подаваемого на вход системы сигнала должна быть весьма большой. Приближение линейной системы работает, когда амплитуда сигнала остается малой, по крайней мере, находится в определенных пределах. Если они нарушаются, система выходит из линейного режима, и модель может не работать. Например, если взять такую ЛИВС, как усилитель, и подать на вход сигнал, амплитуда которого превышает напряжение питания усилителя, на выходе однозначно будут наблюдаться нелинейные эффекты.
- Если есть возможность использовать короткие импульсы, часто не удается обеспечить их идентичность. Для поиска полезных ископаемых используются акустические методы. Необходимо создать акустический импульс, который будет распространяться в толще земной коры и регистрироваться набором датчиков. Если импульс короткий - получим набор реакций системы, набор функций  $h(\tau)$ . Используя алгоритм решения обратной задачи, можно определить, что находится в недрах, оценить перспективы разработки. Вопрос: каким образом можно "озвучить" земную кору? Если импульс не будет мощным, датчики не услышат его на фоне шумов, свойственных данной системе. Применяются взрывные источники (звук взрыва), при этом каждый взрыв будет индивидуален по своим свойствам, спектр исходного импульса в каждом случае может отличаться. Если нет идентичности импульсов, потребуется более сложный алгоритм обработки сигналов. Неидентичность состоит в том, что появляется функция, имеющая малую длительность и хитрую форму.

### Корреляционная функция

**Определение 8.1:** Корреляционная функция  $K_{fg}$  сигналов  $g(t)$  и  $f(t)$  - величина, определяемая как

$$K_{fg}(\tau) = \mathcal{M}\{(f(t + \tau) - \mathcal{M}\{f\}) \cdot \overline{(g(t) - \mathcal{M}\{g\})}\}$$

Для решения рассмотренных проблем используется метод, связанный с применением корреляционного анализа. Параметр  $\tau$  - временной сдвиг; из функций

$g(t)$  и  $f(t)$  вычитаем среднее значение; разность функции  $g(t)$  комплексно сопрягается, разность функции  $f(t)$  берется со сдвигом  $\tau$  по времени. Результат произведения усредняем по всем реализациям, то есть по всему времени. Корреляционная функция - по сути, мера похожести сигналов  $g(t)$  и  $f(t)$ , если сигнал  $f(t)$  был сдвинут на величину  $\tau$ .

Рассмотрим функции:  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$ ,  $\tau = 0$ , среднее значение синуса и косинуса - 0, поэтому математические ожидания = 0, тогда синус умножаем на косинус и усредняем, получаем для корреляционной функции сигналов нулевое значение. Функции  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$  совершенно не похожи друг на друга: максимумы одной функции попадают на минимумы другой, минимумы на максимумы и т.д. Если сдвинуть синус на  $\pi/2$ , он переходит в косинус, тогда в формуле будет  $\cos^2$ . Формула понижения степени в тригонометрии  $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ . Когда мы будем усреднять по всем реализациям, в данном случае - по всему времени, получим среднее значение = 1/2. Таким образом, при сдвиге  $\tau = \pi/2$  функции  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$  будут накладываться и совпадать. Соответственно, корреляционная функция является удобным инструментом, позволяющим определять, похожи или непохожи сигналы.

Если  $\mathcal{M}\{f\} = 0$  и  $\mathcal{M}\{g\} = 0$ , то корреляционную функцию можно вычислить как:

$$K_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{g(t)} dt$$

Математическое ожидание по всем реализациям заменено на интеграл по времени.

### Автокорреляционная функция. Свойства. Теорема Винера-Хинчина

Если  $f(t) = g(t)$ , автокорреляционная функция

$$K_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{f(t)} dt$$

Предполагаем, что среднее значение функции  $f(t) = 0$ ; если это не так, то из каждого множителя необходимо вычесть среднее значение.

#### Свойства автокорреляционной функции:

Значение автокорреляционной функции в нуле

$$K_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \mathcal{M}\{|f|^2\} \quad - \text{дисперсия сигнала}$$

Полезное свойство: гауссовский шум подается на вход коррелятора, возьмем его автокорреляционную функцию; её значение в нуле даст дисперсию сигнала -  $\sigma^2$ .

### Спектральные свойства. Теорема Винера-Хинчина

Спектр автокорреляционной функции: преобразование Фурье применяем к автокорреляционной функции  $K_{ff}(\tau)$ :

$$\begin{aligned}\widetilde{K_{ff}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-i\omega t(t+\tau)} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt d\tau = |\tilde{f}(\omega)|^2\end{aligned}$$

Получаем: Фурье-преобразование от функции  $f(t)$ , умноженное на комплексно-сопряженное преобразование Фурье от той же функции, то есть спектр функции  $f(t)$  -  $\tilde{f}(\omega)$ , взятая по модулю в квадрате.

$$G(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2 \text{ - спектр мощности сигнала}$$

Содержание теоремы Винера-Хинчина: спектр мощности сигнала и автокорреляционная функция связаны друг с другом преобразованием Фурье.

### Функция отклика ЛИВС. Корреляционный метод

Введя в оборот корреляционную и автокорреляционную функцию, рассмотрев их базовые свойства, вернемся к задаче определения функции отклика ЛИВС, но с помощью корреляционного метода.

$$\xrightarrow{f(t)} \hat{A} \xrightarrow{g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) dt}$$

Функция  $f(t)$  подается на вход ЛИВС, заданной линейным оператором  $\hat{A}$ , на выходе - сигнал  $g(t)$ , связанный с  $f(t)$  с помощью интегрального соотношения. Необходимо определить функцию  $h(\tau)$ . Посчитаем корреляционную функцию входа и выхода линейной инвариантной по времени системы.

$$\begin{aligned}K_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t'+t) \overline{f(t')} dt' == \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t'+t-\tau) dt \cdot \overline{f(t')} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t'+t-\tau) \overline{f(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) K_{ff}(t-\tau) dt\end{aligned}$$

В таких преобразованиях необходимо поменять порядок интегрирования: все, что относится к переменной  $\tau$  выносим во внешний интеграл, во внутреннем остается то, что интегрируется по  $t'$ . Внутренний интеграл представляет собой автокорреляционную функцию для исходного сигнала  $f(t)$ , взятую со времененным сдвигом  $t - \tau$ . Итог: корреляционная функция выходного и входного сигналов равна

интегральному преобразованию от автокорреляционной функции входного сигнала с импульсной функцией отклика ЛИВС.

Сравним формулы:

$$\begin{cases} g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \\ K_{fg}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) K_{ff}(t-\tau) d\tau \end{cases}$$

- связывает сигнал на выходе системы с сигналом на входе
- связывает корреляционную функцию входа и выхода системы с автокорреляционной функцией на входе

Отметим: формулы совпадают с точностью до обозначений. Это одно и тоже интегральное преобразование (свертка) с одной и той же функцией  $h(\tau)$ , но для разных ситуаций. Первый способ для определения  $h(\tau)$ : необходимо подать импульсный сигнал - вместо сигнала  $f(t)$  подать дельта-функцию, тогда от интеграла остается только функция  $h(\tau)$ , которую мы наблюдаем в эксперименте. Если это сделать сложно, можно создать сигнал  $f(t)$ , у которого автокорреляционная функция будет дельта-функцией. Тогда взаимная корреляционная функция входа и выхода системы  $K_{fg}(t)$  будет равна функции  $h(\tau)$ . Эти величины мы имеем возможность измерять в эксперименте.

Рассмотрим, в какой ситуации автокорреляционная функция сигнала будет дельта-функцией или будет близка к ней.

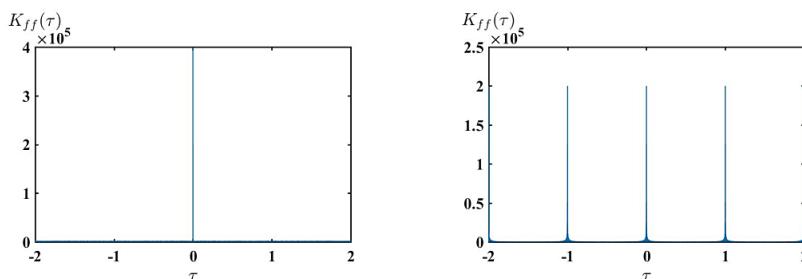


Рис. 8.1. Слева -  $f(t)$  шумовой сигнал, справа -  $f(t)$  ЛЧМ с периодом 1 секунда

- **Шумовой сигнал:** если у шума соседние значения являются независимыми, то какой бы мы не взяли временной сдвиг  $\tau$ , при перемножении значений отсчетов сигнала в среднем будет иметь нулевое значение, потому что это - две независимые величины. Единственная ситуация, когда мы не получим нулевое значение: значение временного сдвига в точности = 0, потому что каждое из значений отсчетов шумового сигнала умножается на себя, возводится в квадрат. Интегрируя по неотрицательной величине, получим что-то неотрицательное - всплеск. Автокорреляционная функция шумового сигнала - величина, очень близкая по форме к дельта-функции.
- **Линейный частотно-модулированный сигнал** (правый график на рис. 8.1.) - в ряде случаев хотелось бы работать с детерминированными сигналами,

поскольку шум не очень удобен. Для подобных сигналов автокорреляционная функция будет близка по форме к дельта-функции.

**Отличия методов:** Наличие "честного" одиночного импульса в случае шума - набор периодических импульсов у линейного частотно-модулированного сигнала (ЛЧМ). Если мы накапливаем сигнал за большое время, то имеем возможность повторять эксперимент много раз, с другой стороны - за период 1 сек должны пройти все процессы системы; отклик сигнала  $g(t)$ , полученного при воздействии импульсом, должен полностью упасть до нуля. Если в момент прихода следующего импульса в системе не затухли все колебания, произойдет наложение остаточных колебаний на следующий импульс, что приведет к получению неправильного результата. В этом случае необходимо увеличить период (10 сек, 100 сек и т.д.).

Функция на левом графике очень узкая, на правом - незначительно расширяется внизу (рис. 8.1.). Чтобы понять, из-за чего это происходит, обратимся к теореме Винера-Хинчина: спектр мощности сигнала связан с автокорреляционной функцией преобразованием Фурье. Преобразование Фурье обладает свойством: чем более длительный сигнал, тем более узкий у него может быть спектр. Если спектр широкий, сигнал может быть менее длительным. Чем шире спектр, тем более узкая корреляционная функция. Если сигнал действительно шумовой (белый шум), его спектр не ограничен и определяется только той полосой, которую вырезает датчик, обладающий амплитудно-частотной характеристикой. В зависимости от полосы будет определяться ширина автокорреляционной функции:  $\delta(\tau) \approx 1/\delta(\omega)$  - по свойствам преобразования Фурье. В случае ЛЧМ, помимо ограничения на датчик, есть полоса самого сигнала. Линейный частотно-модулированный сигнал - сигнал, у которого мгновенная частота меняется от некоторого минимума до максимума. Он имеет ширину, равную разности максимальной и минимальной частоты. В отличие от белого шума, полоса частот конечна. В частности, для рассматриваемого эксперимента был взят сигнал, где за 1 сек частота менялась от 100 Гц до 10 кГц: полоса частот = 10 кГц, отсюда получаем, что ширина автокорреляционной функции  $10^{-4}$  сек. Если мы хотим, чтобы на правом графике на рис. 8.1. была ещё более тонкая линия, то должны расширить спектр сигнала, сделав верхнюю частоту 100 кГц. Тогда ширина уменьшится в 10 раз, соответственно, результат, полученный в рамках уравнения, станет более точным для определения  $h(\tau)$ .

По итогам сравнения методов отметим преимущества второго: есть возможность сделать повторяющиеся импульсы, кроме того, очень узкие; не нарушается требование линейности среды, потому что сигнал может быть относительно малой амплитуды, его автокорреляционная функция (интеграл по большому промежутку времени) может быть большой. Чем больше время, за которое наблюдается сигнал, тем больше будет амплитуда автокорреляционной функции. Это означает: увеличив время приема сигнала - время накопления, мы сможем добиться хороших результатов даже со слабым излучателем. С одной стороны, это большой плюс, с другой - минус. Принципиальный минус корреляционных методов: можно использовать слабые сигналы, но необходимо проводить их накопление в течении длительного времени. Это может привести к тому,

что линейная система перестанет быть инвариантной по времени. В течении длительного времени с ней что-то произойдет, в результате - в начале и в конце наблюдений будет фактически разная среда. Представим, что мы хотим определить, что находится на дне океана на шельфе. Для этого необходимо учесть, как звук распространяется в слое воды, который подвержен сильным изменениям (приливы-отливы, вихри и др.). Если использовать данные методы в быстро меняющейся среде, то период линейного частотно-модулированного сигнала задается не более 10 мин, тем самым появляется ограничение на амплитуду сигнала; мы не можем делать его сколь угодно малым. Если при этом нецелесообразно делать его большим из-за нелинейных искажений, это накладывает ограничение на дальность, на которой можно работать. При использовании исходного метода можно использовать взрывной источник и получить сильный сигнал.

### Модель авторегрессии - скользящего среднего (АРСС) ЛИВС

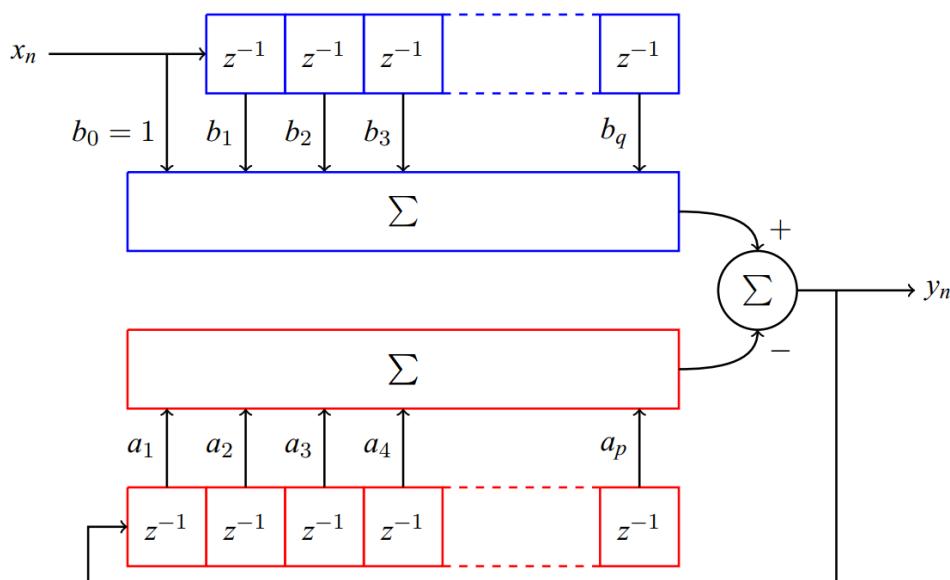


Рис. 8.2. Модель авторегрессии - скользящего среднего

Если система дискретная, её работу можно описать с помощью блок-схемы:

- **Модель скользящего среднего** (верхняя схема на рис 8.2.): входная последовательность  $x_n$ ; суммирование осуществляется с помощью линии задержки. Z-преобразование: умножение на  $z^{-1}$  соответствует тому, что сигнал задерживается на один отсчет. В первом элементе линия задержки содержит значение  $x_n$  на 1 момент раньше, следующее - на 2 момента раньше -  $x_n^{-2}$ , и т.д. Значения сигнала в предыдущие моменты времени умножаются на коэффициенты усиления  $b_1, b_2, b_q$ ; обычно выбирается  $b_0 = 1$  - текущий отсчет сигнала. При  $q \rightarrow \infty$  схема совпадает с суммой, которой мы описывали любую ЛИВС. Если ограничиться конечной цепочкой, схема также будет работать. Система имеет конечное количество элементов. Последние  $q$  значений сигнала усредняем с весами  $b_0, b_1, \dots, b_q$  и подаем результат на сумматор.

- **Модель авторегрессии** (нижняя схема на рис. 8.2.) - на сумматор со знаком минус подается результат дополнительной модели. На вход модели - сигнал с выхода сумматора - выхода обобщенной модели.
- **Модель авторегрессии - скользящего среднего (APCC)**: исходный сигнал  $x_n$  подвергается операции скользящего среднего, последние  $q$  элементов суммируются, сигнал с выхода обобщенной модели подается на авторегрессионный блок, результат работы которого прибавляется к результату модели скользящего среднего с отрицательным знаком. Модель широко используется для простой обработки сигналов, в англоязычной литературе обозначается - ARMA.

$$\text{APCC}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^q a[k]y[n-k] = y[n]$$

Параметры  $p, q$  задают количество коэффициентов  $b, a$ :

$$\begin{cases} a[0] = 1 \\ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^q a[k]y[n-k] \end{cases}$$

Воспользуемся Z-преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\left\{\sum_{k=0}^q b[k]x[n-k]\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-(n-k)} x[n-k] = \\ &= X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \\ \mathbb{Z}\left\{\sum_{k=0}^q a[k]y[n-k]\right\} &= Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k} \\ X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} &= Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k} \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} \end{aligned}$$

Отношение сумм не содержит информации о сигналах, это характеристика системы (определяет систему обработки), отношение  $Y(z)/X(z)$  содержит z-преобразование от входного и выходного сигналов (ничего, относящегося к системе). Соответственно, задача фактически решена: мы имеем возможность определить  $H(z)$  по характеристикам системы; зная  $H(z)$ , можем восстановить сигнал  $Y(z)$  по сигналу  $X(z)$ : берем z-преобразование от сигнала  $x_n$  на входе системы, умножаем на функцию  $H(z)$ , берем обратное z-преобразование.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}} = b[0] \frac{\prod_{k=0}^q (1 - z_k/z)}{\prod_{k=1}^q (1 - p_k/z)}$$

Числитель и знаменатель дроби в формуле представляют собой многочлен, однако это многочлен относительно переменной  $z^{-1}$ .  $z_k$  – нули;  $p_k$  – полюсы функции  $H(z)$ ;  $b[0]$  - масштаб усиления - насколько сигнал  $Y(z)$  превосходит сигнал  $X(z)$  по амплитуде; на форму сигнала влияния не оказывает.

### Сведение модели АРСС ( $p, q$ ) к модели авторегрессии ( $\infty$ )

Опишем систему одной частью: исключим блоки, относящиеся к скользящему среднему, используем блоки, относящиеся к авторегрессии.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

Ранее количество элементов было конечно, рассмотрим системы с любым количеством элементов. Уравнение дает возможность для определения коэффициента  $C(z)$  на основании коэффициентов  $A(z)$  и  $B(z)$  с помощью рекуррентных соотношений. Из пропорции следует:

$$B(z)C(z) = A(z)$$

Применим к равенству  $z$ -преобразование: когда оно применяется к произведению двух функций, на выходе – свертка от  $z$ -преобразований, примененных к каждой из функций в отдельности;  $A(z)$  - некоторая последовательность.

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c[n] + \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases}$$

Свертка в конечном виде: количество коэффициентов  $b$  ограничено числом  $q$ , можно положить остальные коэффициенты  $b = 0$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases} \quad c[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ a[n] - \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k]; & 1 \leq n \leq p \\ -\sum_{k=1}^q b[k]c[n-k]; & n > p \end{cases}$$

Показано: модель с конечным количеством коэффициентов  $a, b$  может быть сведена к авторегрессионной модели, где используются только коэффициенты  $c[n]$ . Недостатком является бесконечное количество коэффициентов. Это не дает сделать модель авторегрессии на компьютере или реализовать систему обработки в реальном "железе". Более сложную общую модель авторегрессии - скользящего среднего реализовать можно, поскольку количество коэффициентов является конечным.

