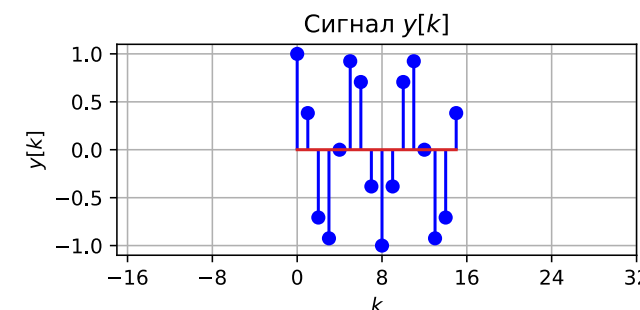
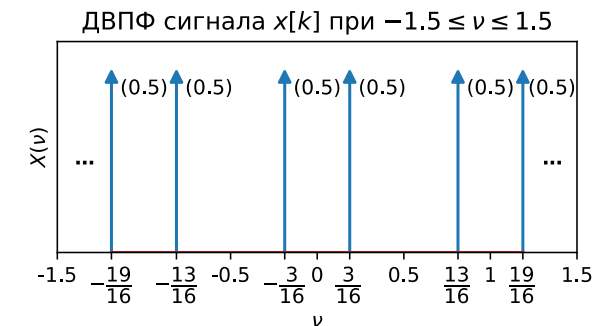
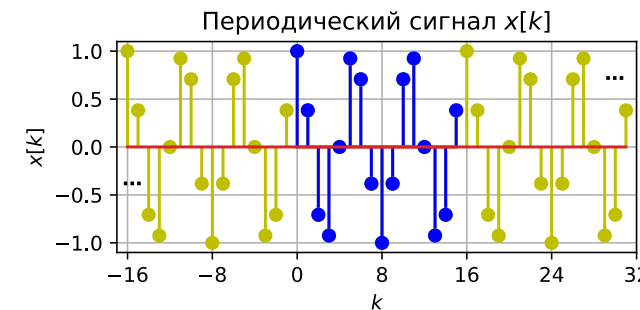


Лекция 10 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

8 апреля 2025 г.

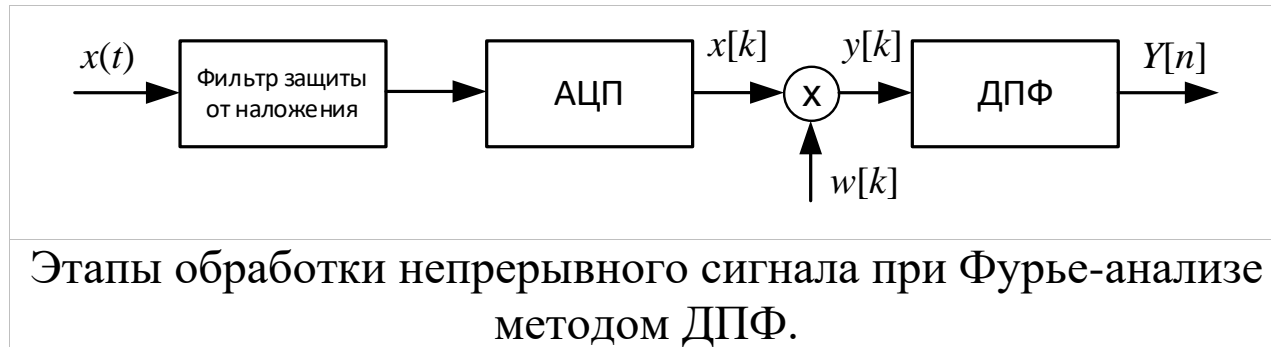
7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ.

- Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.
- Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна.
- Примеры основных оконных функции (прямоугольное, Ханна, Хемминга, Блэкмана) и их характеристики.
- Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды.



Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ

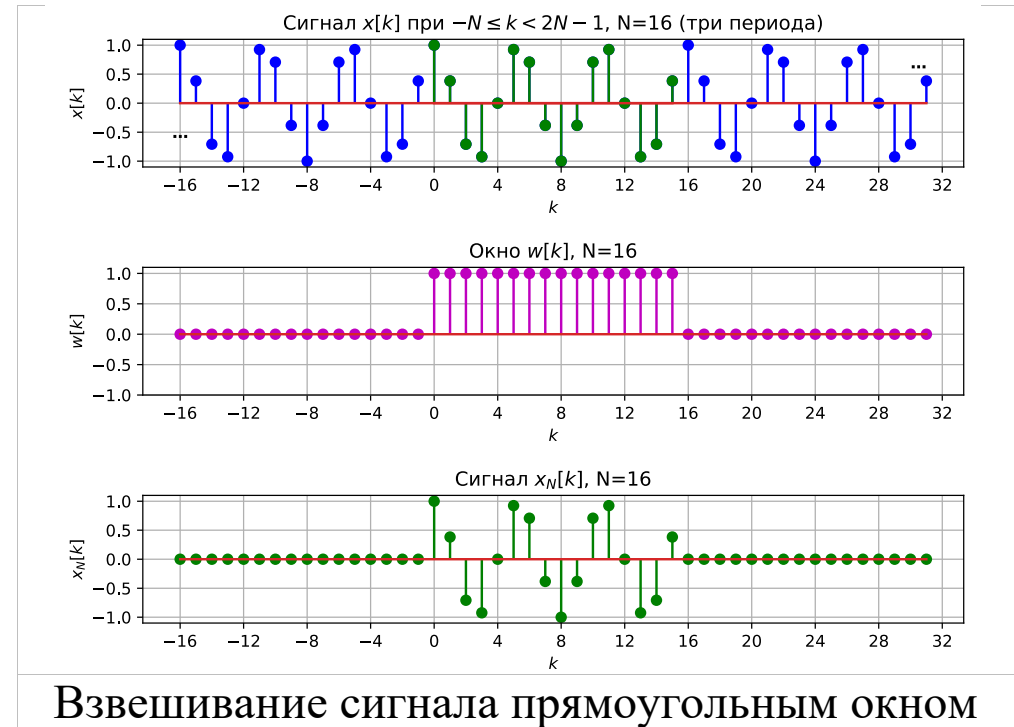
Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.



Аналоговый фильтр защиты от наложения ослабляет компоненты сигнала $x(t)$ выше частоты Найквиста $f_d / 2$.

Следующий за ним аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выполняет операции дискретизации по времени и квантования выборок сигнала по уровню. На выходе АЦП будет цифровой сигнал $x[k]$, представленный последовательностью отсчетов.

Во многих случаях длительность сигнала $x(t)$ велика, поэтому перед вычислением ДПФ последовательность отсчетов $x[k]$ умножается на временное окно $w[k]$ длительностью N .



