

Лекция 1 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

4 февраля 2025 г.

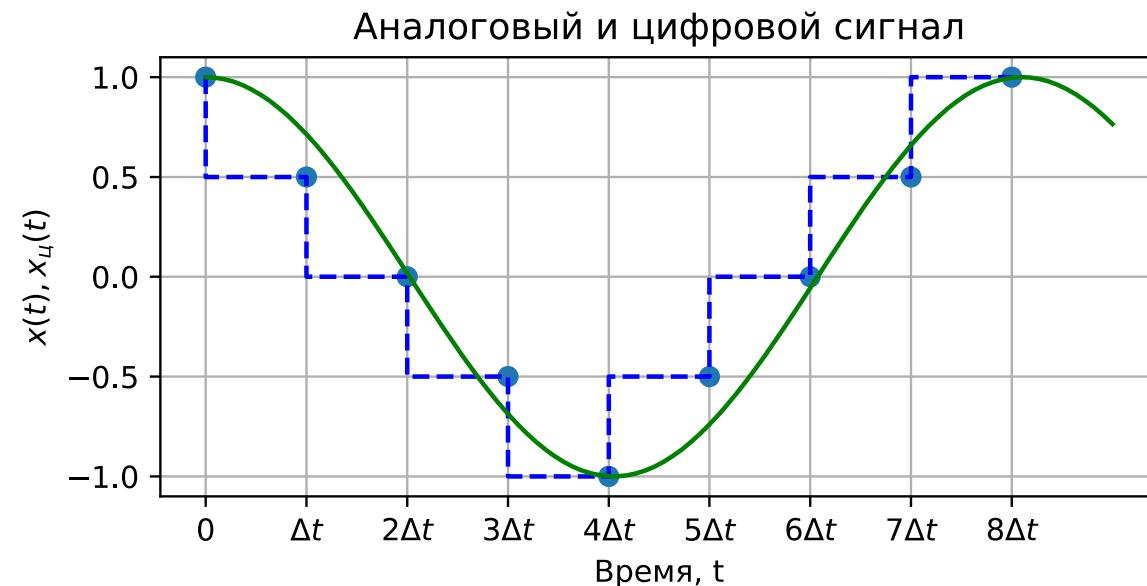
Предисловие к лекционному курсу.

1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Понятия дискретизации и квантования.

Способы описания дискретных сигналов.

Шум квантования АЦП.



Предисловие к лекционному курсу

Лекционный курс

«Дискретные преобразования сигналов»

3 курс (бакалавриат, специалитет)

Б01-201, Б01-202, Б01-203, Б01-204, Б01-205,
Б01-206, Б01-207, Б01-208, Б01-209, С01-219

Лекторы: Леус Андрей Владимирович,

Тормагов Тимофей Алексеевич,

tormagov@phystech.edu

Лекции по вторникам в 10:45—12:10 в Б.Физ ЛК.

Страница курса в LMS

<https://lms.mipt.ru/course/view.php?id=1564&type=lecture>

Тематика курса: дискретизация сигналов, дискретное во времени и дискретное преобразования Фурье и их применение для анализа сигналов, основы цифрового спектрального анализа детерминированных сигналов.

Обратите внимание, что «Радиофизическая лаборатория» и «Дискретные преобразования сигналов» — две разные дисциплины, по которым выставляются отдельные оценки.

Материалы лекций и новости курса публикуются в LMS и на сайте кафедры.

Гостевая авторизация student student5xx

<http://kprf.mipt.ru/index.php/uchebnye-kursy2/diskretnye-preobrazovaniya-signalov/88-dsp-3-2025>

Предисловие к лекционному курсу

№	Дата	Тема
1	4 февраля 2025 г.	1. Классификация сигналов. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Понятия дискретизации и квантования. Шум квантования АЦП.
2	11 февраля	2. Спектры периодических и импульсных сигналов. Преобразование Фурье, его свойства. Примеры спектров импульсных сигналов (прямоугольный импульс, треугольный импульс, приподнятый косинус, гауссовский импульс). Спектр дельта-функции. Спектр последовательности из N прямоугольных импульсов. Частотные характеристики сигнала. Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.
3	18 февраля	Спектры гармонических сигналов. Растекание спектральных компонент при ограничении сигнала по длительности. Спектр периодического сигнала (в общем виде).
4	25 февраля	3. Дискретизация аналоговых сигналов. Спектр дискретизованного сигнала. Эффект наложения. Теорема Котельникова во временной области. Выбор частоты дискретизации. Субдискретизация.
5	4 марта	4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов. Формы записи ДВПФ для разных частотных переменных. Сходимость ДВПФ. Примеры.
6	11 марта	Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема смещения, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.
7	18 марта	5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ): формы записи, свойства, области применения (периодические сигналы и сигналы конечной длительности). Матричная форма ДПФ.
8	25 марта	6. Связь между ДПФ и ДВПФ Связь ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей, пример для отсчетов гармонического сигнала. Связь ДПФ и ДВПФ для последовательностей конечной длительности, интерполяция ДВПФ путем добавления нулевых отсчетов в сигнал. Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ. Частотная ось

9	1 апреля	ДПФ, связь с частотами в спектрах аналогового и дискретного сигналов.
10	8 апреля	7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ. Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ. Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна. Примеры основных оконных функций (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга, Блэкмана) и их характеристики. Условия различия соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды.
11	15 апреля	Оценка амплитуд компонент: усиление преобразования, паразитная амплитудная модуляция спектра, коэффициент амплитудной модуляции, окно с плоской вершиной. Примеры параметрических окон: окно Чебышева, окно Кайзера.
12	22 апреля	8. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT). Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Обратимость.
13	29 апреля	9. Быстрое преобразование Фурье. Алгоритм БПФ для составной размерности N . Алгоритмы БПФ с основанием 2. Разбиение N -точечного ДПФ на два $N/2$ -точечных. Алгоритм БПФ с основанием 4. Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ.
14	6 мая	10. Представление сигналов ортогональными рядами. Общий метод дискретизации. Полные ортонормированные системы. Обобщённые ряды Фурье. Примеры базисных функций: функции отсчётов, комплексные экспоненциальные и дискретные экспоненциальные функции, функции Уолша, функции Хаара.
15	13 мая	Контрольная работа №2 (по лекциям 10-14).
16	20 мая	Дифференцированный зачет.

Предисловие к лекционному курсу

Основная литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. М.: МФТИ, 2007.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Уч. пособие. М.: МФТИ, 2007.
3. Дискретизация аналоговых сигналов: методические указания к лабораторной работе по курсу «Радиофизическая лаборатория» / сост. Т. А. Тормагов, Д. А. Питеримов, А. В. Леус, Ю. А. Романюк. – Москва : МФТИ, 2024. – 44 с. [Эл. версия на books.mipt.ru](#)

Дополнительная литература

4. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие.
— СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2013 г.
6. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. под ред. С. Ф. Боева — 3-е изд., испр. — М.: Техносфера, 2019 .— 1048 с.

Печатные учебные пособия ([1,2, 4,5]) есть в библиотеке МФТИ

Примеры в iupyter.

Большая часть лекций содержит дополнительные примеры на Python (файлы вида ex_lec1.ipynb).

Их можно открыть в программе Jupyter Notebook, содержащейся в дистрибутиве Python Anaconda.

<https://docs.anaconda.com/anaconda/install/>

Интерактивные графики доступны в следующих бэкендах библиотеки matplotlib.

- Для новых версий Anaconda %matplotlib widget (pip install --upgrade jupyterlab ipympl).
- Для старых версий %matplotlib notebook .

Предисловие к лекционному курсу

Задачи с лекций

- Типовые задачи для контрольных работ и дифференцированного зачета.
- Решения оцениваются с помощью тестов для самопроверки по задачам с лекции в LMS

Контрольные работы

- Форма текущего контроля по курсу.
- Варианты индивидуальные (120). Каждый вариант содержит три задачи.
- Для успешного результата на контрольной работе рекомендуется решать задачи с лекций и разбирать материалы прочитанных лекций.
- Во время контрольной работы студенты могут пользоваться конспектами лекций и справочной литературой, в том числе в электронном виде. Не запрещается (и даже поощряется) использование средств компьютерного моделирования, например, в целях проверки своих решений.
- Пропущенные по уважительной причине контрольные работы (подтверждается справкой или допуском из деканата) можно написать в другое согласованное время.

Дифференцированный зачет состоит из письменной и устной части. Письменная часть содержит теоретический вопрос и задачи, устная – опрос по программе курса. На зачете можно зачесть оценку по результатам работы в семестре, которая вычисляется по правилу

$$S = \begin{cases} \frac{KP_1 + KP_2 + LMS + Lecture}{2,4}, & \text{если обе } KP_i \geq 1. \\ 2, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

- KP_1 и KP_2 – оценки за контрольные работы,
- LMS – баллы за решения задач с лекций в LMS (меньше 65% - 0 баллов, 65%-84% - 1 балл, от 85 % – 2 балла),
- $Lecture$ – балл за задачи на лекциях (вещественное число от 0 до 2).

Оценка округляется до ближайшего целого.

Предварительная оценка не учитывается, если сдается полноценный зачет.

Предисловие к лекционному курсу

Примеры расчета оценки.

а)

$$KP_1 = 4, KP_2 = 6, LMS = 0, Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{10}{2,4} \right] = 4.$$

б)

$$KP_1 = 4, KP_2 = 6, LMS = 2, Lecture = 2,$$

$$S = \left[\frac{14}{2,4} \right] = 6.$$

в)

$$KP_1 = 1, KP_2 = 9, LMS = 0, Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{11}{2,4} \right] = 4.$$

г)

$$KP_1 = 0, KP_2 = 9, LMS = 0, Lecture = 0,$$

$$S = 2.$$

д)

$$KP_1 = 9, KP_2 = 8, LMS = 0, Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{17}{2,4} \right] = 7.$$

е)

$$KP_1 = 10, KP_2 = 9, LMS = 2, Lecture = 1,8,$$

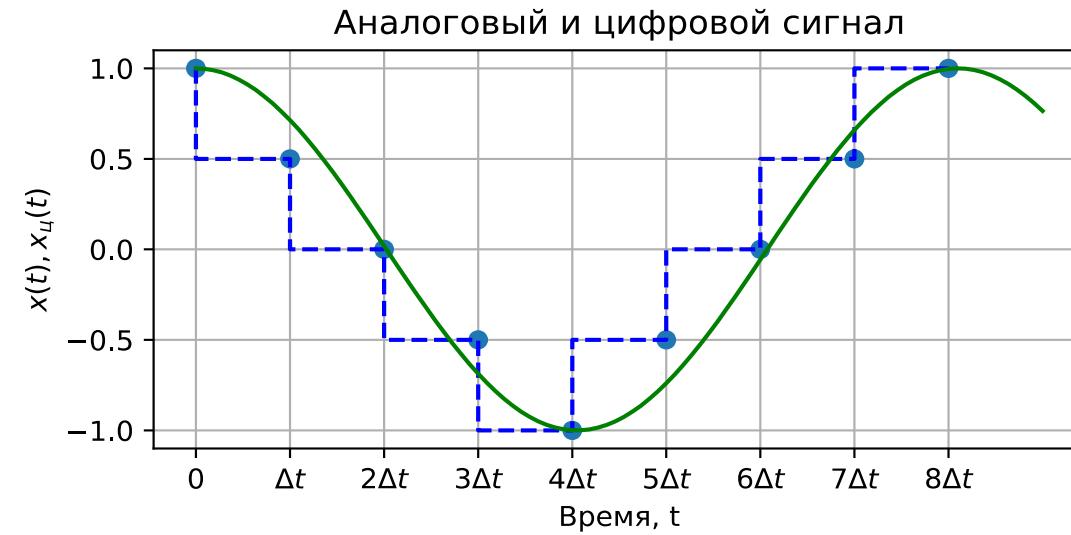
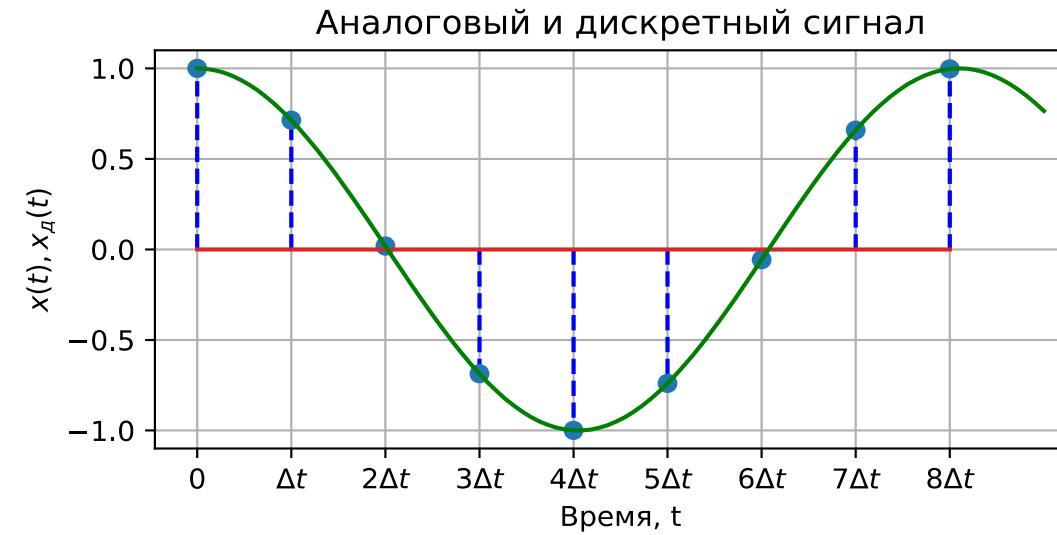
$$S = \left[\frac{22,8}{2,4} \right] = 10.$$

ж)

$$KP_1 = 10, KP_2 = 10, LMS = 2, Lecture = 0,$$

$$S = \left[\frac{22}{2,4} \right] = 9.$$

Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.



Классификация сигналов: аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Аналоговые или континуальные сигналы $x(t)$ описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Дискретные сигналы, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени $k\Delta t$, где Δt — шаг дискретизации. Частота

дискретизации f_d (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

Цифровые сигналы, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из операций *дискретизации* и *квантования*, которые осуществляются *аналого-цифровым преобразователем (АЦП)*. Обычно число уровней квантования 2^m , где m — разрядность АЦП.

Напоминание про дельта-функцию

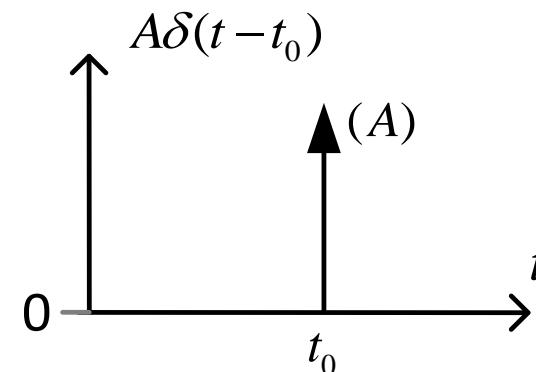
Напоминание про дельта-функцию

Для дельта-функции справедливо соотношение

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим сигнал $y(t) = A\delta(t-t_0)$, $A \in \mathbb{C}$. Это дельта-функция в точке t_0 оси времени. Площадь под графиком

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} A\delta(t-t_0) dt = A \quad \forall \varepsilon > 0.$$



Предположим, что дельта-функция интегрируема по интервалу $(-\infty, t)$. Тогда

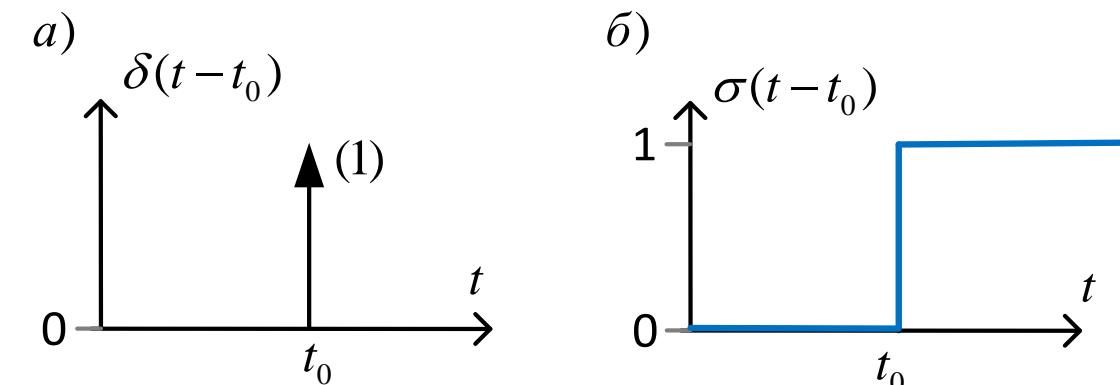
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau-t_0) d\tau = \sigma(t-t_0),$$

где $\sigma(t-t_0)$ – функция единичного скачка или функция Хевисайда:

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 1/2 & \text{при } t = t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Функция единичного скачка является интегралом от дельта-функции, а значит

$$\sigma'(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$



а – дельта-функция, б – функция единичного скачка

Напоминание про дельта-функцию

Фильтрующее свойство дельта-функции: её свёртка с любой ограниченной и непрерывной в точке t_0 функцией

$x(t)$ равна

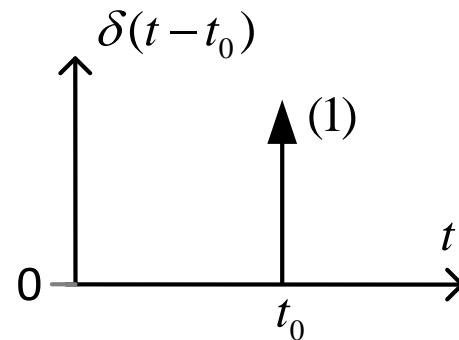
$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0), & a < t_0 < b, \\ (1/2)x(t_0), & t_0 = a \text{ или } t_0 = b, \\ 0, & t_0 < a, \quad t_0 > b. \end{cases}$$

Если функция $x(t)$ в точке $t = t_0$ имеет разрыв первого рода,

то

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt = (1/2)[x(t_{0+}) + x(t_{0-})], \quad a < t_0 < b,$$

где $x(t_{0+})$ и $x(t_{0-})$ – значения $x(t)$ справа и слева от точки разрыва.



Если a – действительная величина, то выполняются следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)dt = x(a),$$

$$x(t) \cdot \delta(t-a) = x(a) \cdot \delta(t-a),$$

$$\delta[(t-t_0)/a] = |a| \delta(t-t_0),$$

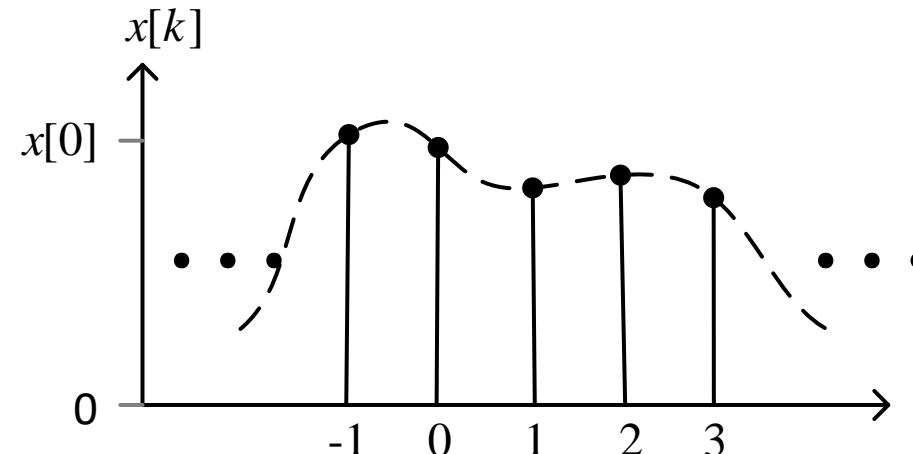
$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t - \frac{t_0}{a}).$$

Способы описания дискретных сигналов

Способы описания дискретных сигналов

1) Функция дискретного времени k .

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t, k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации.
Далее мы будем использовать квадратные скобки для обозначения функций дискретного аргумента.

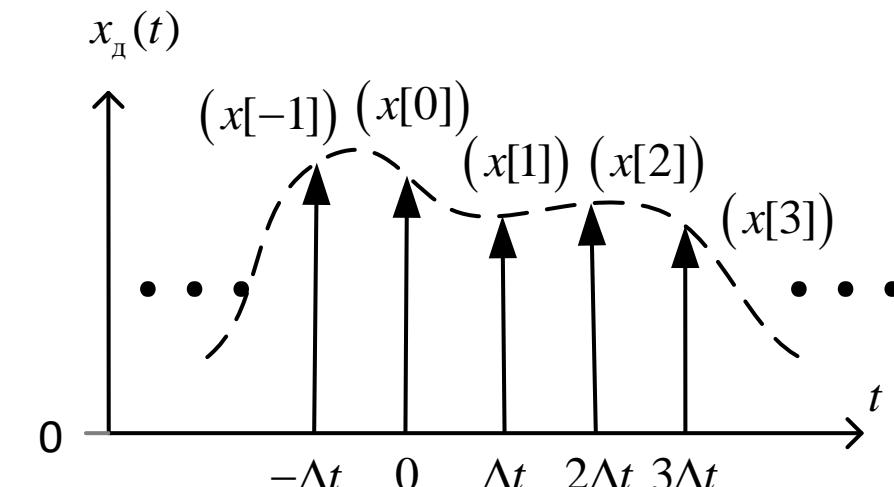


k	-1	0	1	2	3
$x[k]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$

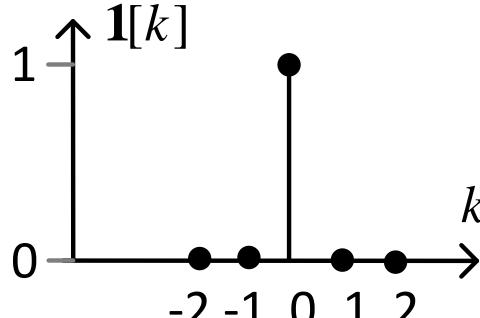
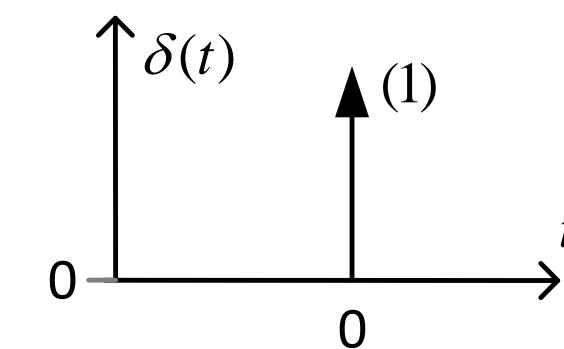
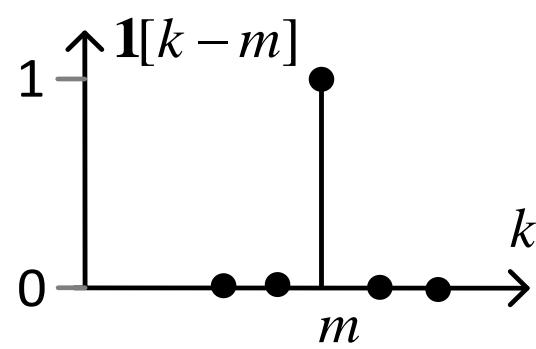
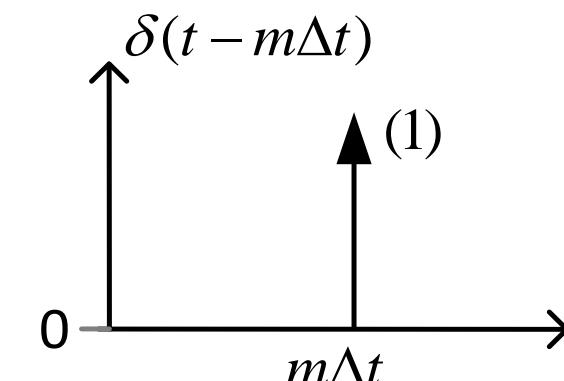
2) Функция непрерывного времени t (континуальная запись).

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

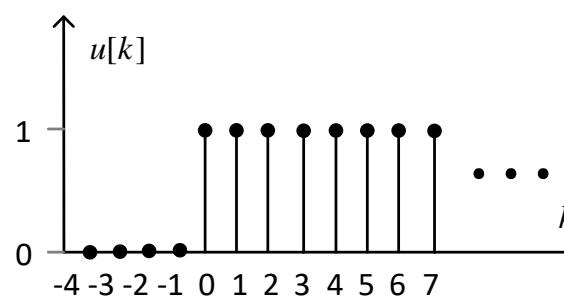
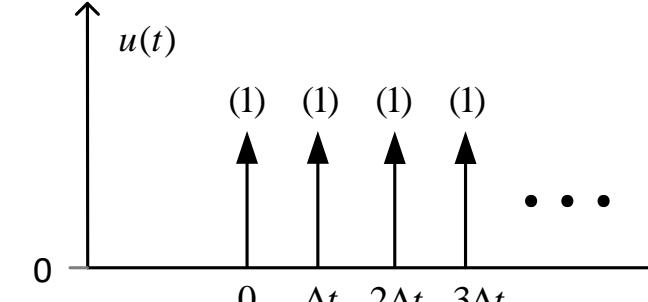
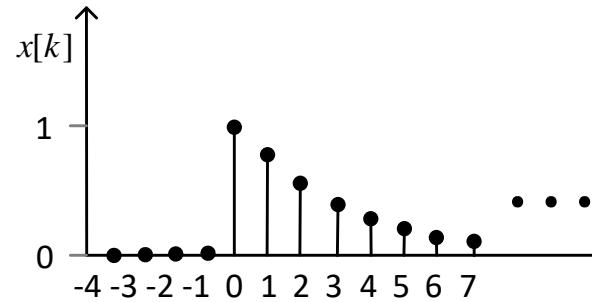
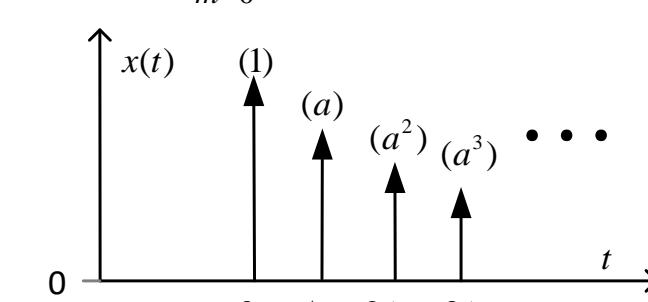
В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



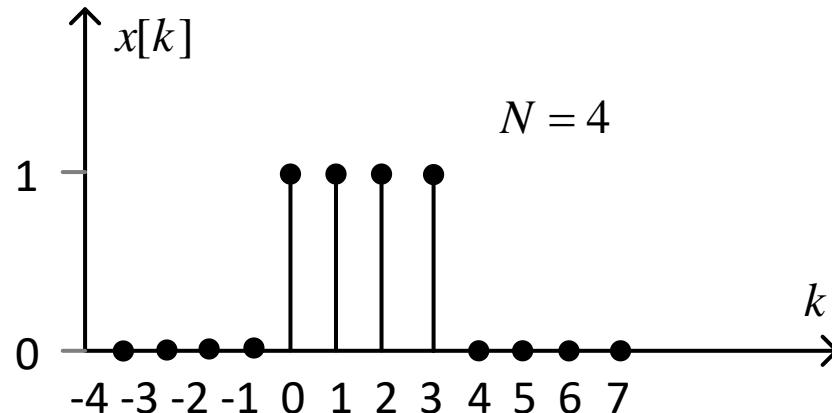
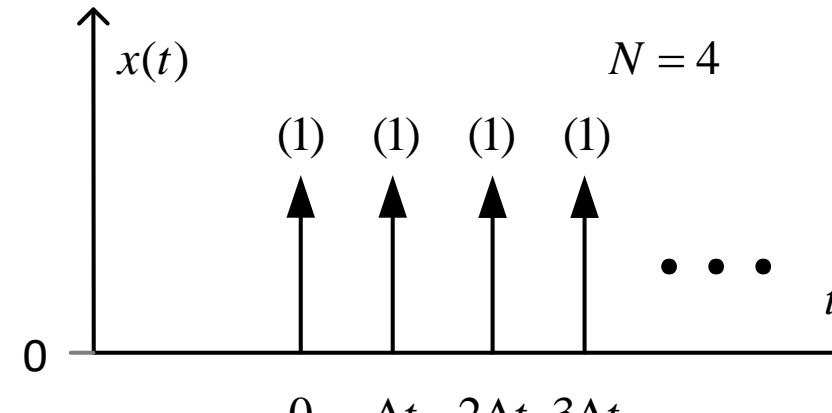
Способы описания дискретных сигналов

Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
<p>Единичный импульс в точке 0</p> $\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ <p>(единичный импульс)</p> 	<p>Единичный импульс в точке 0</p> $\delta(t) \text{ (дельта-функция Дирака)}$ 
<p>Единичный импульс в точке m</p> $\mathbf{1}[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$ 	$\delta(t - m\Delta t)$ 

Способы описания дискретных сигналов

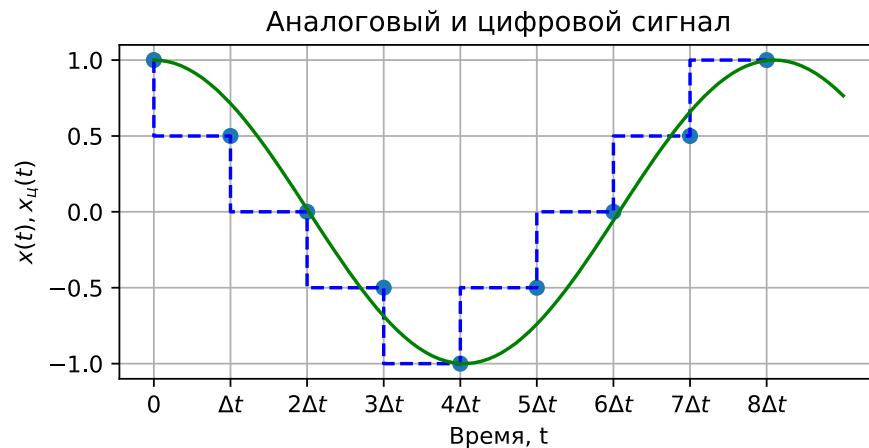
Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
Дискретная функция включения	
$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 
Дискретная экспонента	
$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>

Способы описания дискретных сигналов

Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
Последовательность из N единичных импульсов	
$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$  <p>Graph of a discrete-time signal $x[k]$ versus k. The signal is zero for $k < -1$ and $k > 2$. It has four vertical spikes at $k = -1, 0, 1, 2$, each reaching a value of 1. The label $N = 4$ is placed above the graph.</p>	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$  <p>Graph of a continuous-time signal $x(t)$ versus t. The signal is zero for $t < 0$ and $t > 3\Delta t$. It has four vertical spikes at $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$, each labeled with a value of 1. Ellipses indicate the sequence continues. The label $N = 4$ is placed above the graph.</p>

Шум квантования АЦП

Шум квантования АЦП



Шумы квантования неизбежно проявляются, поскольку, как правило, разрядность чисел для представления отсчетов, ограничена.

Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

В результате дискретизации взятием отсчетов мы получаем выборки аналогового сигнала $x_a(t)$:

$$x[k] = x_a(k\Delta t),$$

где Δt – шаг дискретизации.

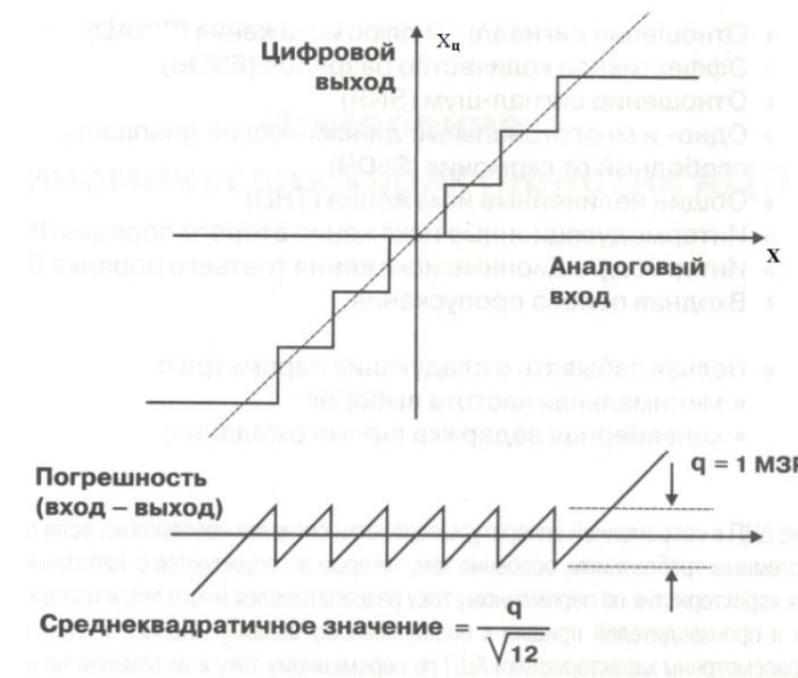
После квантования по уровню, мы получаем цифровой сигнал:

$$x_{\text{ц}}[k] = x[k] - e[k],$$

где $e[k] = x[k] - x_{\text{ц}}[k]$ – это погрешность квантования – некоторая реализацию шума квантования.

Обычно число уровней квантования 2^n , где n – разрядность АЦП. АЦП осциллографа PV6501 8 битное (восьмиразрядное). Каждый отсчет в буфере описывается одним из $2^8 = 256$ состояний.

Шум квантования АЦП



Определим шум квантования стандартного n -разрядного АЦП. Погрешность квантования $e[k] = x[k] - x_d[k]$.

Максимальная по модулю погрешность квантования составляет половину единицы младшего значащего разряда (шага квантования) q :

$$-\frac{q}{2} \leq e[k] \leq \frac{q}{2}$$

Заметим, что для каждого момента времени все возможные значения погрешности равновероятны.

Шум квантования не коррелирован с входным сигналом и имеет равномерное распределение на отрезке.