## Сведение модели АРСС ( $p, q$ ) к модели скользящего среднего ( $\infty$ )

Заменим модель авторегрессии на модель скользящего среднего. В некотором смысле, вернемся к модели ЛИВС, учитывающей только скользящее среднее. Система описывалась интегралом от функции отклика и входного сигнала.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$
$$A(z)D(z) = B(z)$$

Вместо функции отклика - функция  $D(z)$ . Переходим к модели скользящего среднего, полагаем знаменатель дроби = 1. Далее, действуем аналогично:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} d[n] + \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases} \quad d[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ b[n] - \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k]; & 1 \leq n \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a[k]d[n-k]; & n > q \end{cases}$$

Вывод: модель скользящего среднего эквивалентна модели авторегрессии - скользящего среднего с параметрами  $p, q$ . При этом она менее экономична: существуют модели, задающиеся конечным количеством коэффициентов; они являются более сложными, потому что состоят из двух частей.

### Определение $a[n]$ и $b[n]$ . Уравнения Юла-Уокера

Рассмотрим методы определения коэффициентов для модели авторегрессии - скользящего среднего. Воспользуемся некоторыми корреляционными методами. Ранее были рассмотрены возможности для определения фактических коэффициентов  $b$ ; не было слагаемого, отвечающего за авторегрессионные процессы. Используя корреляционный подход, мы определили импульсную функцию отклика системы (определенена переменной  $b$ ); вывели корреляционный подход, связанный с автокорреляционной функцией входного сигнала  $x$ , взаимной корреляционной функцией сигналов  $x; y$ . Совокупность корреляционных функций дала возможность определять коэффициенты  $b$  системы, если мы знаем  $x; y$ , имеем возможность подавать на систему произвольные сигналы.

$$\sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

Теперь система более сложная: есть модель скользящего среднего и авторегрессии.

Рассмотрим корреляционную функцию на выходе системы:

$$\begin{aligned} r_{yy}[m] &= \mathcal{M}\{y[n]\overline{y[n-m]}\} = \\ &= \sum_{k=0}^q b[k] \mathcal{M}\{x[n-k]\overline{y[n-m]}\} - \sum_{k=1}^p a[k] \mathcal{M}\{y[n-k]\overline{y[n-m]}\} = \\ &= \sum_{k=0}^q b[k] r_{xy}[m-k] - \sum_{k=1}^p a[k] r_{yy}[m-k] \end{aligned}$$

Автокорреляционная функция со сдвигом  $m$  по определению будет равна математическому ожиданию от произведений:  $r_{yy}[m] = \mathcal{M}\{y[n]\overline{y[n-m]}\}$

Правило: чтобы получить индекс на выходе автокорреляционной функции, из первого индекса необходимо вычесть комплексно-сопряженный. Таким образом, имеем возможность связать автокорреляционную функцию на выходе системы с двумя функциями: взаимная корреляционная функция  $r_{xy}$ , автокорреляционная функция на выходе системы  $r_{yy}$ . Сигнал на выходе произвольной ЛИВС определяется импульсной функцией отклика системы. Запишем без серьезного ограничения общности выражение, где  $h[0] = 1$ , система не обладает усилением. Применим к равенству комплексное сопряжение.

$$y[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k] x[m-k] + x[m] \quad \overline{y[m]} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \overline{x[m-k]} + \overline{x[m]}$$

Рассмотрим взаимную корреляционную функцию входа и выхода системы:

$$\begin{aligned} r_{xy}[i] &= \mathcal{M}\{x[i+m]\overline{y[m]}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \mathcal{M}\{x[i+m]\overline{x[m-k]}\} + \mathcal{M}\{x[i+m]\overline{x[m]}\} = \\ &= r_{xx}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} r_{xx}[i+k] \end{aligned}$$

Взаимная корреляционная функция сигналов  $x, y$  связана с автокорреляционной функцией сигнала на входе системы. Выражение полностью аналогично корреляционному методу, ранее введенному для непрерывных систем, где автокорреляционная функция входного сигнала была связана с взаимной корреляционной функцией входа и выхода. Единственное отличие заключается в том, что система дискретная.

На вход системы подан не произвольный, а сигнал типа белый шум, обладающий дельтаобразной автокорреляционной функцией: если  $x[n]$  - белый шум, то  $r_{xx}[i] = p\delta[i]$ . Дельта-функция дискретная: если  $i = 0$ , то  $\delta = 1$ , если  $i \neq 0$ , то  $\delta = 0$

$$r_{xy}[i] = p\delta[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} p\delta[i+k] = p\delta[i] + p \overline{h_{i<0}[-i]}$$

Обратим внимание: значение  $k$  пробегает диапазон от 1 до  $\infty$ , в связи с чем присутствуют не все значения  $k$ , в частности, если  $i < 0$ , значение  $k$  найдется, если  $i > 0$ , значения слагаемого нет, поэтому  $h_{i<0}$ . Требование - учитываются только положительные значения  $k$  и отрицательные  $i$ : суммирование ведется в полубесконечных пределах, потому что мы рассматриваем системы обработки сигналов, которые удовлетворяют принципу причинности. Он состоит в том, что величина  $h[k]$  при отрицательных  $k$  строго равна нулю. Когда мы переносим это соображение через выкладки, получаем индекс  $i < 0$  - ограничение причинности системы. Если система рассматривается в непричинном эквиваленте, если мы имеем возможность забегать по времени вперед - требования не будет.

$$r_{yy}[m] = \sum_{k=0}^q b[k]r_{xy}[m-k] - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] \quad r_{xy}[i] = p\delta[i] + p \overline{h_{i<0}[-i]}$$

Рассмотрим автокорреляционную функцию на выходе системы  $r_{yy}[m]$  при различных значениях  $m$ :

$$\begin{aligned} r_{yy}[m] &= \sum_{k=0}^q b[k](p\delta[m-k] + p \overline{h_{m<0}[k-m]}) - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] = \\ &= \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] & m > q \\ - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] + p \sum_{k=m}^q b[k] \overline{h[k-m]} & m \leq q \end{cases} \end{aligned}$$

Поставленная задача: по результатам экспериментальных измерений определить параметры  $a, b$ ; то, чем определяется система.

$$r_{yy}[m] = \begin{cases} \overline{r_{yy}[-m]}; & m < 0 \\ - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] + p \sum_{k=m}^q b[k] \overline{h[k-m]}; & 1 \leq m < q \\ - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k]; & m > q \end{cases}$$

Дополним значениями функции  $r_{yy}[m]$  при  $m < 0$ . Формула  $\overline{r_{yy}[-m]}$  следует из определения автокорреляционной функции: при изменении знака временного сдвига функции меняются местами. Необходимо взять функцию  $r_{yy}[m]$  при  $m > q$ , подать на

вход системы белый шум. Сдвиг заведомо больше, чем количество элементов  $q$  в части системы, отвечающей за скользящее среднее.

### Уравнения Юла-Уокера

$$\begin{pmatrix} r_{yy}[q] & r_{yy}[q-1] & \cdots & r_{yy}[q-p+1] \\ r_{yy}[q+1] & r_{yy}[q] & \ddots & r_{yy}[q-p+2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}[q+p-1] & r_{yy}[q+2] & \cdots & r_{yy}[q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{yy}[q+1] \\ r_{yy}[q+2] \\ \vdots \\ r_{yy}[q+p] \end{pmatrix}$$

Система уравнений однозначно разрешима. По всем диагоналям матрицы стоят одинаковые числа. Матрицы такого типа называются матрицей Теплица. Чтобы решать систему линейных уравнений с данной матрицей, существуют методы численной оптимизации, поэтому нахождение коэффициентов  $a[k]$  в рамках данной системы в целом не представляет большого труда. Значения  $a[k]$  необходимо подставить во второе уравнение, чтобы получить систему уравнений относительно коэффициента  $b[k]$ .

Корреляционные методы позволяют определять параметры линейных систем в случае, когда они заданы моделью скользящего среднего. Также мы можем работать с авторегрессионными моделями, получать необходимые коэффициенты, тем самым моделировать самые разные системы. Система авторегрессии - скользящего среднего, когда одновременно применяются обе модели, обладает существенными преимуществами, потому что дает возможность описывать систему конечным количеством параметров, вместо бесконечного в случае использования одной модели.

## Лекция 9. Оценивание параметров сигналов. Часть 1

### Классификация объектов по параметрам. Типы признаков

В ходе предыдущей лекции курса были рассмотрены линейные инвариантные по времени системы. Мы коснулись систем типа: скользящее среднее, авторегрессия, авторегрессия - скользящее среднее. Изучили, как можно определять характеристики систем в различных случаях, а именно - импульсную функцию отклика. Продолжим, оценивая параметры самих сигналов, а не обрабатывающих сигналы систем. Представим сигналы как некоторые объекты и определим, какими величинами они могут характеризоваться. Прежде всего, в целом определимся, что мы понимаем под параметром сигнала, для чего введем определение признака. Признак может быть у любого объекта. Здесь объект - сущность, которая обобщает понятие "сигнал".

Есть набор изучаемых объектов, мы его описываем, то есть собираем данные про объекты. Каждое описание представляет собой некоторую точку в пространстве  $X$ .

**Определение 9.1:** Признак - отображение  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{D}_f$ , где  $\mathbb{X}$  множество описаний объектов;  $\mathbb{D}_f$  - множество допустимых значений признака. Если заданы признаки  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , то вектор  $\vec{x} = \{f_1(x), f_2(x) \dots, f_n(x)\}$  называется признаком описанием объекта  $\vec{x} \in \mathbb{X}$ . Множество  $\mathbb{D}_{f_1} \times \mathbb{D}_{f_2} \times \dots \times \mathbb{D}_{f_n}$  называют признаком описанием пространством.

Признаков может быть задано много, обычно задается конечное количество. Отличие признаком описания от самого объекта заключается в том, что часть информации об объекте отсекается. Иногда эта часть является незначимой, и ею можно пренебречь, иногда она является важной, но сильно зашумлена, не очень достоверна, либо неизвестна. В дальнейшем вектор  $\vec{x}$  для краткости будем называть объектом  $x$ .

### Типы признаков

- **бинарный признак** - множество  $\mathbb{D}_f$  состоит из двух элементов: 0, 1; -1, 1; true, false; да, нет. Признак либо присутствует, тогда его значение = 1, либо отсутствует, значение = 0; в шахматах фигура может быть либо черной, либо белой, признак близны можно задать 0 или 1;  $\mathbb{D}_f = \{0,1\}$
- **номинальный признак:**  $\mathbb{D}_f$  - конечное множество; признак подразумевает, что множество неупорядоченное: есть некоторое количество элементов, между ними нет отношений типа больше-меньше, есть только равенство; у светофора - три сигнала (красный, желтый и зеленый свет) - конечное множество из трех элементов, при этом невозможно установить, какой из трех сигналов больше.
- **порядковый признак:**  $\mathbb{D}_f$  - конечное упорядоченное множество; дополнительно к равенству есть отношение больше-меньше. Можно ввести признак "оценка, полученная студентом за экзамен": 2, 3, 4, 5. Не составляется труда определить, какая из оценок лучше.
- **количественный признак:** количество элементов является бесконечным;  $\mathbb{D}_f$  - множество действительных чисел (может быть множество рациональных чисел).

Поставим несколько задач, которые в принципе можно решать при определении параметров объектов, то есть при определении значений признаков объектов. Задача будет называться по-разному в зависимости от целевого признака:

- бинарный признак - **бинарная классификация**; 2 класса;
- номинальный признак - **задача классификации**; N классов;
- порядковый признак - **задача ранжирования**;
- количественный признак - **задача регрессии**.

### Определение областей. Регуляризация. Метод k ближайших соседей

В рамках лекции в основном будем касаться задачи классификации, особенно - наиболее простого случая - бинарной классификации.

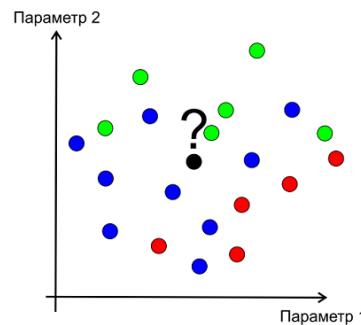


Рис. 9.1. Задача классификации

Предположим, что на плоскости параметров есть объекты: параметр 1 отложен по горизонтальной оси, параметр 2 - по вертикальной. Целевой признак - цвет точки, которую мы хотим определить (черная точка).

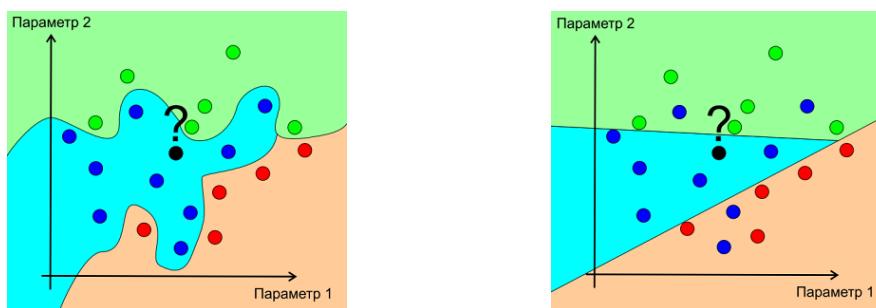


Рис. 9.2. Слева - определение областей; справа - регуляризация

- **Определение областей** - поставленная задача эквивалентна определению областей параметрического пространства, принадлежащих каждому классу: зеленые, синие, красные точки. Соответственно, необходимо провести границы между точками, тем самым построив математическую модель распределения. Любой объект, приходящий на вход алгоритма, отображается на плоскости точкой. В зависимости от того, куда она попала, мы понимаем, какого цвета она должна быть. В рассматриваемом примере точка попадает в синюю область,

соответственно, для черной точки можем предсказать значение цвета - синий. Как проводить границы научно обоснованно? Строго говоря, отнесение каждой точки к определенному цвету не является вполне достоверным: истинное значение цвета может быть иным в связи с существенной ошибкой измерения ("выброс"), за счет которой точка попала не туда, куда должна была попасть. Наличие "выбросов" приводит к тому, что провести границы оказывается довольно сложно. Они могут быть сильно изрезанными, несвязанными, что приводит к невысокой достоверности предсказаний, которые дает модель. Например, отнесение точки вблизи границы к зеленой или синей области будет во многом обусловлено небольшими шумами, всегда присутствующими в параметрах 1 и 2. Процедура подгона границы под данные (обучающая выборка), называется "явление переобучения". Проблема: при поступлении новых экспериментальных данных появляются большие ошибки; низкая предсказательная способность.

- **Регуляризация** - чтобы увеличить предсказательную силу модели, в меньшей степени учитывать индивидуальные шумы расположения различных точек на плоскости - границы можно сделать более ровными, обобщенными для всех точек. При этом допускаются ошибки: часть синих точек попадает в зеленую и красную области. Модель стала более простой, она будет иметь шанс предсказывать цвет точки лучше, чем первая. Процедура сглаживания границ называется регуляризацией. Регуляризация - один из способов уйти от переобучения: мы искусственно требуем, чтобы модель не просто подстраивалась под данные, а делала некоторые обобщения. Например, выделяла области, где расположены преимущественно зеленые, красные или синие точки, и все области имеют простую форму.

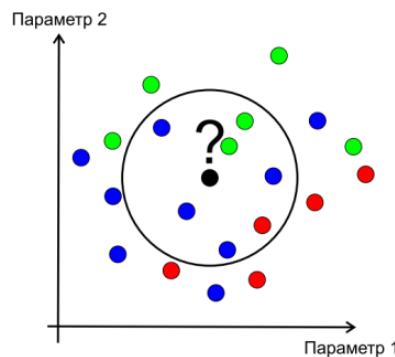


Рис. 9.3. Метод k ближайших соседей

- **Метод k ближайших соседей** - самый простой метод решения задачи: проведем сферу, центром которой будет черная точка; зададим значение  $k$  - гиперпараметр модели, который не будет зависеть от данных, поданных в модель из экспериментальной базы. Например,  $k = 7$ : пусть радиус сферы будет меньше, чем минимальное расстояние до присутствующих в обучающей выборке объектов; начнем расширять радиус до того момента, пока в сферу не попадет 7 точек - ближайших соседей: 4 синие, 2 зеленые, 1 красная. Приписываем черной

точке цвет, представителей которого наибольшее число, - синий. Метод позволяет легко проводить классификацию объектов, имеет широкое применение, но не лишен недостатков: метод одного ближайшего соседа привел бы к иному предсказанию.

**Валидация модели.** Для более строгого определения гиперпараметра модели проводится следующая процедура: зарезервируем часть экспериментальных данных для тестирования - тестовая выборка; на остальных данных проведем определение цвета каждой точки, построим несколько моделей. Варьируя параметр  $k$  в разумных пределах, получим большое количество моделей. Рассмотрим, какие из них дадут лучший результат на тестовой выборке, экстраполируем оптимальный на объединенную выборку. Данный метод позволяет подобрать гиперпараметры, которые иным методом подобрать было бы сложно. При разбитии на основную обучающую и отложенную тестовую выборку могут появиться разные значения  $k$ . Тогда используется кросс-валидация, предполагающая несколько разбиений, перемешивание объектов различным образом и выбор модели, которая в среднем хорошо работает при любом возможном разбиении выборки.

## Предварительная обработка данных

При построении моделей очень важна предварительная обработка данных. В зависимости от того, в каком виде представляются входные данные, можно получить хороший или плохой результат, поэтому для конкретной задачи необходимо пробовать различные варианты представления. Рассмотрим, что можно сделать в случае метода  $k$  ближайших соседей.

- **Нормализация данных:** если на модель приходит некоторое число  $x$ , оно заменяется на  $x' = (x - \min x) / (\max x - \min x)$ . Тогда, независимо от  $x$ , диапазон  $x'$  будет находиться от 0 до 1. Входные данные: рост и вес человека. Задача - определить пол. Известно, что рост и вес мужчин, как правило, превышают рост и вес женщин, поэтому по обоим признакам с некоторой точностью можно определить пол человека. Система единиц СИ: рост - величина порядка 1 - 2 м, меняется в небольших пределах; вес - от веса младенца до 150 кг (max), задается в больших пределах. Соответственно, по данным параметрам применение сферы не эффективно: разница в весе будет оказывать серьезное влияние на расстояние между двумя точками, разница в росте будет относительно небольшой, поэтому данный параметр откидывается. Если нормализовать данные, то рост и вес будут измеряться в диапазоне от 0 до 1 - параметры можно учитывать с одинаковым весом.
- **Выделение значимых параметров.** В ходе обработки в диапазон данных вмешивается некое значение, например, цвет глаз человека. Предположим, что в выборку попали в основном голубоглазые женщины и кареглазые мужчины, тогда построенная модель скорее всего будет учитывать этот признак для предсказания пола. В действительности с полом человека признак не связан. Исключение шумовых параметров - часто практикующаяся мера.

- **Взвешивание расстояний** - при рассмотрении метода  $k$  ближайших соседей учитывалось только количество соседей, но не расстояние до них. Например, для точки, находящейся между двумя зелеными, синие точки расположены далеко. В соответствии с методом может быть задан выбор синего цвета, несмотря на то, что рядом с точкой находится облако зеленых точек. Развитием метода является учет расстояния от точки до всех соседей:

$$Q_j = \sum d^{-2}(x, a_j)$$

Коэффициент  $Q_j$  равен сумме обратных квадратов расстояний от точки  $x$  до всех точек класса  $j$ , всех синих или зеленых точек. Определив наибольший параметр  $Q_j$ , используем его для предсказания. Данный метод используется в случае, когда есть возможность измерить расстояние между точками, применив евклидово расстояние, если параметров больше двух - более многомерное евклидово пространство. Данные методы получили название "метрические методы".

### Принятие решений в бинарной ситуации. Метод Байеса

Бинарная ситуация предполагает, что есть два варианта объектов. Чаще всего задачу связывают с обнаружением объектов. Например, радиолокатор определяет - летит ли самолет. Пусть есть множество сигналов  $X_1$ . Каждый из объектов, которые мы классифицируем, может соответствовать одному или другому классу: цель может присутствовать или отсутствовать. При этом выдвинем альтернативу: 1 - объект соответствует наличию цели; 0 - объект соответствует отсутствию цели. Получаем 4 возможных варианта:

		Истина	
		Нет	Да
Альтернатива	0	$p_0$	$p_1$
	1	Ложная тревога	Правильное обнаружение
		Правильное необнаружение	Пропуск цели

Предположим, что обладаем априорной информацией о задаче. Зададим её с помощью вероятности наличия ( $p_0$ ) или отсутствия цели ( $p_1$ ). Мы считаем, что они равны, тогда  $p_0 + p_1 = 1$ .