В результате получается конечная последовательность $y[k] = x[k]w[k]$, которой в частотной области соответствует периодическая свёртка

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v}.$$

Здесь $v = f \Delta t = f / f_d$ – нормированная частота (доли частоты дискретизации), $X(v)$ – ДВПФ (спектр) сигнала $x[k]$, $W(v)$ – ДВПФ оконной функции $w[k]$.

Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна

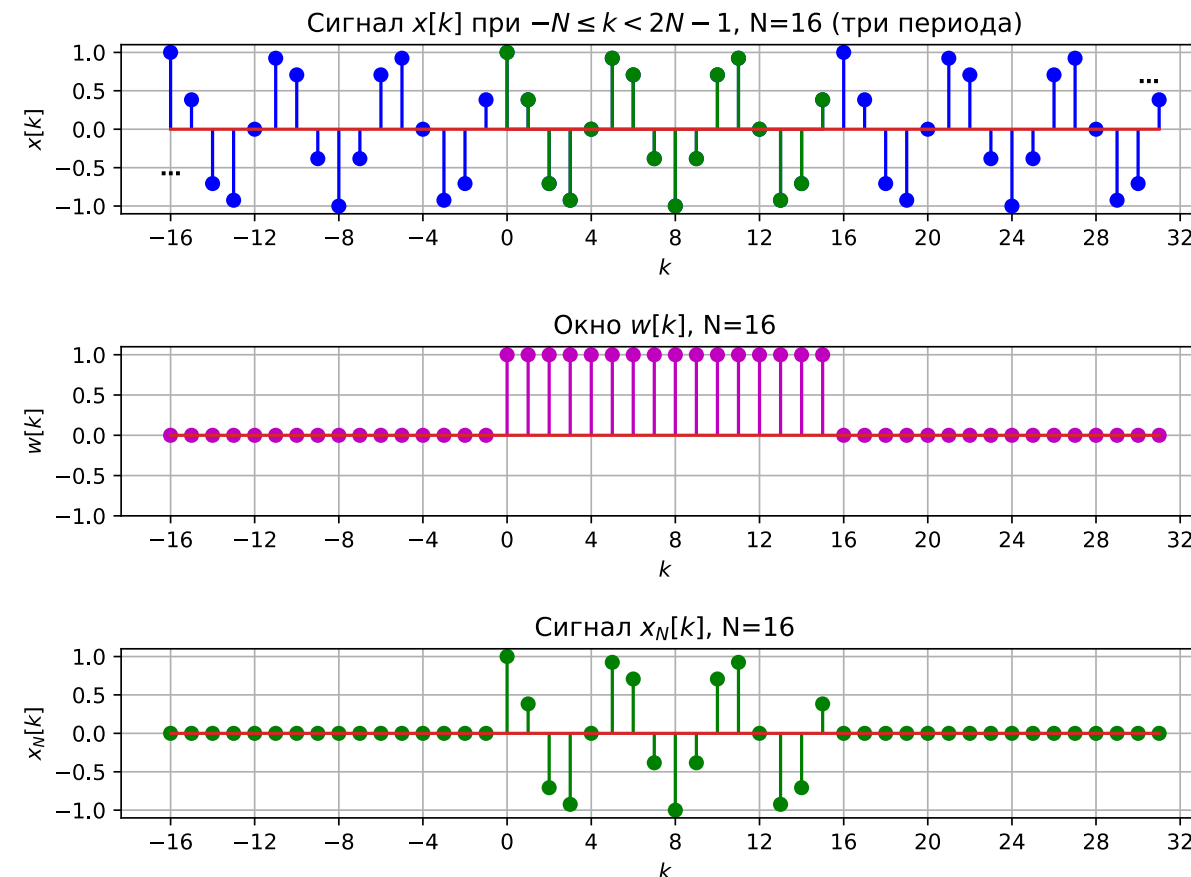
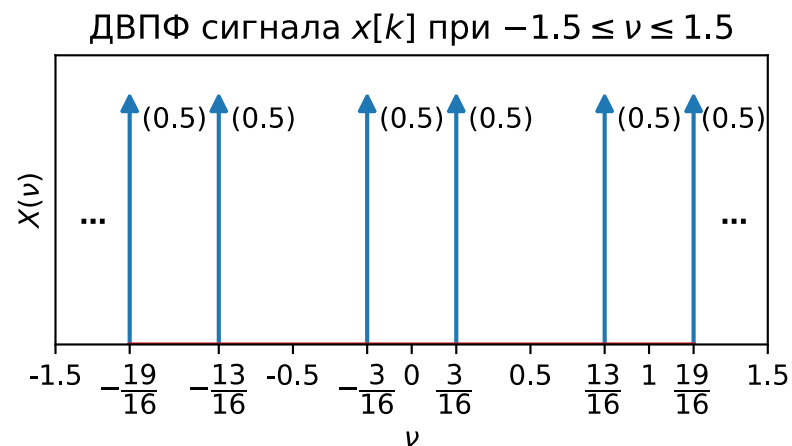
Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Рассмотрим этот эффект на следующем примере. Предположим, что имеется периодическая последовательность

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$

$X(\nu)$ содержит по две δ -функции с весами $1/2$ на периоде.

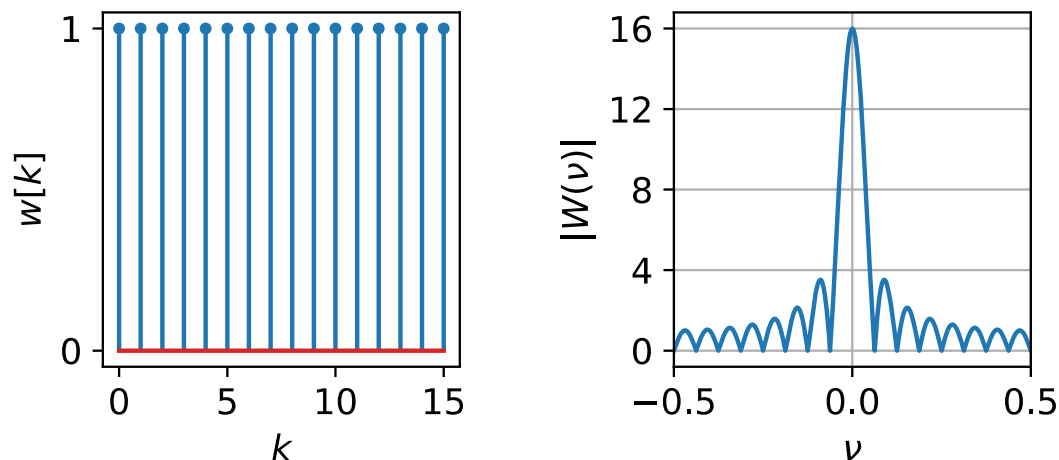


Предположим, что используется прямоугольное окно длиной в $N=15$ отсчетов и для дальнейшего спектрального анализа используется сигнал $y[k] = x[k]w[k]$.