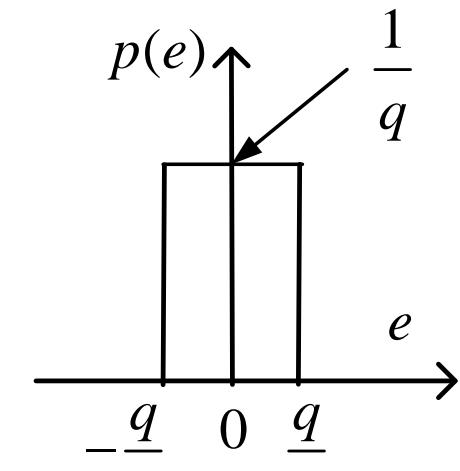
Для плотности вероятности $p(e)$ должно быть выполнено:

$$\int_{-q/2}^{q/2} p(e)de = 1.$$

Ошибка квантования имеет нулевое среднее и дисперсию

$$M[e] = \int_{-q/2}^{q/2} ep(e)de = 0,$$

$$\sigma_e^2 = M[e^2] - (M[e])^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e)de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}.$$



Среднеквадратичное значение шума квантования

$$\sigma_e = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Шум квантования АЦП

Заметим, что пилообразная погрешность создаёт гармоники, лежащие дальше полосы $[0, f_d / 2]$. Однако все высшие гармоники должны переноситься (эффект наложения) в эту полосу и, затем суммируясь, образовать шум с действующим значением $\sigma_e = q / \sqrt{12}$.

Пусть на входе АЦП с диапазоном напряжения входного сигнала $\left[-\frac{q \cdot 2^n}{2}, \frac{q \cdot 2^n}{2} \right]$ действует полномасштабная синусоида

$$x(t) = \frac{q \cdot 2^n}{2} \sin 2\pi ft.$$

Среднеквадратичное значение входного сигнала $\sigma_x = \frac{q \cdot 2^n}{2\sqrt{2}}$.

Отношение «сигнал/шум» (*SNR*—Signal to Noise Ratio)

$$SNR = 20\lg\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_e}\right) = 20\lg\left(\frac{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}{q / 2\sqrt{3}}\right) = 20\lg 2^n - 20\lg \sqrt{2/3}$$

$$SNR = 6,02n + 1,76 \text{ (дБ)}$$

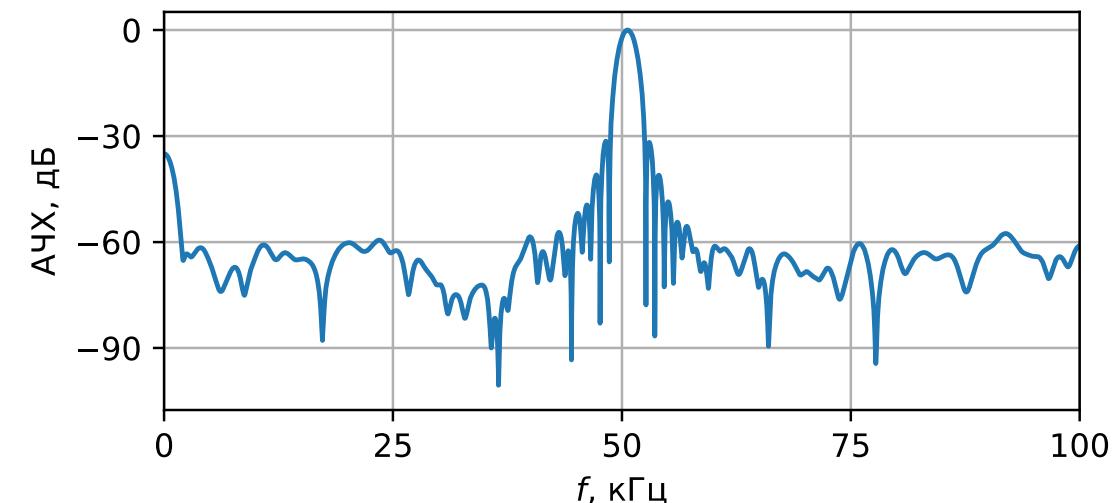
Относительный уровень шума квантования

$$\gamma = 20\lg\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_x}\right) = 20\lg\left(\frac{q / 2\sqrt{3}}{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}\right) = 20\lg \frac{1}{2^n \sqrt{1,5}}$$
$$\gamma = -6,02n - 1,76 \text{ (дБ)}$$

Пример. На рисунке приведена оценка спектра сигнала, состоящего из отрезка синусоиды, полученная цифровым осциллографом PV6501 с $n = 8$ битным АЦП с использованием окна Ханна. Относительный уровень шума квантования в дБ будет

$$\gamma = -(6,02n + 1,76) \text{ дБ} \approx -50 \text{ дБ.}$$

Проводить измерения сигналов и их спектров ниже этого уровня бессмысленно.



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчёт (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации Δt . Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

№2. Приведите континуальную запись (в виде последовательности дельта-функций) для следующих сигналов:

а) единичного импульса, задержанного на семь тактов дискретизации $x[k] = \mathbf{1}[k - 7]$,

б) дискретизованной синусоиды с относительной

$$\text{частотой } v_0 = \frac{1}{4}$$

$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} k\right),$$

в) последовательности из пяти единичных импульсов

$$x[k] = \sum_{m=0}^4 \mathbf{1}[k - m],$$

г) дискретной экспоненты вида

$$x[k] = \begin{cases} (-0,5)^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

№3. Определить отношение «сигнал/шум» (SNR) и относительный уровень шумов квантования для
а) 8-разрядного АЦП, б) 10-разрядного АЦП,
в) 16-разрядного АЦП.

Лекция 2 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

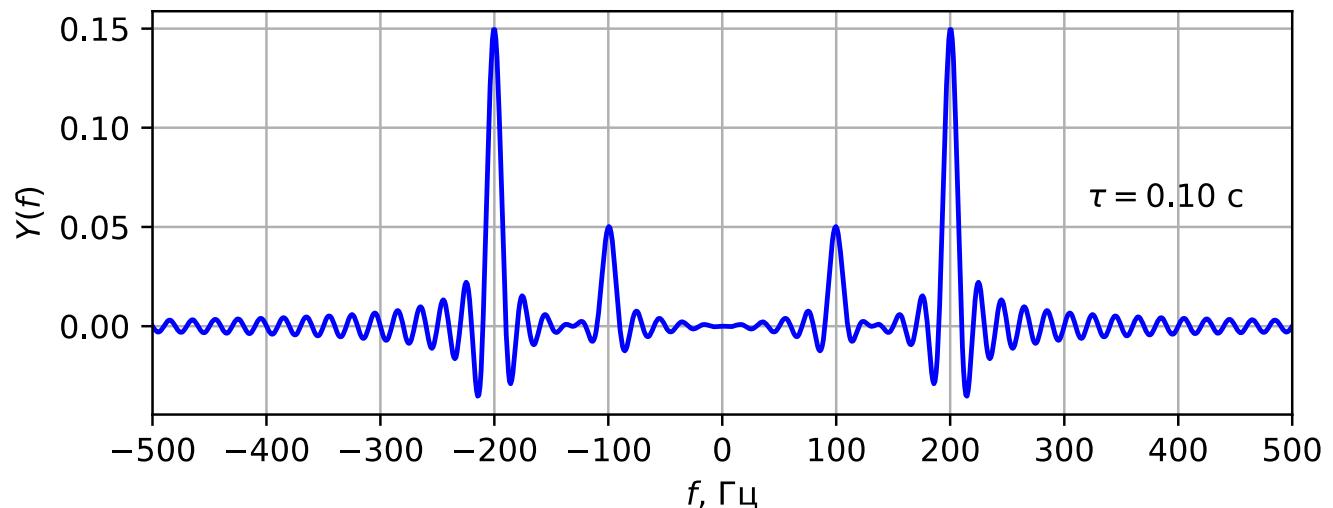
11 февраля 2025 г.

2. Спектры периодических и импульсных сигналов.

Преобразование Фурье, его свойства.

Примеры спектров импульсных сигналов (прямоугольный импульс, треугольный импульс, приподнятый косинус, гауссовский импульс). Спектр дельта-функции. Спектр последовательности из N прямоугольных импульсов.

Частотные характеристики сигнала. Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.



Преобразование Фурье: формулы анализа и синтеза

Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если $x(t)$ — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции $x(t)$ существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанна с $x(t)$ соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f) - \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 df = 0.$$

Причем, если функции $x(t)$ и $X(f)$ абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt,$$

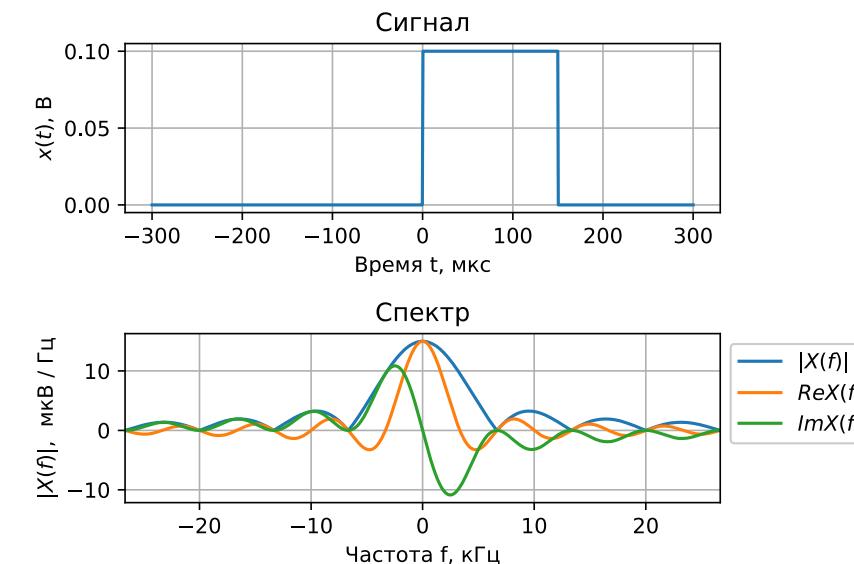
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df.$$

Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (FT), где частота f измеряется в Герцах (Гц).

Для частоты циклической частоты $\omega = 2\pi f$, измеряемой в рад/с (радианы в секунду), пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй — интегралом Фурье.



Преобразование Фурье: свойства.

Свойства преобразования Фурье

Далее будем использовать запись вида $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$, что означает, что для сигнала $x(t)$ преобразование Фурье будет $X(f)$. Предположим, что $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$ и $y(t) \xrightarrow{FT} Y(f)$. Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FT} \alpha X(f) + \beta Y(f).$$

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени τ (или опережения в случае $\tau < 0$)

$$x(t - \tau) \xrightarrow{FT} \exp(-j2\pi f \tau) X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} X(f + f_0).$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

Здесь «*» означает комплексное сопряжение.

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t) y(t) \xrightarrow{FT} X(f) \otimes Y(f),$$
$$x(t) y(t) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f}) Y(f - \tilde{f}) d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t) \otimes y(t) \xrightarrow{FT} X(f) Y(f),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \xrightarrow{FT} X(f) Y(f).$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

Если функция $x(t)$ непрерывна и $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$, то

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FT} j2\pi f X(f).$$

9. Теорема о производной спектра.

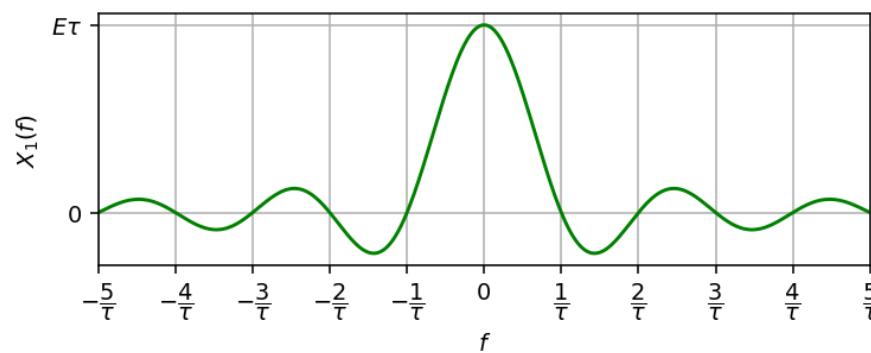
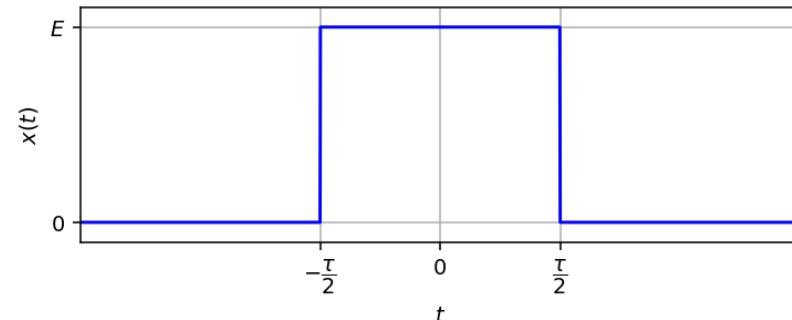
Если функция $X(f)$ непрерывна и $\lim_{f \rightarrow \pm\infty} X(f) = 0$, то

$$t \cdot x(t) \xrightarrow{FT} -\frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$

Спектры прямоугольного и треугольного импульсов

Симметричный прямоугольный импульс длительностью τ .

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

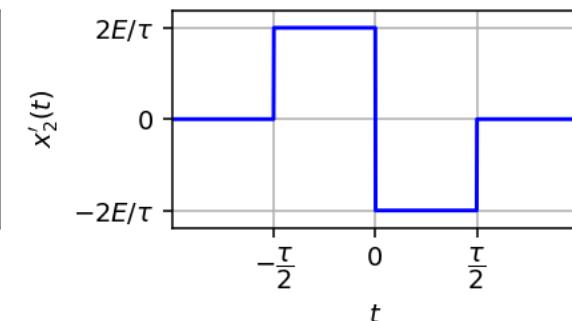
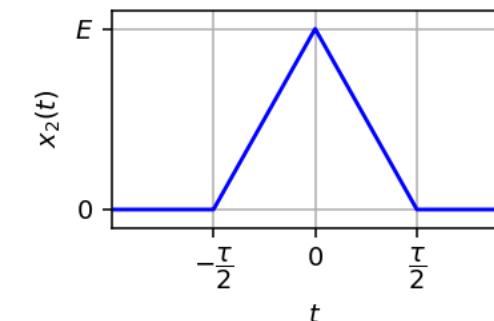


Спектр находим с помощью формулы преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \left. \frac{E}{-j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}. \end{aligned}$$

Симметричный треугольный импульс длительностью τ .

$$x_2(t) = \begin{cases} E\left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



1) Теорема о спектре производной: если $x_2(t) \xrightarrow{FT} X_2(f)$, то

$$\frac{dx_2(t)}{dt} \xrightarrow{FT} j2\pi f X_2(f).$$

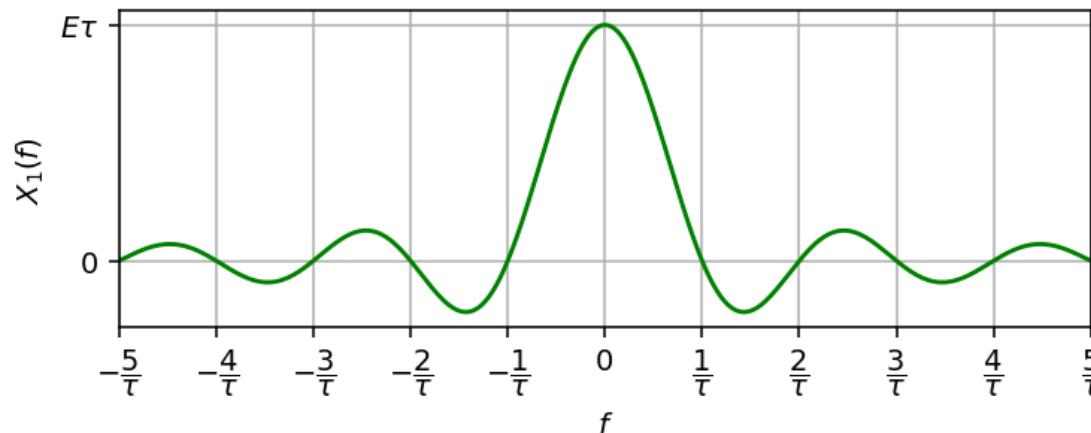
2) Теорема запаздывания: если $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$, то

$$x(t - \tau) \xrightarrow{FT} \exp(-j2\pi f \tau) X(f).$$

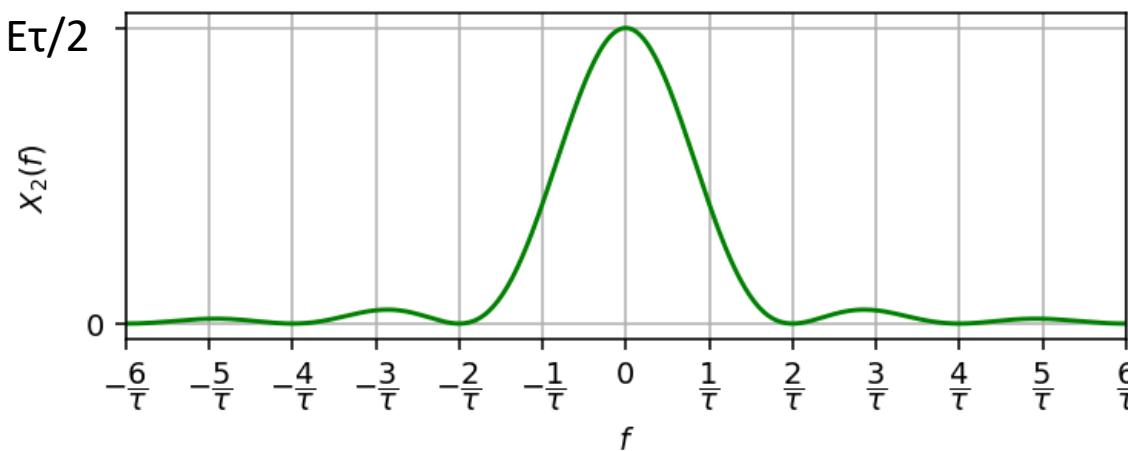
$$X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j\pi f \tau/2} - e^{-j\pi f \tau/2}) \frac{2E}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau/2)}{(\pi f \tau/2)^2}$$

Спектры прямоугольного и треугольного импульсов

Спектр прямоугольного импульса $X_1(f) = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$.

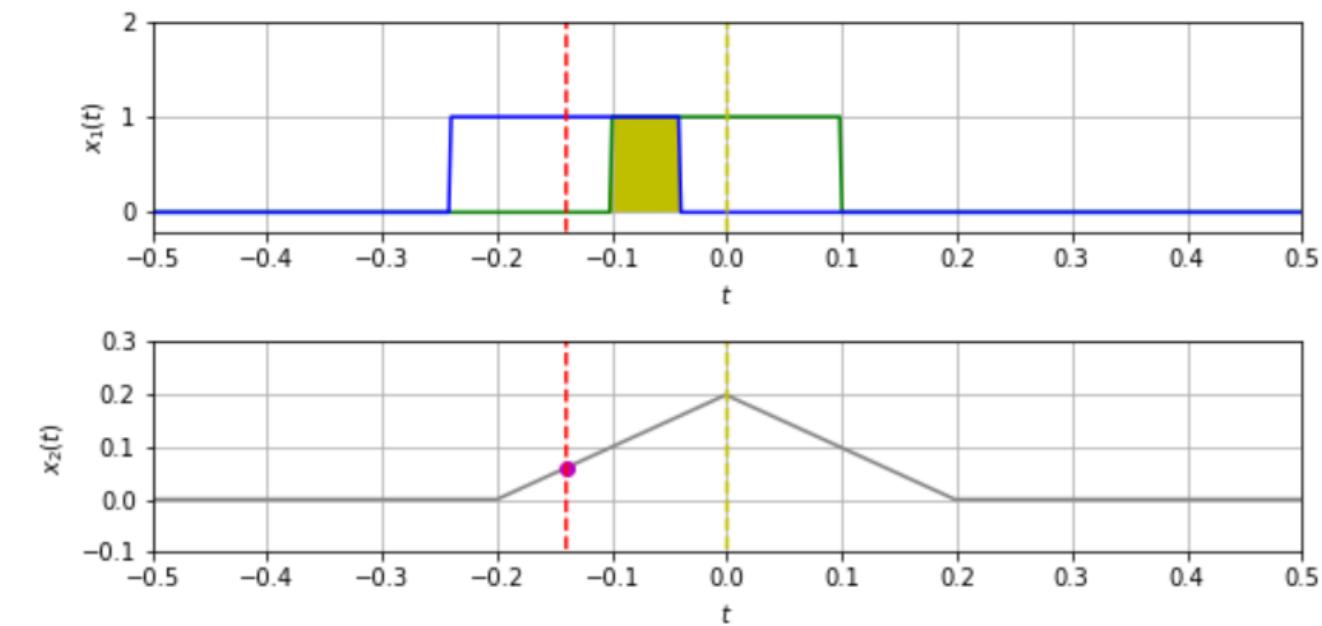


Спектр треугольного импульса $X_2(f) = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau / 2)}{(\pi f \tau / 2)^2}$



Заметим, что ширина главного лепестка $X_2(f)$ в два раза больше, чем у $X_1(f)$.

Спектр треугольного импульса можно получить, используя теорему о свертке: если $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$ и $y(t) \xrightarrow{FT} Y(f)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \xrightarrow{FT} X(f)Y(f)$. Треугольный импульс можно рассматривать как сверку двух прямоугольных соответствующей высоты с длительностью $\tau/2$.



Спектр гауссова импульса

Спектр гауссова импульса

Определим спектральную плотность гауссова импульса

$$x_G(t) = \exp(-\beta^2 t^2).$$

$$X_G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_G(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 t^2 - j2\pi f t) dt.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi},$$

который может быть получен из условия нормировки гауссова распределения

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты

$$\beta^2 t^2 + j2\pi f t = \beta^2 t^2 + j2\pi f t - \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2} + \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2} = \left(\beta t + j \frac{\pi f}{\beta} \right)^2 + \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}$$

Обозначим $\xi = \beta t + j \frac{\pi f}{\beta}$, $d\xi = \beta dt$.

$$X_G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\xi^2 - \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}\right) \frac{d\xi}{\beta}.$$

$$X_G(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}\right).$$

Спектр дельта-функции

Используя преобразование Фурье, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^0 = 1,$$

т. е. спектр дельта-функции постоянен на всех частотах:

$$\delta(t) \xrightarrow{FT} 1.$$

Спектр пачки равноотстоящих импульсов2

Частотные характеристики сигнала

В общем случае спектральная плотность $X(f)$ – комплексная функция частоты:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

$$X(f) = \operatorname{Re} X(f) + j \operatorname{Im} X(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)},$$

где

$$\operatorname{Re} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt,$$

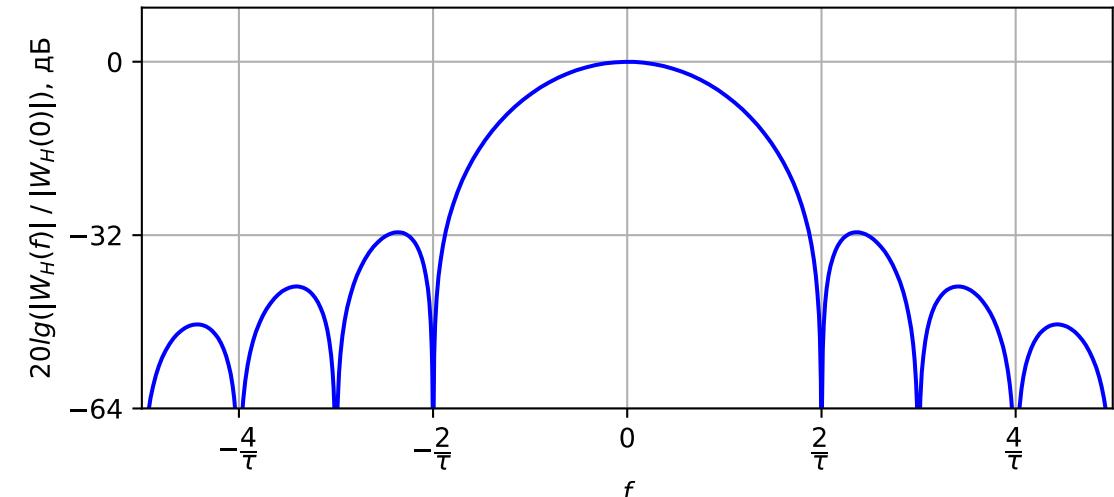
$$\operatorname{Im} X(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt,$$

$|X(f)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(f) = \arctg \frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

АЧХ в децибелах (дБ) измеряется относительно некоторого значения. Для окон обычно требуется определить уровень на частоте f относительно главного лепестка:

$$20 \lg \left| \frac{W(f)}{W(0)} \right| = 10 \lg \frac{|W(f)|^2}{|W(0)|^2}.$$



Свойства симметрии спектра реального сигнала

Для действительного сигнала

$$X(f) = X^*(-f).$$

Это означает, что для действительного сигнала $\operatorname{Re} X(f)$ и $|X(f)|$ – чётные функции, а $\operatorname{Im} X(f)$ и $\varphi(f)$ – нечётные функции частоты. Если в дополнение к этому $x(t)$ – чётная функция, то

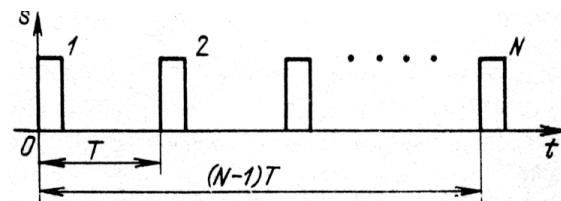
$$X(f) = X(-f),$$

т. е. спектральная плотность является действительной и чётной функцией частоты f .

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Пример. Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из N прямоугольных импульсов



Обозначим через $X_1(\omega)$ ($\omega = 2\pi f$) спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из N равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания

$$X(\omega) = X_1(\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega(N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

Суммируя N членов геометрической прогрессии, получаем

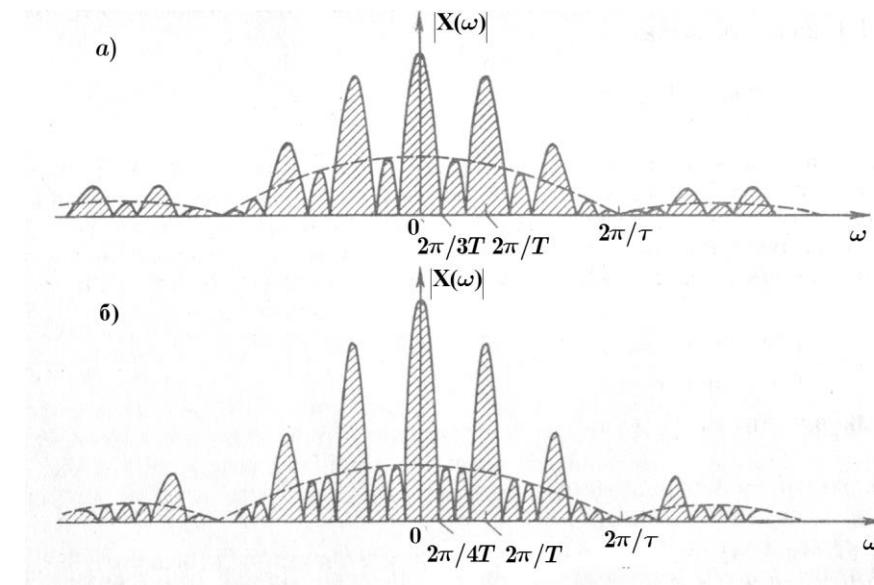
$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} (e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2})}{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})} = \\ &= X_1(\omega) \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2} \exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1)\right)\right). \end{aligned}$$

Видно, что на частотах $\omega = m2\pi / NT$, где m – целое, $X(\omega) = 0$.
Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega\tau / 2}{\omega\tau / 2} \exp\left(-j\omega\frac{\tau}{2}\right),$$

где τ – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из N равноотстоящих прямоугольных импульсов:

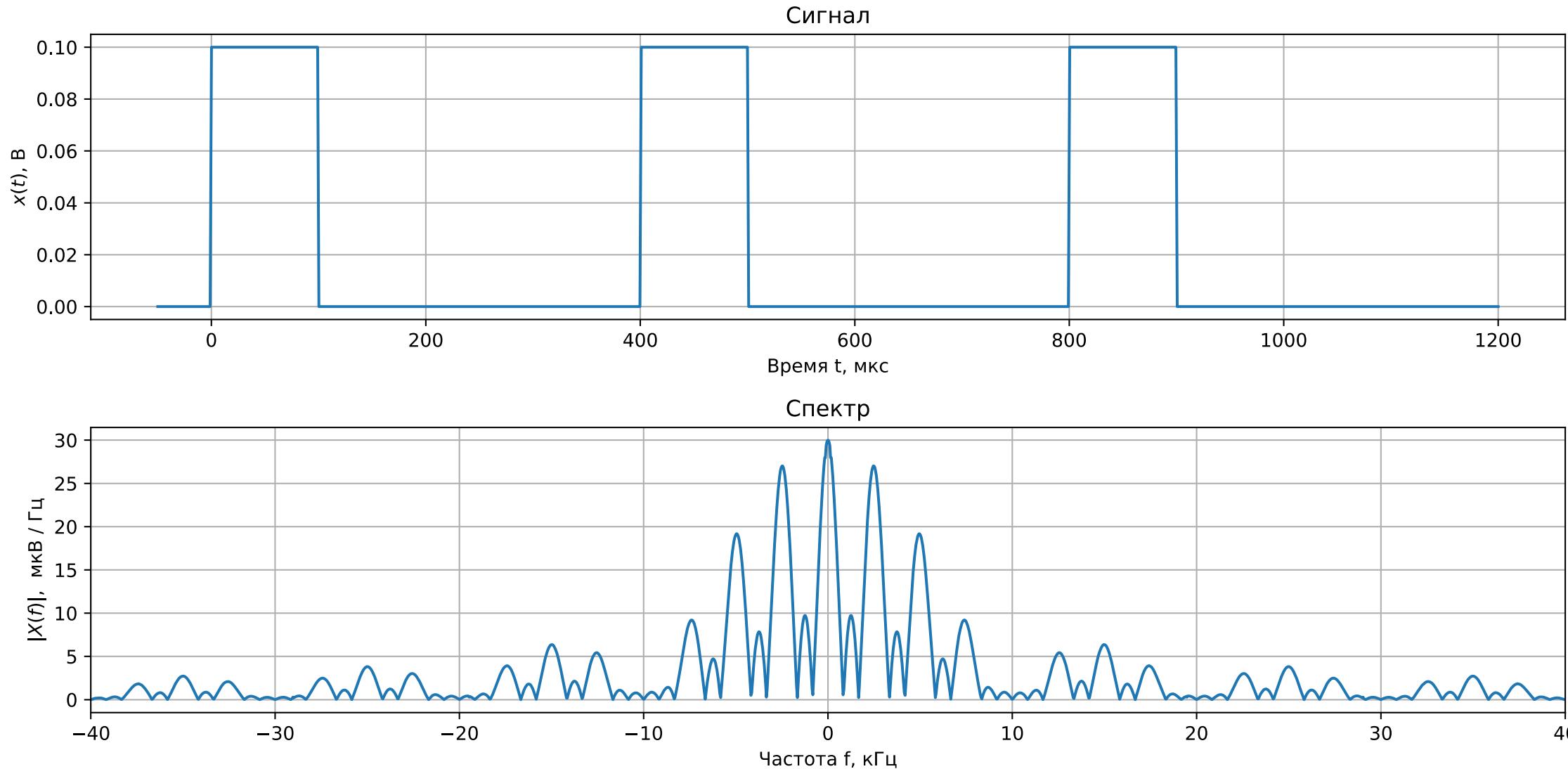
$$X(\omega) = \exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1) + \frac{\tau}{2}\right)\right) E\tau \frac{\sin \omega\tau / 2}{\omega\tau / 2} \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2}.$$



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке. интервал между соседними импульсами $T = 3\tau$. Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

$$X(f) = \exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1) + \frac{\tau}{2}\right)\right) E\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \frac{\sin(\pi NTf)}{\sin(\pi Tf)}, \quad T = 400 \text{ мкс}, \tau = 100 \text{ мкс}, N = 3. \quad \frac{1}{\tau} = 10 \text{ кГц}, \frac{1}{T} = 2,5 \text{ кГц}.$$



Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.

Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.

Схожесть формул прямого и обратного преобразования Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt,$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df,$$

позволяет сделать следующий вывод.

Если $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$, то $X(-t) \xrightarrow{FT} x(f)$.

Это свойство называется двойственностью (дуальностью) преобразования Фурье. Оно позволяет находить спектры сигналов, описываемых теми же функциями, что и известные нам спектры (вида $\text{sinc}(x)$ и др.).

Пример. Пусть $\Pi_\lambda(t)$ — прямоугольная функция с единичной площадью, определяемая формулой

$$\Pi_\lambda(t) = \begin{cases} 1/\lambda, & \text{если } |t| < \lambda/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \lambda/2. \end{cases}$$

Нам известно, что

$$\lambda \Pi_\lambda(t) \xrightarrow{FT} \lambda \frac{\sin(\pi f \lambda)}{\pi f \lambda}.$$

Тогда

$$\Pi_\lambda(t) \xrightarrow{FT} \frac{\sin(\pi f \lambda)}{\pi f \lambda}.$$

Поскольку сигнал и спектр обладают четной симметрией, то

$$\frac{\sin(\pi t \lambda)}{\pi t \lambda} \xrightarrow{FT} \Pi_\lambda(f)$$

Здесь λ имеет разную размерность в разных соответствиях.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. а) Вычислите спектр $X_1(f)$ одностороннего экспоненциального импульса для случая $\alpha > 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} E \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Найдите амплитудный $|X_1(f)|$ и фазовый $\phi_1(f)$ спектры этого сигнала.

б) Воспользовавшись этим результатом, определите спектральную плотность для двухстороннего экспоненциального импульса

$$x_2(t) = E \exp(-\alpha |t|) = x_1(t) + x_1(-t).$$

в) Используя свойство преобразования Фурье — теорему о производной спектра, определить для случая $\alpha > 0$ спектральную плотность сигнала

$$x_3(t) = \begin{cases} t \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

№2. Получить и изобразить по модулю спектр пачки из $N=3$ симметрично расположенных относительно нуля прямоугольных импульсов высотой $E=1$ В, длительностью $\tau=1$ мкс и интервалом следования в пачке $T=3$ мкс.

№3. а) Используя свойство дуальности преобразования Фурье, определить спектр функции

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin(2\pi f_{\text{в}} t)}{2\pi f_{\text{в}} t},$$

где $f_{\text{в}}$ — константа размерности частоты в Гц.

б) Используя теорему запаздывания, определить спектр функций

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - k\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t))}{2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_{\text{в}}}.$$

в) Используя обобщенное равенство Парсеваля, доказать ортогональность функций $\varphi_k(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_m^*(t) dt = 0 \text{ при } k \neq m.$$

№4. Используя спектры прямоугольного и треугольного импульсов и обобщённое равенство Парсеваля, вычислить интегралы

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta, \text{ б)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta, \text{ в)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^4 d\eta.$$

№5. Пусть $X(f)$ — спектр некоторого сигнала $x(t)$ конечной длительности. Определить спектр сигнала $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, где $f_0 = 10$ кГц.