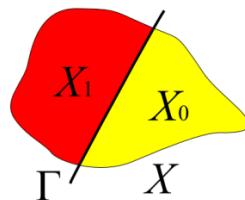


Рис. 9.4. Пространство сигнала

Принятие той или иной альтернативы соответствует тому, что все пространство сигналов необходимо разделить на две части, проведя границу Г: сигналы, говорящие от том, что цель есть; сигналы, говорящие о том, что цели нет.

Рассмотрим задачу о тестировании человека на COVID-19. Численность населения России на 2022 год составляет 144,5 млн человек. Статистические данные официальных источников: по состоянию на октябрь 2022 года в стране выявлено 8,3 млн случаев заболевания COVID-19, из них 7,2 млн человек выздоровело. Вероятность перенести заболевание для произвольного жителя страны:  $p(B) = (8316019 - 7213584)/144500000 \approx 0,76\%$ . Условие задачи: предположим, что существует супротест, дающий правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном teste?

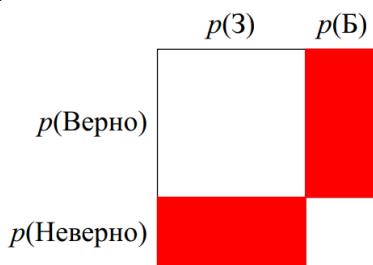


Рис. 9.5. Задача о тестировании на COVID-19, матрица

Есть априорная информация: вероятность, что человек здоров  $p(3)$ ; вероятность, что человек болен  $p(B) = 0,76\%$ . Возможны два результата тестирования: с некоторой вероятностью тест дает верный и неверный результат. Вероятность оказаться больным при положительном teste соответствует красным прямоугольникам на рис. 9.5.: человек болен, тест показал верный результат; тест выдал неверный результат, человек здоров. Положительный тест - область красного цвета. Вероятность оказаться больным - верхний красный прямоугольник, тогда его площадь делим на площадь всей области.

$$p(B|+) = \frac{p(B) \cdot p(B)}{p(B) \cdot p(B) + p(3) \cdot p(H)} = \frac{0,0076 \cdot 0,99}{0,0076 \cdot 0,99 + 0,9924 \cdot 0,01} \approx 0,43\%$$

Вывод: при наличии супротеста, дающего верный результат в 99% случаев, вероятность оказаться больным при положительном результате тестирования довольно низкая. Таким образом, при отсутствии дополнительной информации (симптомы), из математических соображений вытекает, что человек не болен.

Чтобы проверить болен ли человек, можно использовать 2 теста, каждый из которых дает правильный результат в 99%. Если оба теста положительны, результат равен 99,99%, соответственно, вероятность значительно вырастает. Обратим внимание на то, что при решении задачи значительную роль играет априорная вероятность  $p(B) = 0,76\%$ , тем самым полученный при тестировании результат занижается. Таким образом, очень важна и априорная информация, и апостериорная. Необходимо найти баланс - определение, какая информация является более важной.

## Метод Баєса

Принятие решений связано с получением выгод или убытков. Каждое решение несет за собой последствия. Чтобы построить математическую модель принятия решений и учесть последствия, введем "матрицу платежей". Возможны 4 варианта: правильное обнаружение, правильное необнаружение, пропуск цели, ложная тревога. Каждому приписываем стоимость, куда входят прибыли и убытки. Пересчитаем результаты в количественные характеристики, при этом рассматриваемые числа лежат за пределами решаемой задачи - даются экономической моделью или иными соображениями. Извне мы берем и априорные вероятности событий  $p_0, p_1$ . Предположим, что для каждого  $x \in X$  (сигнал или объект) известны условные вероятности: вероятность, что мы наблюдаем объект  $x$ , если известно, что цель есть -  $p(x|1)$ ; вероятность получить  $x$ , если объекта нет -  $p(x|0)$ . Если известны три параметра, можно применить метод Байеса. Введем две функции:

$$\text{Да}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_1 \\ 0 & x \in X_0 \end{cases} \quad \text{Нет}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_0 \\ 0 & x \in X_1 \end{cases}$$

Множества  $X_1, X_0$  получены путем проведения границы  $\Gamma$ , разделившей множество  $X$ . Введем функцию Риск; положим цену правильного обнаружения и необнаружения = 0, поскольку модель функционирует корректно. Если цель пропущена или возникла ложная тревога - допущена ошибка, за которую необходимо заплатить. Риск: цена ложной тревоги (ЦЛТ), умноженная на вероятность ложной тревоги + цена пропуска цели (ЦПЦ), умноженная на вероятность пропуска цели. Распишем вероятности по формуле условной вероятности. Используем обозначения для функций Да и Нет для преобразования интегралов в общий интеграл по множеству  $X$ .

$$\begin{aligned} \text{Риск} &= \text{ЦЛТ} \cdot p(x \in X_1, 0) + \text{ЦПЦ} \cdot p(x \in X_0, 1) = \\ &= \text{ЦЛТ} \int_{X_1} p(x|0) p_0 dx + \text{ЦПЦ} \int_{X_0} p(x|1) p_1 dx = \\ &= \int_X dx [\text{ЦЛТ} \cdot \text{Да}(x)p(x|0)p_0 + \text{ЦПЦ} \cdot \text{Нет}(x)p(x|1)p_1] \end{aligned}$$

Риск - функция, которую мы хотели бы минимизировать, снизив потери в случае, когда модель дает ошибки. Влиять на цены пропуска цели и ложной тревоги в рамках задачи о принятии решений мы не можем, как и на вероятности, но можем выбрать для каждого  $x$  значения Да или Нет. Функции бинарные: либо функция Да принимает значение 1, функция Нет - ноль; либо Да = 0, Нет = 1. Тогда в интеграле остается одно выражение для каждого из  $x$ . Соответственно, принять решение довольно просто: фиксируем  $x$  и выбираем из двух слагаемых меньшее. Цены и вероятности положительные, функции Да и Нет - не отрицательные. Минимизируем риск, выбирая для каждого  $x$  значения Да или Нет.

$$\frac{\text{ЦЛТ} \cdot p(x|0)p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p(x|1)p_1} \stackrel{\text{Да}}{\leqslant} 1 \quad \stackrel{\text{Нет}}{\leqslant} 1$$

Введем отношение правдоподобия:

$$L = \frac{p(x|1)}{p(x|0)} \begin{array}{l} \text{Да} \\ \leqslant \end{array} \frac{\text{ЦЛТ} \cdot p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p_1} \begin{array}{l} \text{Нет} \end{array}$$

В одну сторону сгруппированы члены, зависящие от  $x$ , с другой - значения, которые от  $x$  не зависят, соответственно  $\frac{\text{ЦЛТ} \cdot p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p_1}$  - пороговое значение. Вывод: есть пороговое значение, которое определяется ценами ложной тревоги и пропуска цели; вероятностью того, что цель есть, либо цели нет. Используя модель условных вероятностей, для каждого  $x$  сравним отношение правдоподобия с пороговым значением.

Метод Байеса в целом является эффективным, но обладает существенным недостатком: для совершения операции необходимо знать цены, априорные вероятности, модель условных вероятностей. Это означает, что перед решением задачи о наличии цели, необходимо построить вероятностные модели. Если априорные данные отсутствуют, можно положить  $p_0 = p_1$  - у нас нет предпочтений относительно того, чтобы говорить, что цели нет; нет предпочтений, чтобы говорить, что цель есть. В этом случае влияют только цены. Кроме того, если отсутствует информация о ценах, либо их сложно оценить, их также можно приравнять; в этом случае значение для сравнения - 1. Тогда мы сравниваем распределение вероятности  $p(x|1)$  с распределением вероятности  $p(x|0)$ .

### Построение разделяющих поверхностей

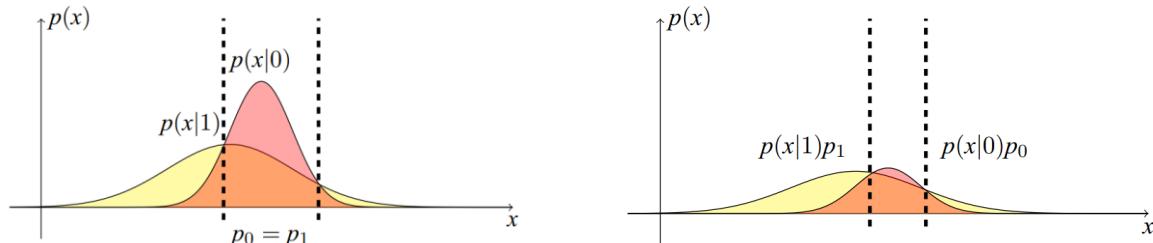


Рис. 9.6. Построение разделяющих поверхностей

- левый график на рис. 9.6. Если отсутствует информация о ценах и априорных вероятностях, то необходимо решить: какая из моделей дает лучший результат; какая из двух условных вероятностей больше. Если  $p_0 = p_1$  (предпочтений нет), разделяющие поверхности (черные пунктирные линии) проводятся через точки пересечения графиков.
- правый график на рис. 9.6. Предположим, что заданы априорные значения  $p_0, p_1$ , тогда условные вероятности масштабируются. Это приводит к смещению разделяющих поверхностей. Для левой и правой области графика для всех значений параметра  $x$  цель есть, в центральной области - цели нет.

### Наивный байесовский классификатор

Рассмотрим, что из себя представляют вероятностные распределения  $p(x|1)$ ,  $p(x|0)$ . В общем случае  $x$  представляет собой вектор из большого количества параметров, соответственно, в основанном на методе Байеса подходе необходимо оценивать вероятностные распределения в многомерном случае. Задача очень сложна, потому что вероятностные распределения обычно можно построить на основании экспериментальных данных, которых всегда недостаточно. Чем более многомерна признаковая модель, тем сложнее строить распределения. Представим, что мы решаем задачу определения пола человека, основываясь на данных о его весе и росте - двух параметрах. В качестве выборки (экспериментальные данные) используем информацию о 10 пациентах и заполним таблицу, где по столбцам и строкам отложены значения веса и роста. Проблема построения вероятностных моделей будет заключаться в том, что таблица будет сильно разреженной. Если разбить интервал веса и роста на отдельные участки (10 по весу, 10 по росту: 110 - 120 см, 120 - 130 см и т.д.), в каждый интервал попадет мало значений. Интервалов – 100, с учетом того, что параметра два: для каждого значения веса есть 10 интервалов роста, для каждого значения роста - 10 интервалов веса. Поскольку значительное количество ячеек таблицы останутся незаполненными, адекватно оценить двумерную плотность распределения мы не сможем. При этом можно оценить одномерную плотность распределения: 10 интервалов по весу или по росту - 10 точек. Для решения этой задачи предложен подход, который называется "наивный байесовский классификатор".

**Определение 9.2: Наивный байесовский классификатор (naïve Bayes)** — специальный частный случай байесовского классификатора, основанный на дополнительном предположении, что объекты описываются статистически независимыми признаками

В рамках рассматриваемой задачи будем считать, что рост и вес человека - независимые признаки. Тогда условную вероятность можно представить, как произведение большого количества множителей, каждый из которых - одномерная плотность распределения.

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{j=1}^k w(x_j | \theta)$$

Одномерную плотность распределения оценить гораздо проще, чем многомерную, потому что весь диапазон изменения каждой  $j$ -ой переменной разбивается на  $n$  интервалов. В ходе оценивания многомерной плотности количество  $n$  возводится в степень, соответствующую числу параметров, то есть рост степенной и очень быстрый. Несмотря на то, что на практике это условие почти никогда не выполняется, данный подход используется, чтобы плотности можно было оценить.

## Лекция 9. Оценивание параметров сигналов. Часть 2

### Оценка постоянных параметров сигнала. Байесовский подход

В первой части лекции была рассмотрена задача классификации, в частности, задача бинарной классификации, когда интересующий нас параметр принимал два значения. Если параметр является вещественным числом, задачу можно решать иначе. В ходе второй части лекции мы познакомимся с тем, как ставить и решать задачи регрессии.

Необходимо построить оценку  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$ . В эксперименте получены значения  $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$ ; задана плотность вероятности  $w(\vec{y}|\theta)$  - вероятность получить вектор  $\vec{y}$  при каждом параметре  $\theta$ . Априори известно распределение  $w(\theta)$ .

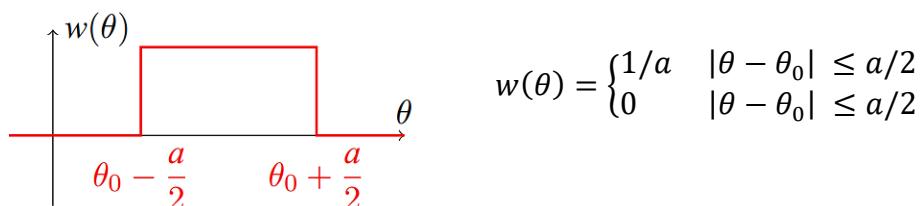


Рис. 9.7. Априорное распределение параметра

- если  $a \rightarrow 0$  - роль априорной информации высока. Предположим, что изучаемый в рамках задачи параметр лежит в некотором диапазоне; центр диапазона - значение  $\theta_0$ , ширина -  $a$ . Тогда априорное распределение параметра задается прямоугольной функцией (красная линия на рис. 9.7.), и мы можем её учесть. Обратим внимание на ширину функции. Известно, что температура кипения воды - 100°C. Если при измерении в эксперименте её значение оказалось отличным от 100°C, мы будем доверять априорной информации, в меньшей степени - полученным в эксперименте результатам. Причиной может быть большая погрешность, которую выдает датчик или изменение параметров среды (давление), тогда необходимо учитывать и показания датчика. Соответственно, необходимо одновременно учитывать и априорную информацию, и апостериорную информацию, полученную в эксперименте. Учет информации будет базироваться на той мере неопределенности, которая вносится распределениями: чем меньше ширина априорного распределения (параметр  $a$ ), тем в большей степени необходимо учесть априорную информацию.
- если  $a \rightarrow \infty$ , важны данные, полученные в эксперименте. Если бы температура кипения воды была неизвестна, это была бы температура кипения неизвестной жидкости. Тогда вносить распределение смысла нет, скорее всего априорное распределение будет равномерным. В этом случае мы будем придавать наибольшее значение данным эксперимента.

### Байесовский подход

В первой части лекции рассмотрен Байесовский подход к задаче принятия решения, когда ситуация бинарная (два возможных решения). Теперь есть фактически бесконечное количество вариантов принятия решения, потому что целевая переменная - оценка  $\hat{\theta}$  принимает бесконечное количество значений. Пусть в эксперименте есть данные  $\vec{y}$ , строим оценку  $\hat{\theta}$  как функцию данных  $\hat{\theta}(\vec{y})$ , полученное число будет не совпадать с истинным значением  $\theta$ . Разница равна переменной  $\epsilon$ , которую будем называть ошибкой оценки:

$$\epsilon(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) = \hat{\theta}(\vec{y}) - \theta$$

Совершая ошибку - неправильно предсказывая класс объекта, в данном случае - параметр  $\theta$ , мы должны заплатить определенную цену. Цена ошибки: цена ложной тревоги, цена пропуска цели. Если есть непрерывная функция  $\hat{\theta}$ , то в общем случае необходимо заложить цену ошибки в виде функции, которая называется характеристика потерь  $\mathcal{L}(\epsilon)$ :

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y}))$$

Мы бы хотели платить за ошибки в среднем минимальную цену, то есть хотим, чтобы введенная характеристика потерь была минимальной. Получаем условие: математическое ожидание характеристики потерь должно быть минимальным.

$$\mathcal{M}\{\mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y}))\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta \vec{y})$$

Математическое ожидание содержит в себе усреднение по всем возможным реализациям параметра  $\theta$ , по истинным значениям параметра  $\theta$ , кроме того, усреднение по всем возможным результатам эксперимента, то есть по пространству, где находится вектор  $\vec{y}$ . Поскольку берется среднее значение, необходимо учесть совместную плотность распределения вероятности двух параметров. Минимизируем интеграл не абстрактно - рассмотрим, что получится, если выбирать различные функции потерь.

## Примеры функции потерь

- Квадратичная:  $\mathcal{L}_{\text{quad}}(\theta; \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$
- Модульная:  $\mathcal{L}_{\text{abs}}(\theta; \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$
- Простая:  $\mathcal{L}_{\text{simple}}(\theta; \hat{\theta}) = -\delta(\theta - \hat{\theta})$

Все функции достигают своего минимума в точке, когда  $\theta = \hat{\theta}$ . В точке, где для оценки  $\hat{\theta}$  будет получено правильное значение  $\theta$ , функция потерь будет минимальной. Это то, куда мы стремимся. Рассмотрим общий случай, когда задана произвольная функция потерь.

$$\mathcal{M}\{\mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y}))\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta \vec{y}) =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta|\vec{y}) w(\vec{y}) = \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} w(\vec{y}) \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta|\vec{y})}_{\mathcal{L}_a} \\ \mathcal{L}_a \rightarrow \min \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Задача: построить оценку  $\hat{\theta}$ , где средняя функция потерь будет минимальной. Это означает, что для каждого набора экспериментальных данных необходимо минимизировать интеграл, который обозначается  $\mathcal{L}_a$ . Полученное условие можно принять как необходимое значение для поиска  $\hat{\theta}$ . Когда мы будем устремлять интеграл к минимуму, от  $\hat{\theta}$  зависит только характеристика потерь  $\mathcal{L}$ , плотность распределения неотрицательна, производная должна быть = 0.

**Квадратичная функция потерь:**  $\mathcal{L}_{\text{quad}}(\theta; \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta}{\int w(\theta|\vec{y}) d\theta} = \int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta$$

Оценка  $\hat{\theta}$  равна частному двух интегралов; интеграл в знаменателе  $\equiv 1$  по определению плотности распределения. Результат - математическое ожидание для апостериорного распределения  $w(\theta|\vec{y})$ .

**Простая функция потерь:**  $\mathcal{L}_{\text{simple}}(\theta; \hat{\theta}) = -\delta(\theta - \hat{\theta})$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \int w(\theta|\vec{y}) \delta(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) d\theta = \frac{dw(\theta|\vec{y})}{d\hat{\theta}} = 0$$

Это максимум апостериорного распределения  $w(\theta|\vec{y})$

### Оценки для симметричных и асимметричных распределений

Типичная форма распределения имеет вид Гаусса.

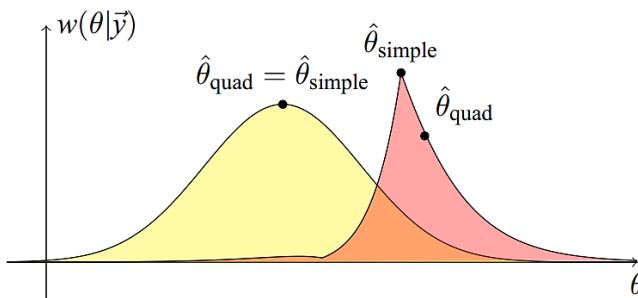


Рис. 9.8. Оценки для симметричных и асимметричных распределений

Если для гауссовского распределения взять среднее значение, оно окажется в месте, обозначенном на рис. 9.8. черной точкой. Если взять максимум распределения, он попадет в эту же точку. Таким образом, для гауссовского распределения среднене

значение совпадает максимальным значением плотности распределения. Если распределение симметричное с максимумом посередине, то  $\hat{\theta}_{\text{quad}} = \hat{\theta}_{\text{simple}}$

Всегда ли это так? Ответ отрицательный: розовым цветом на рис. 9.8. обозначено несимметричное распределение: простая функция потерь дает оценку в максимуме плотности распределения; квадратичная функция потерь смещена относительно максимума вправо.