leakage

Для прямоугольного окна спектр мы ранее вычисляли

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$



ДВПФ последовательности $y[k]$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})W(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{\nu})X(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1), & a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1), & (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0, & (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

Тот же результат можно получить через теорему смещения:

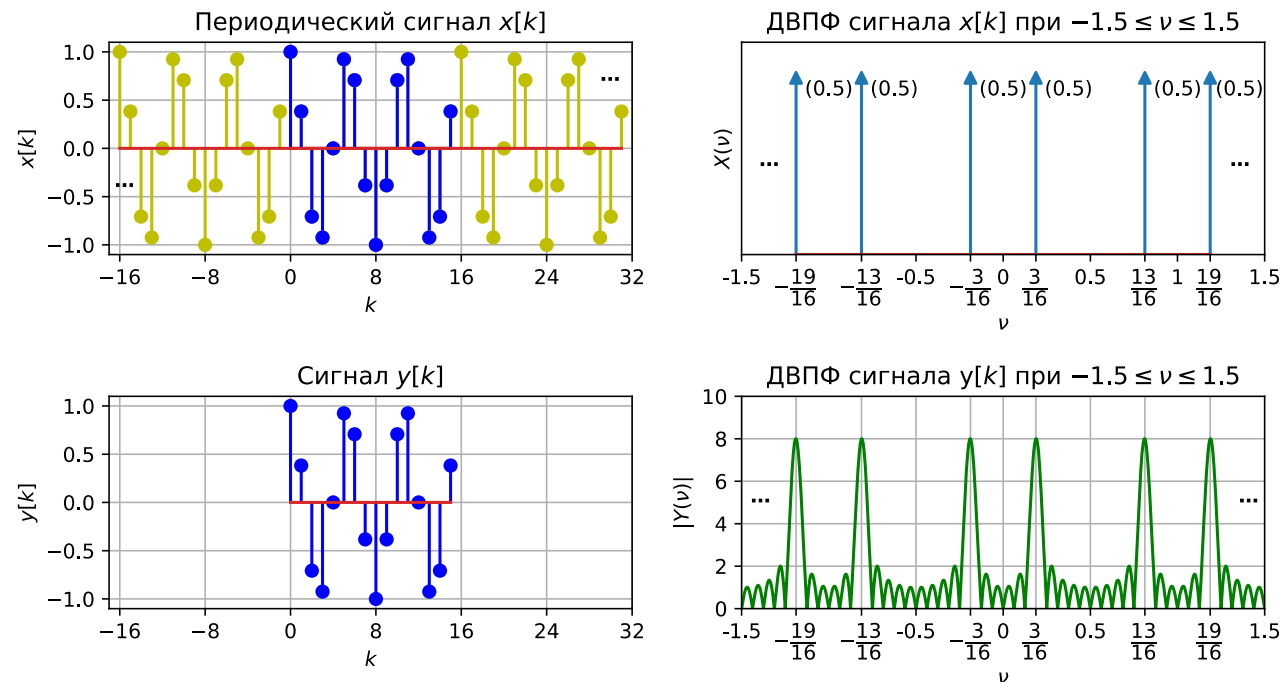
$$y[k] = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

В итоге

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(\nu - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu - \frac{3}{16}))} + \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(\nu + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu + \frac{3}{16}))}.$$





Взвешивание прямоугольным окном: интерпретация во временной и в спектральной области

Эффект растекания спектральных компонент заключается в том, что гармоники (дельта-функции) в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

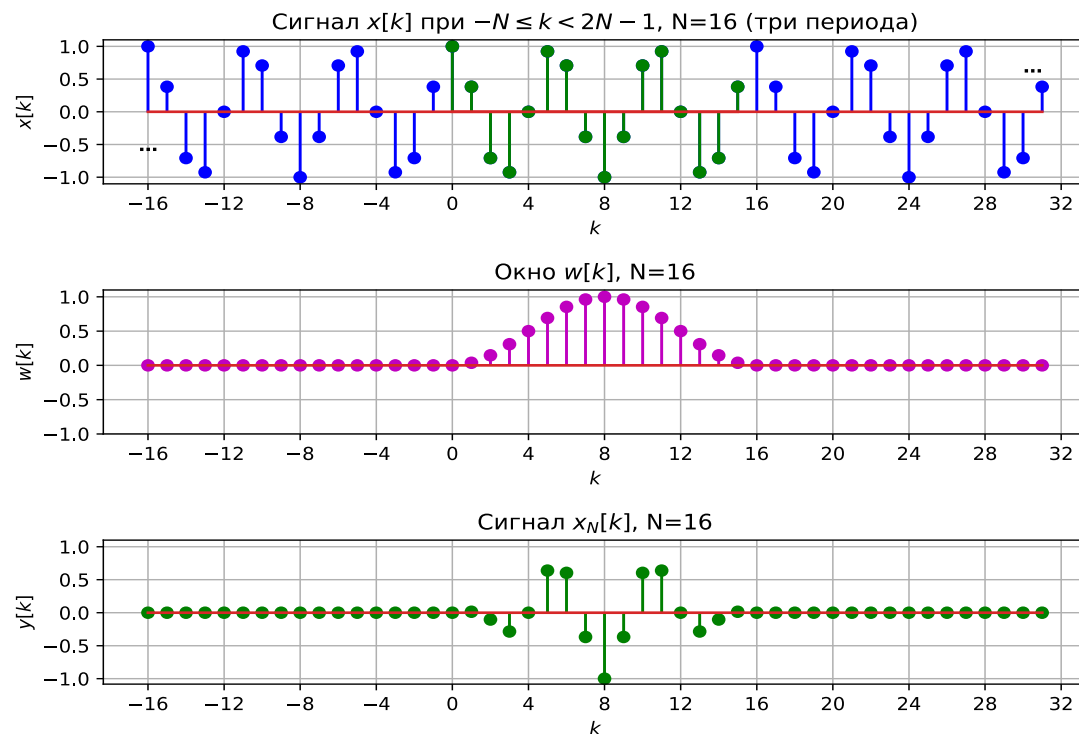
Помимо этого, наблюдается **эффект утечки спектра через боковые лепестки** прямоугольного окна, который приводит к появлению боковых выбросов.

Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна — "ложные периодичности".

Примечание. Физик Франц Артур Фридрих Шустер (нем. Franz Arthur Friedrich Schuster; 1851—1934), называл их "ложными периодичностями". Многие исследователи его времени ошибочно утверждали, эти максимумы обусловлены скрытыми периодичностями в сигнале. Шустер увидел здесь аналогию с дифракционными полосами в оптическом спектрографе, которые возникали из-за ограниченной апертуры прибора.