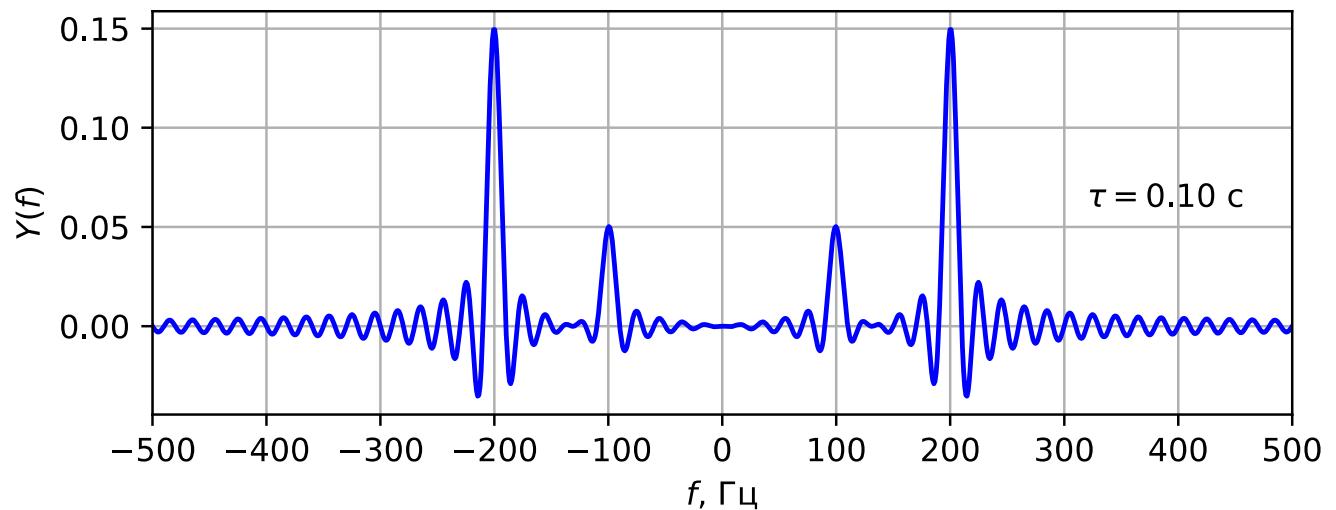
Лекция 3 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

18 февраля 2025 г.

2. Спектры периодических и импульсных сигналов

(продолжение).

Спектры гармонических сигналов. Растекание спектральных компонент при ограничении сигнала по длительности. Спектр периодического сигнала (в общем виде).



Спектры гармонических сигналов

Спектры гармонических сигналов

Вычислим обратное преобразование Фурье для $X(f) = \delta(f - f_0)$, т.е. от дельта-функции в точке f_0 оси частот.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) \exp(j2\pi f t) df.$$

$$x(t) = \exp(j2\pi f_0 t).$$

Тогда с учетом того, что

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)}{2},$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{\exp(j2\pi f_0 t) - \exp(-j2\pi f_0 t)}{2j}.$$

получаем

$$1 \xrightarrow{FT} \delta(f),$$

$$\exp(j2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

Пример. Определить спектр $X(f)$ гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

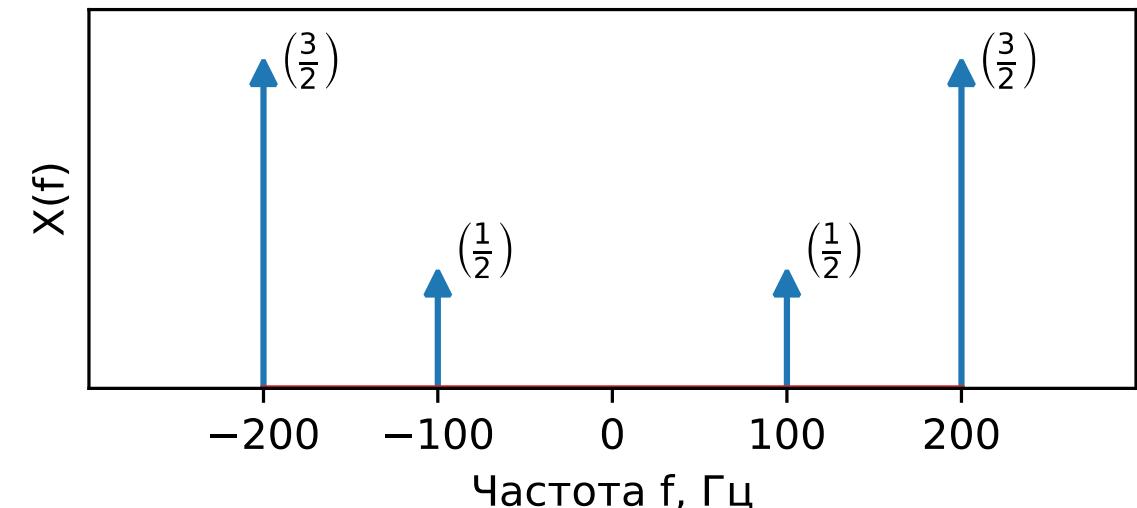
где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц.

Решение. По свойствам преобразования Фурье

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0).$$

Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

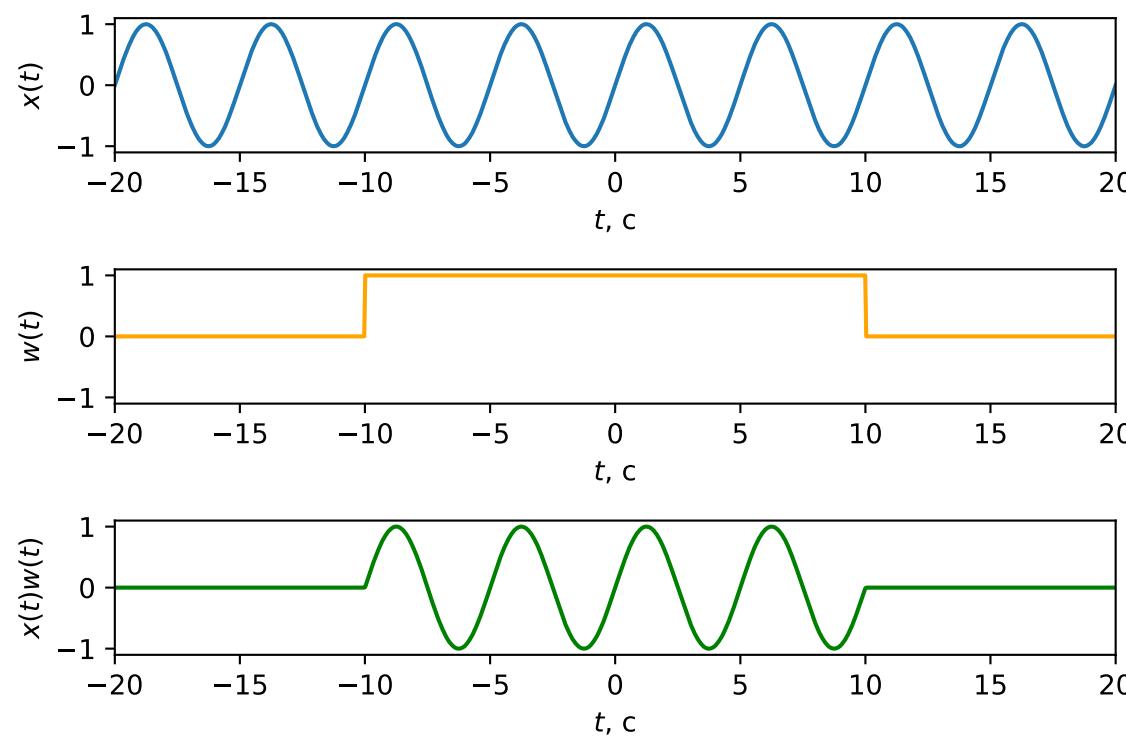
$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} \delta(f + f_1) + \frac{3}{2} \delta(f - f_2) + \frac{3}{2} \delta(f + f_2)$$



Эффект растекания спектральных компонент (leakage)

Эффект растекания спектральных компонент при ограничении длительности сигнала

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию:
 $y(t) = w(t)x(t)$.



Пусть $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$, $w(t) \xrightarrow{FT} W(f)$. Тогда

$$w(t)x(t) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

Пример. Гармонический сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

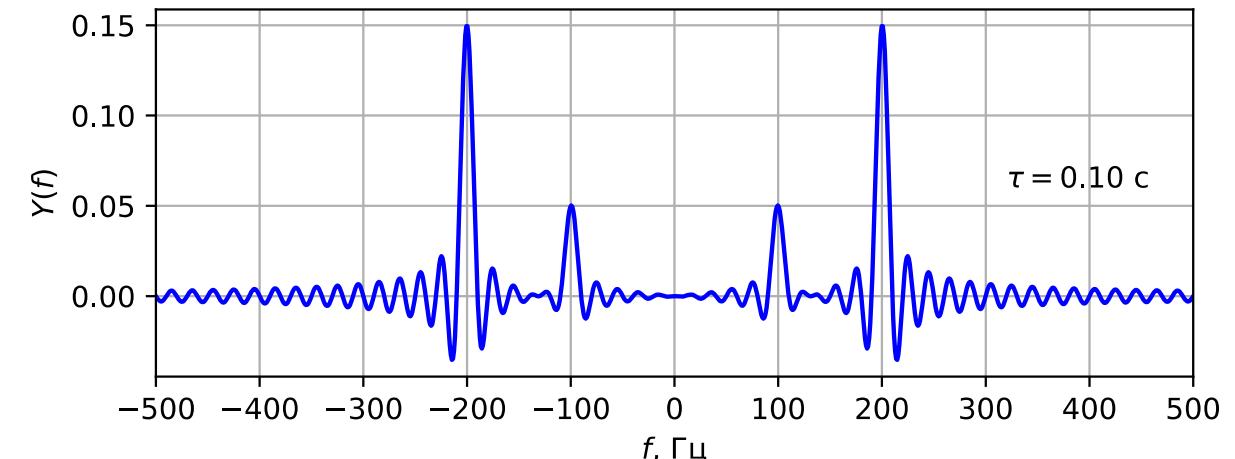
где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц. Определить, какой вид будет иметь спектр для $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — некоторая оконная функция.

Решение. Пусть $x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$, $w(t) \xrightarrow{FT} W(f)$. Тогда

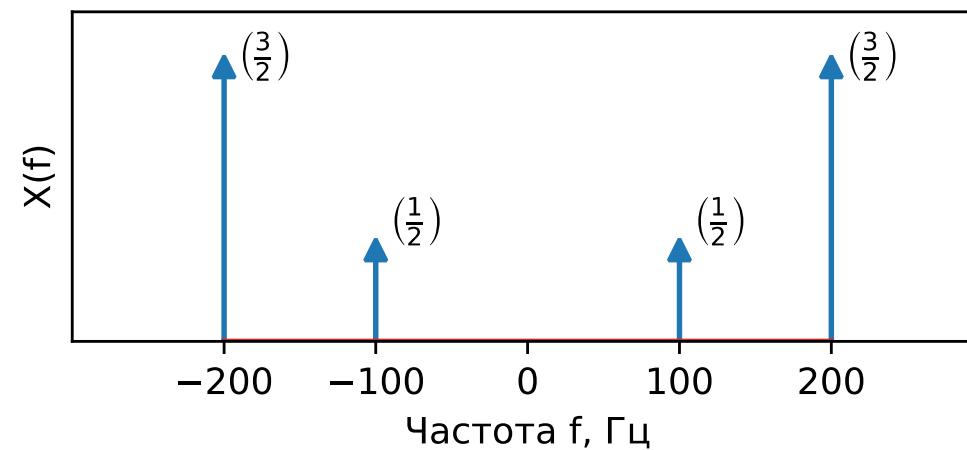
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2).$$

$$w(t)x(t) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

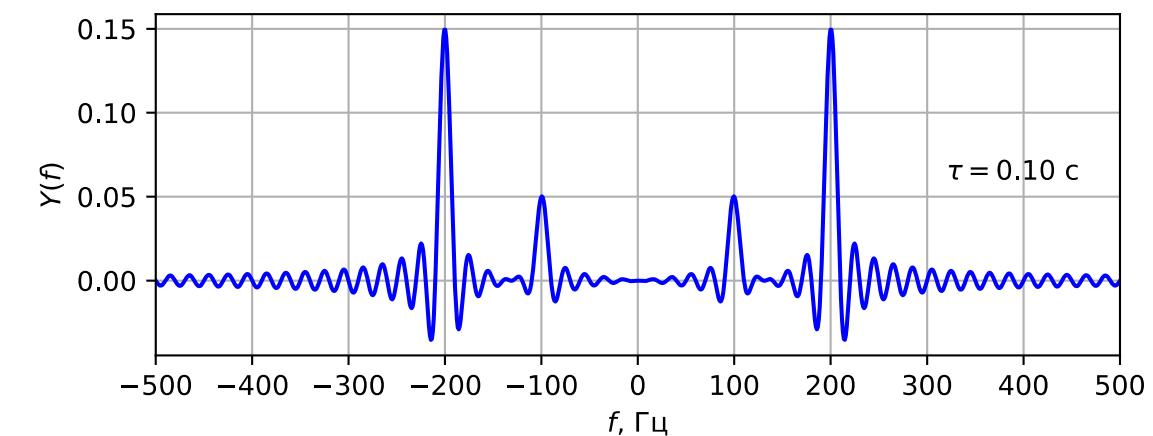
$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2).$$



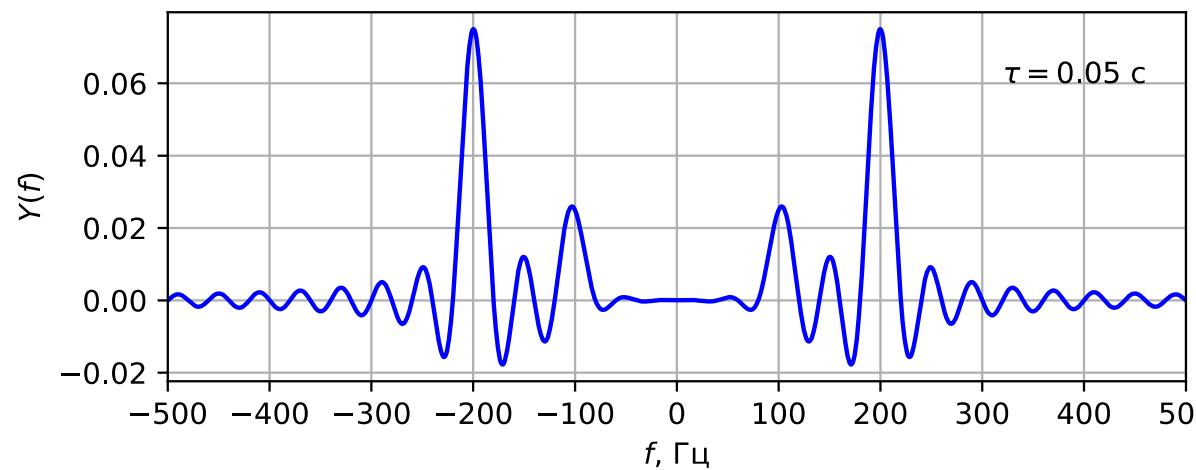
Эффект растекания спектральных компонент (leakage)



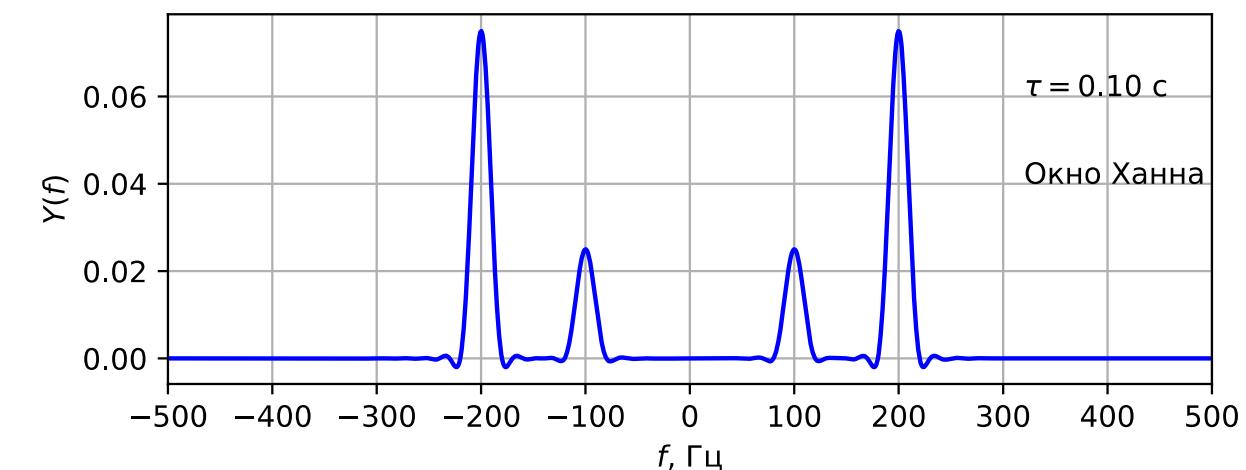
$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0,1$ с.



$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0,05$ с.



$w(t)$ - окно Ханна длиной $\tau = 0,1$ с.



Эффект растекания спектральных компонент (leakage)

Пример. Окно Ханна.

Определим спектр $W_H(f)$ аналогового окна Ханна длительностью τ .

$$w_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Способ 1.

Пусть $w(t)$ — прямоугольное окно той же длительности.

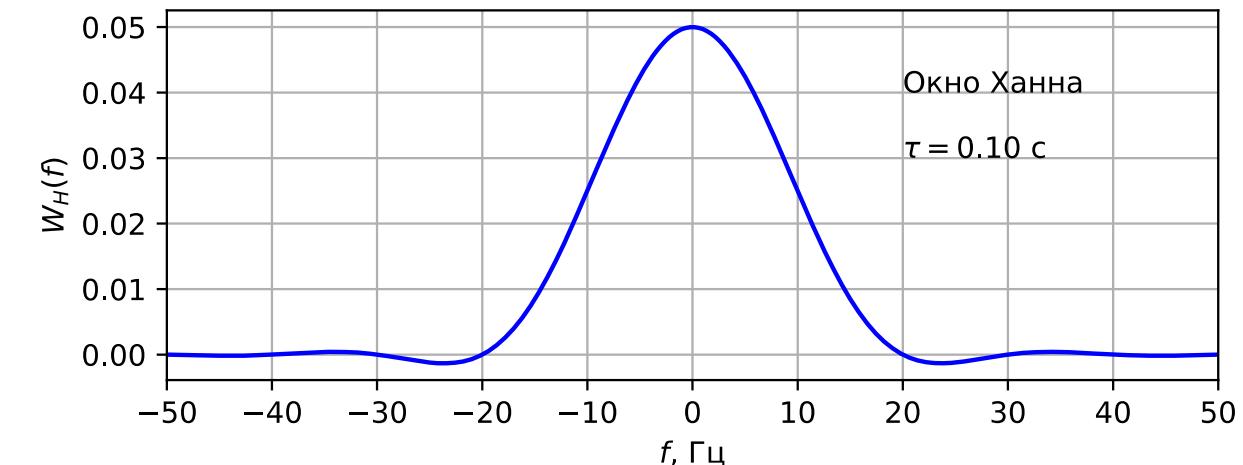
$$w_H(t) = \frac{1}{2}w(t) + \frac{1}{4}w(t)\exp\left(j2\pi t\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}w(t)\exp\left(-j2\pi t\frac{1}{\tau}\right).$$

Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье

$$W_H(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{4}W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

Далее остается подставить $W(f)$.

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f(1 - \tau^2 f^2)}.$$



Способ 2.

Рассмотрим сигнал $x(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right)$.

Его спектр $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{\tau}\right)$.

При этом $w_H(t) = w(t)x(t)$ и $W_H(f) = W(f) \otimes X(f)$.

Использую фильтрующее свойство δ -функции, получаем

$$W_H(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{4}W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

Спектр периодического сигнала (в общем виде).

Спектр периодического сигнала (в общем виде).

Периодический сигнал $x(t)$ с периодом T представим рядом Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T}t\right),$$

где коэффициенты Фурье

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j2\pi \frac{n}{T}t\right) dt.$$

По свойству для гармонических сигналов

$$\exp(j2\pi f_0 t) \xrightarrow{FT} \delta(f - f_0)$$

для каждой экспоненты в ряде Фурье можем записать

$$A_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T}t\right) \xleftrightarrow{FT} A_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T}t\right) \xleftrightarrow{FT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Получаем, что спектр T – периодического сигнала представляет собой последовательность следующих с

периодом $\Delta f = \frac{1}{T}$ дельта-функций с весами, равными коэффициентам A_n разложения этого сигнала в ряд Фурье.

Заметим, что поскольку спектр одного периода сигнала вычисляется по формуле

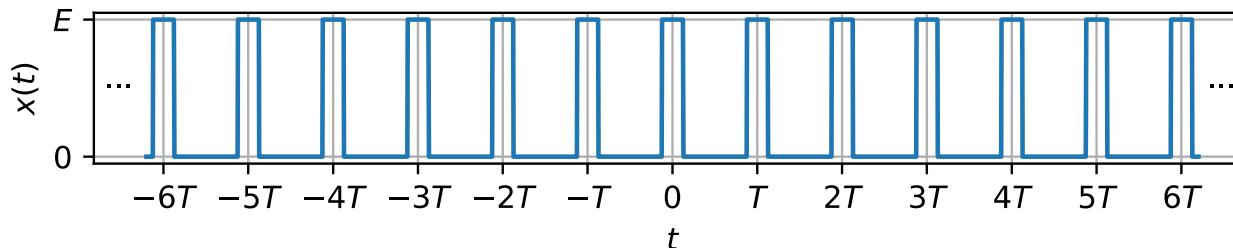
$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

коэффициенты Фурье A_n равны его выборкам в точках

$$A_n = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right).$$

Спектр периодического сигнала (в общем виде).

Пример. Найдем спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов $x(t)$.



$$x(t) \xleftrightarrow{FT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

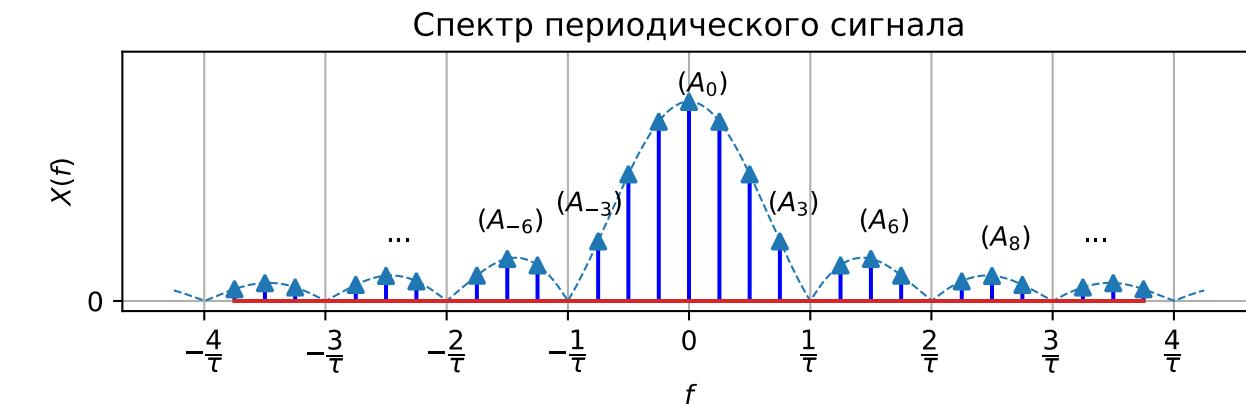
Поскольку спектр одного периода

$$X_T(f) = E\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f},$$

то коэффициенты Фурье равны

$$A_n = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T},$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

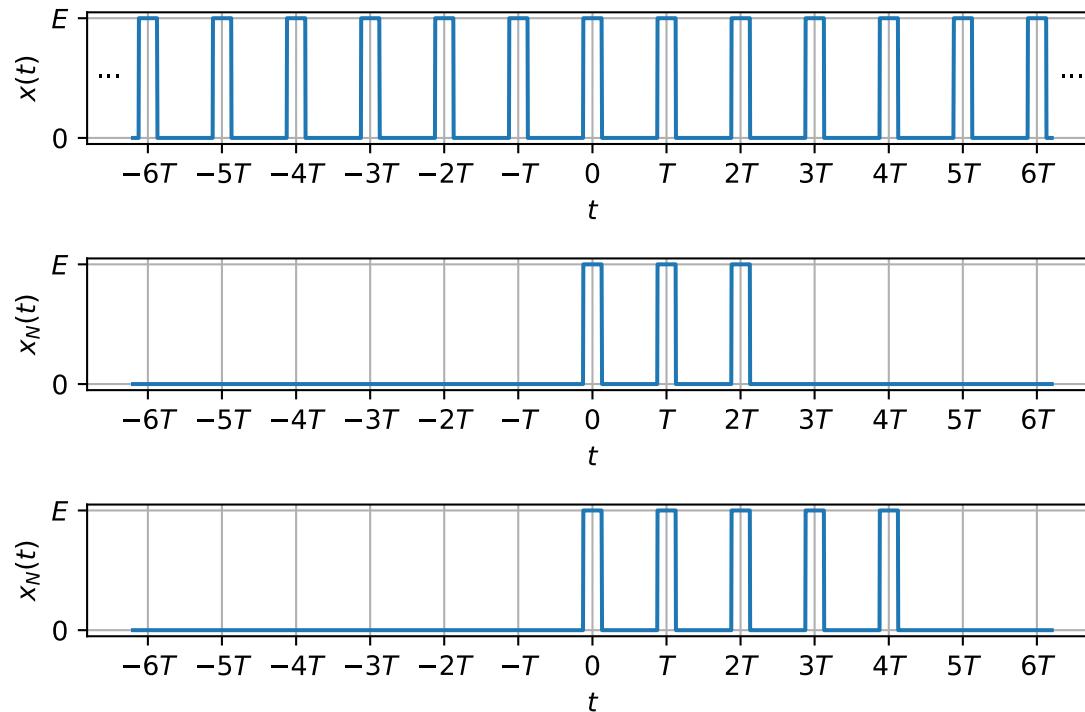


Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов представляет собой последовательность следующих с периодом $\Delta f = \frac{1}{T}$ дельта-функций с весами, равными коэффициентам A_n .

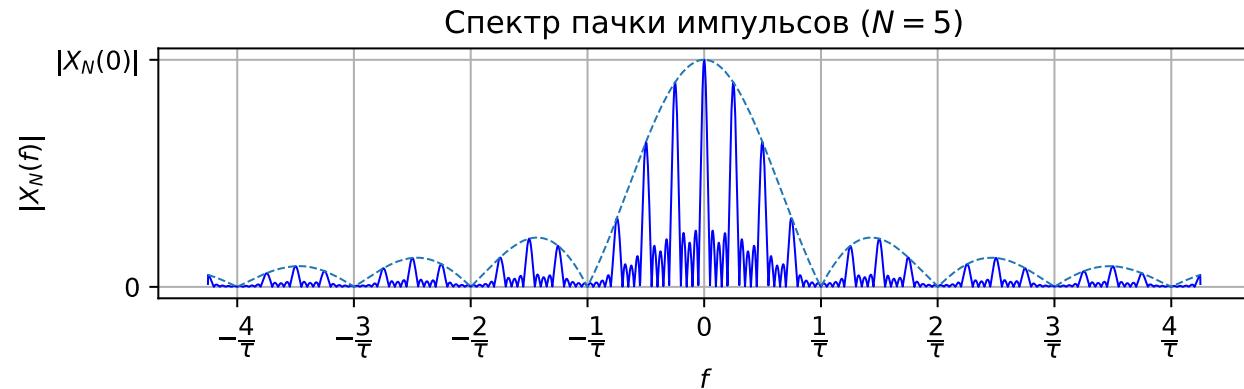
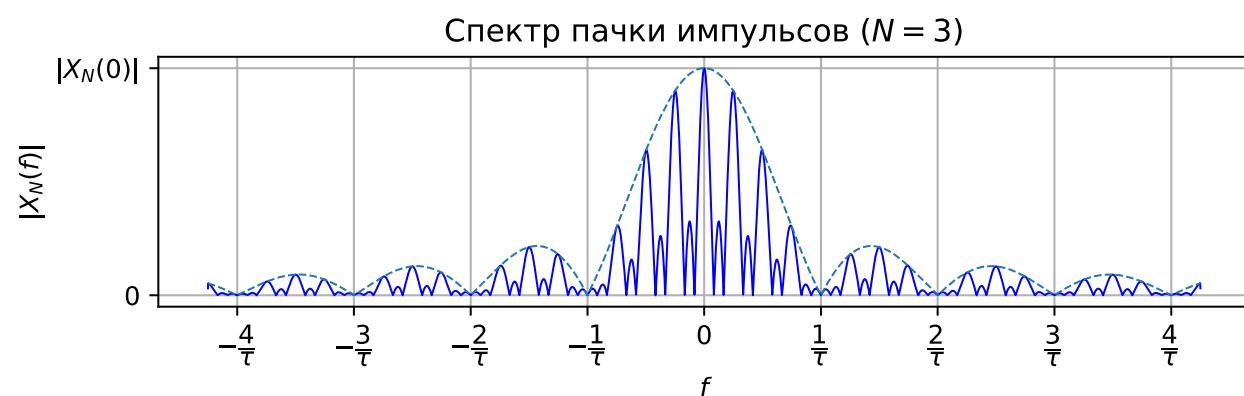
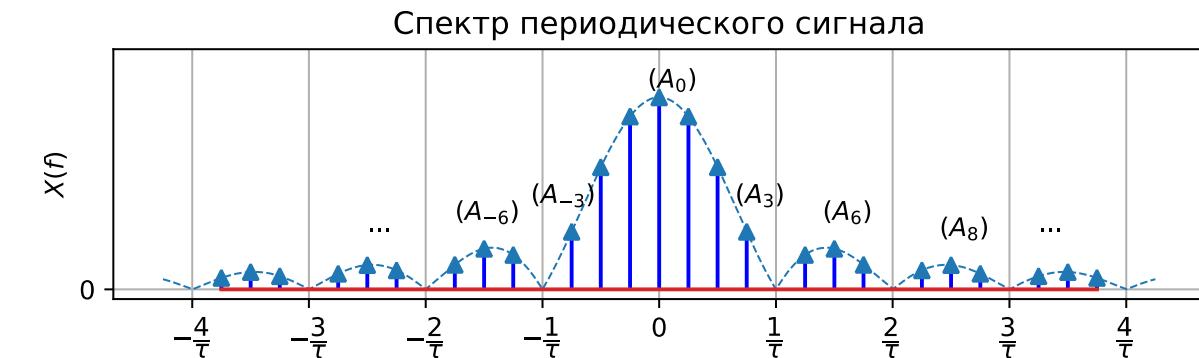
При этом для пачки из первых N импульсов спектр принимает вид

$$X_N(f) = \exp(-j\pi f T(N-1)) E\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} \frac{\sin(\pi fTN)}{\sin(\pi fT)}.$$

Спектр периодического сигнала (в общем виде).



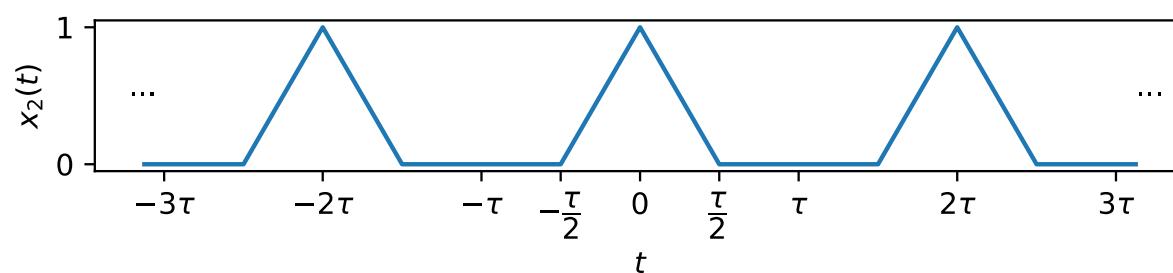
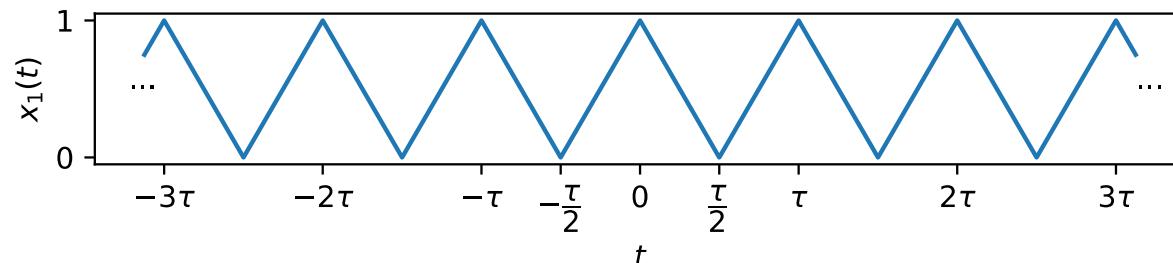
При ограничении числа импульсов (ограничении длительности сигнала окном) наблюдаем эффект растекания спектральных компонент (leakage) — дельта-функции в спектре «размываются» в спектральные максимумы. Чем больше импульсов, тем эти максимумы тоньше.



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Определить спектры изображенных на графике периодических последовательностей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.



№2. Предположим, что сигнал $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 100$ Гц наблюдается с момента времени $t = 0$ с в течении $\tau = 0,1$ с. Найти спектр наблюдаемого участка сигнала.

№3. Гармонический сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2\cos(2\pi f_2 t)$$

где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц. а) Изобразить график спектра сигнала $x(t)$. б) Определить, какой вид будет иметь спектр для сигнала $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — симметричное относительно $t = 0$ окно Ханна длительностью $\tau = 0,1$ с.

Лекция 4 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

25 февраля 2025 г.

3. Дискретизация аналоговых сигналов.