Выбор функции распределения зависит от решаемой задачи. В ряде случаев используется квадратичная функция распределения, потому что она достаточно хороша в плане математических выкладок, с ней можно строить сложные аналитические теории. Простая функция потерь также используется при построении теорий. Стоит ли использовать данные функции в реальных задачах - определяется результатами, которые модель выдает на отложенной тестовой выборке.

### Функция правдоподобия. Наблюдения параметра на фоне гауссовского шума

Формула Байеса позволяет записать выражение для апостериорной функции распределения, для которой в предыдущих выкладках искались максимум либо среднее значение. В ряде случаев работать с формулой непосредственно оказывается неудобно, поэтому представим её в виде тождества:

$$w(\theta|\vec{y})w(\vec{y}) = w(\vec{y}|\theta)w(\theta) \Rightarrow w(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{w(\vec{y})}w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$$

**Определение 9.3: Функция правдоподобия** - условная вероятность  $L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta)$ , взятая при фиксированных (полученных в эксперименте) значениях  $\vec{y}$

- **Метод максимума апостериорной функции распределения  $w(\theta|\vec{y})$ :** применим простую функцию потерь, тогда есть необходимость максимизировать апостериорную плотность распределения; таким образом, максимизируем всю величину с учетом априорной информации и данных эксперимента;  $\frac{1}{w(\vec{y})}$  - нормировочный множитель.
- **Метод максимального правдоподобия  $L(\theta)$ :** неизвестно, как априорно распределен параметр  $\theta$ ; максимизируем правую часть равенства по  $\theta$ , поэтому  $\frac{1}{w(\vec{y})}$  не участвует в процессе, фактически максимизируем по параметру  $\theta$  величину  $w(\theta|\vec{y})$  - функцию правдоподобия.

### Наблюдения параметра на фоне гауссовского шума

Пример: есть набор наблюдений параметра  $\theta$  (постоянная величина):  $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  на фоне гауссовского шума  $\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ , имеющего среднее значение  $(0; \sigma^2)$ . Модель системы: в каком-то  $j$ -ом наблюдении есть сумма истинного значения параметра  $\theta$  и шума:  $y_j = \theta + n_j$ . Задача: найти оценку параметра  $\theta$ . Априорное распределение параметра нормально:

$$w(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

Среднее значение априорного распределения  $\theta_0$ , дисперсия –  $\sigma_0^2$ ; величина  $\sigma^2$  - дисперсия шума, характеризует данные эксперимента.

### Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \Rightarrow n_j = y_j - \theta$$

$n_j$  удовлетворяет гауссовскому распределению. Функция правдоподобия: поскольку шум предполагается случайным, совместная для всех данных эксперимента плотность равна произведению отдельных плотностей распределения для каждого  $j$ -го измерения. Фиксация значения  $y_j$  ровно тоже самое, что фиксация значения шума:  $n_j = y_j - \theta$ . Плотность распределения шума - гауссовское распределение.

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

Найдем значение параметра  $\theta$ , при котором функция правдоподобия достигнет максимума. Воспользуемся приемом замены на максимизацию логарифма правдоподобия:  $\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k (y_j - \theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{\text{mle}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$$

Логарифм - монотонно возрастающая функция, соответственно, максимум функции будет находиться в той же точке, что максимум логарифма функции. Индекс mle происходит от названия метода: англ. **maximum likelihood estimation (MLE)**. Дисперсия оценки:

$$\sigma_{\text{mle}}^2 = \mathcal{M}\{(\hat{\theta}_{\text{mle}} - \theta)^2\} = \mathcal{M}\left\{\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j - \theta\right)^2\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \underbrace{(y_j - \theta)}_{n_j}^2\right\} = \frac{\sigma^2}{k}$$

### Метод максимума апостериорной функции распределения

Для решения задачи используем и апостериорную, и априорную информацию:

$$\begin{aligned} w(\theta|\vec{y}) &= \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta) w(\theta) = \\ &= \frac{1}{w(\vec{y})} \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2} \sigma^k \sigma_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\theta - \theta_0)^2\right) \end{aligned}$$

$$\max w(\theta|\vec{y}) \Leftrightarrow \max \ln w(\theta|\vec{y})$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{\theta}_{\text{map}}) + \frac{1}{2\sigma_0^2} (\hat{\theta}_{\text{map}} - \theta_0) = 0$$

Индекс map: англ. **maximum a posteriori probability (MAP)**.

$$\hat{\theta}_{\text{map}} \left( \frac{k}{\sigma_{\text{mle}}^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \right) = \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j}_{\hat{\theta}_{\text{mle}}^2} \frac{k}{\sigma_{\text{mle}}^2}$$

- $\sigma_{\text{mle}}^2$  - среднее значение данных эксперимента; оценка по методу максимального правдоподобия;
- $1/\sigma_{\text{mle}}^2$  - обратная дисперсии для метода максимального правдоподобия.

Итоговая оценка по методу апостериорной функции распределения:

$$\hat{\theta}_{\text{map}} = \frac{\sigma_{\text{mle}}^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \theta_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \hat{\theta}_{\text{mle}}$$

Итоговая оценка: произведение весового коэффициента и значения  $\theta_0$  суммируется с произведением некоторого другого весового коэффициента и оценки максимального правдоподобия. Весовые коэффициенты зависят от дисперсии двух величин:  $\sigma_{\text{mle}}^2$  - дисперсия оценки максимального правдоподобия, полученная в эксперименте;  $\sigma_0^2$  - дисперсия априорной плотности распределения. Рассмотрим предельные случаи, когда каждая из величин либо  $\rightarrow 0$ , либо  $\rightarrow \infty$

- Если  $\sigma_0^2 \gg \sigma_{\text{mle}}^2$ , то  $\hat{\theta}_{\text{map}} \approx \hat{\theta}_{\text{mle}}$ , то есть эксперимент имеет решающее значение, априорная информация не важна; ошибка эксперимента гораздо меньше, чем ошибка, свойственная априорной информации;
- Если  $\sigma_0^2 \ll \sigma_{\text{mle}}^2$ , то оценка максимума апостериорной функции распределения будет практически совпадать с априорными данными - данные эксперимента почти несущественны, но некоторым табличным данным (априорной информации) необходимо придавать максимальное значение.

Оценка по методу апостериорной функции распределения в целом позволяет наиболее целостным, разумным образом соединять в себе и априорную, и апостериорную информацию. В зависимости от оценок и дисперсии оценок в том и другом случае получаем результат с преобладанием одной или другой величины. Отметим, что в качестве априорной информации может выступать результат предыдущего эксперимента: у полученной оценки есть погрешность, обозначим оценку  $\theta_0$ , её дисперсию -  $\sigma_0^2$ . Во втором эксперименте получаем оценку максимального правдоподобия и дисперсии данных и объединяя данные обоих экспериментов по формуле. Это позволяет постепенно проводить рекуррентные оценки, когда каждое следующее измерение улучшает качество предыдущего.

## Линейная регрессия

В рассмотренном примере был единственный параметр  $\theta$ , независящий от номера измерения. Часто в качестве данных эксперимента приходит несколько параметров, что формирует набор величин со взаимосвязями. Простой вид взаимосвязи между признаками объектов - линейная взаимосвязь.

- Пусть в эксперименте векторы  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l\}$  (регрессоры) содержат значения независимых переменных. Для каждого объекта будут формироваться признаки: для первого объекта -  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  и т.д. Поскольку объектов много, каждый признак будет вектором значений.
- Пусть вектор  $\vec{y}$  содержит значения зависимой переменной, которую необходимо предсказать.
- Требуется определить зависимость  $\vec{y}$  от всех данных  $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l\}$ . Если векторы записать в виде столбцов, получится матрица объекты-признаки, содержащая  $l$  столбцов;  $n$  - количество объектов.
- Модель:  $\vec{y} = \mathcal{X}\vec{a} + \vec{\epsilon}$

Простейшая взаимосвязь матрицы и вектора  $\vec{y}$  дается линейным образом.  $\vec{\epsilon}$  - шумы, имеющие место во всех возможных экспериментах. Для каждого компонента  $\vec{\epsilon}$  будем считать  $\epsilon_j = \text{norm}(0; \sigma^2)$  - гауссовское распределение.

- Предполагается, что неизвестные векторы  $\vec{a} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_l\}$  распределены нормально. Обычно в гауссовском распределении как стандартное отклонение используется величина  $\sigma$ , здесь введена обратная величина  $\lambda$ :

- $w(\vec{a}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^{l/2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2\right)$  - априорная информация о коэффициентах  $\vec{a}$
- матрица объекты-признаки - результаты экспериментов.

Когда проводится линейная зависимость, в качестве одного из признаков в матрицу часто добавляют константу, например, единицу; один из столбцов матрицы - столбец из констант. Это позволяет находить зависимости  $\vec{y} = \mathcal{X}\vec{a} + \vec{b}$ , при этом значение  $\vec{b}$  не рассматривается как ещё одна переменная. Наличие такой матрицы обобщает случай, когда есть постоянная величина, и случай, когда она по модели не предусмотрена. Для поиска коэффициентов  $\vec{a}$  применим метод максимального правдоподобия.

### Метод максимального правдоподобия

$$\ln L(\vec{a}) = \ln w(\vec{y}|\mathcal{X}, \vec{a}) = \sum_{i=1}^k \left[ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(y_i - \sum_{j=1}^l x_{ij} a_j)^2}{2\sigma^2} \right]$$

В качестве параметров функции правдоподобия будут выступать коэффициенты  $\vec{a}$ . Все измерения предполагаются независимыми; все плотности распределения гауссовские.

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \left( y_i - \sum_{j=1}^i x_{ij} a_j \right)^2 \rightarrow \min$$

Необходимо добиться, чтобы логарифм максимального правдоподобия был максимальным. Задача - метод наименьших квадратов: подбираем такие значения параметра  $\vec{a}$ , что сумма квадратов разностей наблюдаемых значений целевой переменной  $y_i$  и предсказаний  $x_{ij}a_i$  - минимальная.

### Метод Байеса

Метод апостериорной плотности распределения: логарифм апостериорной функции распределения состоит из логарифма функции правдоподобия и логарифма априорной функции распределения.

$$\ln L(\vec{a}) + \ln w(\vec{a}) = - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - \sum_{j=1}^i x_{ij} a_j)^2}{2\sigma^2} + \ln \frac{\lambda}{(2\pi)^{l/2}} - \frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2$$
$$\underbrace{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \left( y_i - \sum_{j=1}^i X_{ij} a_j \right)^2}_{\text{квадратичная ошибка}} + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2}_{\text{L2-регуляризация}} \rightarrow \min$$

Такого рода задача - метод наименьших квадратов, но помимо минимизации суммы квадратов отклонений мы требуем минимизацию величины  $\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2$ . Минимизируя квадратичную ошибку, подбираем такие параметры  $\vec{a}$ , чтобы данные  $y, x$  были максимально согласованы, то есть подстраиваемся под данные. Если минимизировать второе слагаемое, коэффициенты  $\vec{a}$  должны быть максимально поджаты к нулю, не принимать больших значений. Процедура наложения дополнительных ограничений сводится к регуляризации решения. В данном случае она называется L2-регуляризация. С одной стороны, необходимо провести гиперплоскость - плоскость в пространстве большого количества измерений, чтобы она максимально хорошо проходила через данные. Однако, есть задача не сильно подстраиваться под данные, чтобы модель не столько запоминала их, сколько делала обобщение, чтобы было возможно предложить новые. Эти результаты позволяет получить второе слагаемое.

В эксперименте в матрице  $\mathcal{X}$  есть  $l$  признаков и  $n$  объектов; матрица не является квадратной. В этом случае простое обращение невозможно, тогда результат выражения ищется по формуле:

$$\vec{a} = \mathcal{X}(\mathcal{X}^T \mathcal{X} + \sigma \lambda \mathcal{E})^{-1} \mathcal{X}^T \vec{y}$$

Величина носит название "псевдообратная матрица". Чем больше коэффициент регуляризации  $\lambda$  и коэффициент  $\sigma$ , тем больше обращаемая матрица близка к единичной матрице  $\mathcal{E}$ . Если матрица  $\mathcal{X}^T \mathcal{X}$  окажется неудачной для обращения (собственные значения близки к нулю), собственные значения обратной матрицы будут

уходить на бесконечность, принимать большие значения. Это приведет к тому, что параметры  $\vec{a}$  будут большими и непредсказуемыми. Чтобы добавить устойчивость в решение, добавим поправку в виде единичной матрицы, умноженной на коэффициент. Данная процедура позволяет ограничить рост коэффициентов. Возникновения данной проблемы в задаче линейной регрессии часто свидетельствует о том, что включенные в модель признаки являются линейно зависимыми. Это приводит к ухудшению прогнозов и делает модель переобученной на значения, которые ей непосредственно даны. Типичный пример: есть задача кредитного scoring - банк хочет понять, можно ли выдавать клиенту кредит; при положительном решении - какого размера. В качестве признаков выступает информация о том, сколько зарабатывает клиент, его супруг (a), вся семья в целом. Если в семье есть члены, имеющие дополнительные доходы, то сумма первых двух чисел неизбежно будет равна третьему. Однако, в большинстве случаев это действительно будет так. Тогда в рамках задачи два из имеющихся признаков в точности дают третий. Предположим, что мы решили задачу минимизации квадратичной ошибки. Поскольку в задаче есть зависимости, близкие к линейным, всегда можно сделать к коэффициентам  $\vec{a}$  некоторые добавки, согласованные между собой и матрицей  $X$  таким образом, что их прибавление к коэффициенту не приведет к изменению результата. Предположим, что доход клиента, супруга и общий доход на семью = 1, 1, 2, тогда добавка в виде  $x, x, -x$  к общей сумме даст 0 и не приведет к изменению суммы. Соответственно, имеем возможность получения не единственного решения. На квадратичной ошибке добавки сказываться не будут.

Коэффициенты могут принимать очень большие значения - в зависимости от того, как решалась задача, а также от погрешностей, вызванных неточностью вычислений. Если в модели появятся незначительные шумовые искажения, они будут умножены на большие числа, - модель будет давать оценки, сильно отличающиеся от истинных значений. На тренировочной выборке - малую квадратичную ошибку, на тестовой выборке, для которой оптимизации не было, - ошибки будут большими. Для того, чтобы ограничить возможности роста коэффициентов, применяется регуляризация, с помощью которой накладываются дополнительные условия и растущие коэффициенты притягиваются к нулю. Из всех возможных коэффициентов выбираются те, которые в среднем являются минимальными.

## Определение вероятностей исходов

### Эксперимент с монетой: метод максимального правдоподобия

Мы рассмотрели задачи определения параметра  $\theta$ , заданного детерминированным образом. Часто бывает, что мы оперируем не столько понятием конкретной физической величины, сколько вероятностью возникновения той или иной ситуации. В данном случае непрерывной величиной, которую мы хотим оценить, является сама вероятность. Рассмотрим задачи определения вероятности того или иного события. Поскольку вероятность непрерывная, данные задачи следует относить к классу "задачи регрессии". Если есть задача определения вероятности в бинарной ситуации, то в зависимости от того, какое событие является более вероятным, можно

принимать решение о предсказании события. Таким образом, это уже задача классификации. Соответственно, задачу регрессии можно преобразовать в задачу классификации.

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента  $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Значения  $y = 0$  (решка), либо 1 (орел). Пусть  $\theta$  - вероятность выпадения орла, тогда в  $j$ -ом эксперименте выпадение результата  $y_j$ :

$$p(y_j|\theta) = \theta^{y_j} (1-\theta)^{1-y_j}$$

Предположим, что значение  $j$ -го эксперимента = 1: вероятность выпадения орла, при условии, что она равна  $\theta$ , в точности равна  $\theta$ . Таким образом, формула самосогласованная. Если  $y_j = 0$ : вероятность выпадения решки  $1-\theta$  при вероятности выпадения орла равной  $\theta$ . Оценим вероятность  $\theta$ , используя метод максимального правдоподобия:

$$\ln L = \sum_{j=1}^k \ln p(y_j|\theta) = \sum_{j=1}^k (y_j \ln \theta + (1-y_j) \ln(1-\theta)) \rightarrow \max$$

$$\hat{\theta}_{\text{mle}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_i$$

Посчитав, сколько раз из  $k$  - измерений выпал орел, получим оценку для вероятности выпадения орла.

### Эксперимент с монетой: байесовский подход

Рассмотрим задачу с точки зрения метода апостериорной плотности распределения вероятности. Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента  $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Плотность распределения максимизирована:

$$p(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{p(\vec{y})} p(\vec{y}|\theta) p(\theta)$$

$$\ln p(\theta|\vec{y}) = \ln p(\vec{y}|\theta) + \ln p(\theta) - \ln p(\vec{y})$$

$$\ln L + \ln p(\theta) \rightarrow \max$$

Реализация в эксперименте:

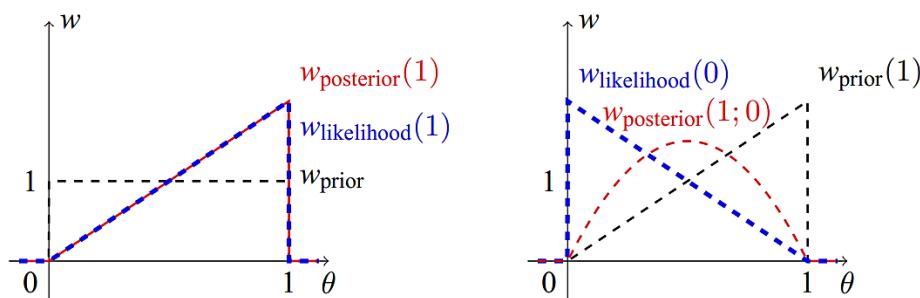


Рис. 9.9. Оценки для симметричных и асимметричных распределений

- предположим, что монета подбрасывается несколько раз; изначально есть априорное распределение вероятности  $\mathcal{W}_{prior}$  от 0 до 1 (представлена черным пунктиром на левом графике на рис 9.9.). Первое подкидывание монеты - выпал орел, отображается (1). С точки зрения максимума функция правдоподобия  $\mathcal{W}_{likelihood}$  (синий пунктир)  $\theta$  принимает значение 1. Поскольку апостериорная плотность распределения  $\mathcal{W}_{posterior}$  везде = 1, изменений не происходит, максимум в той же точке.
- повторное подкидывание монеты (правый график на рис. 9.9.): будем считать априорной вероятностью результаты первого эксперимента (черный пунктир). Функция правдоподобия  $\mathcal{W}_{likelihood}$  - линейная, имеет максимум в точке  $\theta = 1$ . Исходим из того, что в первом эксперименте выпал 0. Логично предположить, что вероятность выпадения орла в данном случае нулевая, поскольку он ни разу не выпадал.  $\mathcal{W}_{posterior}$  будет равна произведению линейных функций (красная парабола), максимум в точке  $\theta = 1/2$ . Таким образом, апостериорная плотность распределения дает адекватный результат: один раз выпал орел, один раз - решка; вероятность выпадения орла - 1/2.

Вывод: при малом числе бросков метод максимального правдоподобия обладает склонностью к переобучению, поскольку учитывается довольно много информации из эксперимента, кроме того, для метода нет ограничений - параметры модели оптимизируются так, чтобы экспериментальные данные наилучшим образом ей удовлетворяли. Отметим, что при этом может происходить слишком сильная подгонка модели под конкретные данные; она начинает их запоминать, это и есть переобучение. Вторая недостаток - отсутствие возможности внесения дополнительной информации о картине мира, изучаемой системе. Метод апостериорной плотности распределения их устраниет. За счет внесения дополнительной априорной информации с помощью метода статистического распределения убирается склонность к переобучению, априорная информация может играть роль регуляризации. Модель становится более адекватной и лучше ведет себя, когда в данных присутствует линия независимости.