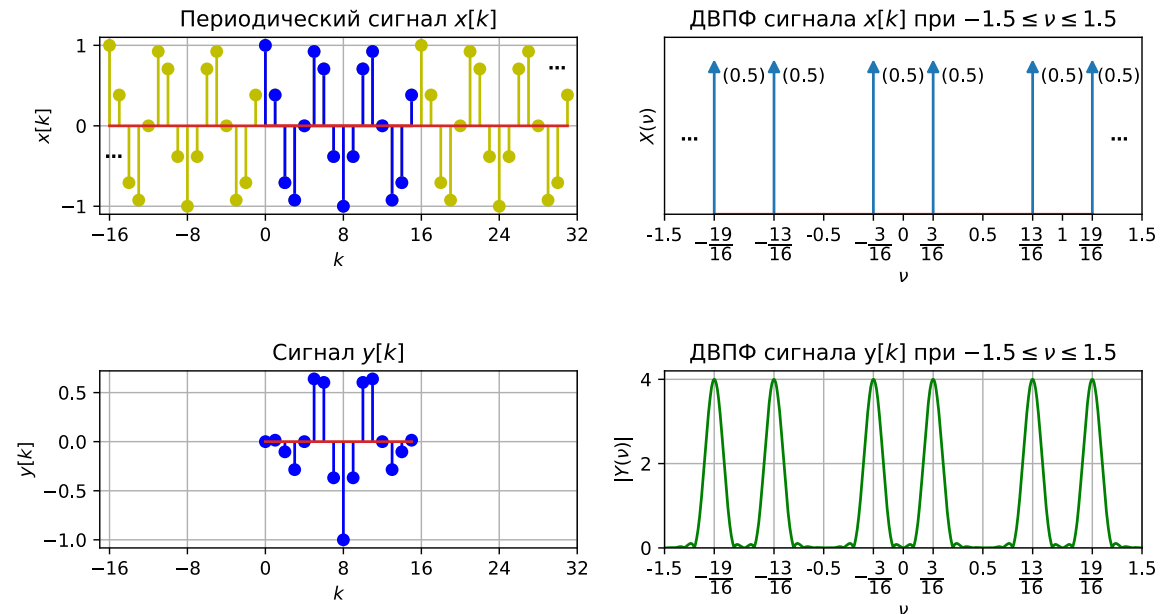
leakage

Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна.



Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности $x[k] = \cos\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$, т.е. для последовательности $y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$, где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$



Применение окна Ханна позволило снизить уровень боковых лепестков по сравнению с их уровнем в случае прямоугольного окна. Однако это даётся ценой расширения главного лепестка спектрального окна $W(v)$, что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков

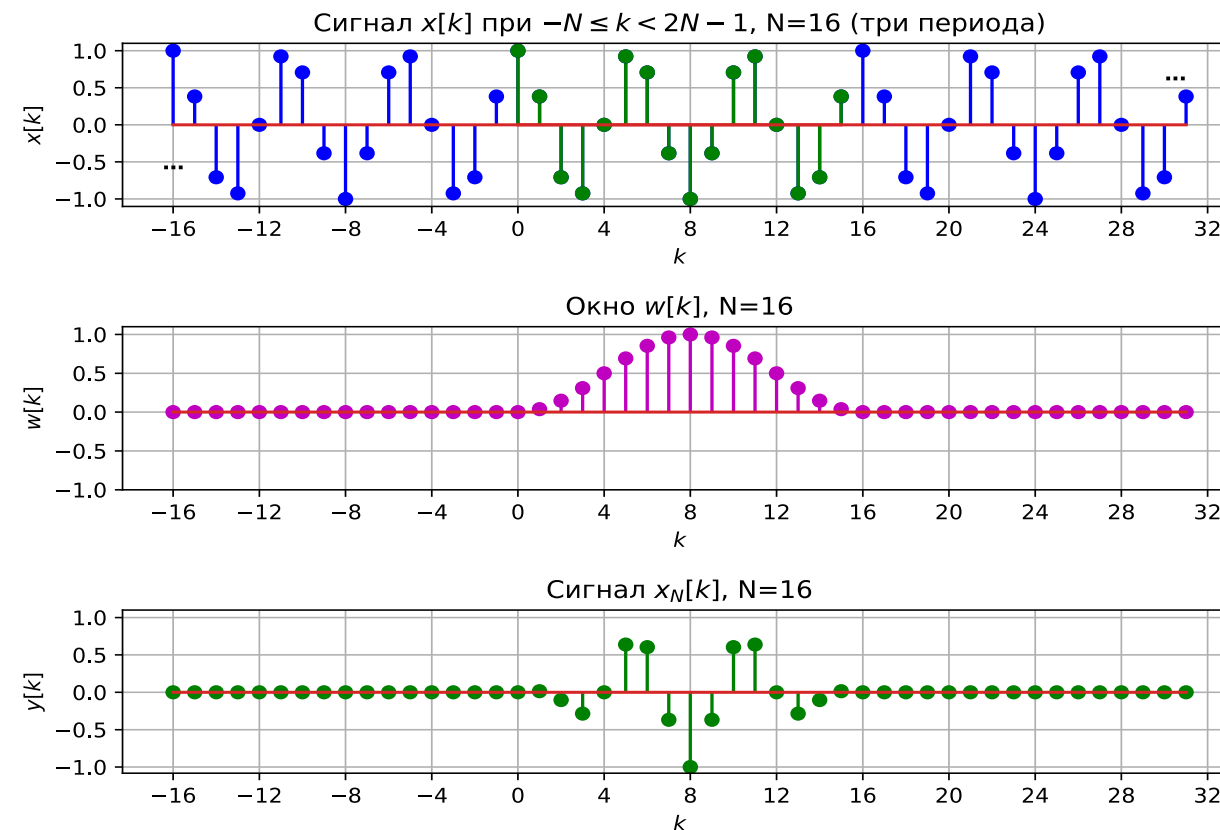
Примеры оконных функций для спектрального анализа

Примеры оконных функций для спектрального анализа.

Рассмотрим примеры оконных функций $w[k]$ для ДПФ, которые часто используются. Для того, чтобы определить, к чему приводит умножение на ту или иную оконную функцию, для окон будем использовать следующие спектральные характеристики.

- Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка окна на нулевом уровне.
- Ширина $\Delta\nu$ полосы на уровне половинной мощности (на уровне, который на 3 дБ ниже максимального уровня).
- Максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ.
- Асимптотическая скорость спада уровней боковых лепестков в дБ/октаву.

Окта́ва — интервал частот, в котором соотношение граничных частот составляет один к двум. Например, расстояние между частотами $\nu_1 = 0.1$ и $\nu_2 = 0.2$ составляет одну октаву.