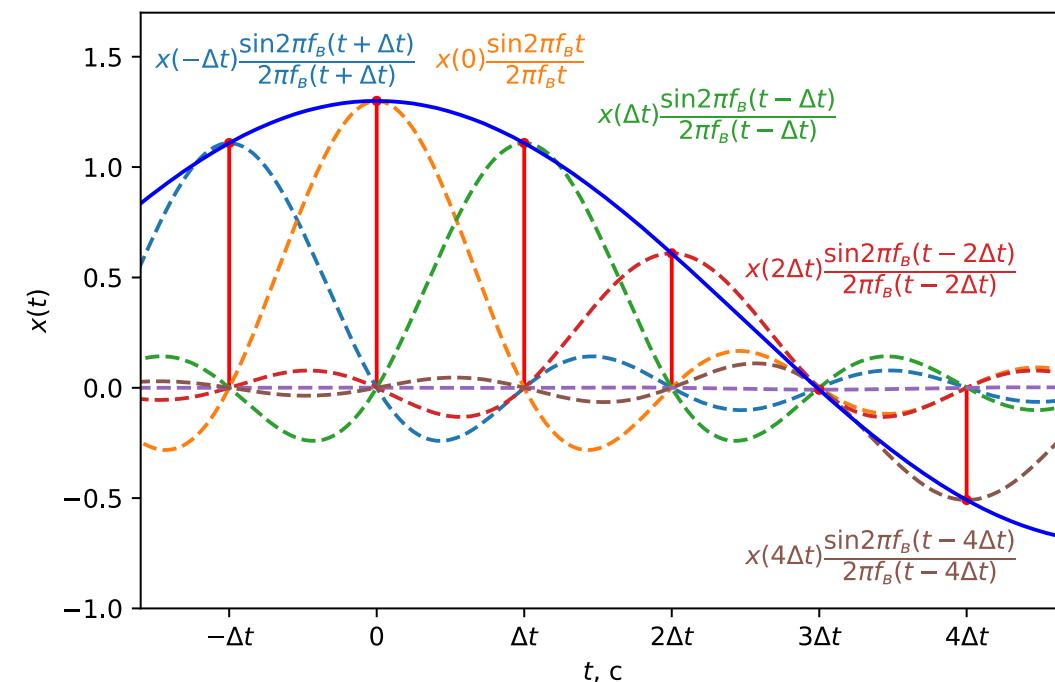
Спектр дискретизованного сигнала.

Эффект наложения.

Теорема Котельникова во временной области.

Выбор частоты дискретизации.

Субдискретизация.

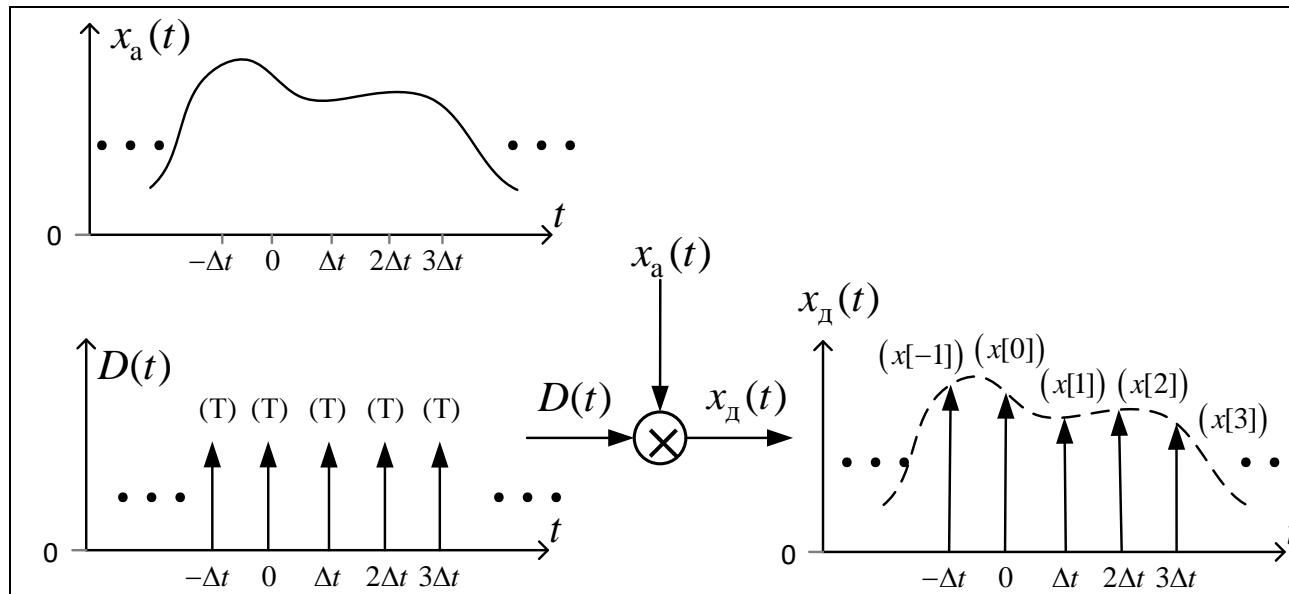


Спектр дискретизованного сигнала.

Спектр дискретизованного сигнала $X_{\text{д}}(f)$

Континуальная форма записи дискретизованного сигнала

$$x_{\text{д}}(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = D(t)x_a(t)$$



Идеальная функция дискретизации

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

$D(t)$ — периодическая последовательность дельта-функций с периодом Δt и весами T .

Ряд Фурье для $D(t)$

$$D(t) = C_m \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t),$$

коэффициенты Фурье

$$C_m = \frac{T}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) dt = \frac{T}{\Delta t}.$$

В итоге

$$x_{\text{д}}(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

По теореме смещения для преобразования Фурье если $x_a(t) \xrightarrow{FT} X_a(f)$, то $x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) \xrightarrow{FT} X_a(f - mf_{\text{д}})$.

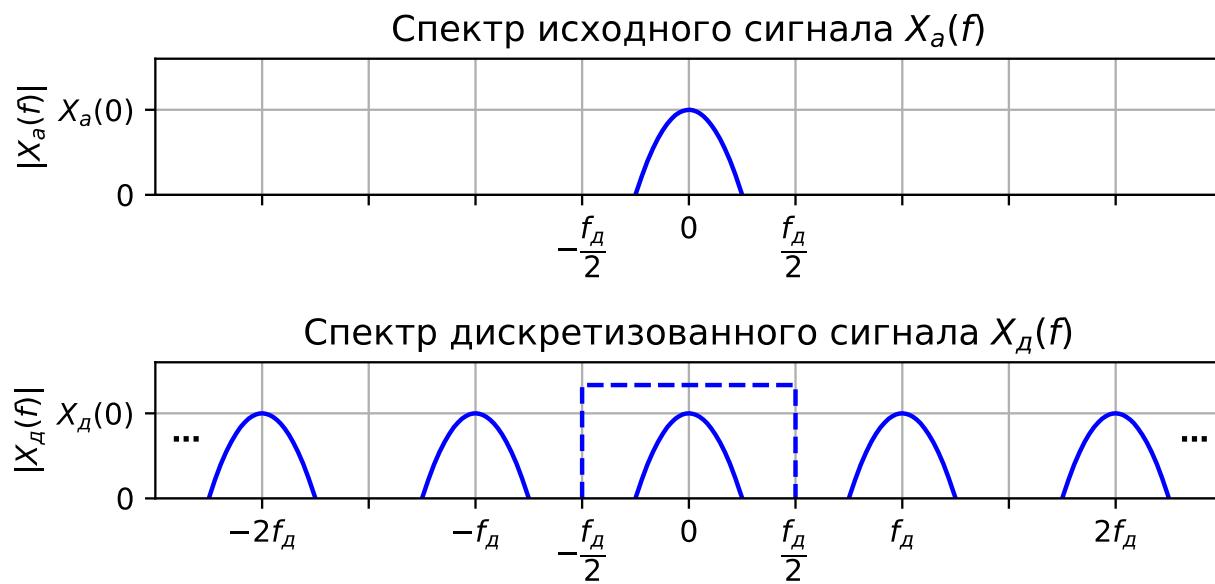
Тогда

$$X_{\text{д}}(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_{\text{д}}).$$

Эффект наложения.

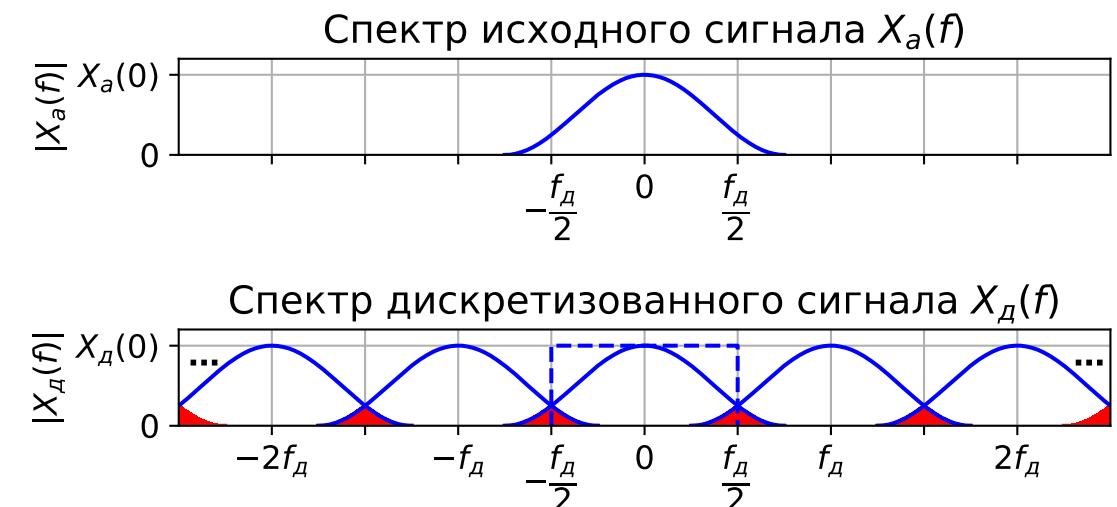
$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

$T = 1$	спектр перед периодическим повторением масштабируется
$T = \Delta t$ $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$	$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d)$ спектр периодически повторяется



Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, то возникает эффект наложения (англ. aliasing): спектр аналогового и дискретизированного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_d/2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.



Теорема Котельникова во временной области.

Теорема Котельникова во временной области.

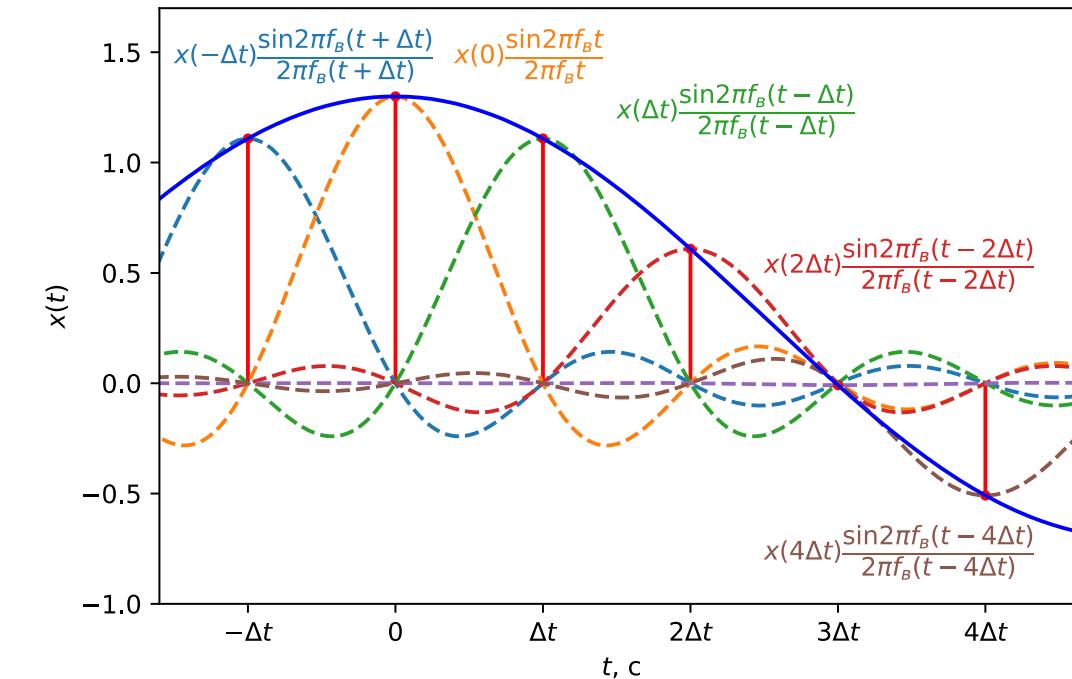
Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шенон 1949 г.). Если сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_B, f_B]$, и не содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_B$ ¹, то он представим с помощью своих дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$, взятых с шагом $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Интерпретация. Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой f_d , а его спектр ограничен интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$. Частота $f_d/2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.

¹ Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$



В пространстве сигналов из $L_2(-\infty, \infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, система функций отсчетов $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, таких, что

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_B},$$

полна и ортогональна.

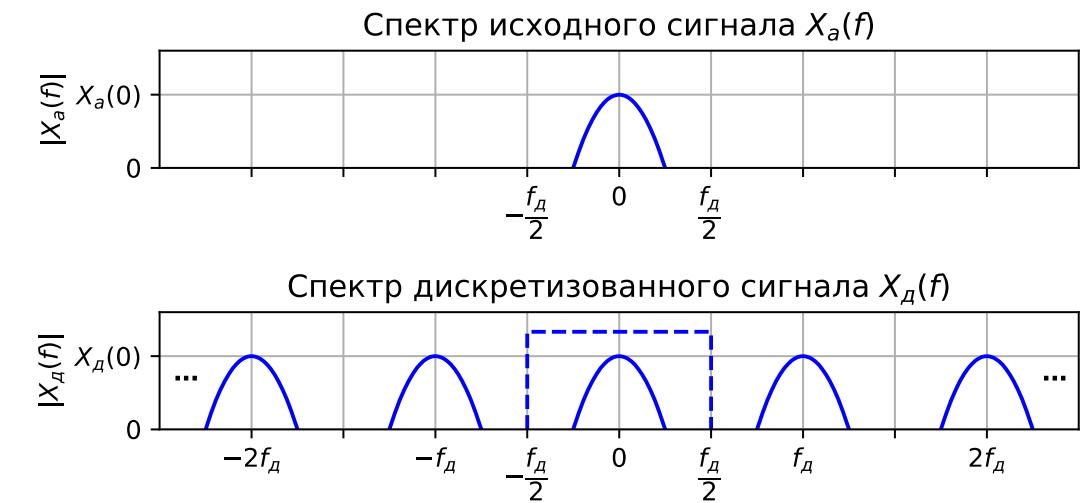
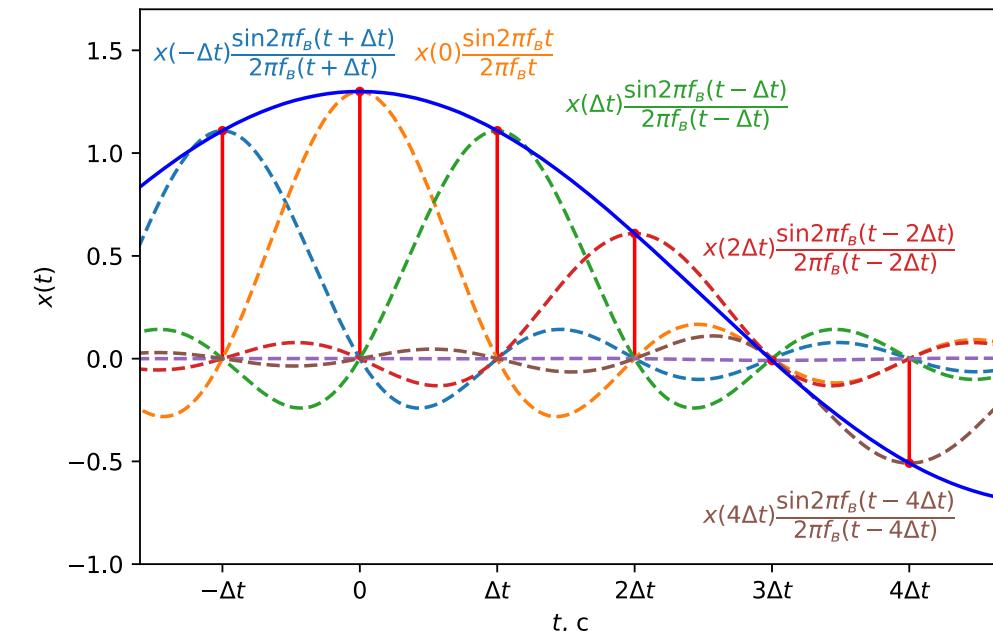
Теорема Котельникова во временной области.

Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.

- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_c, f_c]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.



Теорема отсчетов в частотной области

Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T, T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где $\Delta f = 1/2T$ и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n \Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-T}^T \left[\sum_n \Delta f X(n \Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \Delta f \sum_n X(n \Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n \Delta f - f)t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n \Delta f - f)t) dt &= \frac{1}{j2\pi(n \Delta f - f)} \exp(j2\pi(n \Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \\ &= \frac{2 \sin 2\pi T(n \Delta f - f)}{2\pi(n \Delta f - f)}. \end{aligned}$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n \Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n \Delta f)}{2\pi T(f - n \Delta f)}; \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте f однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f = 1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f = 1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области.

Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Пусть сигнал $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ дискретизуется с частотой дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

Тогда

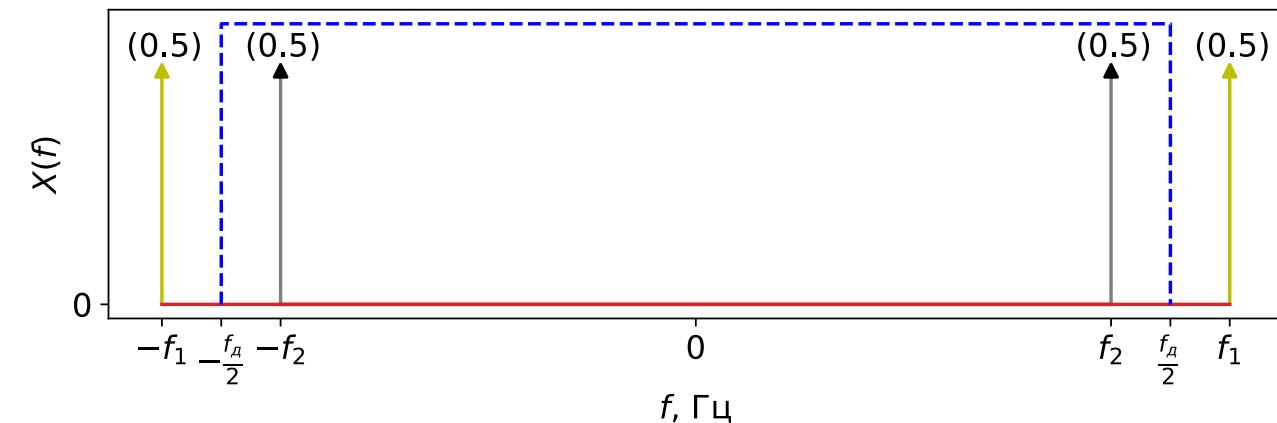
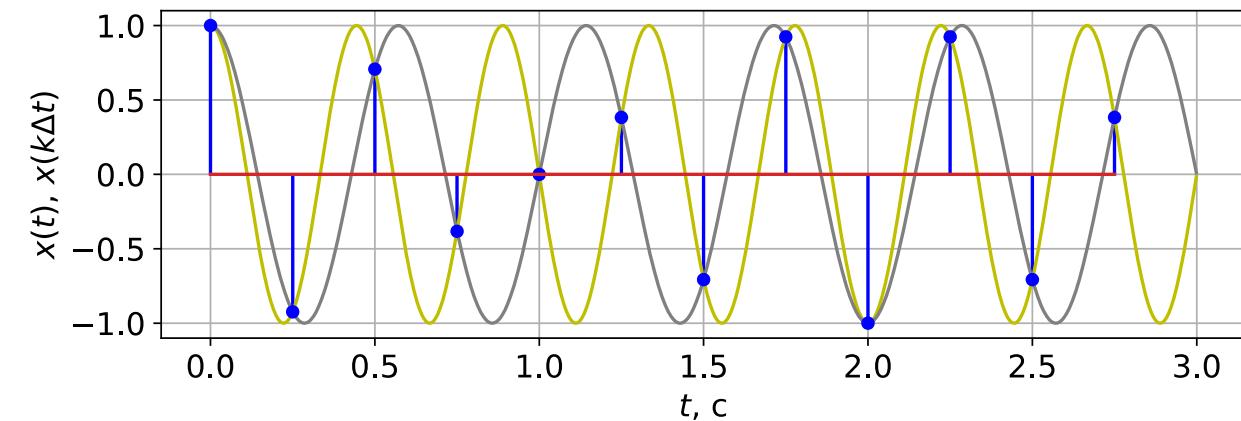
$$\begin{aligned}x[k] &= \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{n}{\Delta t}\right)k \Delta t\right) = \\&= \sin(2\pi(f_0 + nf_d)k \Delta t).\end{aligned}$$

Следовательно, гармонические сигналы с частотами f_0 $f_0 + nf_d$ дают одинаковый результат.

Последовательность цифровых отсчетов $x[k]$, представляющая синусоиду с частотой f_0 , точно так же представляет синусоиды с другими частотами $f_0 + nf_d$.

Причина заключается в эффекте наложения спектров.

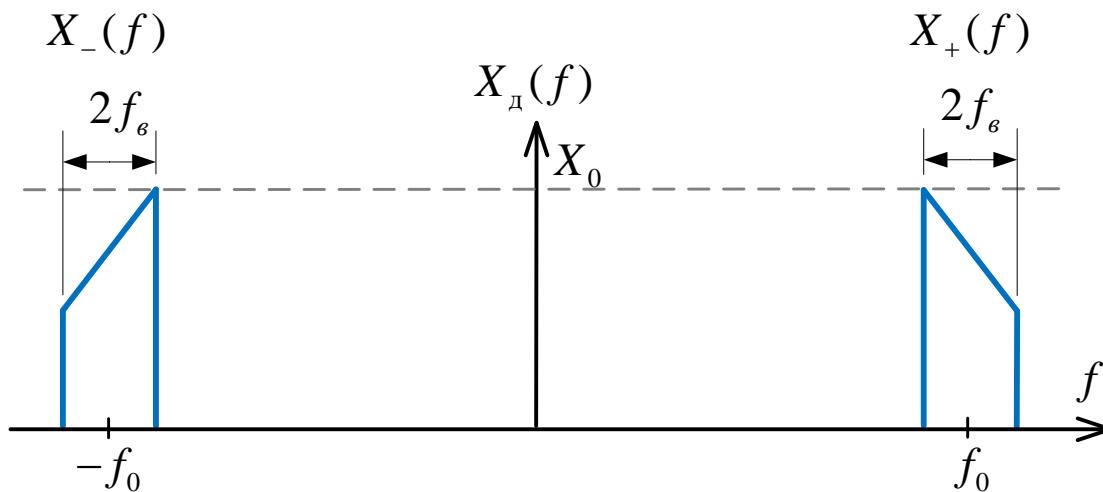
Пример. Дискретизованные косинусоиды с частотами $f_1 = 2,25$ Гц и $f_2 = 1,75$ Гц не различимы при частоте дискретизации $f_d = 4$ Гц.



Субдискретизация

Понятие субдискретизации.

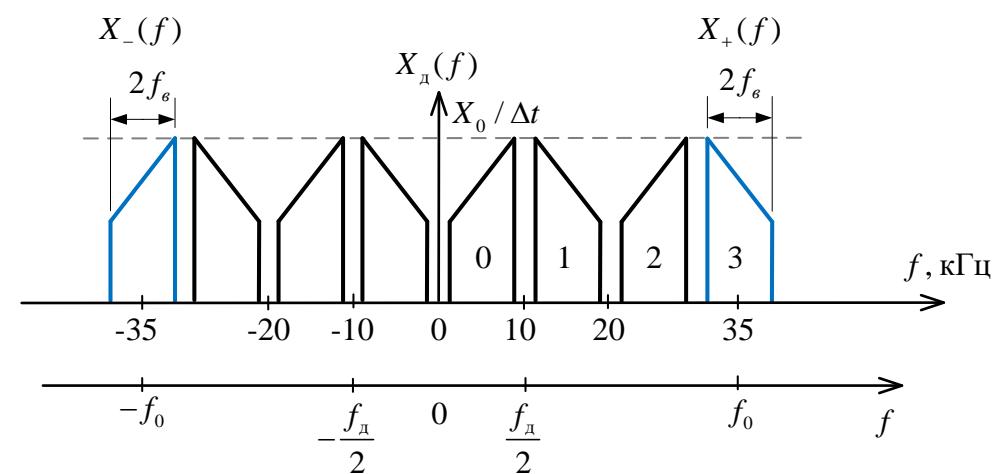
Рассмотрим действительный полосовой сигнал со спектром, изображенным на рисунке.



- Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат
- Компонента $X_+(f)$ носит название прямого спектра, а компонента $X_-(f)$ – инверсного.
- Для такого сигнала необходимая в соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации $f_d = 2(f_0 + f_e)$ может оказаться очень высокой, находящейся за пределами быстродействия АЦП.

- Для узкополосных радиосигналов ($f_0 \gg f_e$) существуют методы дискретизации с частотой $f_d < 2(f_0 + f_e)$, позволяющие сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.
- Одним из таких методов является субдискретизация. Субдискретизация заключается в том, что частота дискретизации f_d выбирается такой, что эффект наложения проявляется без перекрытия копий прямого и инверсного спектра исходного сигнала.

Пример.



Рассмотрим для субдискретизации ограничения на выбор частоты f_d .

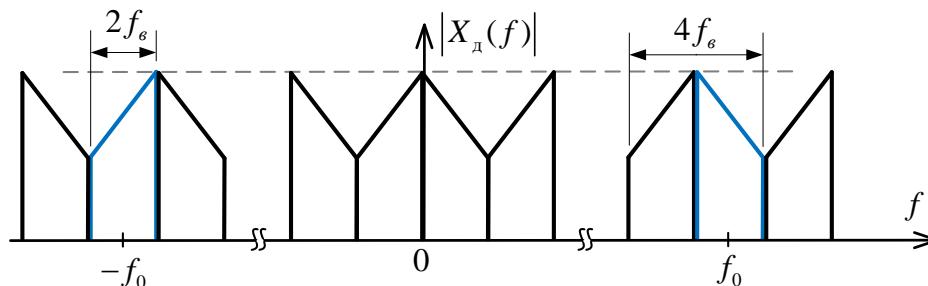
Субдискретизация: случай целочисленных полос

Случай целочисленных полос

Если граничные частоты спектра $f_0 - f_e$ и $f_0 + f_e$ кратны его ширине $2f_e$, т. е. если

$$f_0 - f_e = m(2f_e), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

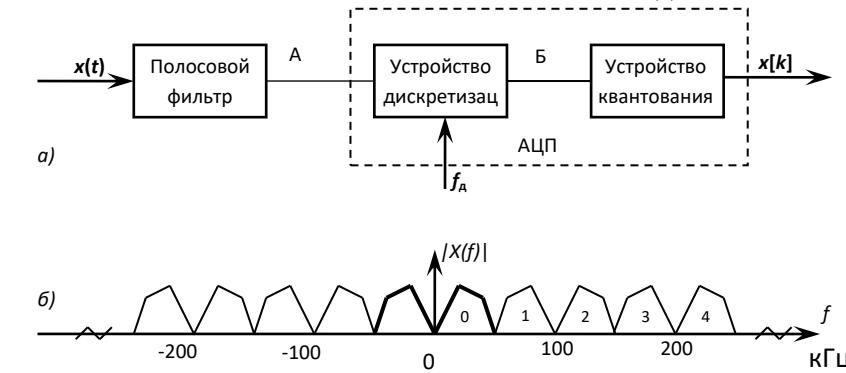
то минимальную частоту дискретизации можно взять равной $f_{d\min} = 4f_e$.



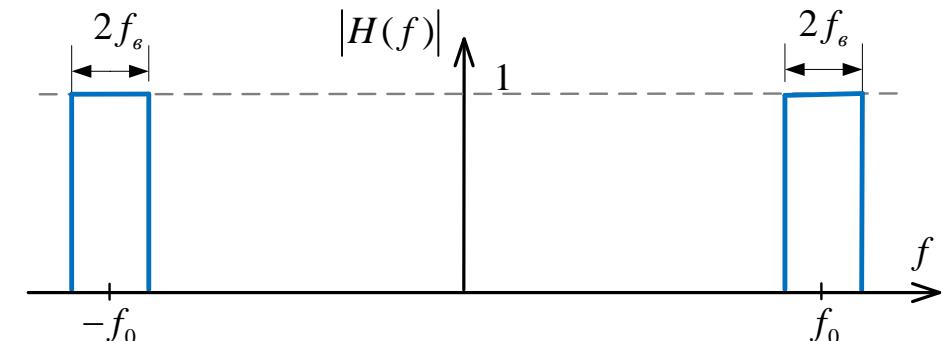
Число m показывает, сколько переносов прямого спектра нужно совершить, чтобы точка $f_0 - f_e$ попала в начало координат.

Такая плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$ практически может быть использована при условии, что компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции. В этом случае эффект наложения частичных спектров друг на друга будет отсутствовать. Этот метод дискретизации называется ещё *полосовой дискретизацией с недостаточной выборкой для целочисленных полос*.

Пример. На рисунке а) показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи. $2f_e = f_d/2 = 50$ кГц.



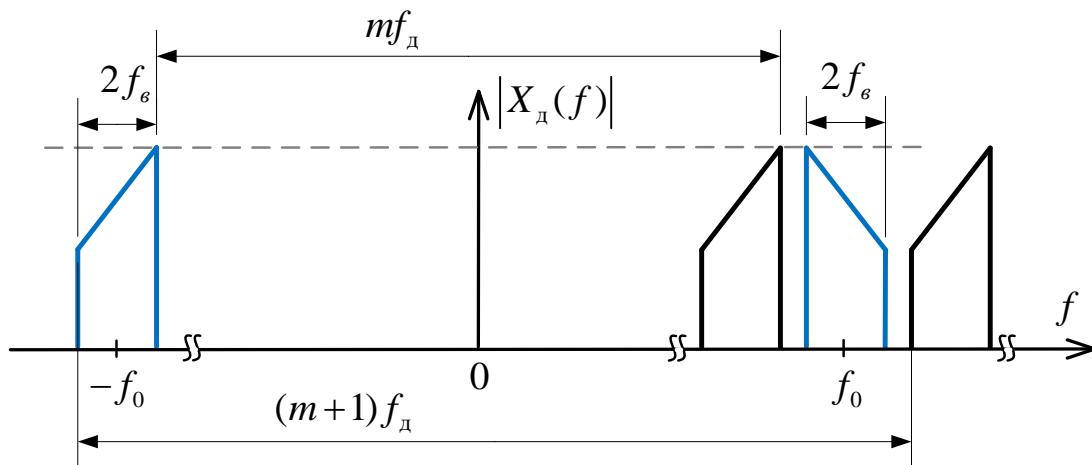
Спектр принимаемого сигнала показан на рисунке б) с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед дискретизацией с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр, АЧХ идеального фильтра представлена на рисунке ниже.



Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

Случай нецелочисленных полос

- Плотная упаковка отображений спектров $X_+(f)$ и $X_-(f)$, если компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ строго финитные функции и выполняется условие (1) для целочисленных полос.
- В общем случае компоненты $X_+(f)$ и $X_-(f)$ имеют «хвосты» и нецелочисленные полосы.



Для нахождения частоты дискретизации f_d необходимо использовать условие, что m и $m+1$ переносов $X_-(f)$ не дают пересечений с $X_+(f)$:

$$\begin{aligned}-f_0 + f_e + mf_d &< f_0 - f_e, \\ -f_0 - f_e + (m+1)f_d &> f_0 + f_e.\end{aligned}\quad (2)$$

Из (2) получаем

$$mf_d < 2(f_0 - f_e), \quad (m+1)f_d > 2(f_0 + f_e) \quad (3)$$

или

$$\frac{2(f_0 + f_e)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_e)}{m}. \quad (4)$$

Из (4) Субдискретизация возможна, если

$$\frac{(f_0 + f_e)}{m+1} < \frac{f_0 - f_e}{m},$$

т. е.

$$m < \frac{f_0 - f_e}{2f_e}. \quad (5)$$

Число m называется *порядком субдискретизации*.

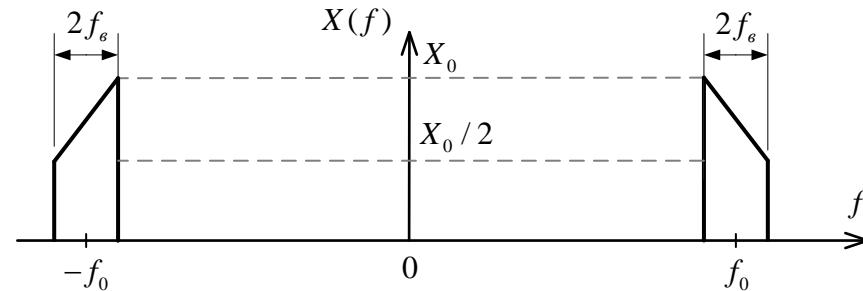
Поскольку общая протяженность спектра $X_-(f)$ и $X_+(f)$ равна $4f_e$, то при отсутствии перекрытий должно быть выполнено неравенство

$$f_d > 4f_e. \quad (6)$$

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

Пример. Спектр $X(f)$ некоторого полосового сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже, f_0 — несущая частота,

$$f_0 \gg 2f_e, 2f_e = 9,5 \text{ кГц}.$$



Изобразить спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой f_d , обеспечивающей центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста для случаев: а) $f_0 = 45 \text{ кГц}$, б) $f_0 = 35 \text{ кГц}$.

Решение для случая а) $f_0 = 45 \text{ кГц}$.

Границы выбора частоты дискретизации определяются неравенством

$$\frac{2(f_0 + f_e)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_e)}{m}.$$

где m — порядок субдискретизации.

f_d может быть выбрана в соответствии с этим неравенством при условии

$$m < \frac{f_0 - f_e}{2f_e},$$

откуда $m < 4,24$.

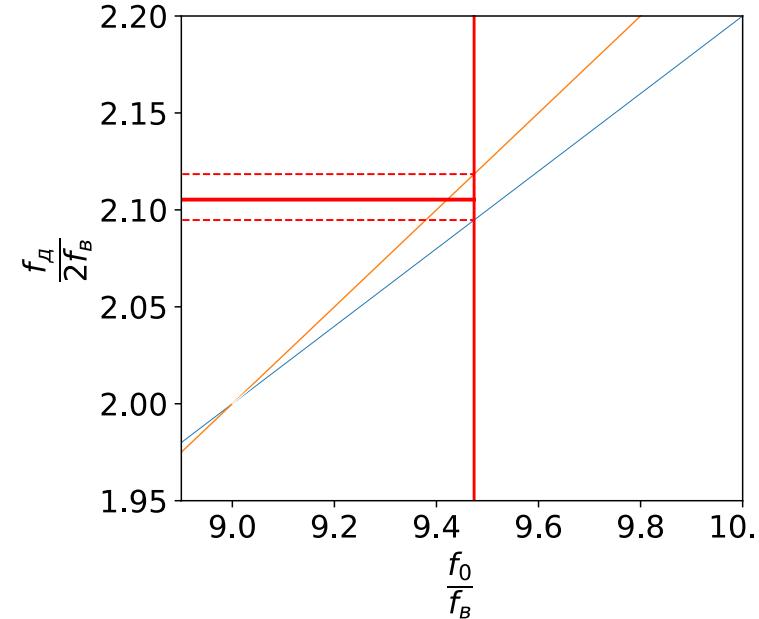
Порядок субдискретизации является натуральным числом, а значит максимально возможный порядок субдискретизации равен $m = 4$.