## Логистическая функция ошибки

У рассмотренной задачи с монетой есть всего два исхода. С одной стороны, мы рассматриваем вероятность - задача регрессии, с другой стороны - исходов два, то есть задача бинарная. Возможно обобщение: объект, обладающий признаками, заданными вектором  $\vec{x}$ , относится к  $j$ -му классу с вероятностью  $p_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, s$ . Поставим задачу определения вероятностей:

- классы являются взаимно исключающими - объект относится к одному из  $s$  классов. Например, сигнал светофора не может быть одновременно желтым и красным;
- неисключительная задача - объект с некоторой вероятностью относится к первому классу, с некоторой вероятностью - ко второму, при этом может одновременно относиться к обоим классам. Например, на фотографии с некоторой вероятностью изображена кошка, с некоторой вероятностью

изображена собака, с некоторой вероятностью - одновременно могут присутствовать оба животных.

Предположим, что классы исключительные, тогда все вероятности в сумме = 1. Пусть алгоритм на основе вектора  $\vec{x}$  определяет вероятность как  $q_j$  (истинная вероятность  $p_j$ ). Необходимо понять, насколько хорошо работает алгоритм; каким образом можно подобрать параметры, чтобы он работал ещё лучше. При значительном количестве испытаний  $N \gg 1$   $j$ -й класс реализовался  $n_j = Np_j$  раз.  $q_1, q_2, \dots, q_s$  - параметры модели; будем считать, что объекты независимые. Функция правдоподобия:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s) = p(n_1, n_2, \dots, n_s | q_1, q_2, \dots, q_s) = \prod_{j=1}^s q_j^{Np_j}$$

Поставим задачу минимизации функции  $-\ln L$  - логистическая функция ошибки.

$$\mathcal{L}_{\log} \equiv -\ln L(q_1, q_2, \dots, q_s) = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j = NH(p, q) \rightarrow \min$$

**Определение 9.4: Перекрестная энтропия (cross entropy)** — функция между двумя распределениями вероятностей  $H(p, q) = -\sum p_j \ln q_j$

### Минимум перекрестной энтропии

Необходимо минимизировать перекрестную энтропию. Если подбирать алгоритм, исходя из этого критерия, получим хороший результат: распределение  $q_j$  будет приближаться к распределению  $p_j$ . Ограничения:

- $\sum q_j = 1$  - задача об исключительной принадлежности объекта к  $j$ -му классу;
- $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$  - производная должна быть равна нулю для любого  $j$ .

Такая задача является задачей на условный экстремум; решается с помощью неопределенных множителей Лагранжа -  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}\xi &= -\sum p_j \ln q_j + \lambda \left(1 - \sum q_j\right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_j} &= 0; \quad -\frac{p_j}{q_j} - \lambda = 0; \quad q_j = -\frac{p_j}{\lambda} \\ \sum q_j &= -\sum \frac{p_j}{\lambda} = \frac{-1}{\lambda}; \quad \lambda = 1\end{aligned}$$

Вывод: метод минимума перекрестной энтропии приводит к  $q_j = p_j$ . Функция минимизирует различия между двумя распределениями вероятности, что соответствует условиям задачи.

## Логистическая регрессия

$$\mathcal{L}_{\log} = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j$$

Достоверно известно, что объект принадлежит классу  $t$ . Постановка задачи соответствует логистической регрессии, потому что мы оцениваем вероятности. Вероятность - величина непрерывная. С другой стороны, задача является задачей классификации, потому что необходимо определить, к какому классу следует отнести объект, но уже на основании оцененных вероятностей.

$p_j = \delta(j, t); p_j = 1, \text{ если } j = t; p_j = 0, \text{ если } j \neq t$  - вероятность сконцентрирована в одном классе, тогда из минимизации функции получаем

$$\mathcal{L}_{\log} = -\ln q_j$$

Рассмотрим более сложную модель, использующую внутри себя линейные взаимосвязи между признаками объекта и итоговой вероятностью. Описание объектов - матрица  $\chi_{ij}$  объекты-признаки, вектор  $a_j$  весов. В рамках модели получаем набор чисел, которые хотим интерпретировать как вероятности принадлежности объекта к одному из классов. Проблема: полученное в ходе проведения линейной операции не соответствует понятию вероятности. Если есть  $s$  классов, все вероятности принадлежности к каждому из классов должны быть: неотрицательны;  $\leq 1$ ; в сумме давать 1. Чтобы вектор удовлетворял требованиям, его необходимо отнормировать и определенным образом преобразовать. В теории обработки данных для преобразования значений к набору вероятностей используется функция softmax.

$$q_j = \text{softmax} \left( \sum_{j=1}^l \chi_{ij} a_j \right) = \frac{\exp(\sum_{j=1}^l \chi_{ij} a_j)}{\sum_{j=1}^s \exp(\sum_{j=1}^l \chi_{ij} a_j)}$$

Числитель: после линейного преобразования получен вектор из  $s$  компонент, берем экспоненту от  $j$ -го вектора. Поскольку числа действительные, результат - величина неотрицательная (удовлетворяет условиям). Знаменатель: содержит суммы по всем компонентам вектора, не может быть меньшее, чем числитель. Тогда  $q_j$  заключено в пределах от 0 до 1, как и положено вероятности. Таким образом, сумма числителей есть знаменатель, тогда сумма по всем  $j$  дает 1. Функция softmax позволяет нормировать числа, полученные в рамках сложной линейной модели, и приводить их к понятию вероятности.

Если класса два, то процедуру можно упростить. Эквивалентную функцию называют sigmoid:

$$s = 2: q = \text{sigmoid} \left( \sum_{i=1}^l \chi_i a_i \right) \equiv \frac{1}{1 + \exp(\sum_{i=1}^l \chi_i a_i)}$$

Одно число в знаменателе: когда мы предсказываем вероятности принадлежности к одному или другому классу из двух классов, за счет того, что суммы вероятностей к первому и второму классам должны давать единицу, достаточно оценить вероятность принадлежности объекта к одному классу. Данная процедура является процедурой регрессии. Предположим, что классы определены, необходимо решить, к какому классу относится объект: рассмотрим, какой из классов соответствует наибольшей вероятности среди всех  $q_j$ ; наибольшее значение выдвинем в качестве предсказания модели. Когда мы выдвигаем предсказание, модель будет являться моделью классификации.

### Линейный классификатор. Стохастический градиентный спуск (SGD)

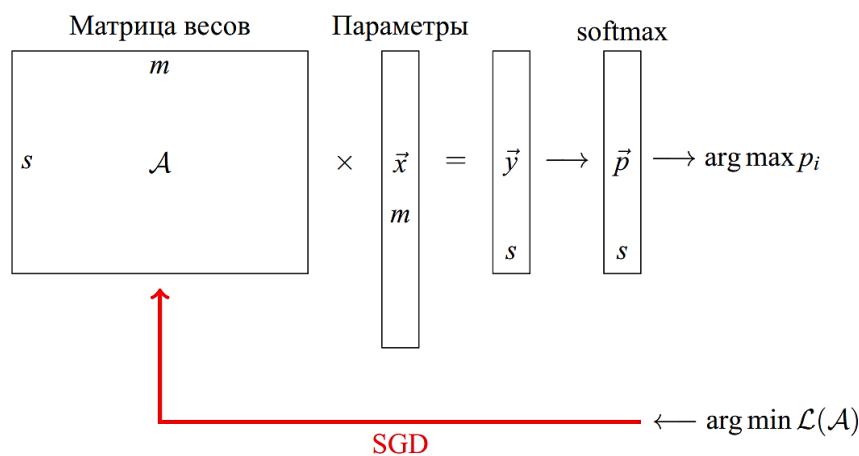


Рис. 9.10. Линейный классификатор. Блок-схема

Вектор  $\vec{x}$  включает в себя  $m$  параметров модели; матрица объекты-признаки -  $A$ . При умножении получаем вектор  $\vec{y}$ , содержащий  $s$  компонент, - предсказание линейной операции. Предсказания могут принимать любые значения и необязательно удовлетворять аксиоматике теории вероятности. Чтобы преобразовать вектор  $\vec{y}$  к вероятности, применим функцию softmax, получим вектор  $\vec{p}$ . Необходимо выбрать, какой класс следует приписать конкретному объекту, для чего выполняется операция  $\arg \max$ : берем индекс максимального элемента и возвращаем его, получаем некоторое значение  $i$ . Функция потерь  $\mathcal{L}(A)$  будет зависеть от вероятностей, которые мы предсказываем ( $\vec{p}$ ), и от некоторого другого вектора, на вероятностях которого мы обучаем модель. Необходимо приблизить предсказанное распределение к истинному за счет минимизации функция потерь  $\mathcal{L}(A)$ . Для этого подбираем веса модели. Одним из методов подбора является метод стохастического градиентного спуска (SGD).

### Стохастический градиентный спуск (SGD)

Предсказание вероятности модели:  $\vec{x}$  - вектор данных;  $A$  - описывающая модель матрица; перемножая их, получаем вектор из линейных предсказаний. Чтобы предсказание стало вероятностью, применим функцию softmax:

$$\vec{p} = \text{softmax}(A\vec{x})$$

- **Прямой проход:** изначальная матрица  $A_{s-1}$ , не обученная на задачу,  $s$  - номер итерации, подаем на вход алгоритма объект  $\vec{x}_1$

$$\vec{p} = \text{softmax}(A_{s-1}\vec{x}_1)$$

применим логистическую функцию потерь; наложим требование, связанное с регуляризацией -  $\lambda^2 AA^T$ - норма матрицы  $A_{s-1}$ . Требование на минимизацию коэффициентов: матричные элементы не имеют возможности неконтролируемого роста.

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s) + \lambda^2 AA^T$$

- **Обратный проход:** чтобы минимизировать функцию потерь положим матрицу  $A$  равной исходной матрице, вычтем коэффициент, умноженный на градиент функции потерь по матричным элементам. Если немного варьировать каждый матричный элемент, функция потерь  $\mathcal{L}_s$  будет либо увеличиваться, либо уменьшаться. Градиент показывает направление наискорейшего возрастания функции. Функцию выгодно изменять таким образом, чтобы она уменьшалась.  $lr_s$  - скорость обучения алгоритма.

$$A = A - lr_s \cdot \nabla_A \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s)$$

**Корректировка скорости обучения  $lr_s$ :** после обратного прохода в таких алгоритмах часто применяется корректировка. В начале скорость обучения устанавливается довольно большой, по мере приближения к минимуму - уменьшается, чтобы шаги в матрице  $A$  становились все меньше для точного нахождения значения, где минимум реализуется. Повторяем алгоритм пока функция потерь  $\mathcal{L}_s$  не станет ниже порогового значения. Тогда можно сказать, что алгоритм дает адекватный результат. В целом процесс можно варьировать, например, делать прямой проход сразу для нескольких объектов, сложив полученные функции потерь, тогда операция на взятие градиента берется для всех объектов из пачки. Соответственно, изменения матричных элементов можно сделать более сглаженным, то есть основанными на большом количестве объектов. В идеале можно делать шаги по всей имеющейся в распоряжении информации (по всей обучающей выборке), но при использовании большого количества объектов могут возникнуть проблемы с использованием памяти для вычисления коэффициентов, кроме того, это занимает много времени. Алгоритм, где используется небольшое количество объектов, в предельном случае - один объект, может быть более эффективным. Метод называется стохастическим градиентным спуском, поскольку мы ищем градиент и спускаемся в направлении антиградиента; первый объект - произвольный. Это один из самых простых методов оптимизации модели.

## Введение нелинейной функции

Подобного рода модели являются моделями линейного классификатора, поскольку в определение предварительных оценок, еще не вероятностей, но предсказаний, исходно заложена линейная модель. Можно ли заложить что-либо

нелинейное? К результатам работы линейной модели можно применить нелинейную процедуру и получить более богатое семейство функций, которые могут описывать более изощренные взаимосвязи входных данных. Простейшей нелинейной функцией, которую удобно использовать, является функция **Rectified Linear Unit**:

$$\text{ReLU}(x) = \max(0; x)$$

Если  $x > 0$  - возвращается  $x$ ; если  $x < 0$  - функция возвращает значение 0, имеет явный излом в точке  $x = 0$ , который обеспечивает необходимую нелинейность. Тогда можно делать системы, пример которых приведен на рис. 9.11.

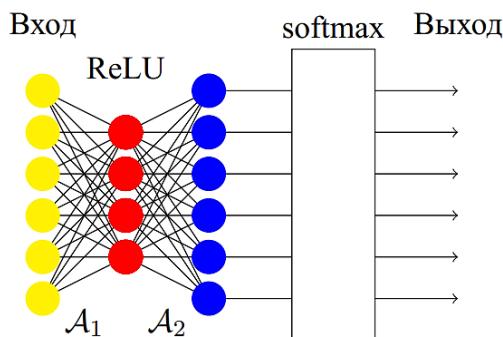


Рис. 9.11. Введение нелинейных функций

Вектор входных параметров (желтые точки) умножается на матрицу  $A_1$ ; получаем линейные предсказания классов (красные точки); предсказаний может быть некоторое число, которое является параметром модели. Далее к предварительным предсказаниям применим нелинейную функцию активации ReLU. Повторим процедуру, но в качестве исходных данных возьмем предсказания первого слоя, умножим на матрицу  $A_2$ , применим нелинейные функции - получим другое количество предсказаний (синие точки), и т.д. Результат подаем на вход функции softmax, которая из некоторых чисел, не обязательно удовлетворяющих аксиоматике теории вероятности, делает числа, которые можно интерпретировать как вероятность. Система на рис. 9.11. - по сути, двухслойная нейронная сеть; математически задается формулой

$$\vec{p} = \text{softmax}(A_2 \cdot \text{ReLU}(A_1 \vec{x}))$$

Связанное с нейронными сетями направление в последнее время получило большое развитие. Наличие больших вычислительных мощностей позволяет применять сложную обработку и делать сложные модели с большим количеством параметров. Кроме того, появилось значительное количество данных. Рассмотренные алгоритмы позволяют узнавать, что заложено в исходные данные, искать глубокие взаимосвязи. В рамках анализа изображений, обработки естественного языка (переводчики), в ряде других приложений - подход оказался успешным. В его основе лежат методы, например, метод максимального правдоподобия.

## Метод моментов

Метод моментов более простой, дает возможность получить быстрый результат

для оценки параметров модели. Метод максимального правдоподобия хорош и имеет красивые следствия, но в ряде задач применять его неудобно: необходимо расписывать функцию правдоподобия; понимать, какое распределение вероятности; громоздкие формулы.

Пусть вектор  $\vec{\theta}$ , который мы хотим оценить в рамках задачи, представляет собой набор из неизвестных параметров  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ ;

### Начальные моменты:

$$m_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w(y|\vec{\theta}) dy$$

Есть величина  $y$ , которую мы имеем возможность померить в эксперименте, усредним  $y^k$  по условной плотности распределения. Если положить  $k = 1$ , выражение - среднее значение переменной  $y$ .

### Центральные моменты

$$\mu_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathcal{M}\{y\})^k w(y|\vec{\theta}) dy$$

Прежде чем возводить величину  $y$  в степень  $k$ , вычитаем из нее среднее значение; если положить  $k = 2$ , то центральный момент - дисперсия величины  $y$ , моменты более высокого порядка.

В эксперименте можно получить оценки:

- **выборочные начальные моменты:**

$$\check{m}_k = \frac{1}{n} \sum y_j^k$$

- **выборочные центральные моменты:**

$$\check{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum (y_j - \hat{m}_1)^k$$

Метод моментов состоит в приравнивании

$$\check{m}_k = m_k(\vec{\theta}_{\text{mom}}) \text{ или } \check{\mu}_k = \mu_k(\vec{\theta}_{\text{mom}})$$

Преимущество метода состоит в том, что число  $k$  можно выбирать сколь угодно большим. Это означает, что запись содержит не одно уравнение, а систему из многих уравнений. Их количество можно сделать настолько большим, что все неизвестные параметры смогут быть выделены из системы.

### Пример: гамма-распределение

Гамма-распределение - двухпараметрическое распределение, плотность которого записывается следующим образом:

$$w(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right); \quad x \geq 0; \beta > 0$$

Для определения параметров  $\alpha, \beta$  по точкам, полученным в эксперименте, подойдем к задаче с точки зрения метода моментов.

- Начальные моменты:  $m_1 = \alpha\beta$ ;  $m_2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$
- Центральные моменты:  $\mu_2 = \alpha\beta^2$ ;  $\mu_3 = 2\alpha\beta^3$ ;

Следствия из теории гамма-распределения можно взять из справочника. Для известных распределений параметры вынесены в Википедию.

Определим, чему равны начальные моменты в эксперименте.

$$\begin{aligned} m_1(\alpha\beta) &= \bar{m}_1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{n} \sum y_j \\ m_2(\alpha\beta) &= \bar{m}_2 \Rightarrow \alpha(\alpha+1)\beta^2 = \frac{1}{n} \sum y_j^2 \end{aligned}$$

Оценки:

$$\hat{\alpha}_{\text{mom}} = \frac{\bar{m}_1^2}{\bar{m}_2 - \bar{m}_1^2}; \quad \hat{\beta}_{\text{mom}} = \frac{\bar{m}_2 - \bar{m}_1^2}{\bar{m}_1}$$

### Метод моментов и максимального правдоподобия

#### Пример: шарик в ящике

Пример показывает, что метод моментов и метод максимального правдоподобия не всегда находятся в соотношении, когда второй метод показывает себя лучше. Представим одномерный ящик, имеющий длину  $\theta$ . Внутри ящика находится шарик, который может двигаться. Мы имеем возможность фиксировать координаты шарика. Координата в  $j$ -ом измерении равна  $y_j$ . Мы точно знаем, что шарик находится в ящике. Если задана  $\theta$ , вероятность получить координату  $y_j$  внутри ящика равна  $1/\theta$ ; вероятность обнаружить шарик вне ящика = 0. Плотность распределения вероятности обнаружения шарика:

$$w(y_j|\theta) = \begin{cases} 1/\theta; & 0 \leq y_j \leq \theta \\ 0; & y_j < 0; y_j > \theta \end{cases}$$

Исходя из постановки, ответим на вопрос: какова длина ящика при условии, что мы несколько раз измерили координату шарика? Воспользуемся методом максимального правдоподобия:

$$L(\theta) = \prod w(y_j|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^k; & 0 \leq y_1, y_2, \dots, y_k \leq \theta \\ 0; & \exists t: y_t < 0; y_t > \theta \end{cases}$$

По оси  $\theta$  отложим значения  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , упорядочив их по возрастанию. Если  $\theta$  лежит в середине первого отрезка синей линии, точки, лежащие на оси  $\theta$ , находятся правее, то есть в эксперименте есть значения координат шариков  $y_j > \theta$ . Тогда

вероятность = 0; во всех точках  $L(\theta) = 0$ . Так будет для всех  $\theta$ , пока мы не достигнем максимального значения  $y_j$ . Когда мы переходим данную точку слева направо, для параметра  $\theta$  все значения, измеренные в эксперименте, лежат в диапазоне от 0 до  $\theta$ . Тогда реализуется первый вариант, функция  $L(\theta)$  будет иметь вид  $1/\theta^k$ . Функция асимптотически убывает до нуля. Максимум достигается в точке  $\theta$ , совпадающей с  $\max y_j$ .