Прямоугольное окно

Прямоугольное окно

Во временной области прямоугольное окно длительностью N задается формулой

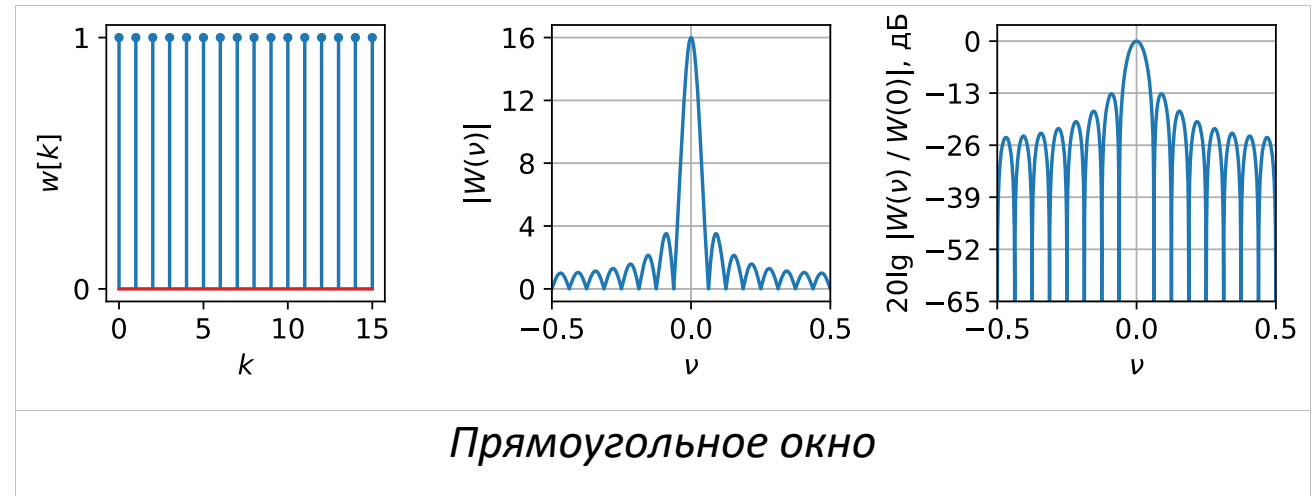
$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Умножение на прямоугольную оконную функцию эквивалентно ограничению сигнала по длительности. Вычислим ДВПФ оконной функции

$$\begin{aligned} W_{\text{пр}}(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \frac{2j e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{2j e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \\ &= \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

АЧХ оконной функции

$$|W_{\text{пр}}(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$



Основные характеристики прямоугольного окна длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = 2 / N$ (2 бина ДПФ);
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = 0,89 / N$ (0,89 бина ДПФ);
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-13,3$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 6 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -3,92$ дБ.

Окно Бартлетта

Временное окно Бартлетта имеет треугольную форму:

$$w_{\text{Бартлетта}}[k] = \begin{cases} 1 - \frac{2}{N} \left| k - \frac{N}{2} \right|, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases} \quad (1)$$

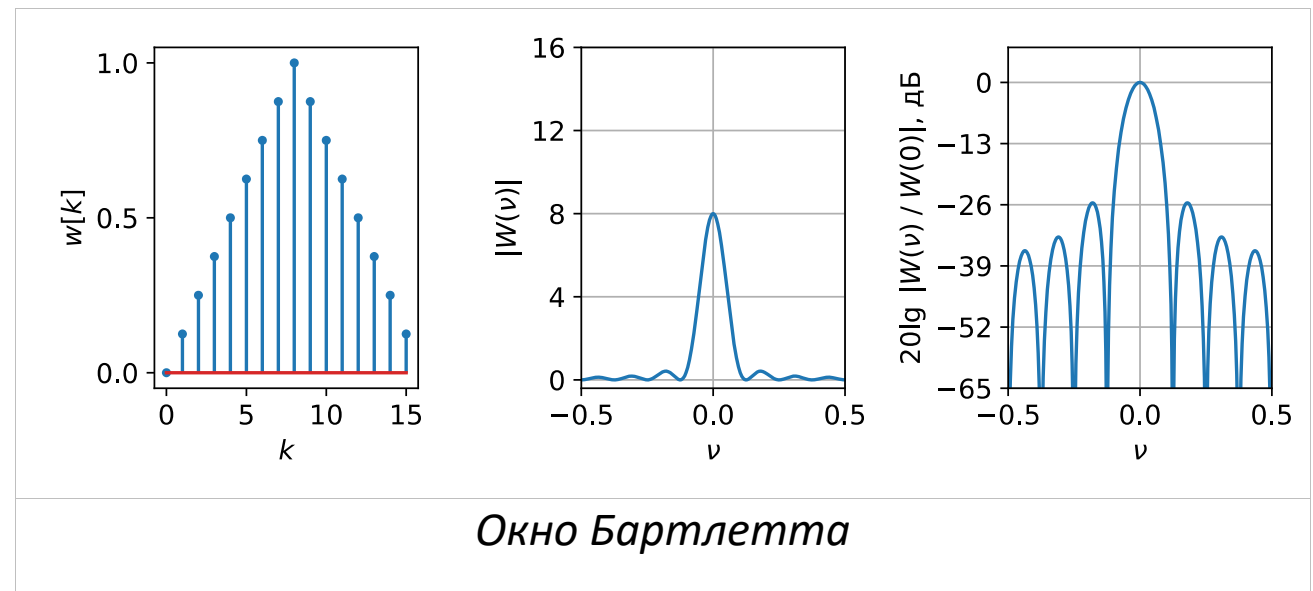
Для четного N окно Бартлетта можно представить как свертку двух прямоугольных окон длиной $N/2$, от нормированную на их длину. Тогда по теореме о свертке для ДВПФ частотная характеристика этого окна

$$W_{\text{Бартлетта}}(\nu) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin \pi \nu \frac{N}{2}}{\sin \pi \nu} \right)^2 \exp(-j\pi \nu N). \quad (2)$$

В итоге ширина главного лепестка окна на нулевом уровне в два раза больше, чем у прямоугольного, и составляет $\Delta \nu = 4 / N$ (4 бина).

Основные характеристики окна Бартлетта длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta \nu = \frac{4}{N}$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta \nu = \frac{1,28}{N}$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-26,5$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 12 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -1,82$ дБ.