Для этого порядка субдискретизации условия выбора f_d
 $19,9 \text{ кГц} < f_d < 20,125 \text{ кГц}$.

Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать

$$f_d \geq 2(f_0 + f_e) = 99,5 \text{ кГц}$$

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

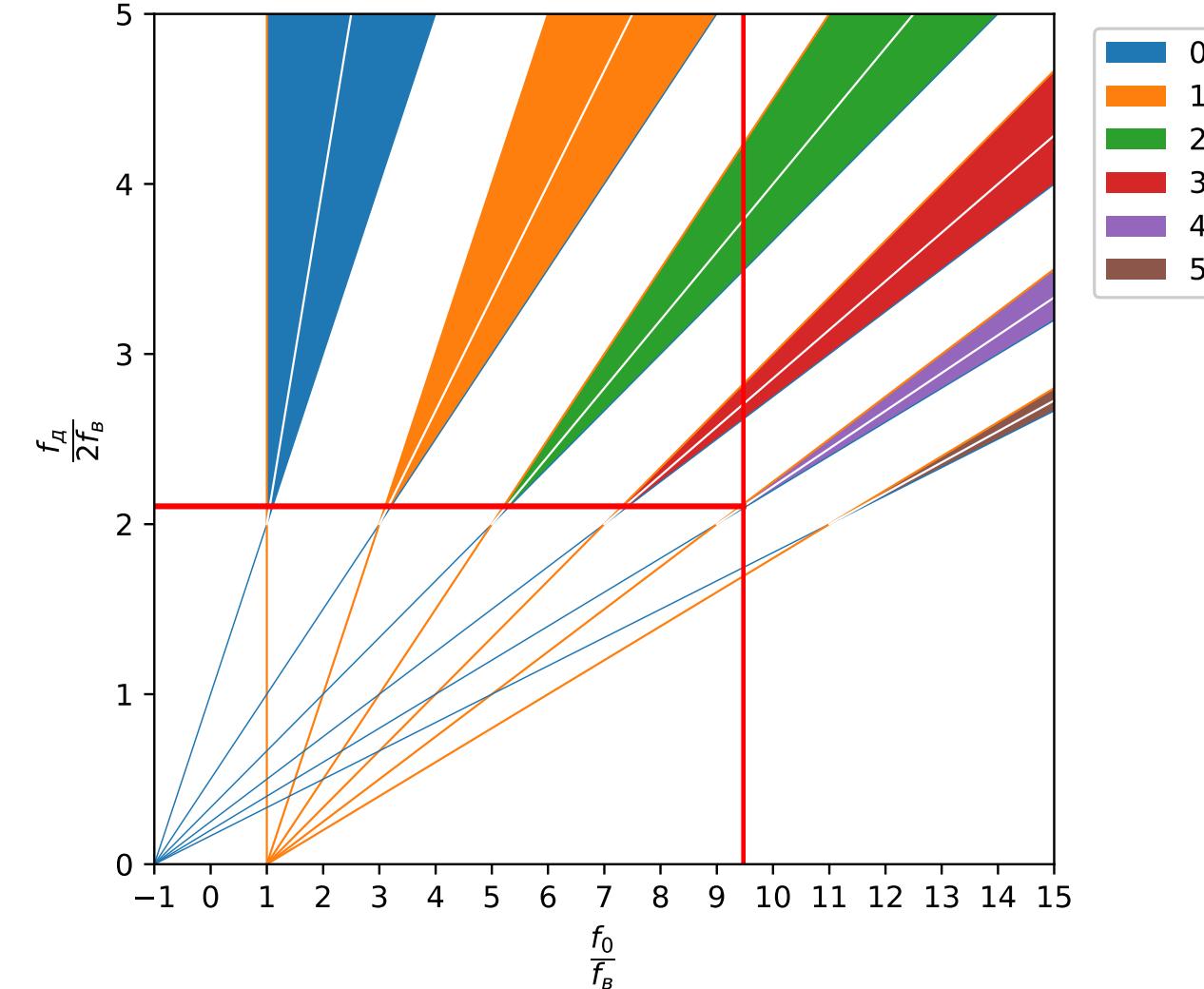


Область допустимых значений f_d

$$\frac{2(f_0 + f_e)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_e)}{m}.$$

для каждого порядка m может быть описана диаграммой, где случай центрирования субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста отвечает попаданием на биссектрису зоны выбора f_d :

$$f_d = \frac{4f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц.}$$

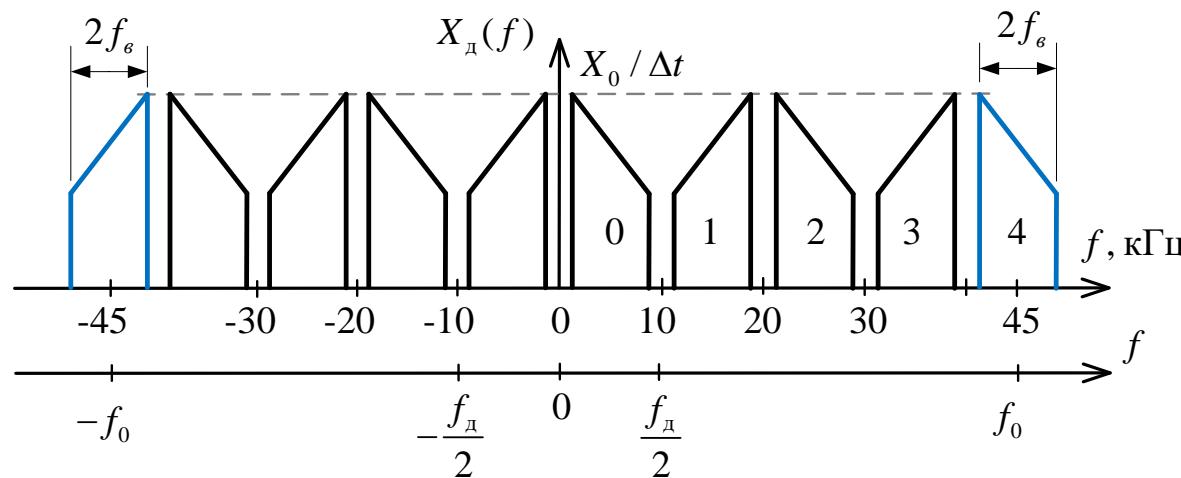


Цвета на диаграмме соответствуют разным значениям m .

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

Построим график спектра сигнала после его дискретизации с частотой $f_{\text{д}} = 20 \text{ кГц}$.

Правильный выбор частоты субдискретизации позволяет избежать (для реального сигнала – минимизировать) перекрытия отдельных копий спектра.



Порядок субдискретизации $m = 4$ означает, что прямой спектр сигнала и его несущая частота находятся в пятой зоне Найквиста (на рисунке обозначен как канал 4).

На частотах от 0 до $f_{\text{д}} / 2$ находится копия прямого спектра $X_+(f)$.

При $f_{\text{д}} = 20 \text{ кГц}$ копии прямого и инверсного спектра оказываются центрованным в полосе Найквиста (между копиями одинаковые зазоры), что позволяет для реального сигнала минимизировать перекрытие неизбежно возникающих хвостов спектра вблизи границы полосы.

Субдискретизация: случай нецелочисленных полос

Решение для случая б) $f_0 = 35$ кГц.

В соответствии с условием

$$m < \frac{f_0 - f_\epsilon}{2f_\epsilon},$$

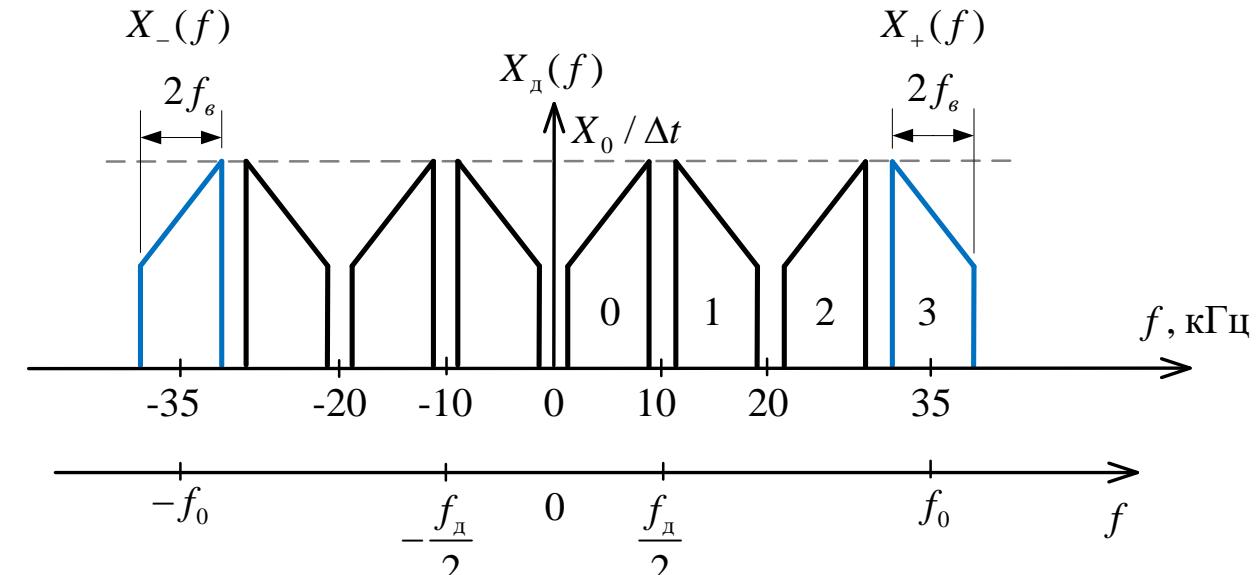
находим, что $m < 3,19$.

Наибольший возможный порядок субдискретизации $m = 3$.

Наименьшая частота дискретизации, обеспечивающая центрирование субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста, равна

$$f_d = \frac{4f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц.}$$

То, что порядок субдискретизации $m = 3$ является нечетным, означает, что частотах от 0 до $f_d / 2$ находится копия инверсного спектра $X_-(f)$, а на частотах от $-f_d / 2$ до 0 — копия прямого спектра $X_+(f)$.



Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать $f_d \geq 2(f_0 + f_\epsilon) = 79,5$ кГц

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

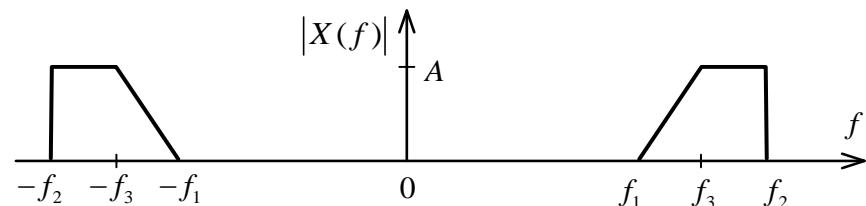
Субдискретизация

№1. Для полосового сигнала FM-радио с шириной полосы $2f_e = 20$ МГц и несущей частотой $f_0 = 98$ МГц, определить:

- минимальную частоту дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов,
- максимально возможный порядок субдискретизации *ти* и границы для выбора частоты дискретизации для него.

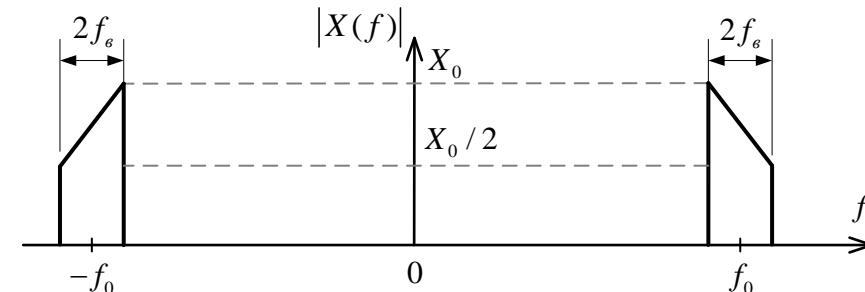
№2. На рисунке изображён модуль спектральной плотности узкополосного сигнала. Пусть полоса

$B = f_2 - f_1 = 10$ кГц и сигнал дискретизуется с частотой $f_d = 2B$. $f_3 = (f_1 + f_2)/2$.



Изобразить, когда это возможно, модуль спектральной плотности дискретизованного сигнала в диапазоне $[-f_2; f_2]$ для случая: а) $f_2 / B = 3$, б) $f_2 / B = 4$, в) $f_2 / B = 4,5$.
Обосновать результаты.

№3. На рисунке изображен модуль спектральной плотности непрерывного полосового сигнала, $2f_e = 5$ МГц, $f_0 = 20$ МГц.



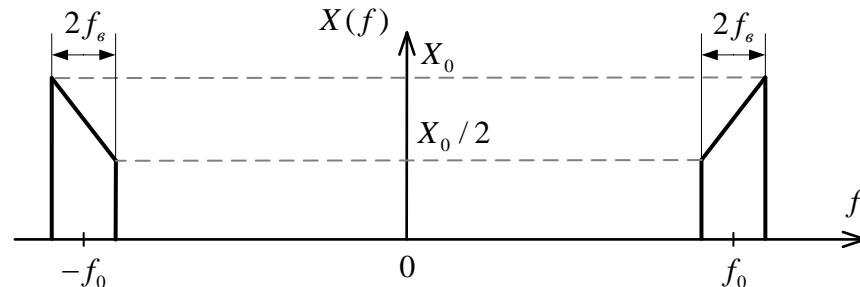
Изобразить, когда это возможно, модуль спектральной плотности дискретизованного сигнала для значений частоты дискретизации f_d :

$$f_{d1} = 22,5 \text{ МГц}; f_{d2} = 17,5 \text{ МГц}; f_{d3} = 15 \text{ МГц}; f_{d4} = 11,25 \text{ МГц}; \\ f_{d5} = 7,5 \text{ МГц}.$$

Задачи с лекции

Обосновать выбор минимальной частоты дискретизации, при которой нет перекрытия отдельных копий прямого и инверсного спектра.

№4. Спектр $X(f)$ некоторого полосового радиосигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже, f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_e$, $2f_e = 4,5$ кГц, $f_0 = 32,5$ кГц.



Изобразить по модулю спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой f_d , обеспечивающей центрирование спектра субдискретизуемого сигнала в полосе Найквиста.

Дискретизация взятием отсчетов

№ 5. Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами $f_1 = 20$ кГц и $f_2 = 80$ кГц при их дискретизации с частотой $f_d = 60$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения?

№ 6. Предположим, что проводится дискретизация с частотой $f_d = 1$ МГц гармонических сигналов $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, $f_1 = 150$ кГц, $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$, $f_2 = 650$ кГц, $x_3(t) = \cos(2\pi f_3 t)$, $f_3 = 1050$ кГц. Установить для каждого из этих сигналов, будет ли наблюдаться эффект наложения.

№ 7. Записать спектры следующих сигналов

а) $x(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^3 t + \pi/3) + 20 \cos(4\pi \cdot 10^3 t + \pi/6) + 125$,

б) $x(t) = \frac{\sin(2\pi \cdot 10^3 t)}{2\pi \cdot 10^3 t}$.

Для каждого из сигналов определить частоту дискретизации, необходимую для возможности его последующего точного восстановления. Время t в данной задаче измеряется в секундах.

Задачи с лекции

№8. Пусть спектр действительного видеосигнала $x(t)$ равен нулю вне полосы частот шириной 1 МГц, а спектр видеосигнала $y(t)$ равен нулю вне полосы частот шириной 4 МГц. В соответствии с теоремой отсчетов определить максимальный шаг дискретизации следующих сигналов
а) $x(t)$, б) $y(t)$, в) $y(5t)$, г) $x(t) + y(t)$, д) $x(t)y(t)$, е) $x(t) \otimes y(t)$

№9. Основываясь на теореме отсчетов, рассчитать полосу частот, необходимую для передачи черно-белого изображения, если принять, что разрешающая способность телевизионного изображения 500 строк с числом элементов в строке 650, скорость передачи 25 кадров в секунду и яркость каждой точки передается амплитудой видеосигнала.

№10. Рассмотреть вопрос о дискретизации колокольного (гауссова) импульса $x(t) = \exp(-(\beta t)^2)$.
В качестве верхней граничной частоты спектра f_b принять значение частоты, при котором спектральная плотность в 10 раз меньше максимального значения. Определить шаг дискретизации Δt .

Лекция 5 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

4 марта 2025 г.

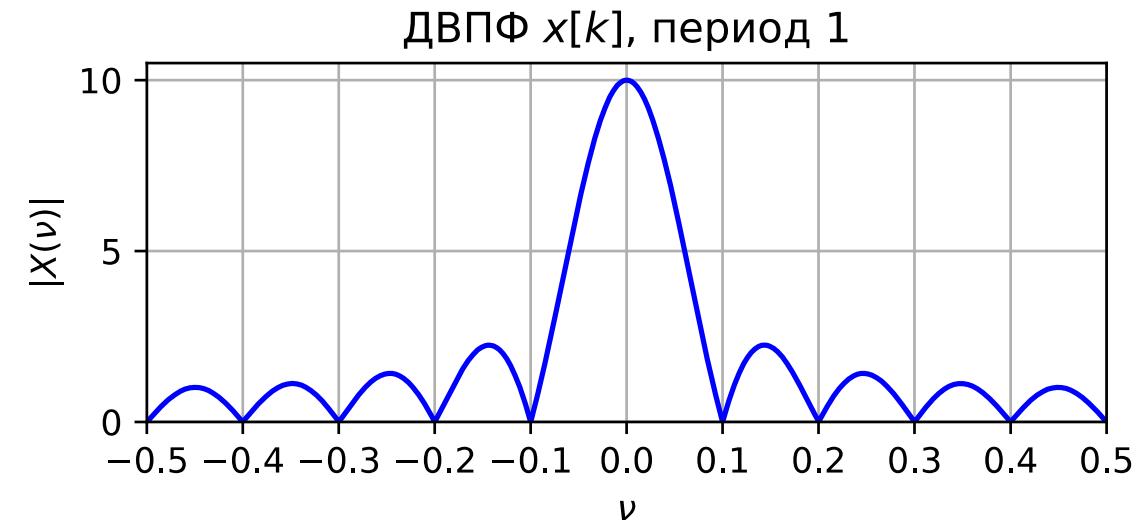
4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов.

Формы записи ДВПФ для разных частотных переменных.

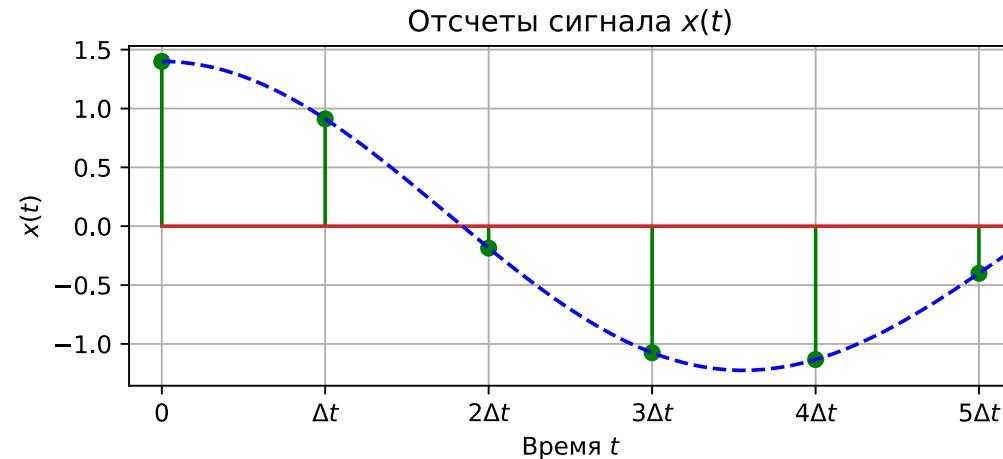
Сходимость ДВПФ.

Примеры.



Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in \mathbb{Z}$ — номер отсчета.

$f_d = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность $[f_d] = [\text{Гц}] = [\text{s}^{-1}]$). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно при

дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_d > 2f_a$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = T x(k\Delta t),$$

где $T = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $T = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_a(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации f_d :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2; f_d/2]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t).$$

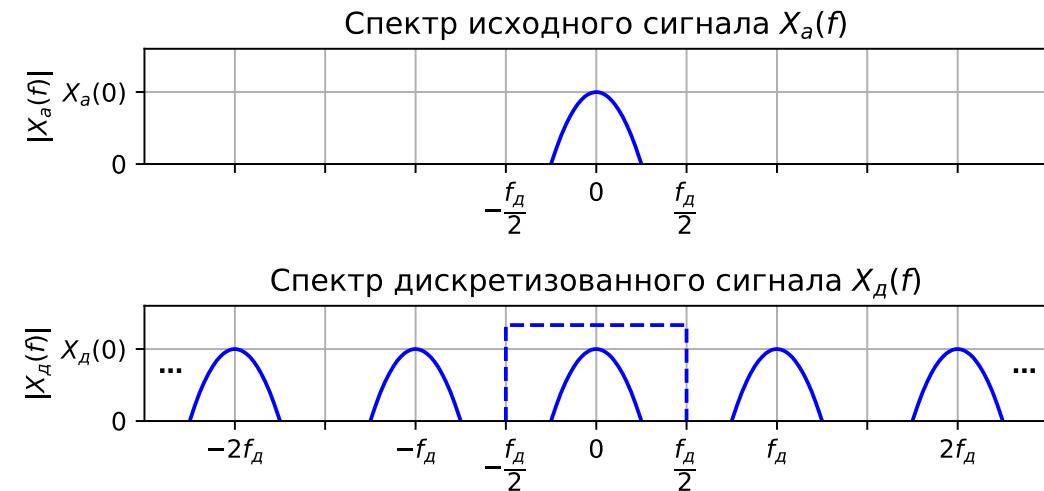
Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t).$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).



Учитывая, что формула прямого ДВПФ представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_d(f)$ ¹, получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (1)$$

¹ Напоминание. Для $2l$ -периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(-l;l)$ ряд Фурье по системе функций $\phi_m(x) = \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\frac{\pi}{l}x), \text{ где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm\frac{\pi}{l}x) dx.$$

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

В итоге получаем пару формул определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ):

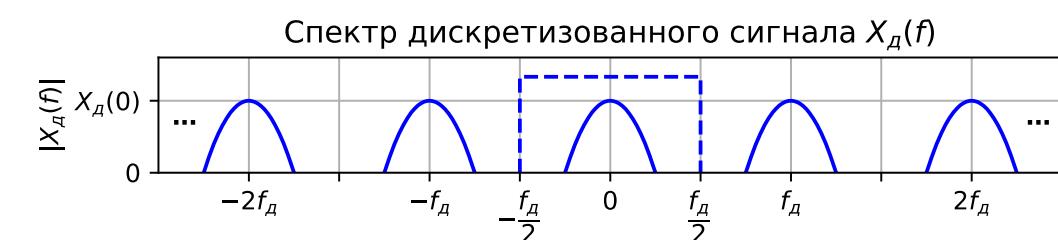
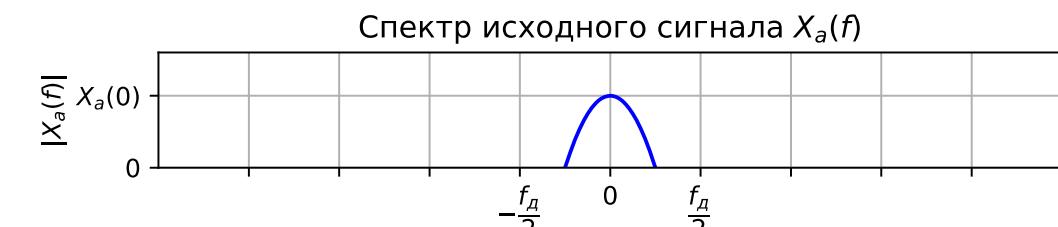
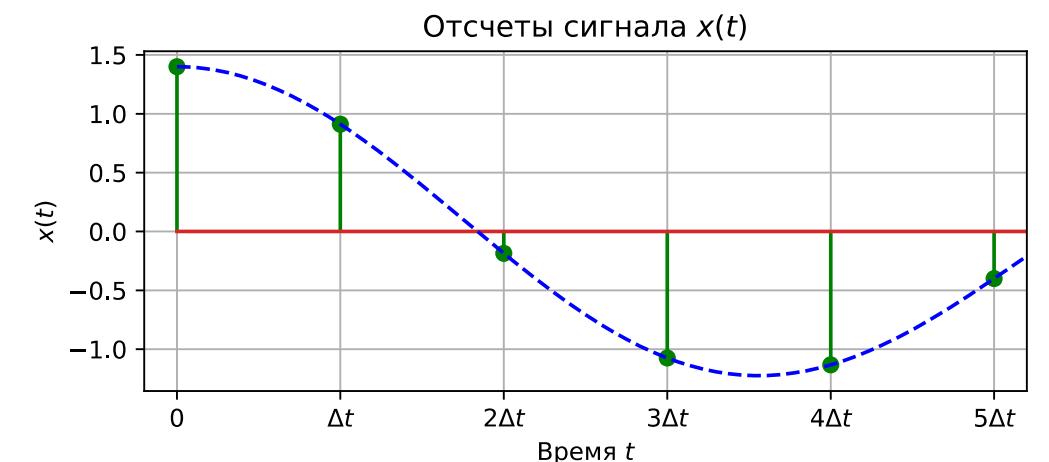
$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

ДВПФ показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $[-f_d/2; f_d/2]$ в отсутствии наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала.

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - n f_d).$$

При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k \Delta t)$.



Различные формы записи ДВПФ

Различные формы записи ДВПФ

Итак, мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_D - f_D/2} \int_{f_D/2}^{f_D/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_D = f \Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$

$$x[k] = \int_{-\nu_D/2}^{\nu_D/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_D = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_D/2}^{\omega_D/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
f	Гц	$f_D = 1 / \Delta t$	$[-f_D/2; f_D/2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_D = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_D/2; \omega_D/2]$
$\nu = f / f_D$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_D$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Различные формы записи ДВПФ

Пример. Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов

$$x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1],$$

где $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ $x[k]$ в нормированных частотах v

$$\begin{aligned} X(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi v k} = \sum_{k=-1}^1 x[k] e^{-j2\pi v k} = \\ &= x[-1] e^{j2\pi v} + x[0] e^0 + x[1] e^{-j2\pi v} = \\ &= \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2\cos(2\pi v). \end{aligned}$$

Аналогично для частот в герцах (f)

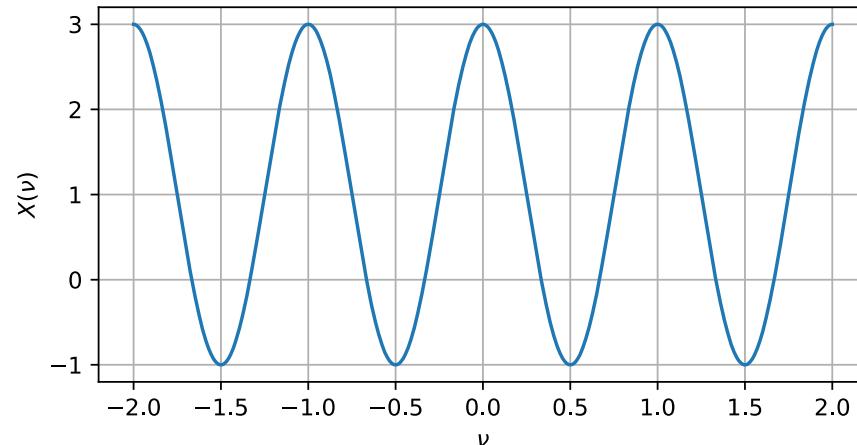
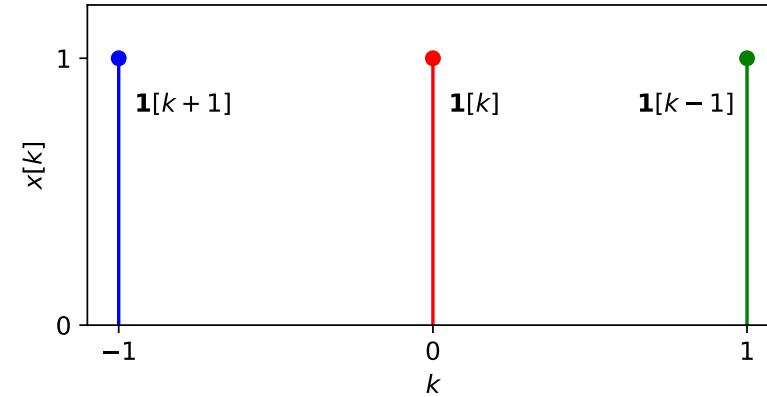
$$X(f) = 1 + 2\cos(2\pi f \Delta t),$$

для частот в рад/с ($\omega = 2\pi f$)

$$X(\omega) = 1 + 2\cos(\omega \Delta t),$$

для $\theta = 2\pi v$

$$X(\theta) = 1 + 2\cos(\theta).$$



Функция $X(v)$ периодическая и в силу четной симметрии $x[k]$ относительно нуля действительная.

Пример. Прямоугольное окно.

Пример. Прямоугольное окно.

$$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi v k).$$

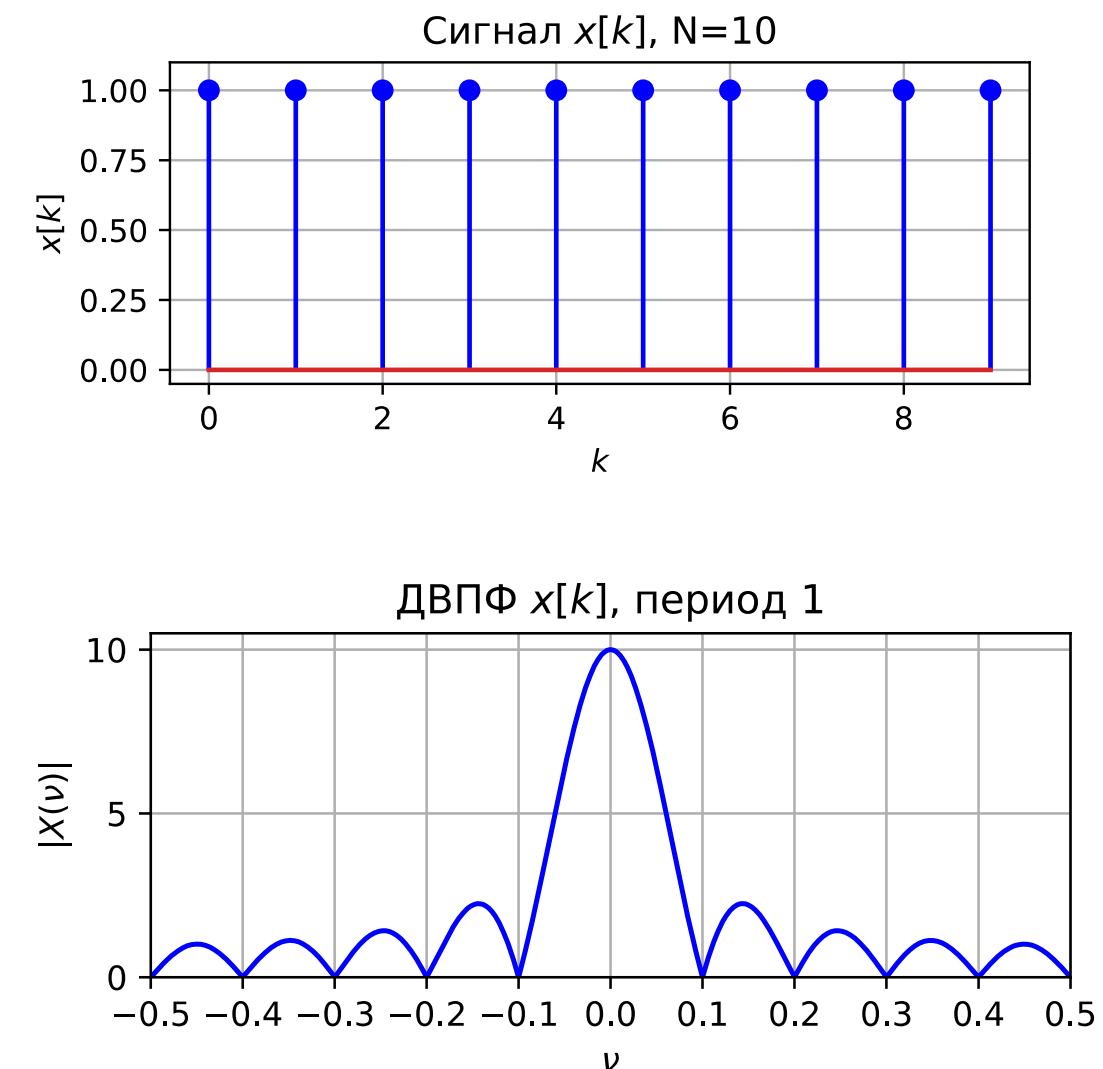
Используем формулу суммы N членов геометрической прогрессии ($q = \exp(-j2\pi v)$, $b_0 = e^0 = 1$).

$$\begin{aligned} X(v) &= \frac{1 - \exp(-j2\pi v N)}{1 - \exp(-j2\pi v)} = \frac{2j}{2j} \frac{e^{-j\pi v N}}{e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi v N} - e^{-j\pi v N})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \\ &= \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v). \end{aligned}$$

АЧХ

$$|X(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$

Нули АЧХ: $v_n = \frac{n}{N}$, при целых n , не кратных N .



Пример. Отсчеты прямоугольного импульса.

Пример. Отсчеты прямоугольного импульса.