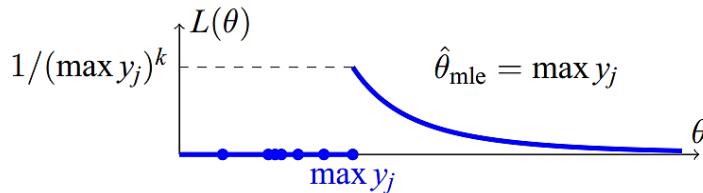


Рис. 9.12. График функции правдоподобия

Мы получили оценку по методу максимального правдоподобия, однако она выглядит странно. Рассмотрим предельные значения оценки, когда количество измерений невелико, например, одно: в соответствии с формулой длина ящика в точности равна координате, которая была измерена. Это не согласуется с интуитивным смыслом: ситуация, когда шарик, находящийся в произвольной точке ящика, лежит точно справа, выглядит не очень вероятной. Более вероятным представляется нахождение шарика в середине ящика. Соответственно, вероятность его нахождения слева и справа от этой точки, одинакова. Но в рассматриваемом случае ящик четко заканчивается на координате, которая была измерена. Придадим математический смысл интуитивным рассуждениям, для чего рассмотрим функцию распределения:

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

$X$  - оценка длины ящика по методу максимального правдоподобия; если  $\max y_j < x$ , это равносильно тому, что все  $y_j$  (все данные эксперимента)  $< x$ .  $y_j$  - независимы друг от друга, поэтому из требования одновременного выполнения условий получаем произведение вероятностей. Определим плотность распределения оценки и усредним оценку:

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = kx^{k-1} / \theta^k$$
$$\mathcal{M} = \{\hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y})\} = \int_0^\infty x w(x) dx = \frac{k}{k+1} \theta$$

Итог: средняя оценка не совпадает с истинным значением  $\theta$ ; отличается от него множителем. Соответственно, оценка  $\hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y})$ , полученная с помощью метода максимального правдоподобия, является смещенной. При малых значениях  $k$  дробь может быть сильно отлична от 1; такая оценка будет неверной. Например, примем  $k = 1$ , тогда оценка по максимуму правдоподобия =  $1/2 \theta$ . С учетом этого, максимальную координату шарика (одна координата) для истинного значения длины ящика

необходимо умножить на 2. Это уже согласуется с интуицией, что шарик должен в среднем лежать в середине ящика. Исправим смещенную оценку.

Несмещенная оценка:

$$\hat{\theta}_{\text{mle-nobias}}(\vec{y}) = \frac{\theta^2}{k+1} \max y_j$$

Еще одна важная характеристика для проведения различных оценок - дисперсия:

$$\mathcal{M}\left\{(\hat{\theta}_{\text{mle-nobias}}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} = \frac{\theta^2}{k(k+2)}$$

Мы применили метод максимального правдоподобия, но получили смещенную оценку. Соответственно, после применения метода необходима проверка, при необходимости проводится корректировка оценки.

### Метод моментов

$$m_1(\theta) = \frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{k} \sum y_j = \frac{\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y})}{2}$$

Обратим внимание: решение методом моментов для данной задачи более простое, при этом результат существенно отличается от результата, полученного с помощью метода максимального правдоподобия. Проверим, что произойдет с оценкой, если количество измерений будет мало, например, одно:

$$\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y}) = \frac{2}{k} \sum y_j$$

Оценка по методу моментов дает удвоение измерения, в этом случае нет противоречия интуиции, которая была рассмотрена ранее, - шарик находится в середине ящика. Определим, чему равна дисперсия оценки:

$$\mathcal{M}\left\{(\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} = \mathcal{M}\left\{\left(\frac{2}{k} \sum y_j - \theta\right)^2\right\} = \frac{\theta^2}{3k} = \frac{\theta^2}{k(k+2)} \cdot \frac{k+2}{3} > \frac{\theta^2}{k(k+2)}$$

Представим величину  $\frac{\theta^2}{3k}$  иначе, поскольку в ходе решения задачи методом максимального правдоподобия была получена дисперсия  $\frac{\theta^2}{k(k+2)}$ . Таким образом, метод моментов дал несмещенную оценку. Несмотря на то, что она получается гораздо проще, дисперсия оценки больше, чем в методе максимального правдоподобия, даже с учетом корректировки. Соответственно, метод максимального правдоподобия с учетом корректировки оказывается лучше, чем метод моментов. Без учета корректировки, применительно к данной задаче он может оказаться хуже, чем метод моментов.

## Лекция 10. Рекуррентные оценки. Фильтр Калмана

### Дискретная полиномиальная модель

В рамках предыдущих лекций курса был рассмотрен ряд моделей, которыми можно описывать сигналы и системы их обработки: модель авторегрессии, модель скользящего среднего, совмещенная модель авторегрессии - скользящего среднего, линейная модель (рассматриваются признаки объектов; значения одних признаков предсказываются по другим) и другие. Рассмотрим: дискретную полиномиальную модель; что данная модель может дать для обработки сигналов. Если сигналы дискретные, номера отсчетов записываются в квадратных скобках.

- **Модель  $k$ -го порядка:**  $f[j] = \alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_k j^k$

Моделью  $k$  –го порядка будет называться полином; исходная величина зависит от номера отсчета полиномиальным образом. Степень полинома можно выбирать достаточно большой, что позволяет с точностью аппроксимировать сложные зависимости. Модель является удобной. Если рассматривать небольшие изменения параметра  $j$ , в ряде случаев можно ограничиться линейными приближениями, учитывая два члена разложения. Часто применяются более высокие порядки.

- **Модель 2-го порядка:**  $f[j] = x_0 + v_0 j + \frac{gj^2}{2}$

Модель 2-го порядка показывает, как в целом обрабатывать различные сигналы. Формула соответствует, например, случаю, когда есть некое тело, двигающееся в поле тяжести с ускорением. Есть: начальная координата  $x_0$ , начальная скорость движения тела  $v_0$ , ускорение -  $g$ . Видоизменим модель:

$$\begin{cases} f[j] = f[j - 1] + v[j - 1] \\ v[j] = v[j - 1] + g[j - 1] \\ g[j] = \rho g[j - 1] + \xi[j] \end{cases}$$

Функция  $f[j]$  описывает материальные точки (координата) тела в момент времени, заданный отсчетом  $j$ . Предположим, что есть координата тела в предыдущий момент времени. Находим координату в  $j$  –ый момент времени, добавляя значение скорости в предыдущий момент времени. По правилам кинематики должно быть умножение на длительность интервала времени  $dt$ , поскольку интервал = 1. Несоответствие размерности не должно смущать, поскольку оно вызвано тем, что мы считаем время в некоторых условных единицах.

Для скорости  $v[j]$  записывается аналогичное уравнение. Если  $g$  - константная величина, модель описывается уравнением модели 2-го порядка, но мы рассмотрим более сложную систему. Представим, что ускорение объекта не является постоянным по времени, а определяется следующими факторами: в  $j$  –ый момент времени ускорение будет пропорционально ускорению в предыдущий момент времени с множителем  $\rho$  (в частности, в случае постоянного ускорения, если  $\rho = 1$ ); на ускорение материальной точки оказывает влияние внешний случайный процесс  $\xi[j]$ .

Есть движение материальной точки с ускорением, которое определяется линейной зависимостью от значения ускорения в предыдущий момент времени и случайными факторами. В левой части системы присутствуют величины:  $f[j]$  - координата,  $v[j]$  – скорость,  $g[j]$  - ускорение, связанные с со своими аналогами в предыдущие моменты времени; связь является линейной. Процесс можно эквивалентно рассматривать в рамках полиномиальной модели 2-го порядка: с точки зрения зависимости координаты от номера отсчета  $j$ , модель - квадратичная. Расписывая с помощью системы квадратичную модель, мы сводим её к линейному описанию. Это важно, поскольку с линейными задачами легче взаимодействовать.

Введем векторное представление:

$$\vec{x}[j] = \begin{pmatrix} f[j] \\ v[j] \\ g[j] \end{pmatrix}; \quad \vec{\xi}[j] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi[j] \end{pmatrix}$$

Случайный процесс  $\xi[j]$  действует только на ускорение  $g[j]$ , получаем модель:

$$\vec{x}[j] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \vec{x}[j-1] + \vec{\xi}[j]$$

Обобщенная координата описывает состояние материальной точки в некотором фазовом пространстве, куда в качестве координат входят: координата, скорость и ускорение. Вектор  $\vec{x}[j]$  связан с состоянием в предыдущий момент времени с помощью матрицы, добавляется вектор  $\vec{\xi}[j]$ . Итог: линейная модель, которую мы будем анализировать.

### Рекуррентная оценка

Более простая задача - изначально линейная модель. Векторные и матричные величин рассмотриваться не будут - рассмотрим одномерный процесс, в котором состояние описывается единственной координатой  $x[j]$ , зависящей от координаты в предыдущий момент времени, умноженной на аналог матрицы  $\rho$  (предположим, что он может изменяться с течением времени), плюс шумовая добавка  $\xi[j]$  - дополнительная случайная величина.

- Модель:  $x[j] = \rho[j-1] \cdot x[j-1] + \xi[j]$
- В эксперименте наблюдаются значения:  $y[j] = x[j] + n[j]$ ,  
где  $n[j]$  - белый шум, например, связанный с ошибками наблюдения и обстоятельствами, независящими от остальных факторов.
- По наблюдаемому процессу  $y[j]$  необходимо сделать заключение об исходном процессе  $x[j]$ ; определить его характеристики.
- Рекуррентная оценка:  $\hat{x}[j] = \hat{x}([\hat{x}[j-1], y[j]])$

Чтобы получить результат оценки, необходимо использовать эту же оценку, сделанную на предыдущем шаге. Оценка процесса  $\hat{x}[j]$  будет являться функцией как

полученных в эксперименте значений  $y[j]$ , так и предыдущих оценок. Подобный класс оценок был рассмотрен в контексте разделения экспериментальных данных на априорную и апостериорную информацию: чтобы получить априорную информацию о наблюдаемой в эксперименте величине, необходимо заранее провести некоторое количество экспериментов. Сделав оценку величины, будем использовать её как априорную информацию. Тогда новый эксперимент, проведенный постфактум, будем использовать в качестве дополнительной апостериорной информации. Чтобы получить итоговую оценку, априорную и апостериорную информацию необходимо сложить. В ходе применения метода Байеса - сведении его к методу максимального правдоподобия, либо к методу апостериорной плотности распределения - говорилось о линейной сумме двух вероятностей. Чтобы понять, с какими весами учитывать априорную и апостериорную информацию, помимо собственных значений оценок, необходимо знать дисперсии этих величин. Оценка  $\hat{x}[j-1]$  предыдущего шага; её дисперсия:

$$\epsilon[j-1] = \hat{x}[j-1] - x[j-1]$$

$$P[k-1] = \mathcal{M}\{\epsilon^2[j-1]\}$$

Вычтем истинное значение процесса из оценки предыдущего шага, получим отклонение - ошибку предыдущего шага. Усреднив её квадрат, получим дисперсию ошибки на предыдущем шаге. Необходимо построить оценку  $\hat{x}[j]$  на текущем  $j$ -ом шаге, воспользовавшись информацией  $y[j]$ , которая пришла в результате последнего эксперимента. Оценки будем обрабатывать линейным образом.

Есть величина  $\hat{x}[j-1]$ , полученная в эксперименте величина  $y[j]$ , будем строить рекуррентную оценку как линейную комбинацию двух величин. Обозначим коэффициенты  $A[j]$ ,  $B[j]$ . На основании метода апостериорной плотности распределения было выведено, что величины зависят от дисперсии каждой из величин. В данном случае нет явного вида статистических распределений, поэтому коэффициенты  $A[j]$ ,  $B[j]$  сразу записать нельзя. Кроме того, отношение между ними будет меняться с изменением номера  $j$ , потому что рассматриваемый процесс не является вполне стационарным, его параметры могут существенно изменяться при изменении индекса  $j$ .

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Необходимо подобрать такие  $A[j]$  и  $B[j]$ , чтобы дисперсия  $\mathcal{M}\{\epsilon^2[j]\} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \epsilon[j] &= \hat{x}[j] - x[j] = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot (x[j] + n[j] - x[j]) = \\ &= A[j] \cdot x[j-1] + \epsilon[j-1] + (B[j]-1) \cdot (x[j] + B[j] \cdot n[j]) = \\ &= A[j] \cdot x[j-1] + \epsilon[j-1] + (B[j]-1) \cdot (\rho[j-1] \cdot x[j-1] + \xi[j]) \\ &+ B[j] \cdot n[j] = \underbrace{(A[j] + B[j]-1) \cdot \rho[j-1] \cdot x[j-1]}_{\text{Положим равным } 0: A[j]=(1-B[j])\rho[j-1]} + \\ &+ A[j] \cdot \epsilon[j-1] + \underbrace{(B[j]-1 \cdot \xi[j])}_{\text{Динамика случайного процесса}} + \underbrace{B[j] \cdot n[j]}_{\text{Помеха при измерениях}} \end{aligned}$$

Ошибка  $\epsilon[j]$  состоит из четырех компонент: первая зависит от величины оценки  $x[j - 1]$ , при этом у нас есть некоторая свобода выбора, потому что коэффициенты  $A[j], B[j]$  можно менять. Если выбрать правильное значение коэффициента  $A[j]$ , первое слагаемое можно занулить. Тогда остается три слагаемых: ошибка предыдущего шага, динамика случайного процесса  $\xi[j]$ , помеха при измерениях. Все они являются независимыми случайными величинами, определяются разными процессами. Если это так, то дисперсии складываются.

$$\epsilon[j] = (1 - B[j] \cdot \rho[j - 1]) \cdot \epsilon[j - 1] + (B[j] - 1) \cdot \xi[j] + B[j] \cdot n[j]$$

$$P[j] = \mathcal{M}\{\epsilon[j]\} = (1 - B[j])^2 \cdot \rho^2[j - 1] \cdot P[j - 1] + (B[j] - 1)^2 \cdot \underbrace{\mathcal{M}\{\xi^2[j]\}}_{=V_\xi[j]} + B^2[j] \cdot \underbrace{\mathcal{M}\{n^2[j]\}}_{=V[j]}$$

$V_\xi[j]$  - дисперсия, которая заложена случайнм процессом величины  $\xi[j]$

$V[j]$  - дисперсия шума

$P[j]$  - дисперсия оценки

Необходимо подобрать коэффициенты модели таким образом, чтобы величина  $P[j] \rightarrow \min$ . Обратим внимание: остался один параметр  $B$ , который можно менять. Чтобы найти его значение, можно взять производную от  $P[j]$  по  $B$  и приравнять её к нулю, тогда это будет условием на минимум.

## Фильтр Калмана

Решение для процесса оптимизации модели:  $B[j] = P[j]/V[j]$

$$\begin{cases} P_{\text{ex}}[j] = \rho^2[j - 1] \cdot P[j - 1] + V_\xi[j] & \text{- экстраполяция дисперсии} \\ \hat{x}_{\text{ex}}[j] = \rho[j - 1] \cdot \hat{x}[j - 1] & \text{- экстраполяция оценки} \\ \hat{P}[j] = \frac{P_{\text{ex}}[j]}{1 + P_{\text{ex}}[j]/V[j]} & \text{- новая дисперсия} \\ \hat{x}[j] = \hat{x}_{\text{ex}}[j] + \frac{P[j]}{V[j]}(y[j] - \hat{x}_{\text{ex}}[j]) & \text{- новая оценка} \end{cases}$$

Алгоритм называется фильтрация Калмана: дисперсия ошибки на предыдущем шаге масштабируется с множителем  $\rho^2[j - 1]$ , добавляем дисперсию случайного процесса  $\xi[j]$ ; экстраполируем оценку  $\hat{x}[j - 1]$ ; зная две величины, делаем новую оценку и считаем новую дисперсию, которую будем полагать окончательным результатом работы данного фильтра. В данном случае получается рекурсивный алгоритм: каждая следующая оценка строится на основании предыдущей оценки и дисперсии. Чтобы завершить определение процесса, необходимо определить начальные условия работы данного алгоритма.

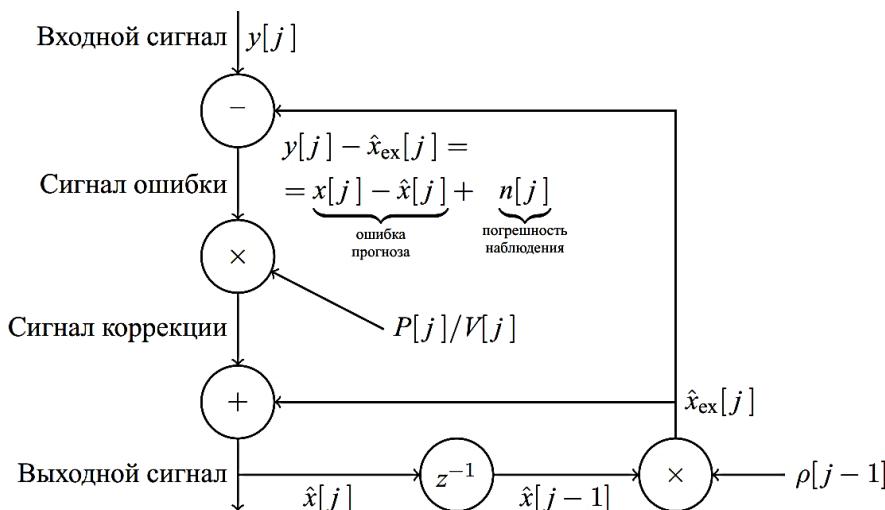
До того момента, как пришли полученные в эксперименте значения, имеем:

- $y[l]$  - неизвестно;
- $x[l]$  - случайная величина со средним 0 и дисперсией:

$$V_x[l] = \mathcal{M}\{\epsilon^2[j]\}, \text{ фактически} = 0.$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{ex}[l] = 0; P_{ex}[l] = V[l] \Rightarrow \hat{P}[l] = \frac{V_x[l]}{1 + V_x[l]/V[l]} \dots$$

В фильтр заходит сигнал  $y[j]$ , величина  $\hat{x}_{ex}[j]$  рассчитывается на основании значений, полученных на предыдущем шаге. Не раскрывая её расчета, вычитаем из входного сигнала экстраполированное значение оценки. Разность представляет собой сигнал ошибки - насколько мы ошиблись, сделав экстраполяцию. Подвергаем ошибку коррекции путем домножения сигнала ошибки на множитель  $P[j]/V[j]$ . Сигнал коррекции складывается с экстраполированной величиной  $\hat{x}_{ex}[j]$  - выходной сигнал. Таким образом, выходной сигнал представляется суммой экстраполированного значения с сигналом коррекции, заданным сигналом ошибки.



*Rис. 10.1. Блок-схема фильтрации Калмана*

Процедура экстраполяции сигнала: задерживаем выходной сигнал на один отсчет, это выполняет процедура  $z^{-1}$  - линия задержки из одного элемента; получаем сигнал  $\hat{x}[j - 1]$  и умножаем его на  $\rho[j - 1]$ . Сигнал ошибки:  $y[j]$  - истинное значение сигнала  $x[j]$  + шумы  $n[j]$ . После перегруппировки:

$$x[j] + \hat{x}_{ex}[j] = \underbrace{x[j] - \hat{x}[j]}_{\text{ошибка прогноза}} + \underbrace{n[j]}_{\text{погрешность наблюдения}}$$

Фильтр позволяет выполнять рекуррентные оценки. Обратим внимание: речь не идет о том, что какие-то параметры сигнала остаются постоянными; величина  $\rho[j - 1]$ , отвечающая за сохранение с течением времени значений  $x[j]$ , может зависеть от  $j$ , она меняется, тем не менее можно построить фильтр. Несмотря на наличие погрешностей, он позволяет рассматривать широкое множество зависящих от времени сигналов.

## Лекция 11. Критерии качества оценок

### Критерии оценок параметра

В рамках предыдущих лекций курса были рассмотрены различные способы построения оценок параметров сигналов, оценок признаков объектов. Возникает вопрос: какая оценка является наилучшей, если для одной и той же задачи есть несколько разных оценок?

#### Критерии выбора оценки:

- **Несмешенность:**  $\mathcal{M} = \{\hat{\theta}(\vec{y})\} = \theta$

Несмешенной является оценка, среднее значение которой равно истинному значению параметра. Для решения задачи о шарике в ящике был использован метод максимального правдоподобия. При этом мы столкнулись с ситуацией, когда оценка являлась смещенной - её результат в среднем отличался от величины, присутствующей в эксперименте. Если оценка является смещенной, чтобы с ней можно было работать, необходимо проводить корректировку.