Окно Ханна

Окно Ханна для ДПФ во временной области описывается следующей формулой:

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить это окно в спектральной области, заметим, что

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi k}{N}} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$$

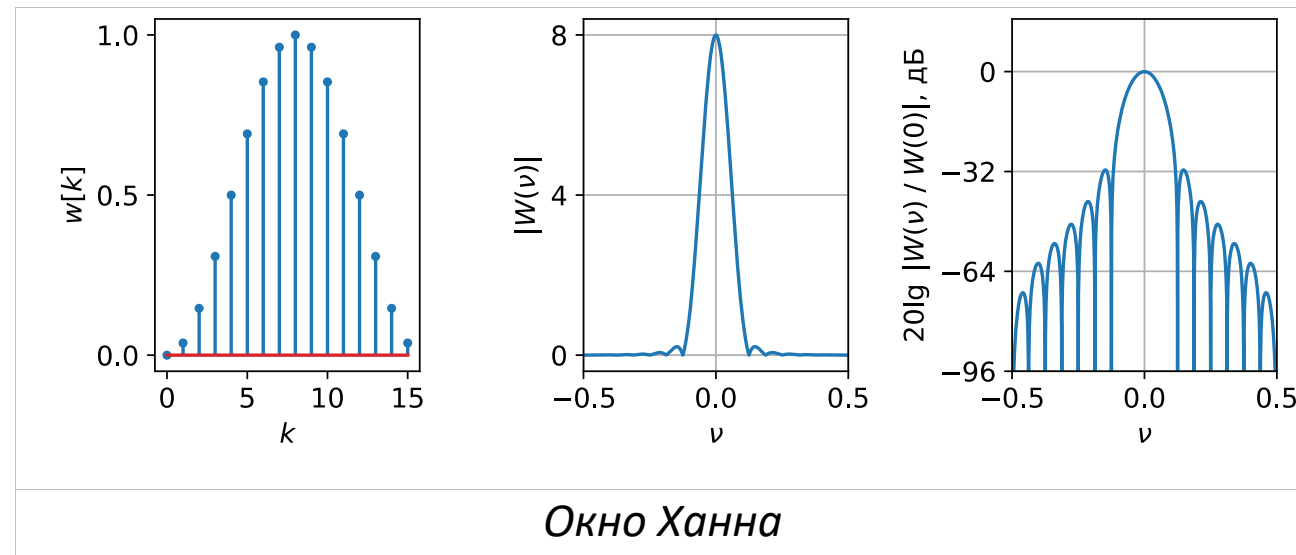
Тогда по теореме смещения для ДВПФ, окно Ханна в спектральной области может быть записано через частотную характеристику прямоугольного окна:

$$W_{\text{Ханна}}(\nu) = \frac{1}{2} W_{\text{пр}}(\nu) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

где $W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$

Как нетрудно видеть, у окна Ханна всего три ненулевых отсчета ДПФ на одном периоде:

$$\tilde{W}_{\text{Ханна}}[n] = \frac{1}{N} W_{\text{Ханна}}[n] = \begin{cases} 0,5, & \text{при } n = mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ -0,25, & \text{при } n = \pm 1 + mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$



Основные характеристики окна Ханна длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = 4 / N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = 1,44 / N$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-31,5$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 18 дБ / октава.

Окно Хэмминга

Американский математик Ричард Уэсли Хэмминг, известный своими работами по теории информации, предложил использовать окно следующего вида:

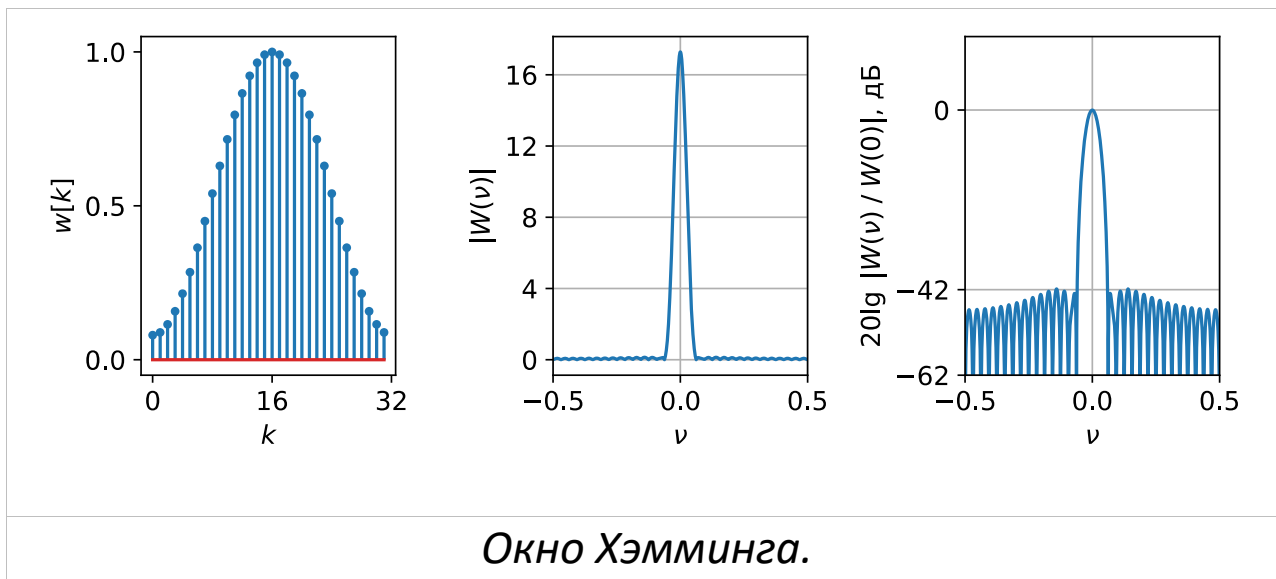
$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Множители 0,54 и 0,46 позволяют практически полностью устранить максимальный боковой лепесток.

Используя теорему смещения для ДВПФ, получаем частотную характеристику окна Хэмминга

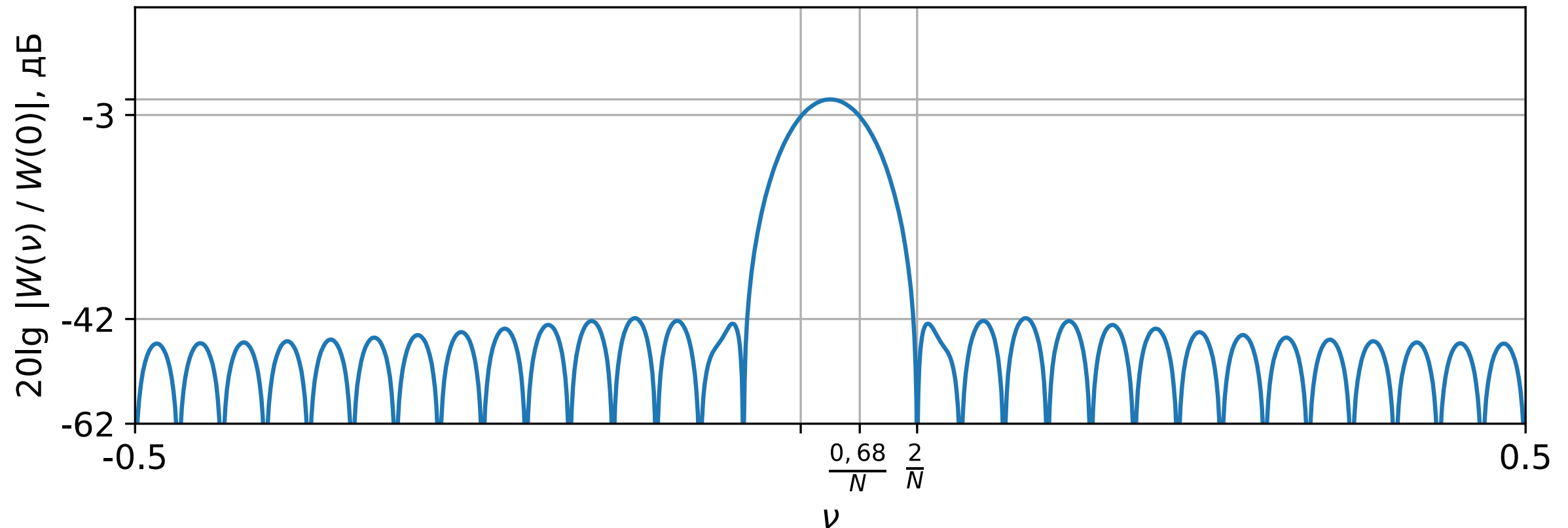
$$W_{\text{Хэмминга}}(\nu) = 0,54 W_{\text{пр}}(\nu) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