- Выбрать шаг дискретизации Δt симметричного прямоугольного импульса длительностью τ с высотой E .
- В качестве верхней граничной частоты спектра f_e принять значение частоты, при котором спектральная плотность обращается в нуль и при $f > f_e$ значение спектральной плотности не превышает 0,1 от максимального значения.
- Записать ряд Котельникова для этого случая.
- Определить спектр дискретизованного сигнала.
- Считать, что отсчеты дискретизованного сигнала определяются как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

Решение. Спектр прямоугольного импульса до дискретизации можно определить с помощью преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} X_{\text{пр}}(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi ft} = \frac{E}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}. \end{aligned}$$

Максимальное значение $X_{\text{пр}}(f)$ достигается на нулевой

частоте и равно

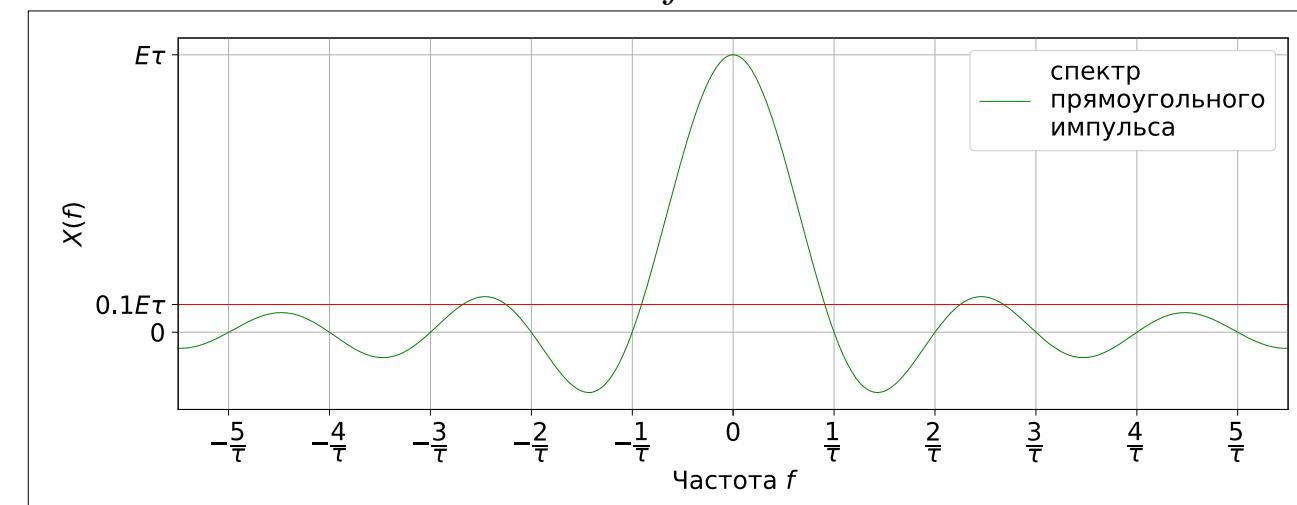
$$X_{\text{пр}}(0) = \lim_{f \rightarrow 0} E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \lim_{f \rightarrow 0} E\tau \frac{\pi \tau \cos(\pi f \tau)}{\pi \tau} = E\tau.$$

Нули функции $X_{\text{пр}}(f)$ совпадают с нулями $\sin(\pi f \tau)$, за исключением точки 0, где находится неопределенность «0/0». Соответственно, они находятся в точках

$$f_m = \pm \frac{m}{\tau}, m \in N.$$

По условию требуется, чтобы f_e совпадала с одним из нулей и для любого $f > f_e$ выполнялось

$$E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \leq \frac{E\tau}{10}.$$



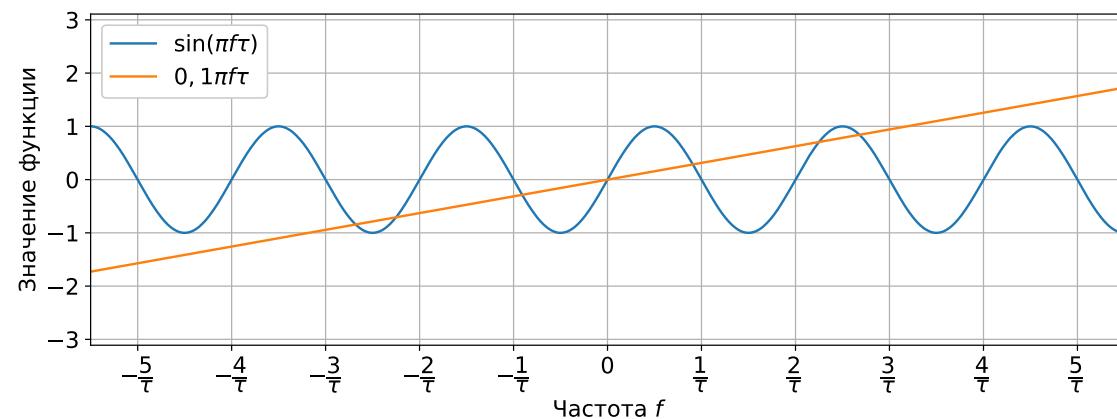
Спектр прямоугольного импульса.

Пример. Отсчеты прямоугольного импульса.

$$E\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} \leq \frac{E\tau}{10}.$$

Преобразуем неравенство к виду

$$\sin(\pi f\tau) \leq 0,1\pi f\tau.$$



Функция $\sin(\pi f\tau)$ достигает максимального значения при

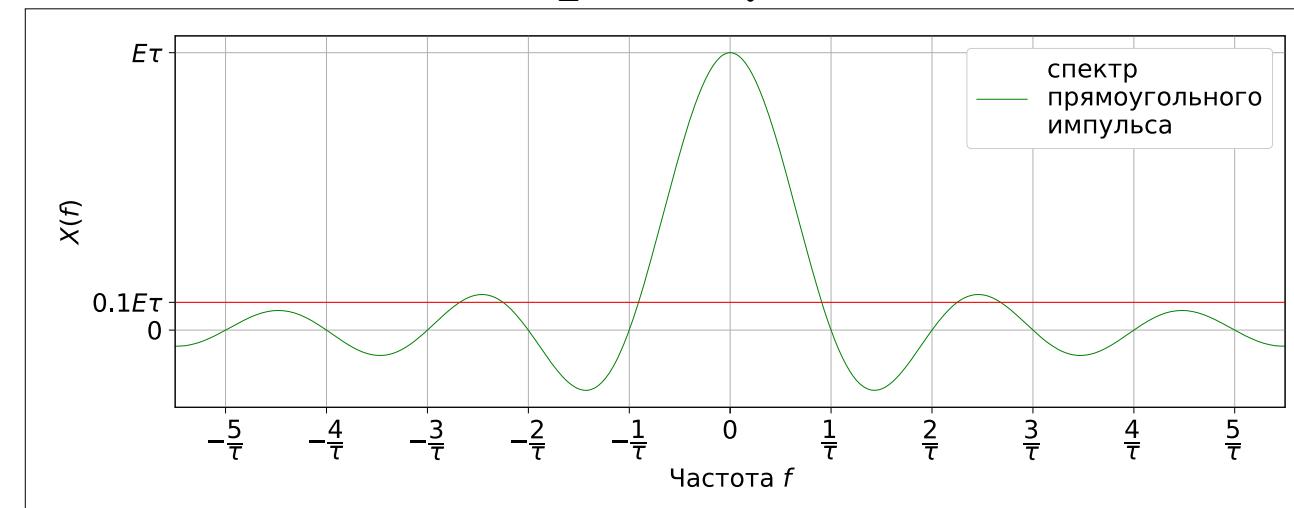
$$\pi f\tau = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Найдем $f_m = f_e$, потребовав, чтобы значение линейной функции $0,1\pi f\tau$ для $f = (0,5 + 2m)/\tau$ (максимума синусоиды) превышало единицу, что является необходимым условием для выполнения неравенства для всех $f > (0,5 + 2m)/\tau$.

Минимально возможное значение m для этого случая $m = 2$. Заметим, что для всех $f > 3/\tau$ неравенство $\sin(\pi f\tau) \leq 0,1\pi f\tau$ выполнено. Тогда $f_e = 3/\tau$. Поскольку рассматривается сигнал, со спектром, сосредоточенным вокруг нулевой частоты (видеосигнал), то

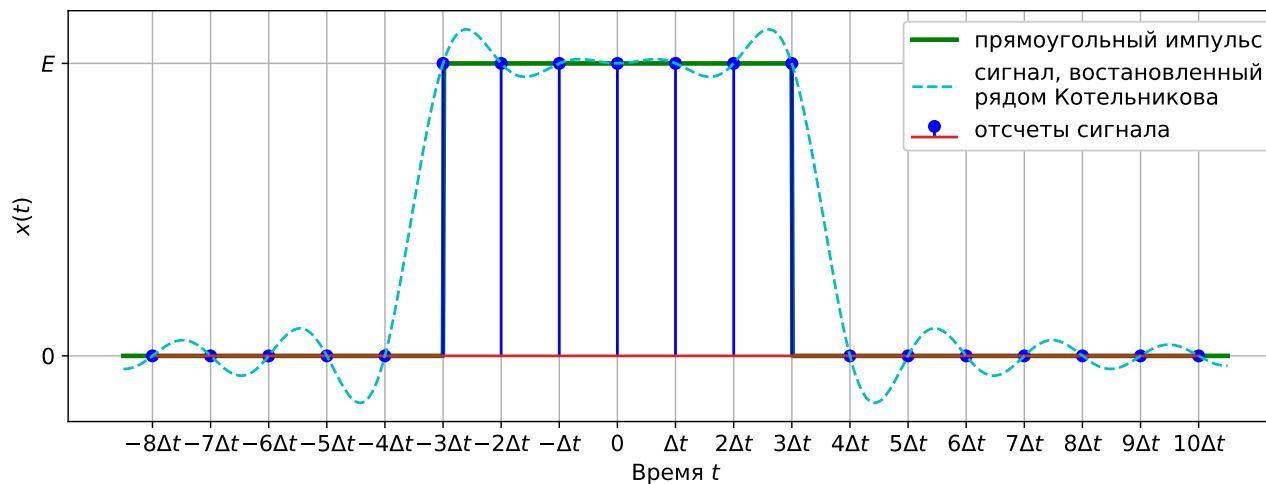
$$f_d = 2f_e = 6/\tau.$$

$$\frac{f_d}{2} = f_e = \frac{3}{\tau}.$$



Спектр прямоугольного импульса.

Пример. Отсчеты прямоугольного импульса.



Шаг дискретизации равен $\Delta t = 1/f_d = \tau/6$. Дискретизуем сигнал таким шагом, получаем 7 ненулевых отсчетов прямоугольного импульса, симметрично расположенных относительно нуля времени.

С учетом нулевых слагаемых и выбора частоты дискретизации ряд Котельникова принимает вид

$$x_{\text{пр}}(t) = \sum_{k=-3}^3 E \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{\tau}(t-k\Delta t)\right)}{\frac{6\pi}{\tau}(t-k\Delta t)}.$$

Отсчеты дискретизованного сигнала

$$x[k] = \Delta t x(k\Delta t) = \begin{cases} E\Delta t, & |k| \leq 3, \\ 0, & |k| > 3. \end{cases}$$

Спектр дискретизованного сигнала

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi fk\Delta t) = E\Delta t \sum_{k=-3}^3 \exp(-j2\pi fk\Delta t)$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-j2\pi f\Delta t)$, получаем

$$X_d(f) = E\Delta t \exp(j6\pi f\Delta t) \frac{1 - \exp(-j14\pi f\Delta t)}{1 - \exp(-j2\pi f\Delta t)}.$$

Обозначим $\theta = 2\pi f\Delta t$ (нормированный угол в радианах). Для числителя и знаменателя вынесем половину степени экспоненты за скобки.

$$\begin{aligned} X_d(\theta) &= E\Delta t \exp(j3\theta) \frac{1 - \exp(-j7\theta)}{1 - \exp(-j\theta)} = \\ &= E\Delta t e^{j3\theta} \frac{e^{-j7\theta/2} (e^{j7\theta/2} - e^{-j7\theta/2})}{e^{-j\theta/2} (e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2})}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следствием из формулы Эйлера

$$X_d(\theta) = E\Delta t \frac{\sin(7\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Пример. Отсчеты прямоугольного импульса.

Тогда в переменных f

$$X_d(f) = E\Delta t \frac{\sin(7\pi f \Delta t)}{\sin(\pi f \Delta t)}.$$

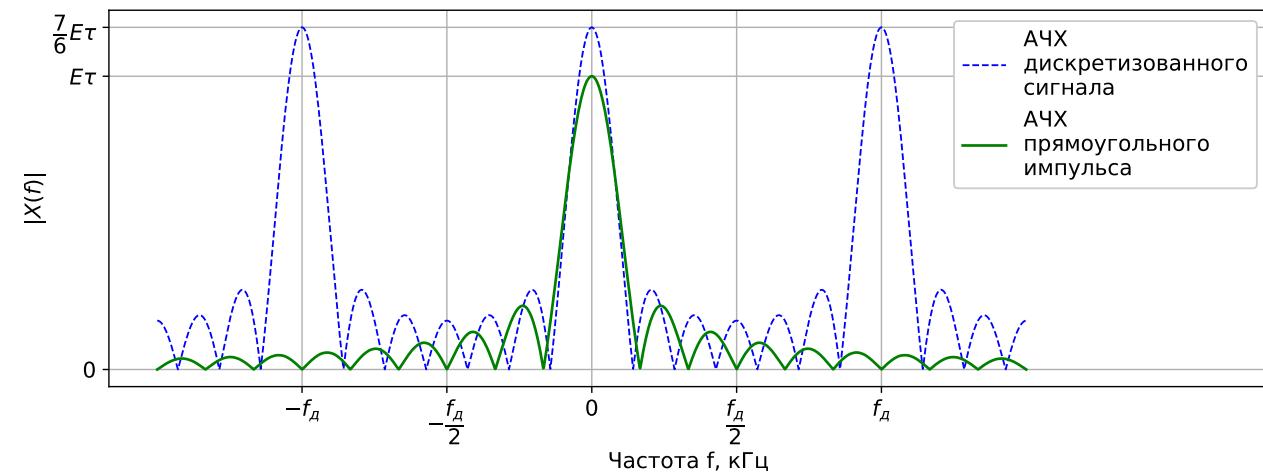
Функция $X_d(f)$ является периодической с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

С учетом выбора шага дискретизации ($f_d = 2f_e = 6/\tau$)

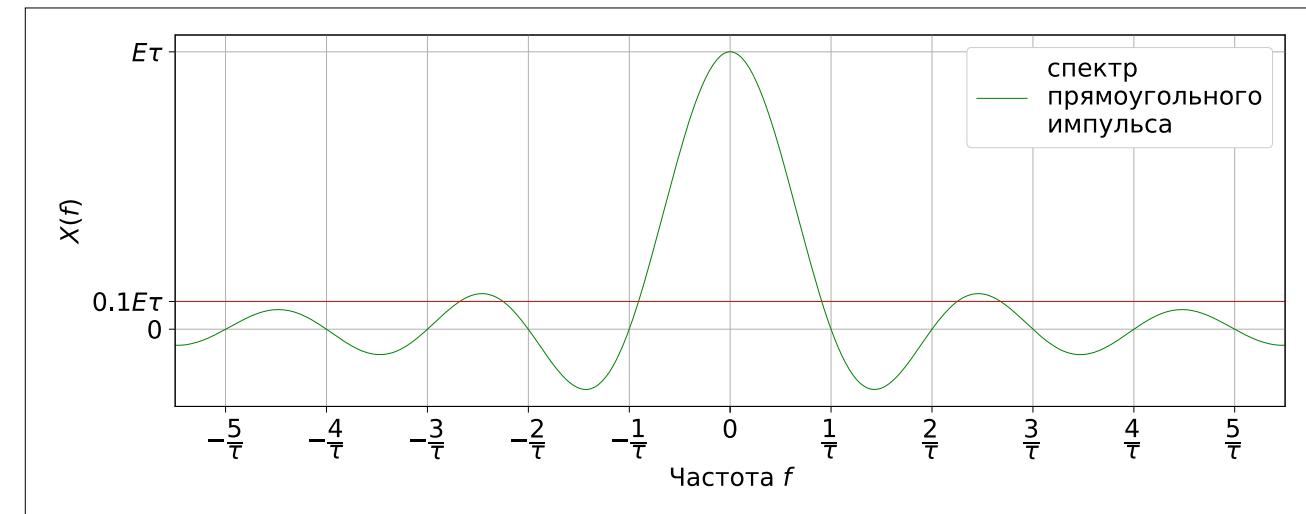
$$X_d(f) = \frac{E\tau}{6} \frac{\sin(7\pi f \tau / 6)}{\sin(\pi f \tau / 6)}.$$

Заметим, что из-за влияния эффекта наложения значения $X_{\text{пр}}(f)$ и $X_d(f)$ не являются строго равными на интервале

частот от $-f_e$ до f_e . В частности, $X_d(f) = \frac{7}{6}E\tau$.



АЧХ исходного и дискретизированного сигналов.



Спектр прямоугольного импульса.

Сходимость ДВПФ

Сходимость ДВПФ

Рассмотрим вопрос об взаимной обратимости формул ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi v k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi v k) dv.$$

Выполним подстановку прямого преобразования в обратное

$$\hat{x}[k] = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi v m) \right) \exp(j2\pi v k) dv.$$

Если бесконечный ряд под интегралом равномерно сходится на множестве определения v , то его можно почленно проинтегрировать

$$\hat{x}[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-1/2}^{1/2} \exp(j2\pi v(k-m)) dv.$$

Вычислим интеграл отдельно.

а) При $k = m$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \exp(j2\pi v(k-m)) dv = \int_{-1/2}^{1/2} e^0 dv = 1$$

б) При $k \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \exp(j2\pi v(k-m)) dv &= \frac{\exp(j2\pi v(k-m))}{j2\pi(k-m)} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\pi(k-m)} \cdot \frac{e^{j\pi(k-m)} - e^{-j\pi(k-m)}}{2j} = \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)} \end{aligned}$$

В итоге

$$\int_{-1/2}^{1/2} \exp(j2\pi v(k-m)) dv = \mathbf{1}[k=m] = \begin{cases} 1, & k=m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{x}[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k=m] = x[k],$$

Таким образом, когда ряд

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi v m)$$

равномерно сходится на множестве определения v , формулы ДВПФ взаимно обратимы.

Сходимость ДВПФ

Равномерная сходимость к непрерывной функции.

Достаточное условие сходимости ряда

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi v m)$$

определяется следующим образом:

$$|X(v)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi v m) \right|,$$

$$|X(v)| < \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]| \cdot |\exp(-j2\pi v m)| < \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]| < \infty$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x[k]$ ДВПФ $X(v)$ определено на всей числовой прямой. Заметим, что любая последовательность конечной длительности будет абсолютно суммируемой.

Можно показать, что по признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится к непрерывной функции от v .

Пример. Пусть $h[k] = a^k \sigma[k]$, где $\sigma[k]$ – дискретная функция включения. ДВПФ этой последовательности

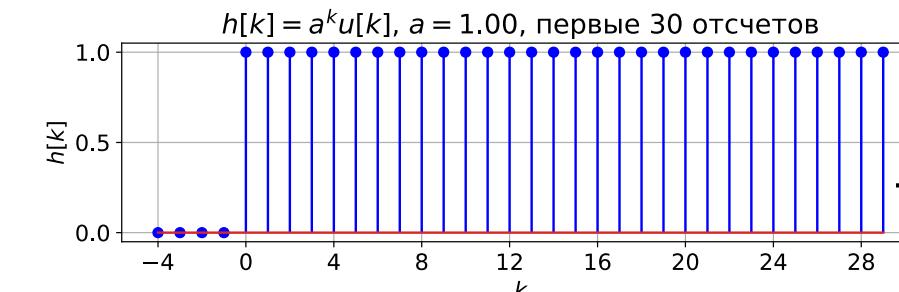
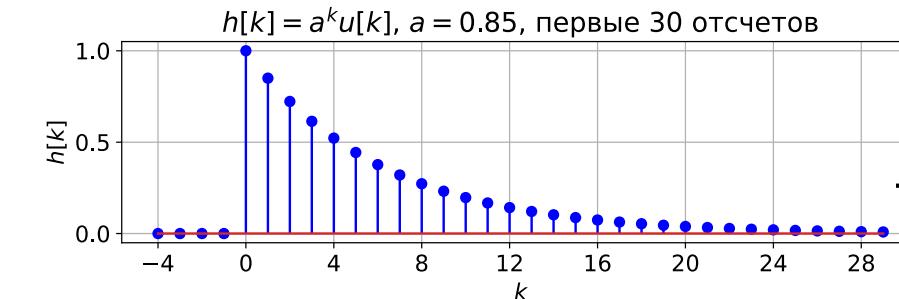
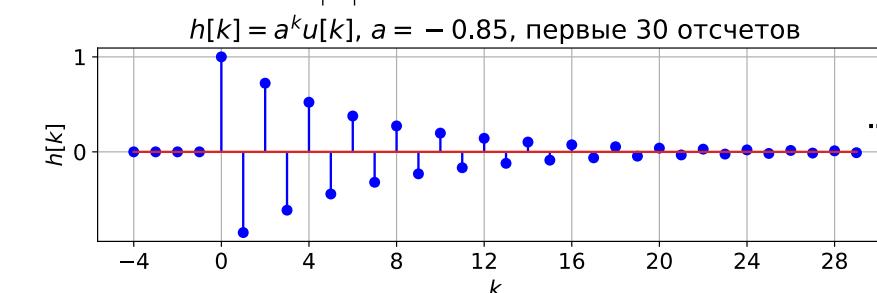
$$H(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j2\pi v k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j2\pi v k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(ae^{-j2\pi v} \right)^k.$$

Если $|a| < 1$, то

$$H(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(ae^{-j2\pi v} \right)^k = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi v}}.$$

При этом $|a| < 1$ является также критерием абсолютной суммируемости последовательности $h[k]$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \text{ если только } |a| < 1.$$



Сходимость ДВПФ

Сходимость в среднеквадратичном.

Некоторые последовательности не являются абсолютно суммируемыми, но обладают конечной энергией:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty.$$

Такие последовательности с суммируемым квадратом могут быть представлены в виде

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi v m)$$

если мы откажемся от равномерной сходимости ряда

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi v k}.$$

В этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном:

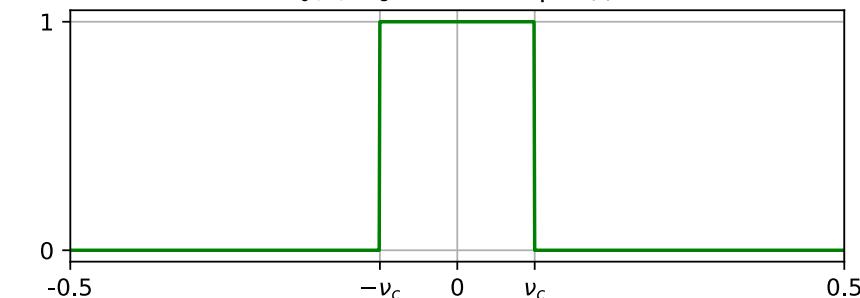
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(\theta) - \sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j2\pi v k} \right|^2 d\theta = 0.$$

Пример (цифровой ФНЧ).

Рассмотрим идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ), частотная характеристика которого по переменной v периодическая с периодом 1 и равна на промежутке $[-0.5; 0.5]$

$$H_0(v) = \begin{cases} 1, & |v| \leq v_c, \\ 0, & v_c < |v| \leq 0.5, \end{cases} \text{ при } |v| \leq 0.5.$$

$H_0(v), v_c = 0.10$, период 1



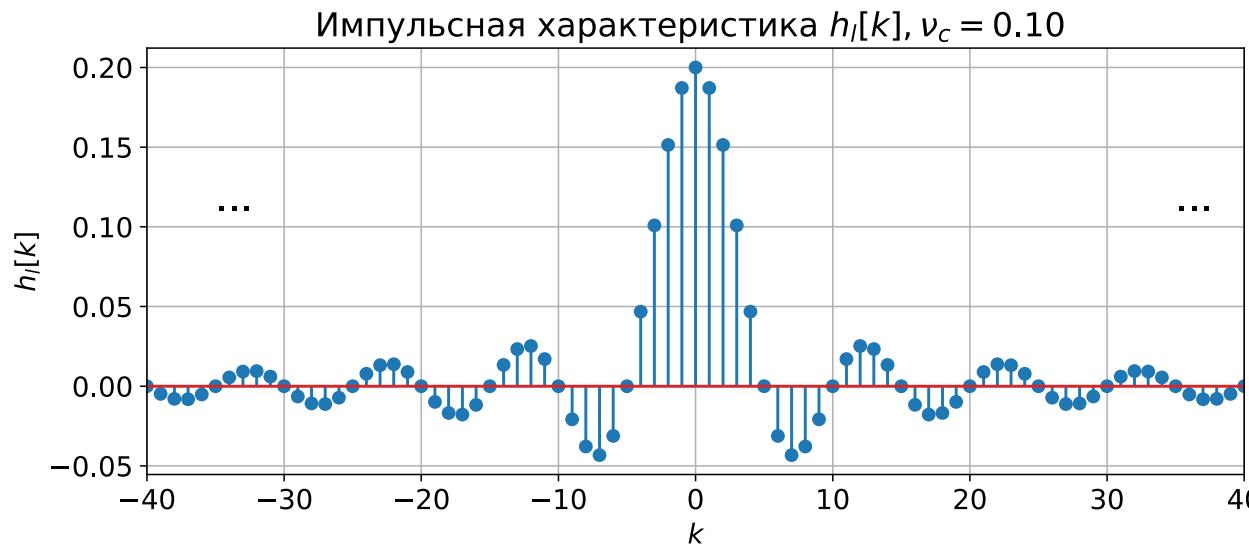
Частота v_c называется частотой среза, полоса частот $[-v_c, v_c]$ называется полосой пропускания. Это фильтр с нулевой фазочастотной характеристикой, т.е. $\phi_0(v) = 0$, а значит, он не вносит никаких задержек во входной сигнал.

Импульсная характеристика ИФНЧ находится обратным ДВПФ от $H_0(v)$

$$\begin{aligned} h_l[k] &= \int_{-1/2}^{1/2} H_0(v) e^{j2\pi v k} dv = \int_{-v_c}^{v_c} e^{j2\pi v k} dv = \int_{-v_c}^{v_c} \frac{e^{j2\pi v k} d(j2\pi v)}{j2\pi k} = \\ &= \frac{1}{\pi k} \frac{e^{j2\pi v_c k} - e^{-j2\pi v_c k}}{2j} = \frac{\sin(2\pi v_c k)}{\pi k}. \end{aligned}$$

Сходимость ДВПФ

$$h_l[k] = \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}.$$



Импульсная характеристика является реакцией цифрового фильтра на единичный импульс на входе. $h_l[k]$ не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, а значит идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем в системе реального времени.

Последовательность $h_l[k]$ не является абсолютно суммируемой, члены последовательности стремятся к нулю не быстрее, чем $1/k$.

Ряд

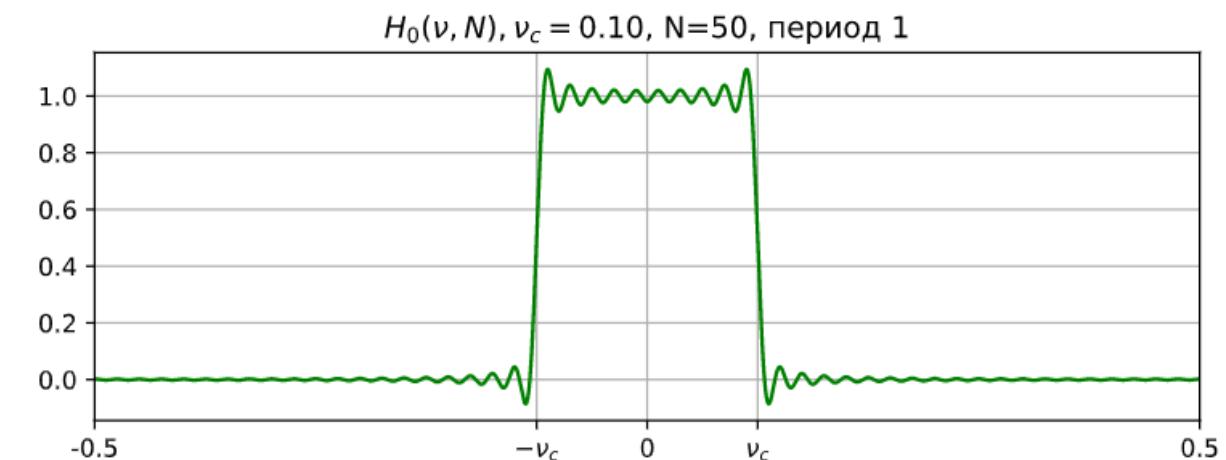
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k} e^{-j2\pi\nu k}$$

Сходится неравномерно на числовой оси. Частичная сумма этого ряда

$$H_0(\nu, N) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k} e^{-j2\pi\nu k}.$$

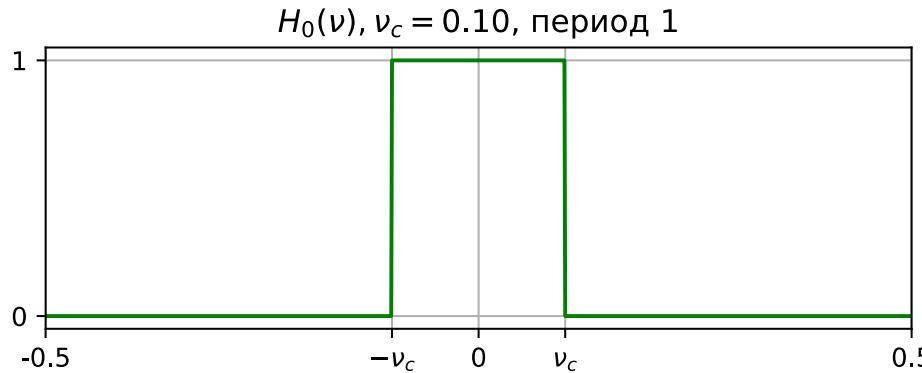
сходится к $H_0(\nu)$ в среднеквадратичном:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} |H_0(\nu) - H_0(\nu, N)|^2 d\nu = 0.$$



Сходимость ДВПФ

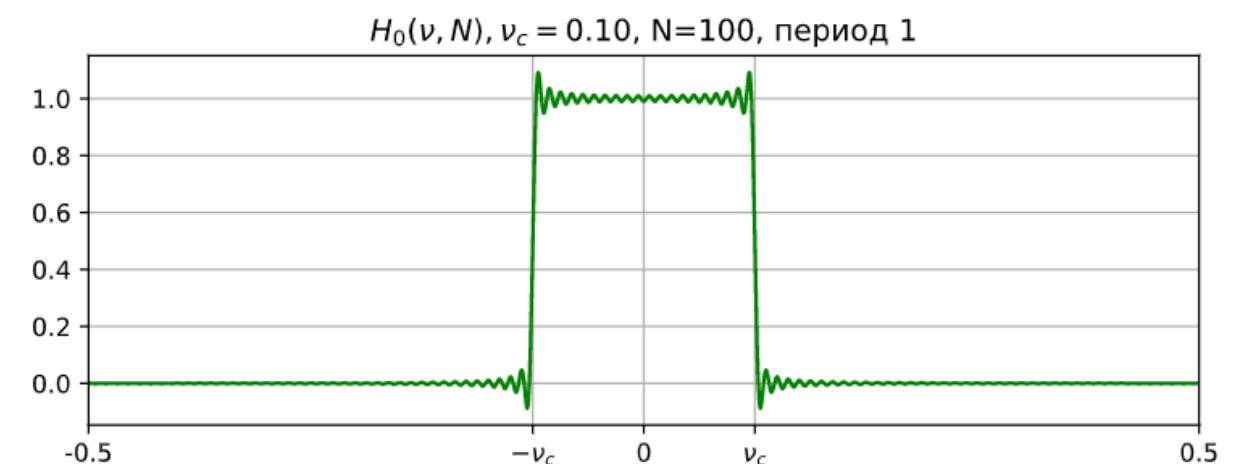
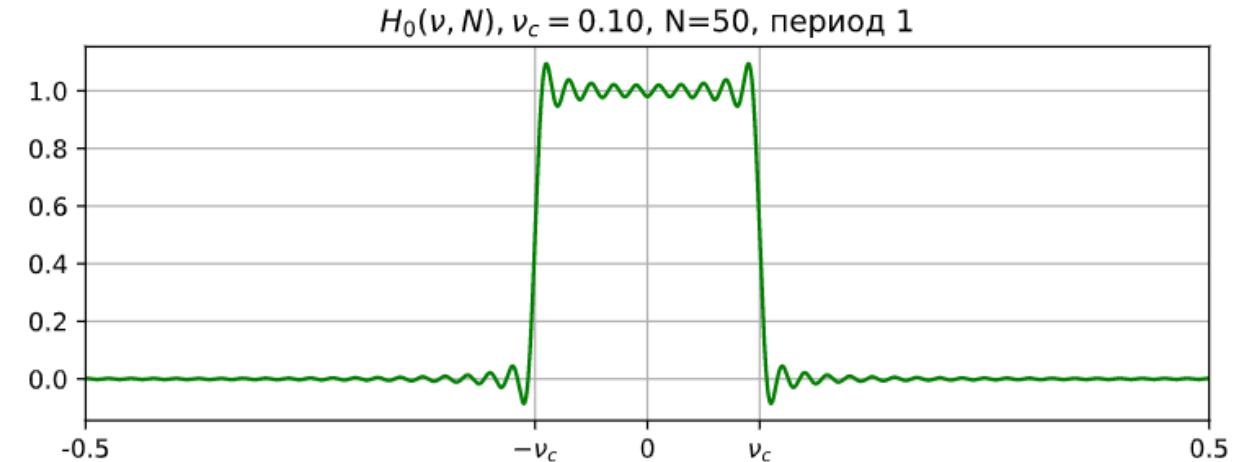
$$H_0(v) = \begin{cases} 1, & |v| \leq v_c, \\ 0, & v_c < |v| \leq 0.5, \end{cases} \text{ при } |v| \leq 0.5.$$



Даже достаточно больших N мы наблюдаем пульсации вблизи точек разрыва $H_0(v)$, причем они принципиально не устранимы с ростом N . Этот эффект называется явлением Гиббса.

Максимальная амплитуда пульсаций не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведённому через точку разрыва $v = \pm v_c$. Следовательно, ряд сходится к разрывной функции $H_0(\theta)$ неравномерно.

$$H_0(v, N) = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin(2\pi v_c k)}{\pi k} e^{-j2\pi v k}.$$



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Найти и изобразить по модулю для $N = 1$ и для $N = 2$ спектральную плотность группы из $(2N + 1)$ дельта-импульсов, симметрично расположенных относительно начала координат с шагом Δt .

Отметить величины главных максимумов в спектре и их частоты. Указать частоты, на которых спектральная плотность принимает нулевые значения.