- **Состоятельность:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$

Если проводить большое количество испытаний, вероятность отклонения оценки от истинного значения на величину большую чем  $\epsilon$ , будет стремиться к нулю. Чем больше проводится испытаний, тем с большей степенью уверенности можно будет сказать, что оценка будет адекватной. Обратим внимание: предел понимается в вероятностном виде; именно вероятность того, что произойдет отклонение,  $\rightarrow 0$ . Это не означает, что в эксперименте гарантировано не получится отклонений, но вероятность этого события будет малой.

- **Эффективность:**  $\mathcal{M}\{(\hat{\theta}_{eff} - \theta)^2\} \leq \mathcal{M}\{|\hat{\theta} - \theta|^2\}$

Оценки обладают различной дисперсией, соответственно, можно считать более качественной ту оценку, у которой дисперсия будет меньше. Среди всех возможных оценок параметра  $\theta$  эффективная обладает наименьшей дисперсией. Обратим внимание - неравенство нестрогое, то есть дисперсия эффективной оценки может быть меньше, чем дисперсия любой другой, а также может быть ей равна. Может существовать несколько оценок, дисперсия которых достигает минимального значения, - все они будут эффективными. В рамках лекции мы в основном будем работать с понятием "эффективность оценки".

### Минимально возможная дисперсия оценки

Проведем качественный анализ данных и улучшим оценку - сделаем дисперсию меньше. Повторим процедуру - сделаем дисперсию ещё меньше, и т.д. Возможно ли уменьшать последовательными приближениями дисперсию оценки, например, до нуля?

Возможно ли сделать идеальную оценку, которая в любом случае будет наилучшей, или мы будем упираться в некоторый предел, который от нас не зависит?

Рассмотрим множество значений, которые принимают экспериментальные данные: границы множества  $\{\vec{y} | w(\vec{y}|\theta) > 0\}$  не зависят от  $\theta$ ; пусть  $\hat{\theta}(\vec{y})$  - несмещенная оценка параметра  $\theta$ .

$$\mathcal{M}\{\hat{\theta}(\vec{y})\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = \theta$$

По определению несмещенной оценки её математическое ожидание равно самому параметру  $\theta$ . Математическое ожидание: интеграция по всем возможным экспериментальным реализациям (по всему множеству значений  $\vec{y}$ ) с плотностью распределения  $w(\vec{y}|\theta)$ . Проведем дифференцирование по параметру  $\theta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M}\{\hat{\theta}(\vec{y})\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{y} = 1$$

Пределы интегрирования бесконечные; воспользуемся предположением, что границы множества не зависят от  $\theta$ , иначе появился бы ещё один член, определяющий изменение границ. Тогда можно поменять местами интегрирование и дифференцирование, продифференцировать по  $\theta$  то, что стоит под интегралом (от  $\theta$  зависит только условная плотность распределения  $w(\vec{y}|\theta)$ ). Осуществим процедуру, эквивалентную дифференциации логарифма  $\ln w(\vec{y}|\theta)$  по  $\partial \theta$ :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

Рассмотрим выражение, представляющее собой нормировку условной плотности распределения, и проделаем с ним аналогичные процедуры:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} &= 1 \\ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} &= 0 \end{aligned}$$

Бесконечные пределы представлены условно: если есть множество  $\vec{y}$ , то интегрирование проводится по данному множеству, а не по бесконечным пределам. При этом ничего не поменялось, поскольку границы множества не зависят от  $\theta$ .

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1 \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 0$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

Получено два утверждения, вычтем из первого уравнения второе.

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 1$$

Это ковариация случайных величин: отклонение оценки от истинного значения, то есть ошибка  $(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ ; производная от логарифма плотности распределения  $\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$ .

### Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

$$\sqrt{\mathcal{M} \underbrace{\left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\}}_{\text{дисперсия оценки}} \cdot \mathcal{M} \underbrace{\left\{ \left( \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}}_{\equiv I(\theta) \text{ информация в выборке}}} \geq 1$$

Для полученного выражения есть неравенство Коши-Буняковского: если рассматривать две величины по отдельности, корень из произведения дисперсий величин и их ковариации больше либо равен 1. Информация в выборке: величина зависит от полученных в эксперименте значений вектора  $\vec{y}$ . Исходя из неравенства Коши-Буняковского можно заключить:

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{1}{I(\theta)}; I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left( \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Обратим внимание: оценка стоит только в левой части неравенства - если в эксперименте будут поданы  $\vec{y}$ , независимо от применяемого алгоритма обработки данных, дисперсия будет ограничена снизу величиной  $\frac{1}{I(\theta)}$ . Если есть эффективная оценка, обладающая минимальной дисперсией среди всех оценок, для неё будет получено данное неравенство, соответственно, эффективная оценка обладает дисперсией, не меньшей, чем  $\frac{1}{I(\theta)}$ . Рассмотренное неравенство называется "неравенство Рао-Крамера".

### Независимые наблюдения

Пусть измерения в эксперименте являются независимыми, тогда можно использовать произведение отдельных условных плотностей распределения для каждого индивидуального измерения.

$$\ln w(\vec{y}|\theta) = \ln \prod w(y_j|\theta) = \sum \ln w(y_j|\theta)$$

Для информации в выборке получаем выражение:

$$I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left( \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = \mathcal{M} \left\{ \left( \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.  
При этом мы пользуемся условием:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right\} &= 0, \quad \text{вытекающим из} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} &= 0 \\ I(\theta) &= \sum I_j(\theta) \end{aligned}$$

Информация во всех экспериментальных данных равна сумме информаций, полученных в каждом отдельном измерении по формуле:

$$I_j(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \sum \left( \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Если измерения проводятся по одному шаблону, все распределения одинаковы  $I(\theta) = nI_1(\theta)$ , для оценки дисперсии получаем результат:

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{1}{nI_1(\theta)}$$

Когда считается дисперсия, во многих случаях появляется характерный множитель  $1/n$ . Из рассмотренных рассуждений следует, почему для дисперсии в общем случае характерен именно такой множитель. Важно иметь в виду, что  $\frac{1}{nI_1(\theta)}$  - нижняя граница для дисперсии, оценка не обязательно будет достигаться в ходе работы алгоритма.

### Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} = \frac{1}{I(\theta)}$$

Если для дисперсии выполняется условие равенства, можно заключить, что сделанная оценка  $\hat{\theta}$  является эффективной, потому что такая дисперсия является минимально возможной. Следовательно, любая другая оценка будет давать либо такую же дисперсию, либо больше.

**Пример 1:** В эксперименте получены значения  $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$ ; известно вероятностное распределение, для каждого измерения представляет собой гауссиану - типичная зависимость; необходимо найти эффективную оценку параметра  $\theta$ .

$$w(y_j|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Решим задачу с помощью неравенства Рао-Крамера.

Информация в одном наблюдении:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} &= \frac{y_j - \theta}{\sigma^2} \\ I_1(\theta) &= M\left\{\frac{(y_j - \theta)^2}{\sigma^4}\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\end{aligned}$$

Информация во всей выборке:

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\sigma^2} \Rightarrow \left\{(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} \geq \frac{\sigma^2}{k}$$

Получаем ограничение на дисперсию произвольного алгоритма в виде  $\frac{\sigma^2}{k}$ . Если найти оценку, которая будет давать такую дисперсию, - можно утверждать, что именно она является эффективной. В дальнейшем не будет необходимости что-либо предпринимать, чтобы её улучшить. Ранее данная задача решалась с помощью метода максимального правдоподобия:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\vec{y}) &= \frac{1}{k} \sum y_j \quad \text{- выборочное среднее имеет дисперсию} \\ M\left\{(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} &= M\left\{\left(\frac{1}{k} \sum (y_j - \theta)\right)^2\right\} = \frac{1}{k^2} \sum (y_j - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{k}\end{aligned}$$

Заключим, что оценка, сделанная по методу максимального правдоподобия, для данной задачи является эффективной. Соответственно, другая оценка будет давать либо такую же дисперсию, либо хуже.

**Пример 2:** В эксперименте получены значения  $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$ ; известно вероятностное распределение:

$$w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$$

Требуется найти  $\lambda$ . С помощью неравенства Рао-Крамера сделаем оценку дисперсии. Информация в одном наблюдении:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln w}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} - y_j \\ I_1(\lambda) &= M\left\{\left(\frac{1}{\lambda} - y_j\right)^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2} \\ I(\lambda) = kI_1 &= \frac{k}{\lambda^2} \Rightarrow M\left\{(\hat{\lambda}(\vec{y}) - \lambda)^2\right\} \geq \frac{\lambda^2}{k}\end{aligned}$$

Оценка минимальной дисперсии: дисперсия произвольного алгоритма не может быть меньше, чем  $\lambda^2/k$ . Хотелось бы указать алгоритм, с помощью которого можно

получить данную дисперсию. Проблема заключается в том, что такого алгоритма не существует, но есть наилучший из всех возможных, когда в качестве оценки берется:

$$\hat{\lambda}(\vec{y}) = \frac{k-1}{\sum y_j} \text{ имеет дисперсию}$$
$$\mathcal{M}\left\{(\hat{\lambda}(\vec{y}) - \lambda)^2\right\} = \frac{\lambda^2}{k-2} > \frac{\lambda^2}{k}$$

Для данной оценки неравенство является строгим. Вопрос: является ли полученная оценка эффективной оценкой для данной задачи? Ответ положительный, потому что дисперсия любой другой оценки будет ещё больше, чем  $\frac{\lambda^2}{k-2}$ . Соответственно, несмотря на наличие неравенства Рао-Крамера, для данной оценки неравенство является строгим, - оценка является эффективной. Необходимо четко понимать: если неравенство Рао-Крамера перешло в равенство, оценка точно является эффективной; если не перешло - возможно, оценка не плоха, она даже может быть лучшей из возможных.

**Пример 3:** Преобразуем задачу, видоизменив вид оцениваемой плотности распределения. В эксперименте получены значения  $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$ . Распределение задано как

$$w(y_j | \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_j}{\theta}\right)$$

Требуется найти эффективную оценку параметра  $\theta$ . Воспользуемся неравенством Рао-Крамера.

Информация в одном наблюдении:

$$\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{\theta^2} = \frac{y_j - \theta}{\theta^2}$$
$$I_1(\theta) = \mathcal{M}\left\{\frac{(y_j - \theta)^2}{\theta^4}\right\} = \frac{1}{\theta^2}$$

Информация во всей выборке:

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\theta^2} \Rightarrow \mathcal{M}\left\{(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} \geq \frac{\theta^2}{k}$$

Оценка

$$\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum y_j}{k}$$

имеет дисперсию:

$$\mathcal{M}\left\{(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2\right\} \geq \frac{\theta^2}{k}$$

Для параметра  $\theta$  из предыдущего примера, равного  $1/\lambda$ , удается построить оценку, которая переводит неравенство Рао-Крамера в равенство, следовательно, является эффективной.

## Переход неравенства Рао-Крамера в равенство

Рассмотрим, в каких случаях неравенство Рао-Крамера переходит в равенство. Неравенство Рао-Крамера было получено на основании неравенства Коши-Буняковского, связывающего дисперсии двух случайных величин и их ковариацию.

$$x_1 = (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \text{ и } x_2 = \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$$

Равенство достигается, если случайные величины линейно зависимы. Тогда можем ввести между случайными величинами коэффициент пропорциональности  $\alpha$  и рассматривать равенство как дифференциальное уравнение относительно плотности распределения.

$$\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} = \alpha(\theta) \cdot (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$$

$$w(\vec{y}|\theta) = \exp(A(\theta)\hat{\theta}(\vec{y}) + B(\theta) + C(\vec{y}))$$

- $A(\theta) = \int \alpha(\theta) d\theta$  - первообразная
- $B(\theta) = - \int \theta \alpha(\theta) d\theta$
- $C(\vec{y})$  - произвольная функция, зависящая только от входных данных, то есть от данных эксперимента.

Тогда  $\hat{\theta}(\vec{y})$  - эффективная оценка параметра

$$\theta = -\frac{B'(\theta)}{A'(\theta)}$$

Данная процедура в ряде случаев позволяет делать оценки для не очень тривиальных алгоритмов определения тех или иных параметров.

## Примеры перехода в равенство

**Пример 1:** Распределение задано как

$$w(y_j|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Это нормальное гауссовское распределение;  $\sigma$  - неизвестный параметр. Требуется: по данным эксперимента определить стандартное отклонение. Для этого представим распределение в виде экспоненциальной формулы, где коэффициенты зависят от правильных аргументов. Для вектора измерений плотность распределения:

$$w(\vec{y}|\sigma) = \prod w(y_j|\sigma) = \exp\left(\frac{k}{2\sigma^2} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k (y_j - a)^2}_{\hat{\theta}(\vec{y})} - \underbrace{k \ln \sigma}_{B(\sigma)} - \underbrace{\frac{k \ln 2\pi}{2}}_{C(\vec{y})}\right)$$

$$\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum (y_j - a)^2}{k} \quad \text{- эффективная оценка} \quad \theta = -\frac{B'}{A'} = \sigma^2$$

Обратим внимание: изначально мы хотели оценивать параметр  $\sigma$ , но получили, что оцениваем параметр  $\sigma^2$ . Это возможно за счет того, что формула расписана в правильном виде - для распределений, представимых в виде 4-ех параметров, это возможный алгоритм.

**Пример 2:** Распределение задано как

$$w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$$

Построить оценку, которая переводит неравенство Роа-Крамера в равенство ранее не получилось, построим функцию от неизвестного параметра  $\lambda$ . Возьмем плотность распределения для большого количества измерений:

$$w(\vec{y}|\lambda) = \prod w(y_j|\lambda) = \exp\left(\underbrace{-k\lambda}_{A(\lambda)} \cdot \frac{\sum y_j}{\underbrace{k}_{\hat{\theta}(\vec{y})}} + \underbrace{k \ln \lambda}_{B(\lambda)}\right)$$

$$\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum y_j}{k} \quad \text{- эффективная оценка} \quad \theta = -\frac{B'}{A'} = \frac{1}{\lambda}$$

С помощью экспоненциального представления показано, что замена параметр  $\lambda$  на  $\frac{1}{\theta}$  дает способ оценки параметра  $\theta$ . При этом оценка параметра является эффективной, переводящей неравенство Роа-Крамера в равенство. Процедура для параметра  $\frac{1}{\theta}$  ранее была проведена непосредственно, в данном примере - с помощью правильного преобразования функции плотности распределения.

## Лекция 12. Винеровская фильтрация

### Фильтрующая линейная система

Данная лекция курса посвящена возможности создания линейных систем, осуществляющих фильтрацию сигналов, в частности, винеровскую фильтрацию. На рис. 12.1. показана модель шума, которая предусматривается такого рода фильтрами.

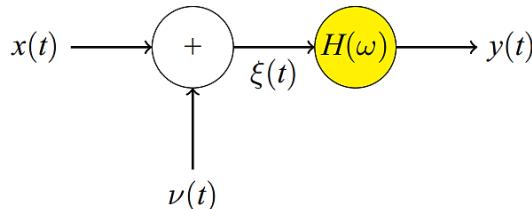


Рис. 12.1. Модель шума

На входе фильтра - идеальный сигнал  $x(t)$ , поступающий от датчиков. В действительности на входе будет присутствовать не истинный, а сигнал с добавкой  $\nu(t)$ , представляющей шум. Совместно они формируют сигнал  $\xi(t)$ , которым мы имеем возможность манипулировать. Соответственно, на выходе линейной фильтрующей системы сигнал имеет представление:  $\xi(t) = x(t) + \nu(t)$ . Система обладает импульсной функцией отклика  $H(t)$ , если работать с частотным представлением функции -  $H(\omega)$ . В результате применения линейной системы к сигналу  $\xi(t)$  получим сигнал  $y(t)$ . Спрашивается, каким он должен быть, чтобы решать задачу фильтрации шума? Отметим, что сигналы  $x(t), y(t)$  должны быть близки друг к другу. Чтобы оптимизировать фильтр  $H(\omega)$ , необходимо найти функцию, которая будет говорить о близости. Задача - создать фильтр с минимальной ошибкой  $\Delta(t) = y(t) - x(t)$

**Определение 13.1: Фильтр Колмогорова-Винера** - фильтр, минимизирующий средний квадрат ошибки  $\mathcal{M}\Delta^2(t) = \mathcal{M}\{(y(t) - x(t))^2\}$

Чтобы строить фильтрующую систему, можно применять разные функции. В общем случае, в зависимости от задачи необходимо делать именно так. Отметим, что фильтр Колмогорова-Винера позволяет проделать ряд выкладок аналитически, чтобы получить итоговую характеристику линейной системы.

### Корреляционные функции

Линейная система задана импульсной функцией отклика  $h(t)$ , на вход приходит сигнал  $\xi(t)$  на выходе возникает сигнал  $y(t)$ . Для линейной инвариантной по времени системы сигналы связаны интегральным соотношением.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \xi(t-t') dt'$$

Введем корреляционные функции:

- $B_x(\tau) = \mathcal{M}\{x(t)x(t+\tau)\}$  - автокорреляционная функция оцениваемого сигнала

- $B_\xi(\tau) = \mathcal{M}\{\xi(t)\xi(t + \tau)\}$  - автокорреляционная функция входного сигнала
- $B_{\xi_x}(\tau) = \mathcal{M}\{\xi(t)x(t + \tau)\}$  - взаимная корреляционная функция входного и оцениваемого сигнала

Обратим внимание: входной сигнал помимо оцениваемого сигнала содержит внутри себя шум  $v(t)$ .

### Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Delta^2(t) &= \mathcal{M}\{(y(t) - x(t))^2\} = \mathcal{M}\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t') \xi(t-t') dt' - x(t)\right)^2\right\} = \\ &= \mathcal{M}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \xi(t-t') \xi(t-t'')\right\} \\ &\quad - 2\mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \xi(t-t') x(t)\right\} + \mathcal{M}\{x^2(t)\}\end{aligned}$$

Преобразование трех слагаемых:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Delta^2(t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \mathcal{M}\{\xi(t-t') \xi(t-t'')\} \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \mathcal{M}\{\xi(t-t') x(t)\} + \mathcal{M}\{x^2(t)\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_\xi(t'-t'') - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') B_{\xi_x}(t') + B_x(0)\end{aligned}$$

Интеграл - линейное преобразование, функции  $h(t'), h(t'')$  являются детерминированными, соответственно, операцию усреднения можно занести под знак интеграла. Ранее операция применялась ко всему интегралу, но под усреднение попадает произведение  $\xi(t-t') \xi(t-t'')$  и  $\xi(t-t') x(t)$ , либо  $x^2(t)$ . Именно эти величины несут в себе зависимость от времени и только они являются в какой-то степени стохастическими. Первое усреднение представляет собой автокорреляционную функцию процесса  $\xi$ , то есть  $B_\xi$ . Второе слагаемое: взаимная корреляционная функция между процессом  $\xi$  и процессом  $x$  -  $B_{\xi_x}(t')$ . Средний квадрат величины  $x$  представляет собой дисперсию сигнала  $x(t)$  или значение автокорреляционной функции  $B_x$ , взятой со времененным сдвигом, равным нулю: произведение двух функций  $x(t)$  - временной сдвиг между функциями отсутствует; функция берется с аргументом 0. Итог: оценка среднеквадратичной ошибки в виде трех слагаемых. Обратим внимание: изначально заложенная операция усреднения пропала, кроме того, вместе с ней пропали явные представления сигналов, вместо которых стоят только корреляционные либо автокорреляционные функции. Таким образом, среднеквадратичная ошибка не зависит от "тонкой структуры" сигналов, то есть определяется только корреляционными функциями, то есть усредненными характеристиками.