$$\text{где } W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$



Основные характеристики окна Хэмминга длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = 4 / N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = 1,36 / N$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет -42 дБ;
- скорость спада боковых лепестков 6 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -1,78$ дБ.



Определение параметров АЧХ окна Хэмминга по графику.

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta v = 4 / N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta v = 1,36 / N$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет -42 дБ;

Окно Блэкмана

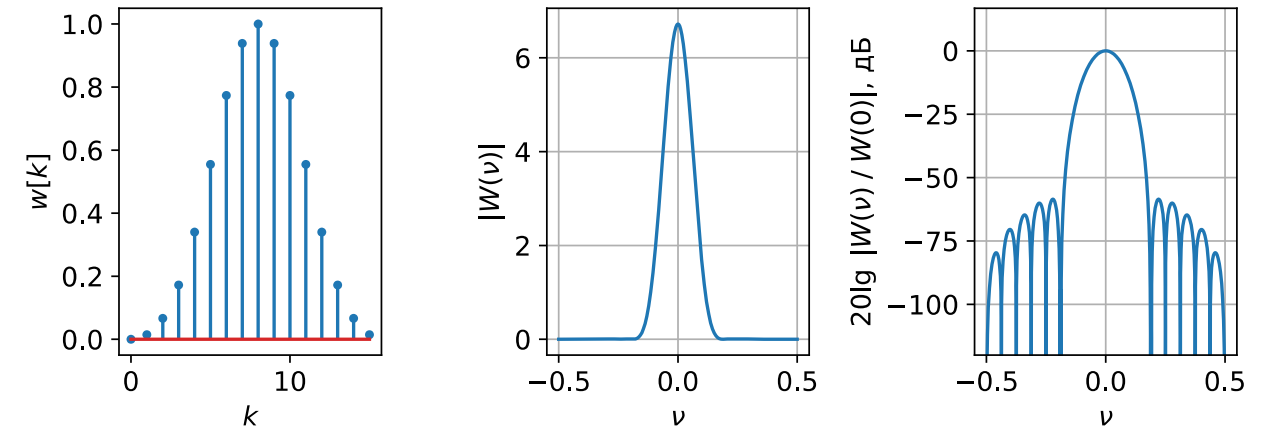
Окно Блэкмана имеет следующий вид:

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

ДВПФ может быть выражено через спектр прямоугольного окна:

$$W_{\text{Блэкмана}}(\nu) = 0,42 W_{\text{пр}}(\nu) - 0,25 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,25 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + 0,04 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{2}{N}\right) + 0,04 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{2}{N}\right).$$

Окно Блэкмана обладает низким максимальным уровнем боковых лепестков относительно главного (-58 дБ), но при этом ширина главного лепестка на нулевом уровне составляет $\Delta\nu = 6/N$ (6 бин).



Окно Блэкмана.

Условия различения соседних гармонических компонент

Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды

Достаточно близкие спектральные компоненты могут оказаться неразличимыми из-за слияния главных лепестков их максимумов.

Рассмотрим условия, которые позволяют сделать выводы о различении соседних спектральных компонент по заданному расстоянию между их относительными частотами $\Delta\nu_{1,2}$ и известным характеристикам главного лепестка окна.

а) Слияние компонент при $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$.

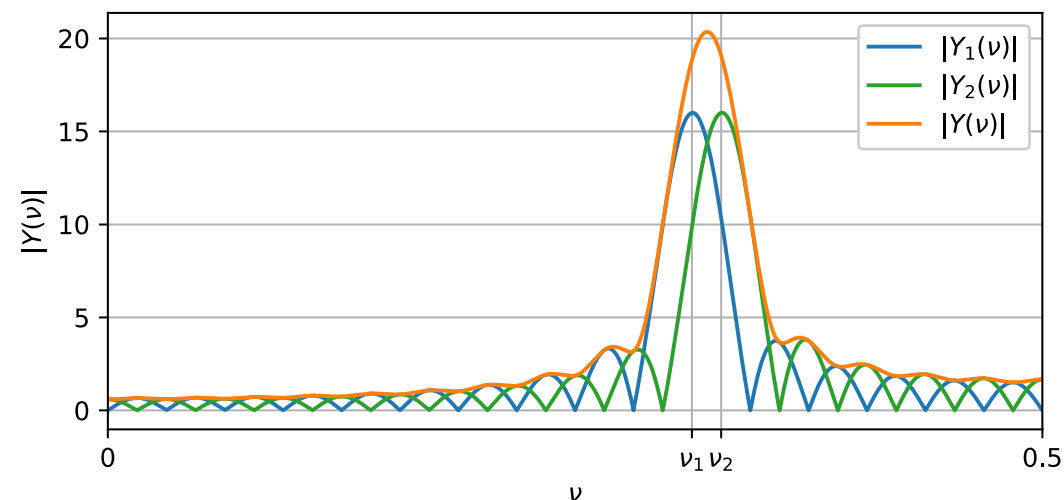
Если $\Delta\nu_{1,2}$ меньше ширины главного лепестка на уровне половинной мощности $\Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ ($10\lg(0.5) \approx -3\text{дБ}$), то спектральные компоненты, как правило, неразрешимы и спектральные пики сольются в один.

Пример. На рисунке приведены ДВПФ $Y(\nu)$, $Y_1(\nu)$ и $Y_2(\nu)$

последовательностей $y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right)w[k]$,

$y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{10,5}{32}k\right)w[k]$ и их суммы $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ для

прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин ДПФ).



Поскольку $\Delta\nu_{1,2} = 0,5 / N$, то $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ и спектральные максимумы сливаются в один. Две спектральные компоненты неразличимы на графике спектра.