№2. Прямоугольный импульс $x(t)$, $t \in [-\tau / 2, \tau / 2]$, высотой $E = 1$ В дискретизован с шагом Δt так, что получилось $2N + 1$ ненулевых отсчетов, симметрично расположенных относительно $t = 0$. Найти спектральную плотность дискретизированного сигнала и изобразить ее для случая $2N + 1 = 9$, отметив особые точки.

№3. Экспоненциальный импульс

$$x(t) = e^{-\alpha t}, t \geq 0, \alpha = 20 \text{ кГц}.$$

дискретизован с шагом $\Delta t = 10 \text{ мкс}$. Найти спектральную плотность дискретизированного сигнала.

№4. Определить спектр дискретизованного с шагом $\Delta t = \tau / 5$ симметричного треугольного импульса высотой E и длительностью τ .

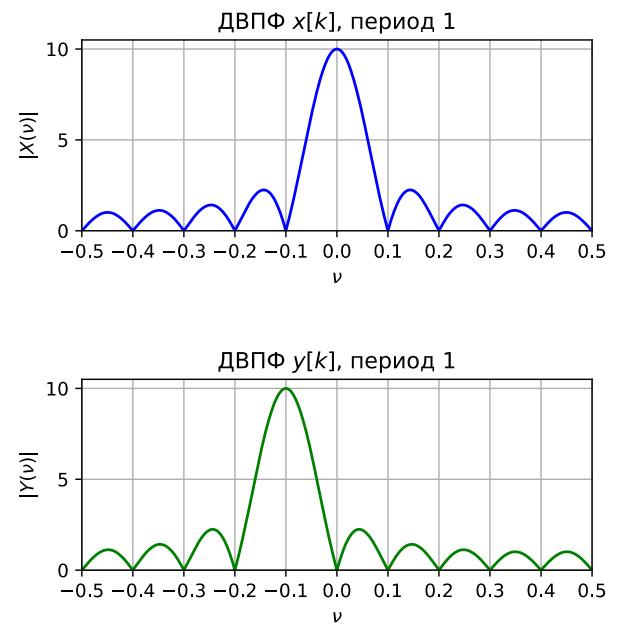
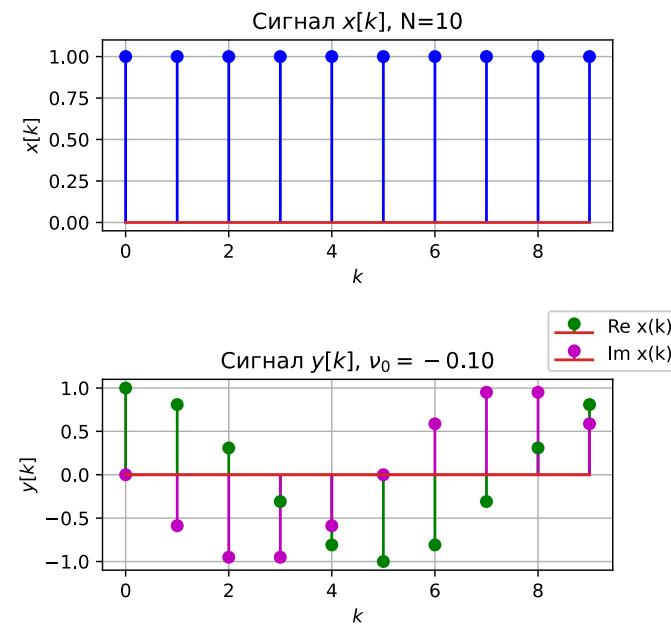
№5. Выбрать шаг дискретизации Δt симметричного треугольного импульса длительностью $\tau = 100 \text{ мкс}$. В качестве верхней граничной частоты спектра f_e принять значение частоты, при котором спектральная плотность обращается в нуль и при $f > f_e$ значения спектральной плотности не превышают 0,1 от максимального значения. Записать ряд Котельникова для этого случая.

Лекция 6 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

11 марта 2025 г.

4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема смещения, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.



Различные формы записи ДВПФ

Различные формы записи ДВПФ (повторение)

На прошлой лекции мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты $v = f / f_d = f \Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi v k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi v k) dv.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_d = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi v$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
f	Гц	$f_d = 1 / \Delta t$	$[-f_d / 2; f_d / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_d = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_d / 2; \omega_d / 2]$
$v = f / f_d$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_d$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Свойства ДВПФ

1) Линейность

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ и $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$, то

$\alpha x[k] + \beta y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \alpha X(v) + \beta Y(v)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

Обратное ДВПФ взвешенной суммы спектров

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f_{\Delta}} \int_{-f_{\Delta}/2}^{f_{\Delta}/2} (\alpha X(v) + \beta Y(v)) \exp(j2\pi fk\Delta t) df = \\ & = \frac{\alpha}{f_{\Delta}} \int_{-f_{\Delta}/2}^{f_{\Delta}/2} X(v) \exp(j2\pi fk\Delta t) df + \frac{\beta}{f_{\Delta}} \int_{-f_{\Delta}/2}^{f_{\Delta}/2} Y(v) \exp(j2\pi fk\Delta t) df = \\ & = \alpha x[k] + \beta y[k]. \end{aligned}$$

ДВПФ взвешенной суммы сигналов

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x[k] + \beta y[k]) \exp(-j2\pi fk\Delta t) = \\ & = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi fk\Delta t) + \beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \exp(-j2\pi fk\Delta t) = \\ & = \alpha X(v) + \beta Y(v). \end{aligned}$$

Теорема запаздывания

2) Теорема запаздывания

Если $x[k] \xrightarrow{DTFT} X(v)$, то $x[k-l] \xrightarrow{DTFT} X(v)\exp(-j2\pi vl)$.

Здесь $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l > 0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l < 0$.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(v)\exp(-j2\pi vl)\exp(j2\pi v k)dv =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(v)\exp(j2\pi v(k-l))dv = x[k-l].$$

Пример

$$\mathbf{1}[k] \xrightarrow{DTFT} 1$$

$$\mathbf{1}[k-1] \xrightarrow{DTFT} e^{-j2\pi v}$$

$$\mathbf{1}[k+1] \xrightarrow{DTFT} e^{j2\pi v}$$



Стоит отметить, что $|X(v)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков:

$$|X(v)\exp(-j2\pi vl)| = |X(v)| \cdot |\exp(-j2\pi vl)| = |X(v)|.$$

Это означает, что АЧХ сигнала не зависит от выбора нулевого отсчета времени ($k = 0$).

Теорема смещения

3) Теорема смещения

Если $x[k] \xrightarrow{DTFT} X(v)$, то $x[k]\exp(j2\pi v_0 k) \xrightarrow{DTFT} X(v - v_0)$.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi v_0 k)$, $v_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на v_0 вправо в случае $v_0 > 0$ и на $-v_0$ влево в случае $v_0 < 0$.

Пример.

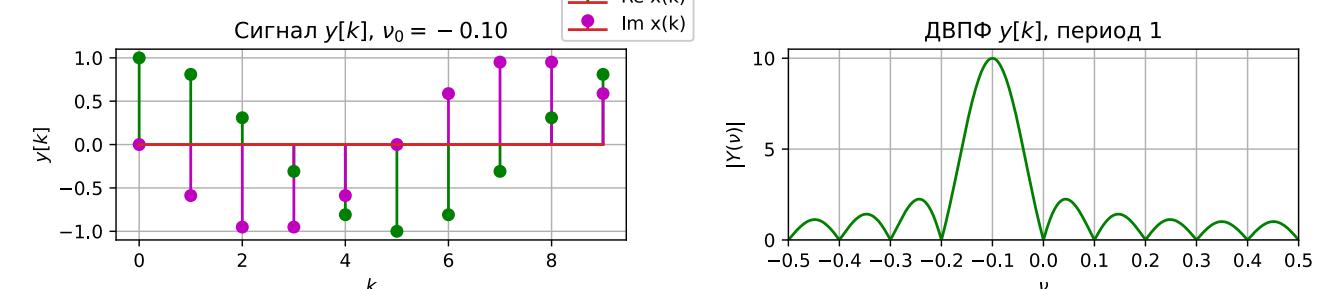
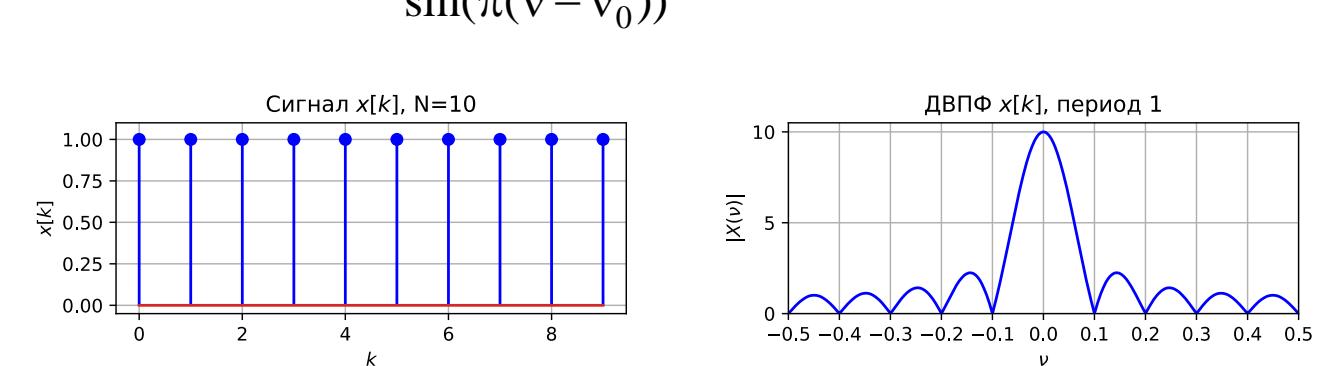
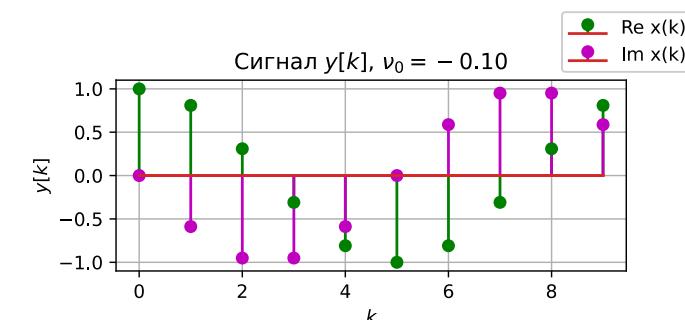
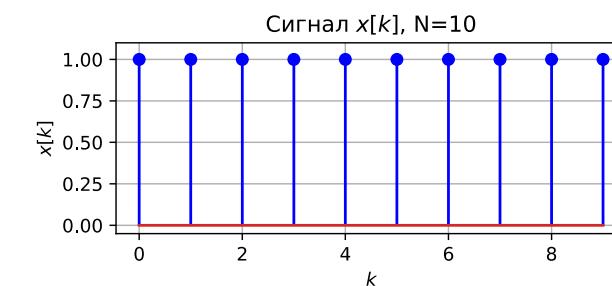
$$y[k] = x[k]\exp(j2\pi v_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$\begin{aligned} X(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi v k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi v N)}{1 - \exp(-j2\pi v)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2j}{2j} \frac{e^{-j\pi v N}}{e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi v N} - e^{-j\pi v N})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v).$$

$$|X(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$

$$Y(v) = X(v - v_0) = \frac{\sin(N\pi(v - v_0))}{\sin(\pi(v - v_0))} \exp(-j(N-1)\pi(v - v_0))$$



Теорема смещения

4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v)Y^*(v)dv$$

Пример.

Предположим, что имеется финитная последовательность

$x[k] = \{1; 1; 1\}$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$. При этом

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi v k} = x[-1]e^{j2\pi v} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi v} = \\ = \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2\cos(2\pi v).$$

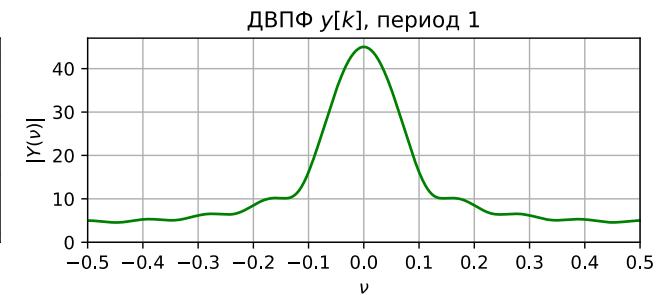
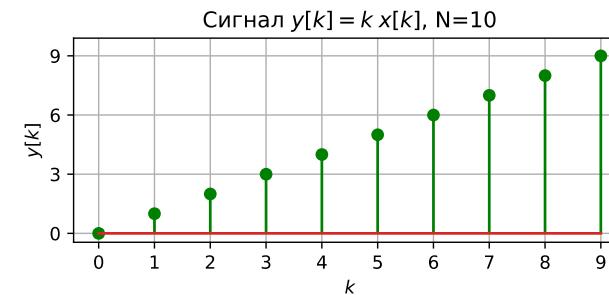
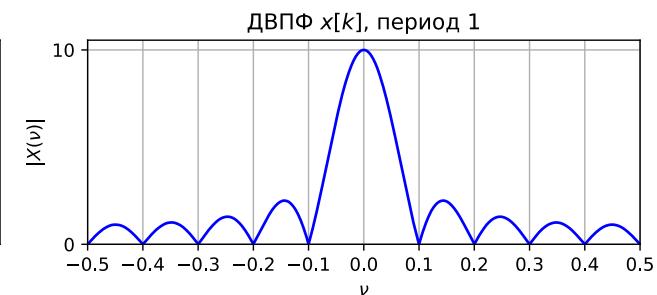
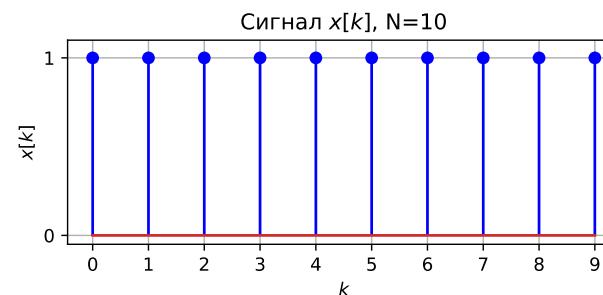
$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi v)|^2 dv = 3.$$

5) Умножение на k и дифференцирование по частоте

Если $x[k] \xrightarrow{DTFT} X(v)$, то $y[k] = kx[k] \xrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}$.

Пример.

$$x[k] = \sum_{m=0}^9 \mathbf{1}[k-m].$$



Теорема смещения

6) Изменение масштаба

Если $x[k] \xrightarrow{DTFT} X(v)$, то $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \xrightarrow{DTFT} X(vL)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi v k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi v k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\exp(-j2\pi(vL)m) = X(vL). \end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных

импульсов. $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$.

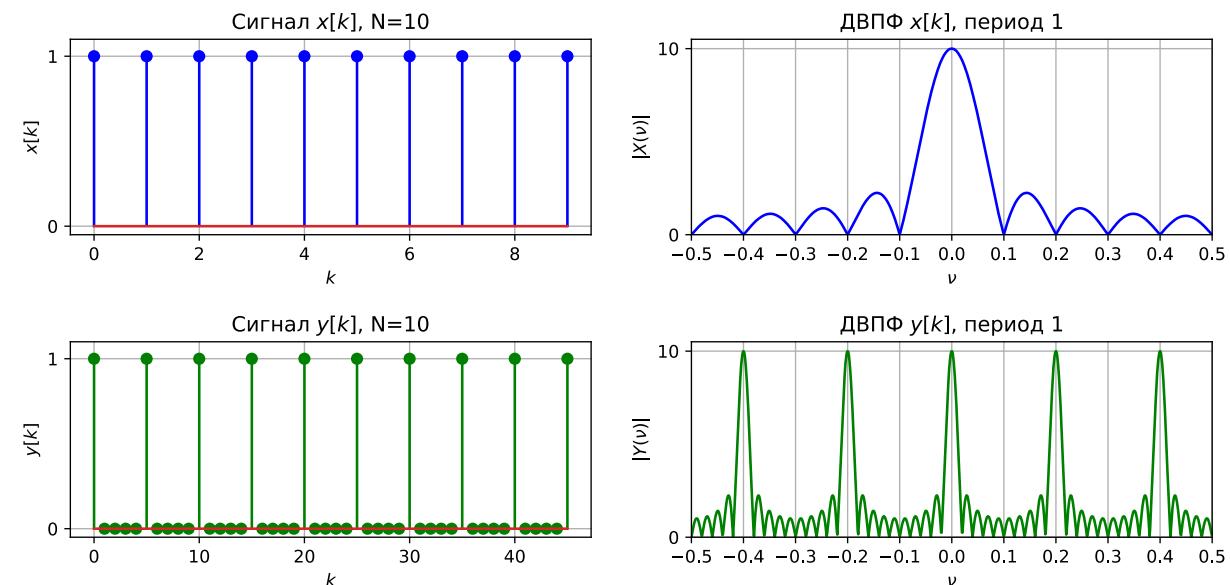
$$\begin{aligned} X(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi v k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi v N)}{1 - \exp(-j2\pi v)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-j\pi v N}}{e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi v N} - e^{-j\pi v N})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v).$$

$$|X(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$

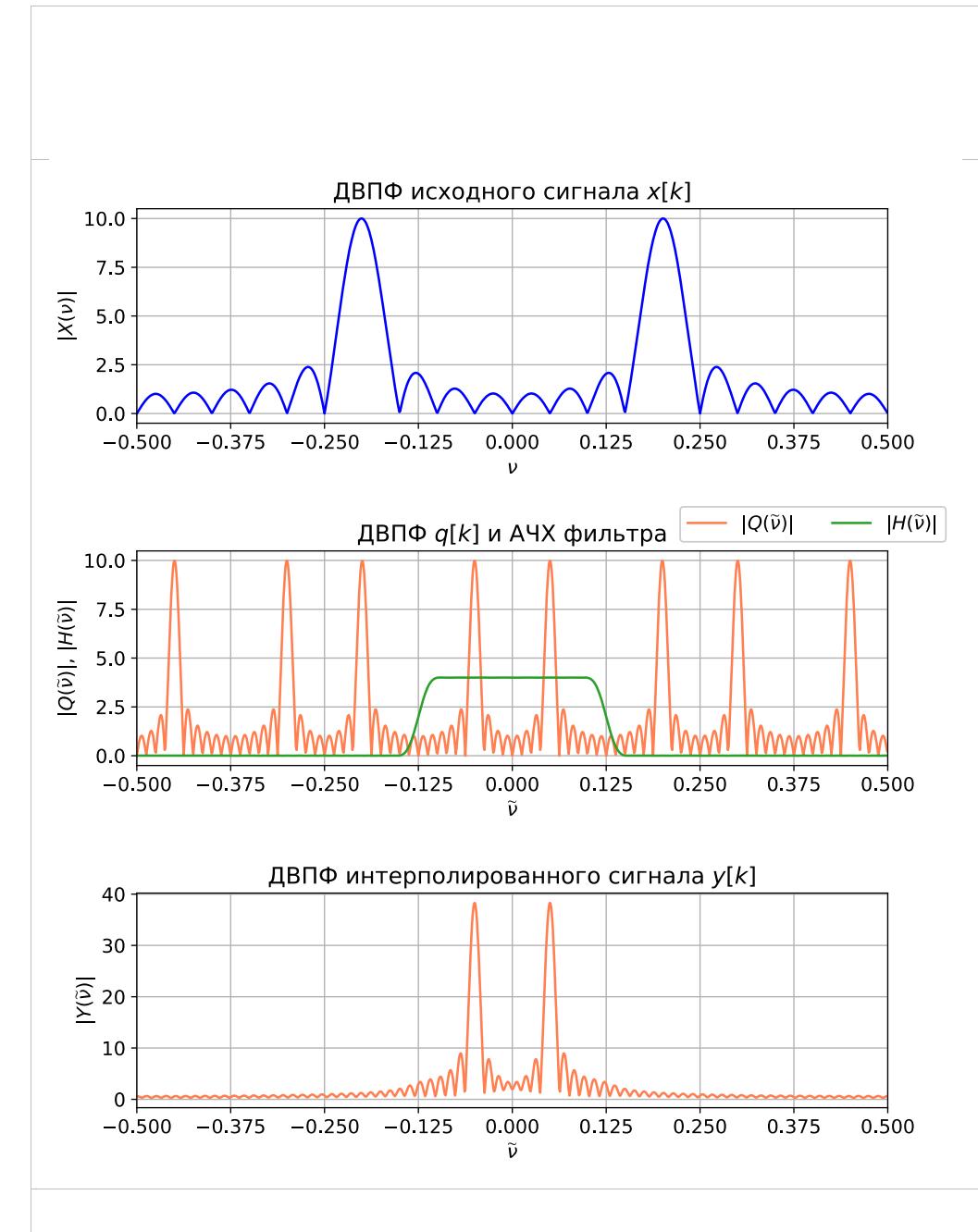
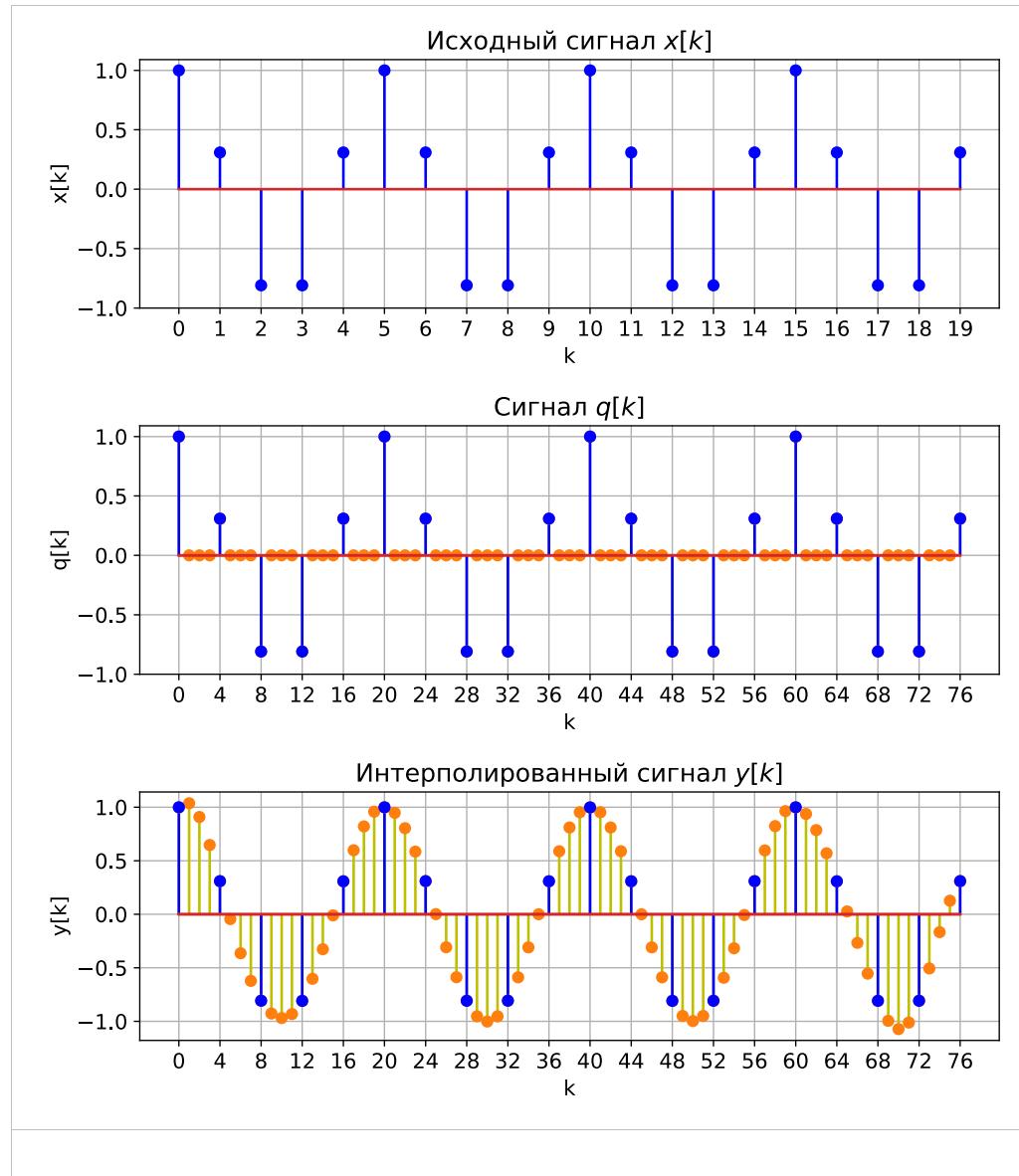
Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|X_L(v)| = \left| \frac{\sin(10\pi v L)}{\sin(\pi v L)} \right|.$$



Теорема смещения

P.S. Применение свойства изменения масштаба для однократной интерполяции с коэффициентом $L = 4$.

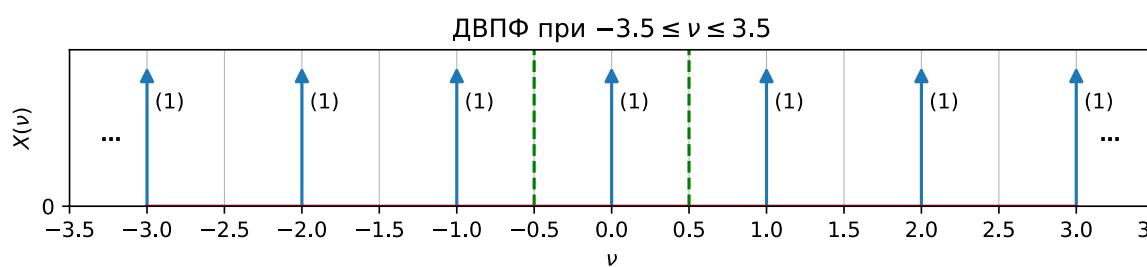
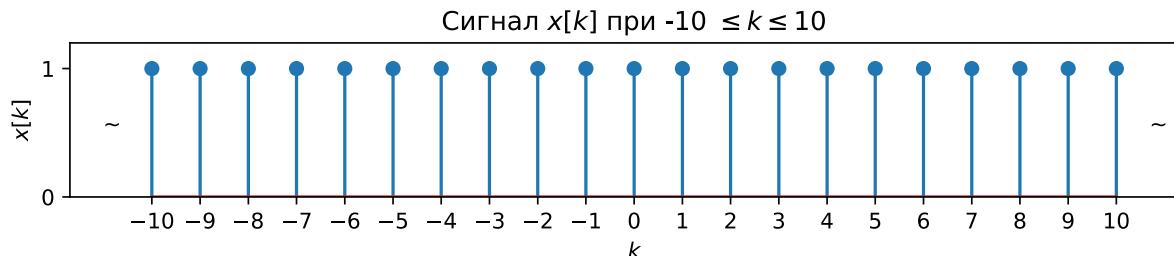


Теорема смещения

7) ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi v k) = \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi v k).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi v m).$$

Заметим, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi v m)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi v m),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi v m) dv = e^0 = 1.$$

Тогда получаем, что

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

Теорема смещения

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L .

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{n}{L})$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL]$.

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xrightarrow{DTFT} X(vL), \text{ из}$$

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - n)$ получаем

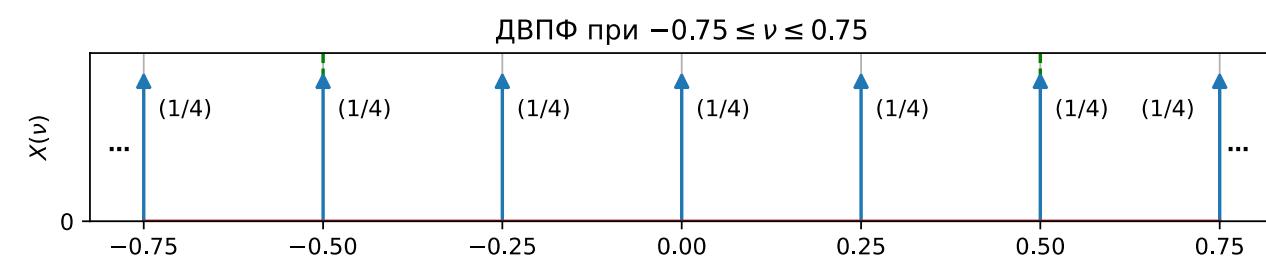
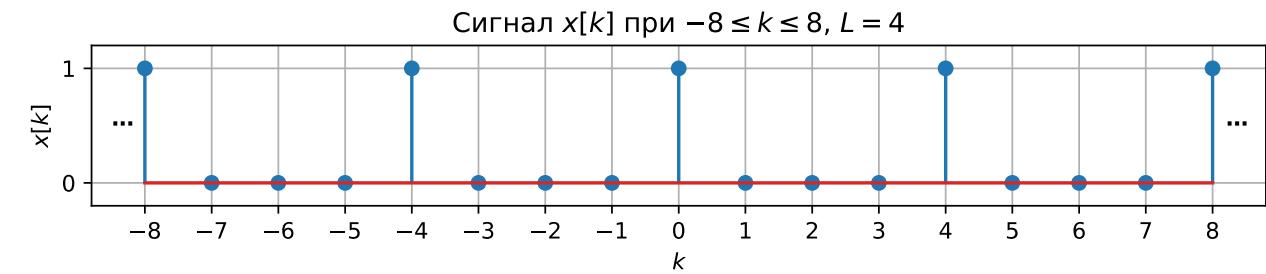
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(vL - n)$$

Воспользовавшись свойством δ -функции

$$\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(v - \frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$



Теорема смещения

в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

Докажем свойство.

1) По теореме смещения для ДВПФ если $x[k] \leftrightarrow X(\nu)$, то

$$x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0).$$

2) ДВПФ последовательности единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

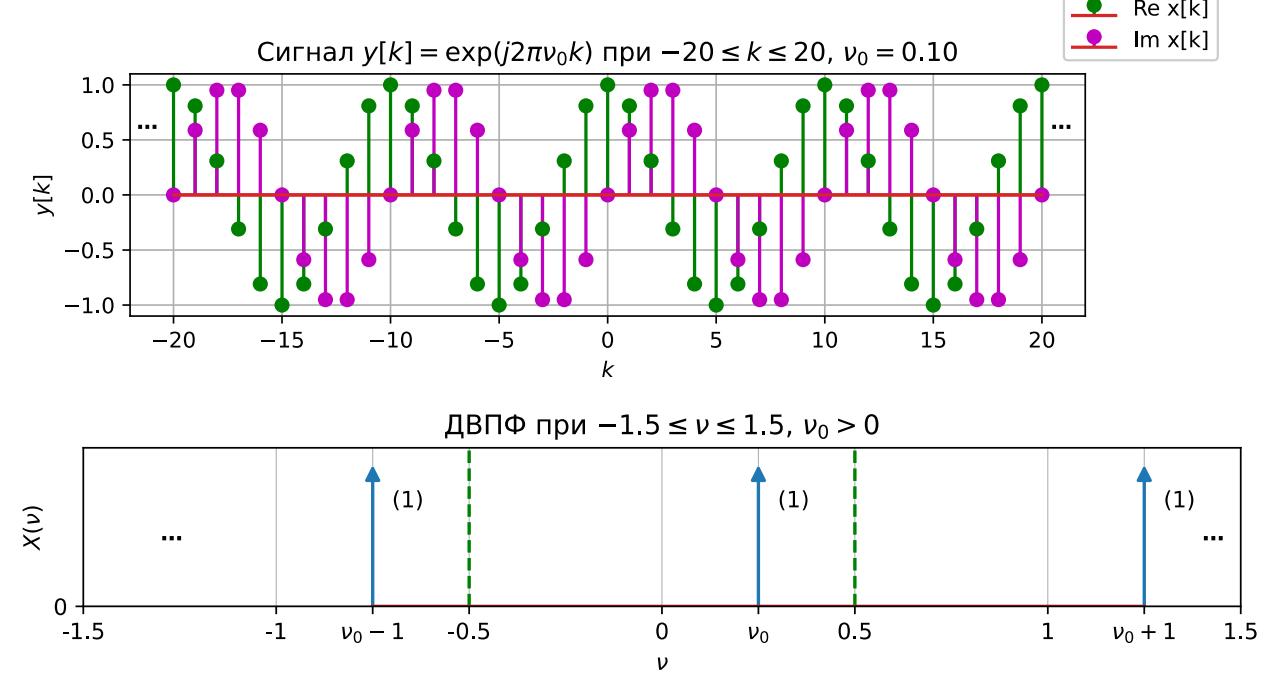
3) Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

Это эквивалентно

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$



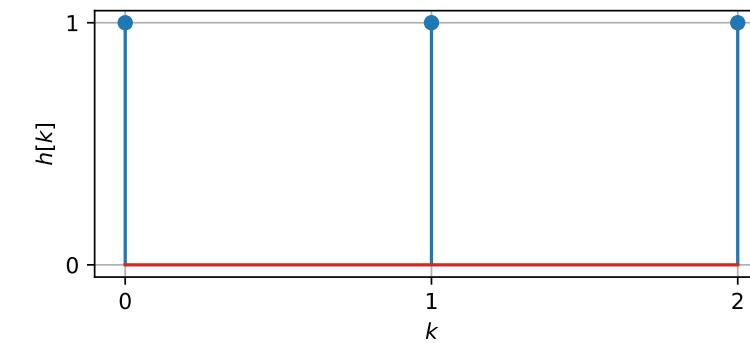
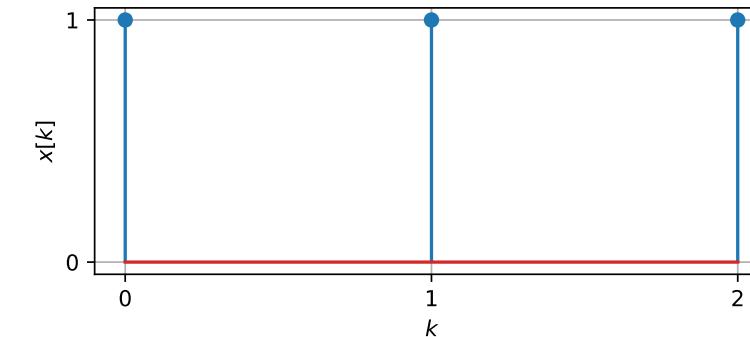
Теорема смещения

8) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ и $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)Y(v).$$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

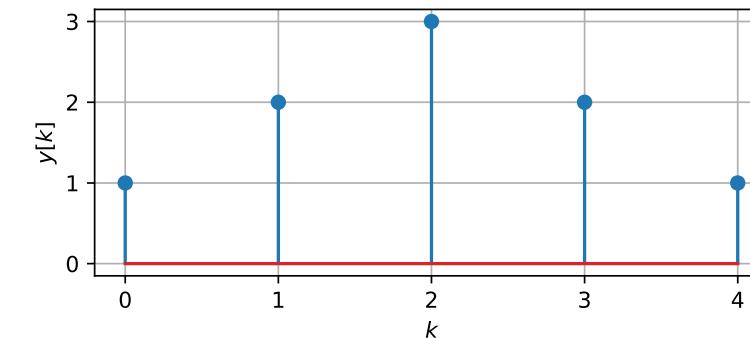


9) Теорема о свертке в частотной области (теорема о спектре произведения).