## Спектральное представление величин

Положим преобразование Фурье от импульсной функции  $h(t)$ :

$$\mathbb{F}\{h(t)\} = H(\omega)$$

Теорема Винера-Хинчина говорит, что спектр мощности сигнала и автокорреляционная функция связаны друг с другом преобразованием Фурье:

$$\mathbb{F}\{B(\tau)\} = G(\omega)$$

Применим данные обстоятельства к задаче, рассмотрим каждое из слагаемых по отдельности: в первом стоит двойной интеграл, в котором присутствует автокорреляционная функция процесса  $\xi$ ; по теореме Винера-Хинчина её можно представить через спектр мощности;  $\frac{1}{2\pi}$  - нормирующий множитель; меняем порядок интегрирования, выносим во внешний интеграл все величины, содержащие частоту  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' d\omega h(t') h(t'') G_{\xi}(\omega) e^{i\omega(t' - t'')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') e^{i\omega(t')} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t'') e^{i\omega(t'')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') e^{i\omega(t')}$ - преобразование Фурье от функции  $h(t)$ , то есть функция  $H(\omega)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t'') e^{i\omega(t'')}$ - комплексно-сопряженная функция  $H(\omega)$

Первое слагаемое представляется через характеристику фильтрующей системы  $|H(\omega)|^2$  и через спектр мощности сигнала, поступающего на систему. Два других слагаемых преобразуются аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} \\ B_x(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_x(\omega) \end{aligned}$$

Преобразовав среднеквадратичную ошибку фильтра, мы получили сумму трех результатов Фурье-преобразований, объединим все под общим интегралом:

$$\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - 2G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} + G_x(\omega)]}_{A(\omega)}$$

Задача: среднеквадратичная ошибка – минимальна; необходимо подобрать такую квадратичную функцию  $H(\omega)$ , чтобы  $\mathcal{M}\Delta^2(t) \rightarrow \min$ . Рассмотрим величину  $A(\omega)$  на каждой отдельной частоте. Для выполнения преобразования сделаем два замечания:

- $G_{\xi x} = \overline{G_{x\xi}}$  - величина  $G_{\xi x}(\omega)$  была получена в ходе применения Фурье-преобразования к взаимной корреляционной функции. Это взаимный спектр мощности двух сигналов, который по определению можно считать равным фурье-образу корреляционной функции. Когда меняется порядок аргументов в корреляционной функции, знак временного сдвига меняется на противоположный. Если мы оцениваем, насколько один сигнал опережает второй, при изменении порядка сигналов сдвиг образуется с противоположным знаком. По свойствам Фурье-преобразования: если заменить  $t$  на  $-t$ , результат комплексно-сопряженный. Таким образом, во взаимном спектре при изменении порядка функций, для которых он считается, происходит комплексное сопряжение.
- $G_{\xi x}\overline{H(\omega)} \in \Re \Rightarrow 2G_{\xi x}(\omega)\overline{H(\omega)}$  - является действительной величиной. Следует из:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)}$$

$h(t')$  - функция отклика является действительной величиной;  $B_{\xi x}(t')$  - корреляционная функция между действительными процессами  $\xi, x$ .

Произведение принадлежит к множеству

$$G_{\xi x} = \overline{G_{x\xi}} \text{ и } G_{\xi x}\overline{H(\omega)} \in \Re$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$2G_{\xi x}\overline{H(\omega)} = G_{\xi x}\overline{H(\omega)} + \overline{G_{\xi x}\overline{H(\omega)}} = G_{\xi x}\overline{H(\omega)} + G_{x\xi}H(\omega)$$

Пусть  $|F(\omega)|^2 = G_{\xi}(\omega)$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |F(\omega)H(\omega)|^2 - G_{\xi x}(\omega)\overline{H(\omega)} - G_{x\xi}(\omega)H(\omega) + G_x(\omega) + \\ &+ \left| \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 - \left| \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 = \left| F(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 + G_x(\omega) - \frac{|G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} \end{aligned}$$

Задача: создать систему обработки, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку. Соответственно, задача будет решена при минимизации на каждой частоте выражения  $A(\omega)$ , представляемого в виде суммы; то, что можно варьировать, содержится только в первом члене, то есть мы варьируем систему обработки, которая задана функцией отклика или её спектром  $H(\omega)$ . Во втором слагаемом стоят спектры, которые определяются поданными на систему сигналами. Таким образом, необходимо взять такое  $H(\omega)$ , чтобы минимизировать первое слагаемое, которое является величиной, взятой по модулю в квадрате, то есть действительной величиной (не

отрицательная), поэтому её минимальное значение = 0. Тогда получаем необходимое условие для решения задачи.

### Минимум среднеквадратичной ошибки. Уравнение Винера-Хопфа

$$\min A(\omega) = G_x(\omega) - \frac{|G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)} \text{ при } \left| F(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right| = 0, \text{ получаем условие}$$

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_{\xi x}(\omega)}{G_\xi(\omega)}$$

Выражение дает спектральную характеристику оптимального фильтра Колмогорова-Винера. Если она выполнена для среднеквадратичной ошибки, получаем выражение:

$$\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\xi(\omega) - |G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)}$$

Задача решена: функция отклика оптимального фильтра связана только со спектрами изучаемых сигналов.

### Уравнение Винера-Хопфа

$$H_{\text{opt}}(\omega)G_\xi(\omega) = G_{\xi x}(\omega)$$

Применим к равенству преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt h_{\text{opt}}(t)B_\xi(\tau - t) = B_{\xi x}(\tau)$$

- преобразование Фурье применяется к взаимному спектру - получаем корреляционную функцию процессов  $\xi, x$ ;
- преобразование Фурье применяется к произведению двух функций - получаем свертку их фурье-образов: для  $H_{\text{opt}}(\omega)$  -  $h_{\text{opt}}(t)$ , импульсная функция отклика фильтра; для спектра мощности сигнала  $G_\xi(\omega)$  - автокорреляционная функция сигнала  $B_\xi(\tau - t)$ .

В ходе рассмотрения линейных систем, в числе прочих была поставлена задача определения функции отклика системы, при условии наличия данных только о корреляционных функциях входного и выходного сигнала. Было получено такое же уравнение, поскольку при наличии линейной инвариантной по времени системы корреляционная функция входа и выхода связана с автокорреляционной функцией сигнала на входе интегральным соотношением. Следующий шаг: в качестве входного берется сигнал, у которого автокорреляционная функция близка к дельта-функции, тогда взаимная корреляционная функция входа и выхода системы даст  $h_{\text{opt}}(t)$ . В рамках данного подхода для рассматриваемой задачи получено: на вход системы подается сигнал  $B_\xi$ , на выходе необходимо получить сигнал, который будет

максимально близок к исходному сигналу; система профильтровала сигнал. Соответственно, подбираем оптимальный фильтр так, чтобы для сигналов  $\xi, x$  он давал необходимое. Уравнение Винера-Хопфа используется для определения функции отклика, однако проще работать со спектрами сигналов, используя амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристику фильтра;  $H_{\text{opt}}(\omega)$  - комплексная функция, содержащая в себе и амплитуду, и фазу.

## Известные спектры сигнала и помехи

Заданы: спектр мощности сигнала  $G_x(\omega)$  и помехи  $G_v(\omega)$

$$\xi(t) = x(t) + v(t)$$

Автокорреляционная функция от суммарного процесса  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} B_\xi(\tau) &= \mathcal{M}\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = \mathcal{M}\{(x(t)+v(t))(x(t+\tau)+v(t+\tau))\} = \\ &= B_x(\tau) + B_{xv}(\tau) + B_{vx}(\tau) + B_v(\tau) \end{aligned}$$

Если к левой и правой части равенства применить преобразование Фурье, получим спектр мощности сигнала  $\xi(t)$  и сумму спектров мощности:

- $G_\xi(\omega) = G_x(\omega) + G_{xv}(\omega) + G_{vx}(\omega) + G_v(\omega)$
- $G_{\xi x} = G_x(\omega) + G_{vx}(\omega)$
- $G_{x \xi} = G_x(\omega) + G_{xv}(\omega)$

В общем случае

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega) + G_{xv}(\omega)}{G_x(\omega) + G_{xv}(\omega) + G_{vx}(\omega) + G_v(\omega)}$$

Оптимальный фильтр соответствует характеристике: числитель из двух слагаемых, знаменатель - из четырех. В ряде случаев можно провести упрощение, связанное с тем, что можно положить сигнал и помеху взаимно независимыми, тогда соответствующие корреляционные функции между сигналом и помехой:  $G_{vx}(\omega) = 0$  и  $G_{xv}(\omega) = 0$ . Когда мы будем брать спектр, получим ноль, поэтому перекрестные члены в выражении занулятся. Тогда характеристика для оптимального фильтра:

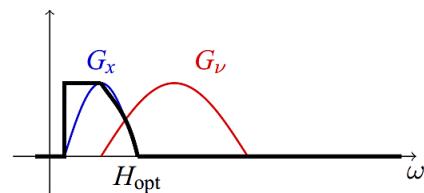
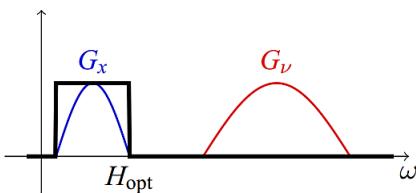
$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_v(\omega)}$$

Данный фильтр можно делать в эксперименте. Например, есть спектр помехи, известно на каких частотах она сильна или слаба, на каких частотах присутствует сильный и слабый сигнал, строим данное отношение и автоматически получаем Винеровский фильтр. Рассмотрим, чему равна среднеквадратичная ошибка фильтра, для чего подставим в выражение вместо  $G_\xi(\omega)$  соответствующие суммы спектров процессов  $x, v$ , а также учтем, что взаимные спектры = 0.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\xi(\omega) - |G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)(G_x(\omega) + G_v(\omega)) - |G_x(\omega)|^2}{G_x(\omega) + G_v(\omega)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_v(\omega)}{G_x(\omega) + G_v(\omega)}\end{aligned}$$

Рассмотрим, что из себя в разных случаях представляет характеристика фильтра:

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_v(\omega)} \quad \mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_v(\omega)}{G_x(\omega) + G_v(\omega)}$$



*Рис. 12.2. Справа - спектры сигнала и помехи не пересекаются, слева - спектры сигнала и помехи накладываются друг на друга*

Синяя линия - спектр сигнала, красная - спектр помехи

- правый график: нас интересует частота из области, где есть сигнал; спектр сигнала делится сам на себя, спектр помехи = 0, величина  $\equiv 1$ . Соответственно, везде, где есть сигнал, полагаем фильтр  $\equiv 1$ ; там, где сигнал зануляется - происходит зануление величины, в числителе стоит ноль, получается прямоугольный фильтр. Таким образом, Винеровский фильтр автоматически представляет собой фильтр в прямоугольном окне. Все компоненты, связанные с помехой, данный фильтр занулит; не изменит сигнал.
- левый график: спектры сигнала и помехи накладываются; за пределами области, где есть сигнал, фильтр дает тождественный ноль; где нет помехи, но есть сигнал - фильтр дает 1; там, где есть сигнал и помеха - дает сложную кривую, которая должна быть воплощена в "железе". Радиотехнически такой фильтр сделать довольно сложно.

### Параметрическая оптимизация фильтра

Оценим, на сколько фильтр эффективен, для чего рассмотрим пример, связанный с заменой Винеровского фильтра более простым фильтром, которым часто пользуются в обработке сигналов. С одной стороны, мы будем фильтровать сигнал с помощью Винеровского фильтра, с другой - с наложением прямоугольного окна. Задача имеет название "параметрическая оптимизация", потому что размер окна будет

подбираться таким образом, чтобы сигнал после фильтрации был максимально приближен к исходному. Полезный сигнал имеет спектр, который задается типичной лоренцовской кривой:

$$G_x(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2}$$

$$\alpha, \gamma > 0$$

Шум будем полагать белым, то есть одинаковым на всех частотах. Спектральная плотность мощности:  $G_v(\omega) = N_0/2$

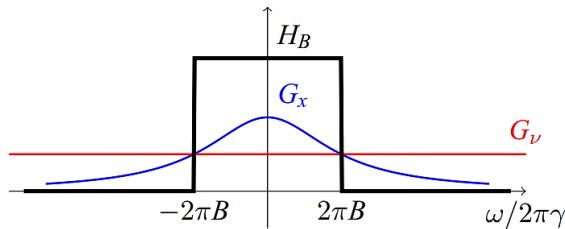


Рис. 12.3. Параметрическая оптимизация фильтра

Накладывая прямоугольное окно функция  $H_B$ , подберем его ширину и посмотрим, чему будет соответствовать ошибка фильтра. Мы не можем воспользоваться формулами для ошибки, полученными для Винеровского фильтра, поэтому сделаем шаг назад и вернемся к выражению

$$\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= (G_x(\omega) + G_v(\omega))|H(\omega)|^2 - 2G_x(\omega)H(\omega) + G_x(\omega) = \\ &= (G_v(\omega) - G_x(\omega))H(\omega) + G_x(\omega) \end{aligned}$$

Если фильтр прямоугольный, значение характеристики  $H(\omega)$  может быть либо 0, либо 1. Применим полученный вид и возьмем интеграл от функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_v(\omega)H(\omega)d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)H(\omega)d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} \end{aligned}$$

Поскольку под интегралом стоит функция  $H(\omega)$ , равная нулю за пределами интервала от  $-B$  до  $B$ , внутри интервала = 1, её действие сводится к тому, что появляются пределы интегрирования  $2\pi B, -2\pi B$ . В первом слагаемом интегрируется спектр шума, во втором - спектр сигнала, в третьем - спектр сигнала (пределы

интегрирования бесконечные). Средний квадрат ошибки зависит от ширины окна фильтра следующим образом:

$$\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = N_0 B - \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma} \arctan \frac{B}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

Чтобы найти минимум, необходимо продифференцировать выражение по  $B$ :

$$\frac{\partial}{\partial B} \mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = 0$$
$$B_{\min} = \gamma \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2 N_0} - 1}$$

Полученное выражение не очень очевидно в плане своего физического смысла. Для его прояснения необходимы дополнительные манипуляции. Важно понять, каково отношение сигнал/шум на входе фильтра.

### Отношение сигнал/шум

Мощность сигнала - интеграл от всей спектральной плотности мощности по всем бесконечным пределам; интеграл является табличным:

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

Мощность шума: изначально шум был задан как белый, если интегрировать константу в бесконечных пределах, получим бесконечность. Белый шум несет в себе бесконечную мощность. В этом плане отношение мощности сигнала к мощности шума, какой бы не был взят сигнал, всегда будет = 0. Пусть шум присутствует в полосе частот  $-F_0 \dots F_0$ , при этом полоса должна быть связана с сигналом. Величина  $F_0$  не связана с параметром  $B$  - фильтром, никак не влияющим на входное отношение сигнал/шум. Необходимо задать эффективную полосу частот, в которой присутствует шум.

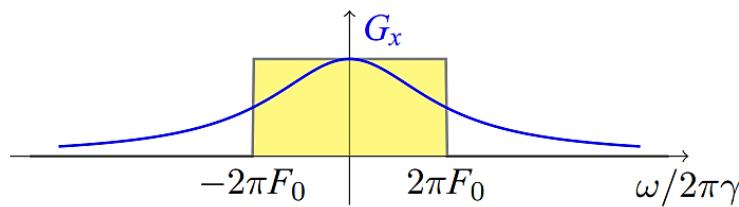


Рис. 12.4. Параметрическая оптимизация фильтра. Отношение сигнал/шум

Спектральная плотность мощности для сигнала отражена на рис. 12.4. синей линией. Определим полосу, в которой присутствует сигнал: высота прямоугольника равна значению спектральной плотности мощности в нуле; ширина - подбирается таким образом, что площадь прямоугольника равна площади под кривой  $G_x$ . Соответственно, мы собрали всю энергию сигнала в прямоугольную желтую область, из которой автоматически получается частота  $F_0$ .

$$4\pi F_0 G_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega$$

$$F_0 = \frac{\pi\gamma}{2}$$

Определив эффективную полосу, в которой присутствует шум, определим отношение сигнал/шум в задаче:

$$q = \frac{P_x}{P_v} = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \frac{2}{\pi N_0} = \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2 N_0}$$

Из произведенных рассуждений: коэффициент в выражении для  $B_{\min}$  и коэффициент, определяющий отношение сигнал/шум на входе фильтра, - одинаковы. Значит, оптимальная ширина для прямоугольного фильтра:

$$B_{\min} = \gamma\sqrt{q - 1}$$

### Сравнение Винеровского и прямоугольного фильтра

Вычислим среднеквадратичную ошибку относительно мощности сигнала на входе прямоугольного фильтра, тогда величина не будет иметь размерности и подскажет, насколько хорошо мы восстанавливаем исходный сигнал. В идеале она должна стремиться к нулю. Для рассматриваемого прямоугольного фильтра:

$$\epsilon_1 = \frac{\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\}}{P_x} = 1 + \frac{2\sqrt{q - 1}}{\pi q} - \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{q - 1}$$

Винеровский фильтр определяется формулой, согласованной с шумом и сигналом:

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_v(\omega) + G_x(\omega)}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + q}}$$

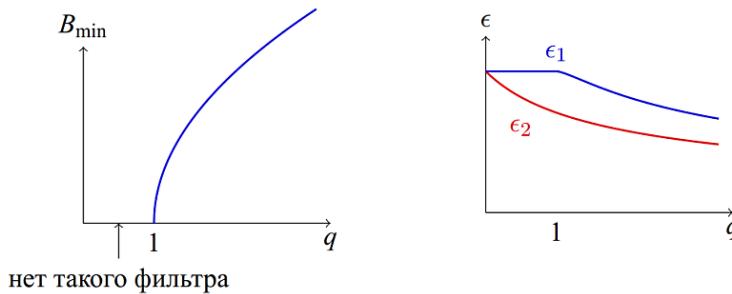


Рис. 12.5. Слева - график зависимости ширины окна от параметра  $q$ , справа - графики зависимости ошибки  $\epsilon$  от параметра  $q$

- Левый график: если параметр  $q < 1$  - сигнал слабый, сильно тонет в шумах, для такой ситуации данный фильтр в принципе не существует; если отношение

сигнал/шум  $> 1$  - есть окно, в рамках которого мы начинаем обрезать сигнал. Ширина окна растет с ростом величины  $q$ , чем больше мощность сигнала относительно шума, тем более широкое окно можно взять.

- Правый график: если  $q < 1$ , то ошибка, которую допускает Винеровский фильтр, в точности = 1. Это означает, что фильтр ошибается на 100% и не улучшает сигнал. Только тогда, когда  $q > 1$ , начинается спад, то есть фильтр начинает свою работу. Ошибка  $\epsilon_2$ , которую дает Винеровский фильтр, становится  $< 1$ . Обратим внимание на то, что фильтр такого рода работает даже при значении  $q < 1$ ; способствует тому, что уровень сигнала на выходе фильтра оказывается более высоким, чем уровень сигнала относительно шума на входе.

Отметим: при фильтрации сигналов часто используют прямоугольные фильтры, но они могут быть хороши только в самых простых случаях, когда отношение сигнал/шум в целом достаточно хорошее. Когда помеха и сигнал находятся на разных частотах, прямоугольная фильтрация дает результат. Если происходит наложение области частот, где находится помеха, с областью сигнала, а мощность помехи превышает уровень сигнала - применять прямоугольную фильтрацию не стоит. Применение Винеровской фильтрации, которая оптимизирована с точки зрения спектра и сигнала, и шума, оказывается оправданным в каждом из рассмотренных случаев. Цена за лучшую фильтрацию: Винеровский фильтр - более сложная процедура обработки сигнала, если говорить про цифровую обработку - фильтр сделать возможно, с точки зрения радиотехники - сделать и настроить фильтр может быть довольно сложно. В любом случае, для работы фильтра необходимо знать спектр входного сигнала и спектр сигнала, который является помехой.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