Условия различения соседних гармонических компонент

б) Различимость компонент при $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

В ДПФ анализе условием различимости спектральных компонент служит ширина главного лепестка по уровню половинной амплитуды $\Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ ($20\lg(0.5) \approx -6\text{дБ}$).

Это связано с тем, что если вклад в когерентное суммирование вносят две спектральные компоненты одной амплитуды, то усиление от каждой компоненты в точке их пересечения не должно превышать 0,5 от их максимумов.

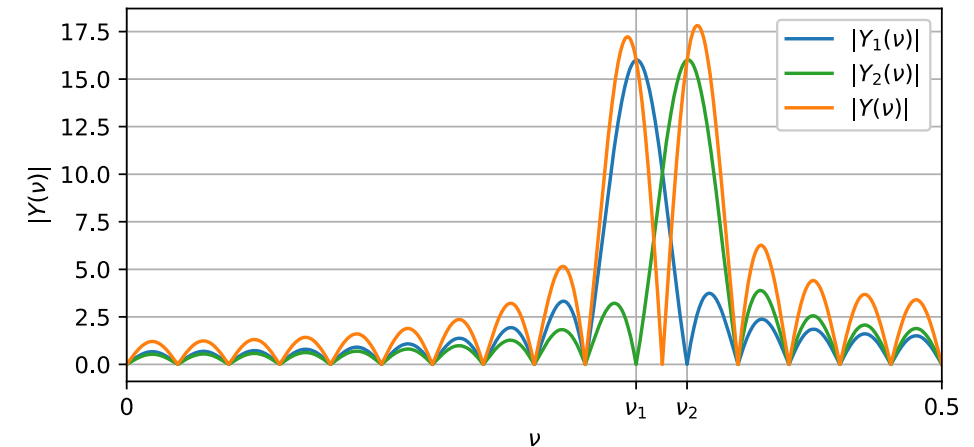
Таким образом, различимость спектральных компонент будет гарантирована при $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

Пример. На рисунке приведены ДВПФ $Y(\nu)$, $Y_1(\nu)$

и $Y_2(\nu)$ последовательностей $y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right)w[k]$,

$y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{11}{32}k\right)w[k]$ и их суммы $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ для

прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин), $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$ (1,2 бина).



В этом случае $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$, и $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

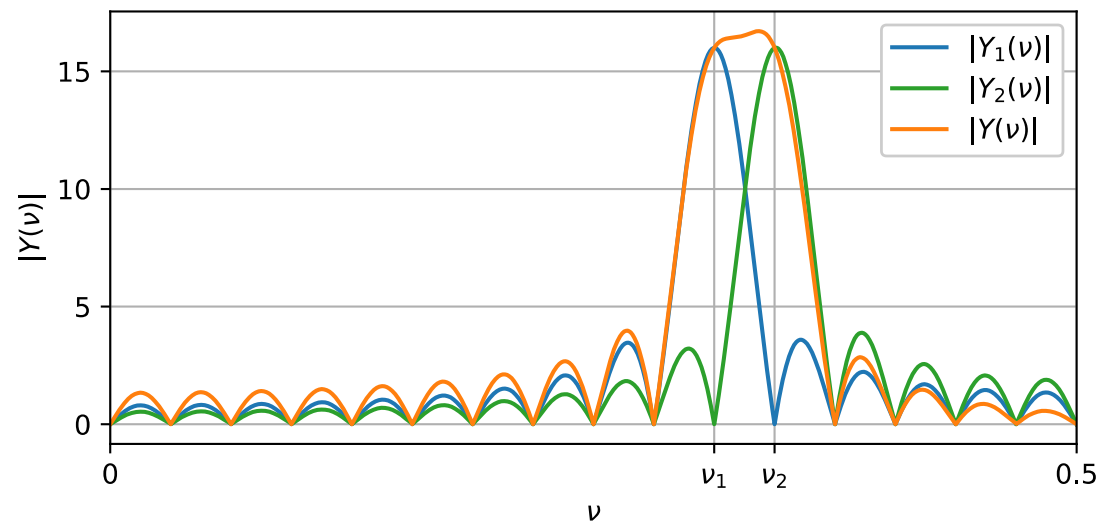
Две спектральные компоненты оказались различимы на графике спектра, однако, как будет показано далее, гарантировать эту различимость по расстоянию между гармониками нельзя.

Заметим, что здесь наблюдается значительное смешение максимумов, вызванное влиянием боковых лепестков соседних спектральных компонент. Применение оконных функций, отличных от прямоугольной, могло бы ослабить этот эффект, но при этом может привести к неразличимости компонент из-за широкого главного лепестка.

Условия различения соседних гармонических компонент

Пример. На рисунке приведены ДВПФ $Y(\nu)$, $Y_1(\nu)$ и $Y_2(\nu)$ последовательностей

$y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k + 0,58\pi\right)w[k]$, $y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{11}{32}k\right)w[k]$ и их суммы $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ для прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин), $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$ (1,2 бина).



В этом случае также $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$, и $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

Однако из-за сдвига $y_1[k]$ по фазе в данном случае действительные и мнимые части спектральных компонент сложились так, что спектральные максимумы не различимы. При этом мы не могли гарантировать их различимость.

Заметим, что, если условие $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ выполняется (с некоторым запасом) то мы можем гарантировать различимость спектральных компонент в спектре.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$$x_1[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(17\pi k / 64),$$

$$x_2[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(21\pi k / 64).$$

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 64-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы соседние спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

№2. Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения (различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды) не менее $\Delta\nu = 0,0075$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$. Используя данные из таблицы приложения к лекции, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу:

а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

№3. Предположим, что требуется провести ДПФ-анализ сигнала $x[k]$ с использованием окна Ханна $w[k]$.

Размерность ДПФ, длина окна и длина сигнала равны N .

Доказать, что для вычисления ДПФ $Y[n]$ сигнала $x[k]w[k]$ достаточно провести $2N$ сдвигов на один двоичный разряд и $2N$ сложений для коэффициентов ДПФ $X[n]$ последовательности $x[k]$, т.е. показать, что

$$Y[n] = \frac{1}{2} \left(X[n] - \frac{1}{2} (X[n-1]_N + X[n+1]_N) \right).$$

Приложение. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10
Flattop	10	зависит от длины окна		-0,02

название окна	полоса по уровню -3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню -6 дБ (в бинах ДПФ)	ЭШП (в бинах ДПФ)	$\delta = \frac{\Delta v_{\text{ш}} - \Delta v_{-3\text{дБ}}}{\Delta v_{-3\text{дБ}}}$	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1,00	0,124	1
Бартлетта	1,28	1,78	1,33	0,039	0,5
Ханна	1,44	2,00	1,50	0,042	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	1,36	0,023	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	1,73	0,055	0,42
Flattop	3,74	4,60	3,77	0,008	0,21557895