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ и $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$, то

$$x[k]y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v}.$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть $X(v)$ — ДВПФ спектр некоторой последовательности $x[k]$. Как нужно изменить последовательность $x[k]$, чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на $v_0 = 1/10$?

№2. Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x[k] = \{1; 5; 2; 4; 1; 1; 3\}.$$

$k=0$

Определите значения следующих выражений:

$$X(0); X(1/2); \int_{-1/2}^{1/2} X(v) dv; \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv; \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dX(v)}{dv} \right|_{DTFT}^2 dv.$$

№3. Докажите для ДВПФ свойство: если $x[k] \leftrightarrow X(v)$, то

$$kx[k] \xrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}.$$

Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности) $k^M x[k]$, где M — натуральное число.

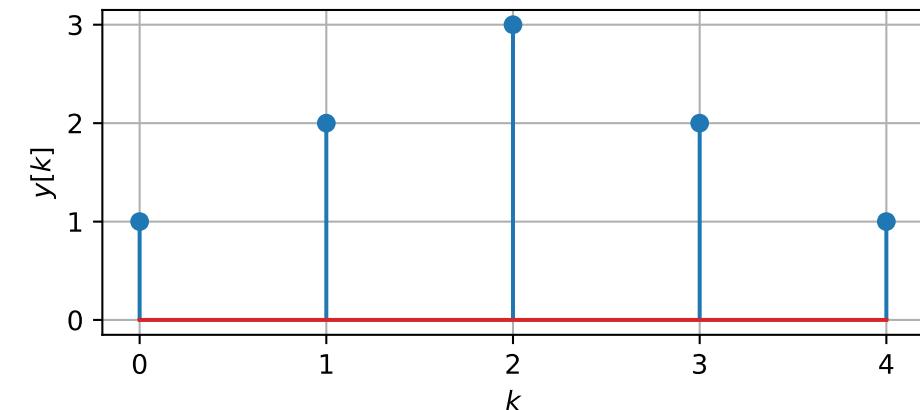
№4. Используя свойство

$$\exp(j2\pi v_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - v_0 - n).$$

получить ДВПФ последовательностей отсчетов $\sin(2\pi v_0 k)$ и $\cos(2\pi v_0 k)$, где $v_0 = 0,1$.

№5. Определить ДВПФ изображенного на рисунке отсчетов треугольного импульса $y[k]$, который может быть представлен как свертка двух одинаковых последовательностей вида

$$x[k] = \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1] + \mathbf{1}[k-2].$$

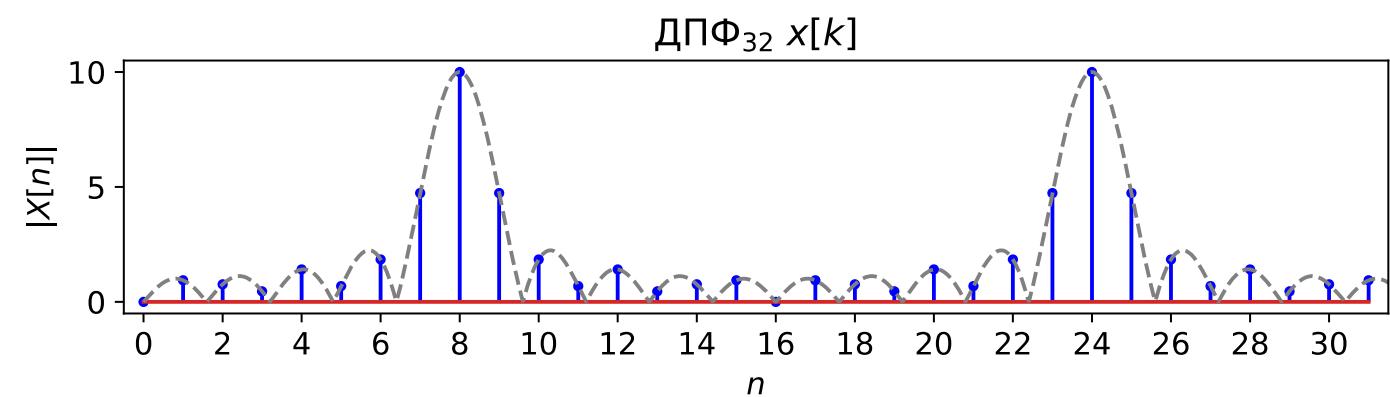


Лекция 7 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

18 марта 2025 г.

5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

формы записи, свойства, области применения
(периодические сигналы и сигналы конечной
длительности). Матричная форма ДПФ.



Две формы записи ДПФ.

Две формы записи ДПФ.

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала либо длиной в N отсчетов, либо периодическая с периодом N . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Примечание. Именно такая запись ДПФ используется в качестве основной в библиотеках Python SciPy, NumPy, в Octave и MATLAB.

Далее в лекции мы будем использовать такую запись ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Наряду с приведенной парой формул, существует запись ДПФ с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании:

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Далее в лекции мы будем использовать такую запись ДПФ для периодических последовательностей отсчетов. Для того, чтобы различать две записи, будем использовать обозначения $\tilde{X}[n]$ и $X[n]$. Очевидно, что

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X[n].$$

Две формы записи ДПФ.

Пример. Пусть $x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16}k\right)$.

Вычислить 16-точечное ДПФ этой последовательности $\tilde{X}[n]$ по формуле с нормирующим множителем $1/N$ ($N=16$) в прямом преобразовании.

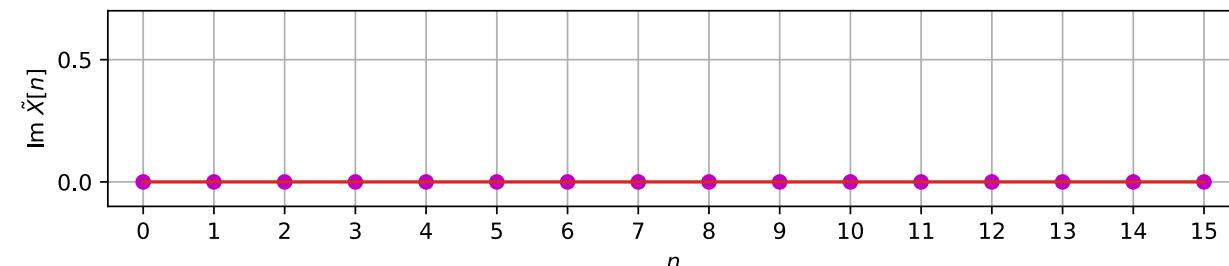
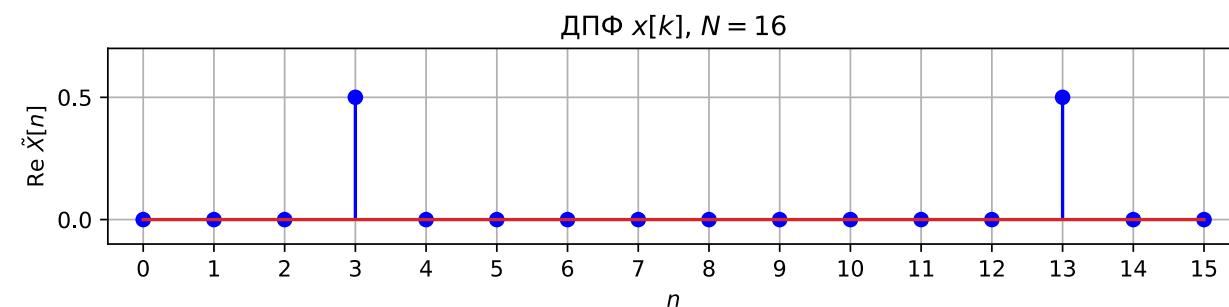
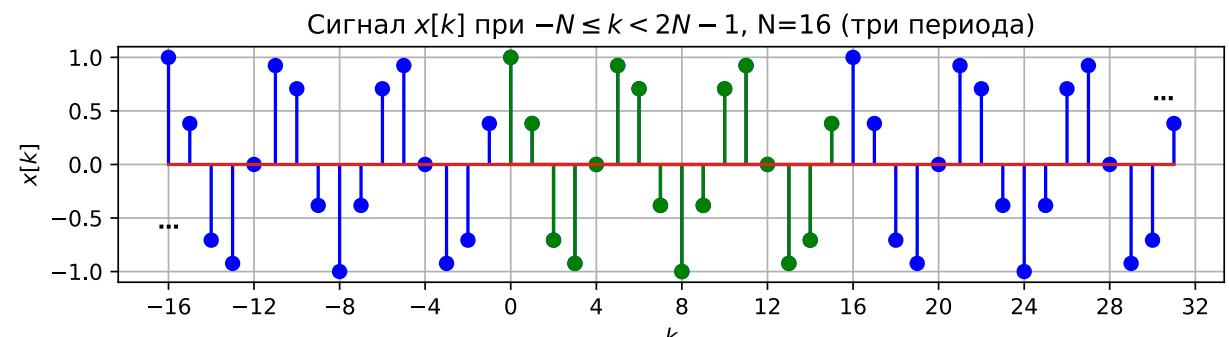
Решение.

$$\begin{aligned}\tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{3}{16}k\right) \exp\left(-j2\pi \frac{n}{N}k\right) = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{15} \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(j2\pi k\left(\frac{3}{16} - \frac{n}{16}\right)\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-j2\pi k\left(\frac{3}{16} + \frac{n}{16}\right)\right) \right\}\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно сумму вида $\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right)$ при условии, что m — целое число, не равное нулю и не кратное 16. В таком случае по формуле суммы геометрической прогрессии

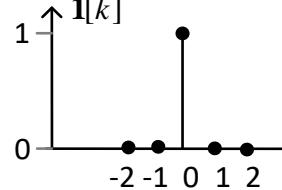
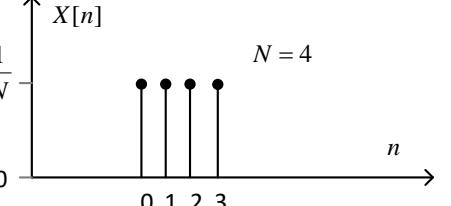
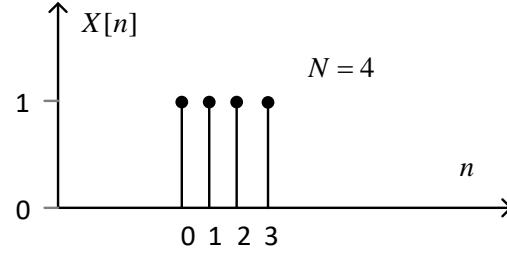
$$\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right) = \frac{1 - \exp(j2\pi m)}{1 - \exp(j2\pi m \frac{1}{16})} = 0.$$

В случае когда m либо равно нулю, либо кратно 16, будет выполняться $\sum_{k=0}^{15} \exp\left(j2\pi k \frac{m}{16}\right) = \sum_{k=0}^{15} e^0 = 16$. В итоге на периоде есть только два ненулевых отсчета ДПФ — $\tilde{X}[3]=1/2$ и $\tilde{X}[13]=1/2$.



Свойства ДПФ

Далее запись вида $x[k]_N$ обозначает $x[k \bmod N]$. Символ $*$ обозначает здесь комплексное сопряжение.

N -точечные ДПФ $\tilde{X}[n]$ и $\tilde{Y}[n]$ (с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании)	N -точечное ДПФ $X[n]$ и $Y[n]$ (без нормирующего множителя $1/N$ в прямом преобразовании)	
$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$ $x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$	$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$ $x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$	
Сигналы $x[k]$ и $y[k]$	N -точечные ДПФ $\tilde{X}[n]$ и $\tilde{Y}[n]$ (с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании)	N -точечное ДПФ $X[n]$ и $Y[n]$ (без нормирующего множителя $1/N$ в прямом преобразовании)
$\alpha x[k] + \beta y[k], \alpha, \beta \in \mathbb{C}$	$\alpha \tilde{X}[n] + \beta \tilde{Y}[n]$	$\alpha X[n] + \beta Y[n]$
Линейность	Единичный импульс	
$x[k] = \mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$ 	$\tilde{X}[n] \equiv \frac{1}{N}$ 	$X[n] \equiv 1$ 

Свойства ДПФ

Сигналы $x[k]$ и $y[k]$	N -точечные ДПФ $\tilde{X}[n]$ и $\tilde{Y}[n]$	N -точечное ДПФ $X[n]$ и $Y[n]$
Теорема запаздывания		
$x[k-m]_N$	$\tilde{X}[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right)$	$X[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right)$
Теорема смещения		
$x[k]\exp\left(\pm j\frac{2\pi}{N}n_0k\right), n_0 \in \mathbb{Z}$	$\tilde{X}[n \mp n_0]_N$	$X[n \mp n_0]_N$
Симметрия		
$x^*[k]$	$\tilde{X}^*[N-n]_N,$	$X^*[N-n]_N,$
$x[N-k]_N$	$\tilde{X}[N-n]_N$	$X[N-n]_N$
$x[k] = x^*[k]$ действительная последовательность	$\tilde{X}[n] = \tilde{X}^*[N-n]_N$	$X[n] = X^*[N-n]_N$
$x[k] = -x^*[k]$ мнимая последовательность	$\tilde{X}[n] = -\tilde{X}^*[N-n]_N$	$X[n] = -X^*[N-n]_N$
Теорема о свертке (во временной области)		
$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[k-m]_N$	$N\tilde{X}[n]\tilde{Y}[n]$	$X[n]Y[n]$
Произведение сигналов (теорема о свертке в частотной области)		
$x[k]y[k]$	$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}[m]\tilde{Y}[n-m]_N$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]Y[n-m]_N$

Свойства ДПФ

Равенство Парсеваля		
$x[k], y[k]$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y^*[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n]\tilde{Y}^*[n],$ $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] ^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] ^2.$	$\sum_{k=0}^{N-1} x[k]y^*[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]Y^*[n],$ $\sum_{k=0}^{N-1} x[k] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] ^2.$

Пример. Циклический сдвиг последовательности.

Пусть $X[n]$ — восьмиточечное ДПФ последовательности

$$x[k] = \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8\}$$

изображенной на графике. Изобразить последовательность $y[k]$, ДПФ которой имеет вид

$$Y[n] = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}mn\right)X[n]$$

для $m = 3, m = 4, m = 5$.

Решение.

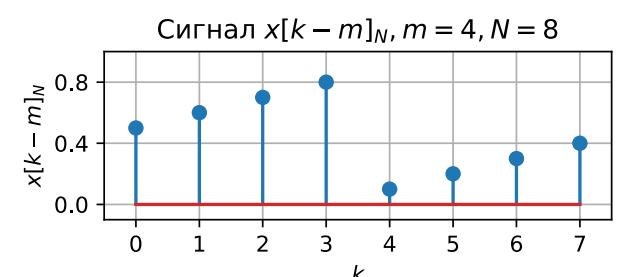
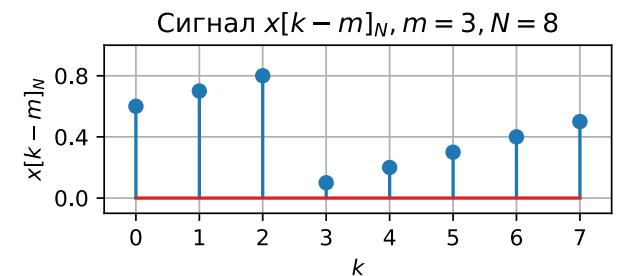
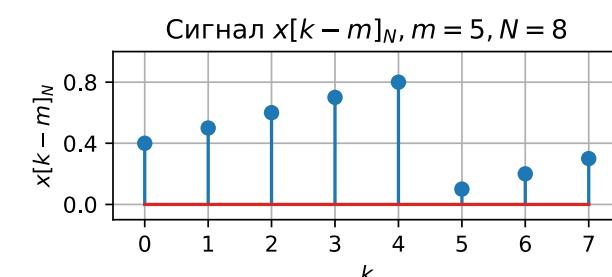
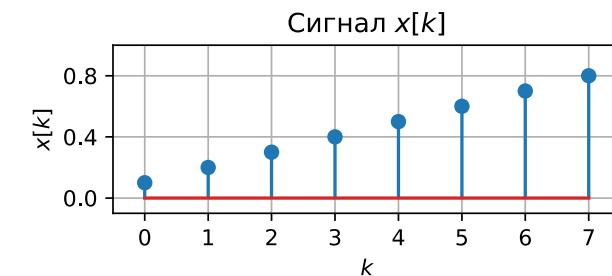
Воспользуемся теоремой запаздывания для ДПФ:

Если $x[k] \xrightarrow{DFT} X[n]$, то

$$x[k-m]_N \xrightarrow{DFT} X[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right).$$

Тогда последовательность $y[k]$ получается путем циклического сдвига $x[k]$ на m отсчетов вправо (для положительных m):

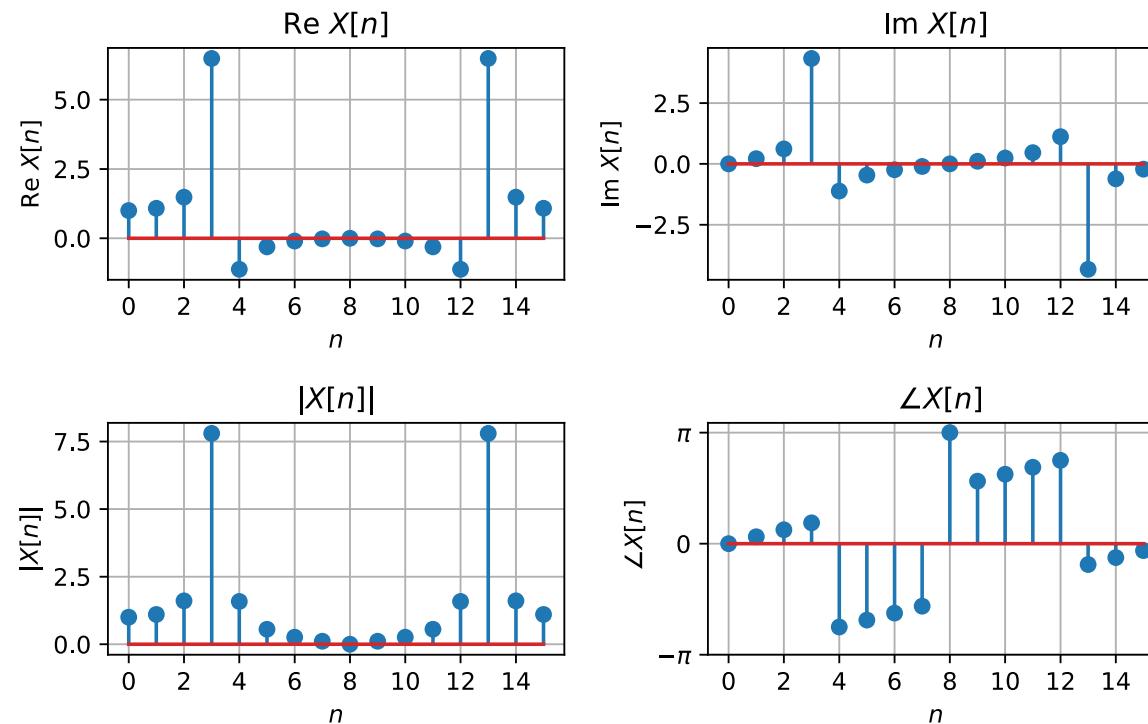
$$y[k] = x[k-m]_N = x[(k-m) \bmod N].$$



Дискретные экспоненциальные функции

Пример. Симметрия ДПФ.

Пусть дана последовательность $x[k] = \cos(2\pi k 0,2)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 15$. Эта последовательность не является периодом для $\cos(2\pi k 0,2)$. Частота косинусоиды $v_{\cos} = 0,2$ не совпадает с частотами отсчетов ДПФ $v_n = n/N$, $N=16$. Максимально близкий отсчет к частоте $v_{\cos} = 0,2$ — это $n = 3$ ($v_3 = 0,1875$). ДПФ этой последовательности представлено на рисунке.



Для действительной последовательности $x[k] = x^*[k]$ DFT $x[k] \leftrightarrow X^*[N-n]_N$. Это означает, что $X[n] = X^*[N-n]_N$. Например, $X[3] = X^*[13]$. В данном случае мы наблюдаем симметрию действительной части и модуля и антисимметрию мнимой части и фазы коэффициентов ДПФ относительно отсчета с номером $n = N/2 = 8$.

Дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ)

Функции ДЭФ определяются следующим образом:

$$\phi_n[k] = W_N^{nk} = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Здесь n и k — целые числа, $n, k = 0, 1, \dots, N-1$, т. е. число функций в системе равно числу отсчетов каждой функции. Система ДЭФ является ортонормированной и полной в пространстве \mathbb{L}_2^N .

Основные свойства ДЭФ.

1. ДЭФ являются комплекснозначными функциями.
2. Матрица $\|W_N^{nk}\|$ является симметричной.

Дискретные экспоненциальные функции

3. Система ДЭФ периодична с периодом N по обеим переменным.

4. Система ДЭФ ортогональна:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \phi_n[k] \phi_m^*[k] = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} W_N^{-mk} = \begin{cases} N, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

5. Система ДЭФ мультипликативная:

$$W_N^{nk} W_N^{mk} = W_N^{lk},$$

где $l = (n+m)_{\text{mod } N}$, т. е. индексы суммируются по модулю N .

6. Ряд Фурье по этой системе

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk},$$

где коэффициенты Фурье

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{-nk}.$$

Эти два соотношения определяют пару (прямое и обратное) дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Пример. Вычислить 16-точечное ДПФ для периодической последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

Обратное ДПФ:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi k \frac{n}{16}) = \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{3}{16}} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k \frac{3}{16}}$$

$$x[k] = \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{3}{16}} + \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{13}{16}}$$

Отсюда

$$\tilde{X}[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \pm 3 + 16m, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n \neq \pm 3 + 16m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значения ДПФ на основном периоде ($n = 0, 1, \dots, N-1$)

n	3, 13	0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15
$\tilde{X}[n]$	0,5	0

Матричная форма ДПФ

Матричная форма ДПФ

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $[W]_N$ порядка N с элементами

$$W_N^{nk} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right), \quad n, k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\},$$

так, что номер строки совпадает с номером дискретной экспоненциальной функции, а номер столбца совпадает с номером отсчета функций. При этом произведение $n \cdot k$ обычно берется по модулю N , т. е.

$$W_N^{nk} = W_N^{nk \bmod N}.$$

Например, $nk = 49$, тогда $nk \bmod 8 = 1$. Эти свойства матрицы ДПФ следуют из N -периодичности функции W_N^{nk} по обоим аргументам. Для случая $N = 8$ матрица ДПФ имеет вид

$$[W]_8 = \begin{array}{cccccccc} k \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ n \downarrow & 0 & \begin{matrix} W_8^0 & W_8^0 \end{matrix} \\ 1 & W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ 2 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ 3 & W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ 4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ 5 & W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ 6 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ 7 & W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{array}$$

Эта же матрица с минимальными фазами будет

$$[W]_8 = \begin{array}{cccccccc} k \rightarrow 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ n \downarrow 0 & \begin{matrix} W_8^0 & W_8^0 \end{matrix} \\ 1 & W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ 2 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ 3 & W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ 4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ 5 & W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ 6 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ 7 & W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{array}$$

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Матричная форма ДПФ

$$[W]_8 = \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ k \rightarrow & 0 & W_8^0 \\ n \downarrow & 0 & W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ & 1 & W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ & 2 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ & 3 & W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ & 4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ & 5 & W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ & 6 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ & 7 & W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix}$$

Через множители W_N^{nk} пара ДПФ записывается в виде

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk},$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-nk}.$$

Пусть \vec{X} и \vec{x} – N-мерные вектор-столбцы:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Тогда в матричной форме пара ДПФ (с нормирующим множителем в обратном преобразовании) имеет вид

$$\vec{X} = [W]_N \vec{x} \text{ – прямое ДПФ,}$$

$$\vec{x} = [W_N]^{-1} \vec{X} \text{ – обратное ДПФ.}$$

Чтобы найти обратную матрицу $[W_N]^{-1}$, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{N} [W_N]^* [W_N] = I_N,$$

где I_N – единичная матрица размером $N \times N$. В итоге

$$\text{получаем, что } [W_N]^{-1} = \frac{1}{N} [W_N]^*,$$

т.е. для нахождения обратной матрицы достаточно выполнить комплексное сопряжение для $[W_N]$ и нормировать результат на N .

Приложение

Приложение.

В таблице ниже приведены стандартные функции для работы с ДПФ и БПФ в MATLAB и библиотеках Python.

	Python (SciPy, NumPy)	MATLAB
Матрица $[W]_N$ из матричной формы ДПФ	<code>scipy.linalg.dft(n, scale)</code>	<code>dftmtx(n)</code>
Вычисление прямого ДПФ по алгоритму БПФ	<code>scipy.fft.fft(x)</code> <code>np.fft.fft(x)</code>	<code>fft(x)</code>
Вычисление обратного ДПФ по алгоритму БПФ	<code>scipy.fft.ifft(x)</code> <code>np.fft.ifft(x)</code>	<code>ifft(x)</code>
Сдвиг коэффициентов ДПФ на половину периода	<code>scipy.fft.fftshift</code> <code>np.fft.fftshift</code>	<code>fftshift</code>

Вычисление следующего значения N , для которого вычисления по алгоритму БПФ эффективны	<code>scipy.fft.next_fast_len</code>	нет аналога
--	--------------------------------------	-------------

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Найти ДПФ₁₆ 16 - точечных последовательностей

а) $x[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m],$

б) $y_1[k] = x[k]\cos(2\pi k 5/16),$

в) $y_2[k] = x[k]\sin(2\pi k 5/16).$

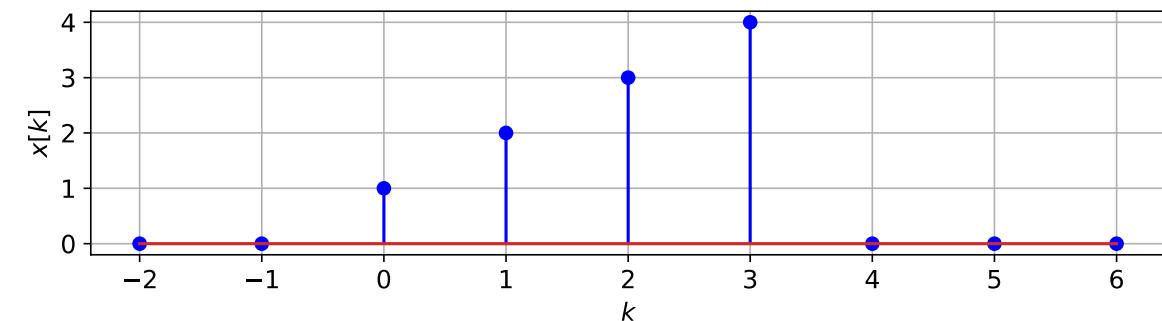
Для всех пунктов задания изобразить график
действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ.

№2. Записать матрицу, задающую ДПФ преобразование над
последовательностью (вектором) длины 4. Указать матрицу,
задающую обратное преобразование. В ответе значения
всех элементов матрицы должны быть представлены как
комплексные числа.

№3. Определить для $N=16$ ДПФ₁₆ $W_B[n]$ и ДВПФ $W_B(v)$ окна
Блэкмана $w_B[k]$. Построить график для $|W_B[n]|$.

$$w_B[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos\left(2\pi\frac{1}{N}k\right) + 0,08\cos\left(2\pi\frac{2}{N}k\right), \\ \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, \quad \text{при других } k. \end{cases}$$

№4. Пусть $X[n]$ - четырехточечное ДПФ последовательности
 $x[k]$, изображенной на графике.



Изобразить последовательность $y[k]$, ДПФ которой имеет вид

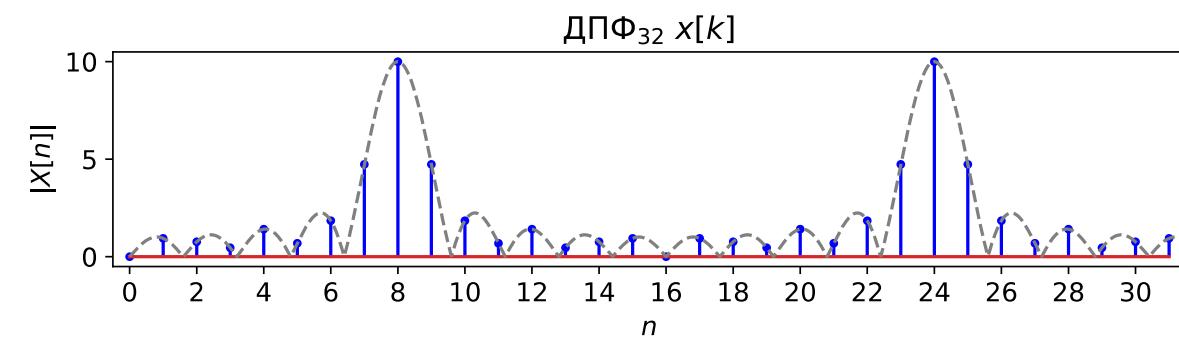
$$Y[n] = \exp\left(-j2\pi\frac{1}{4}n\right)X[n].$$

Лекция 8 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

25 марта 2025 г.

6. Связь между ДПФ и ДВПФ

- ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.
 - Форма записи ДПФ
 - Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $v = n / N$.
 - Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)
 - Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $v \neq n / N$
- ДПФ периодических последовательностей
 - Форма записи ДПФ
 - Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.
- Частотная ось ДПФ



ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала длиной в N отсчетов $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Функцию $X[n]$ обычно рассматривают только для значений $n = 0, 1, \dots, N - 1$, при этом она является периодической с периодом N , $n \in \mathbb{Z}$.

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать $x[k]$ для значений $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Если длительность не ограничить, то будет

восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением $x[k]$.

Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $v = n / N$.

Рассмотрим N -точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi v k).$$

ДПФ для последовательности $x[k]$, имеет следующий вид:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{n}{N} k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках $v = n / N$ получаем равенство

$$X(v)|_{v=n/N} = X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(v)$, взятым в точках $v = n / N$ (с шагом $\Delta v = 1 / N$).

Пример.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Рассмотрим для $N = 20$ последовательность отсчетов

$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{4,5}{20}k\right) + \sin\left(2\pi \frac{7,5}{20}k\right), & 0 \leq k < N, \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$

ДПФ и ДВПФ этой последовательности для частот $\nu \in [0;1]$ изображены по модулю на рисунке. Заметим, что в точках $\nu = n/20$

$$X(\nu)|_{\nu=n/20} = X[n],$$

т.е. значения ДВПФ и ДПФ (с точностью до использованной нормировки) совпадают. Расстояние между соседними отсчетами по оси частот $\Delta\nu = 1/N = 1/20 = 0,05$.

Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ (1 бин соответствует $1/N$):

$$\nu_1 = \frac{4,5}{20} = 0,225, \nu_2 = \frac{7,5}{20} = 0,375.$$

В ДВПФ вблизи¹ этих частот мы наблюдаем максимумы.

Вопрос. Как улучшить качество визуализации этих максимумов с помощью ДПФ?



¹ Максимумы могут быть смещены из-за влияния соседних спектральных компонент.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим M – точечную последовательность. Добавим в исходную последовательность $x[k]$ $M - N$ отсчетов, равных нулю:

$$y[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & N \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ M – точечное и определяется формулой

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right).$$

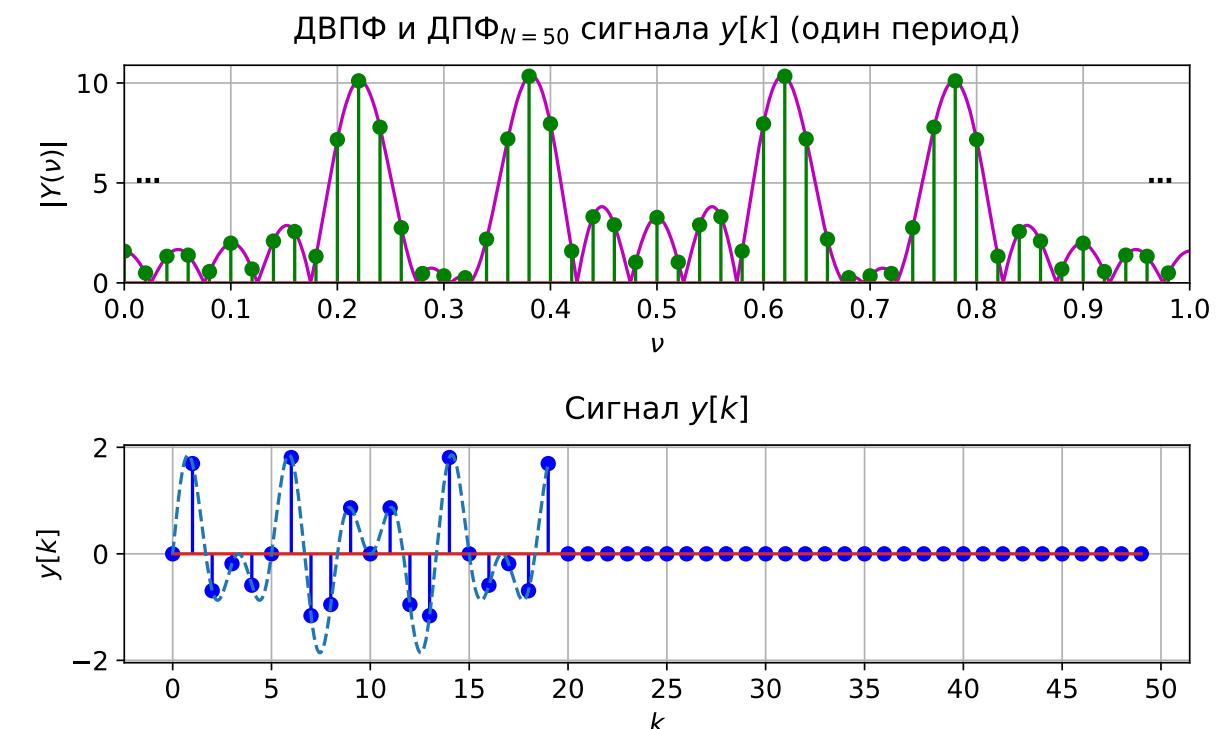
При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(v) = \sum_{k=0}^{M-1} x[k] \exp(-j 2\pi v k) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j 2\pi v k).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек $v_n = n / M$ на одном периоде больше, чем $v_n = n / N$.

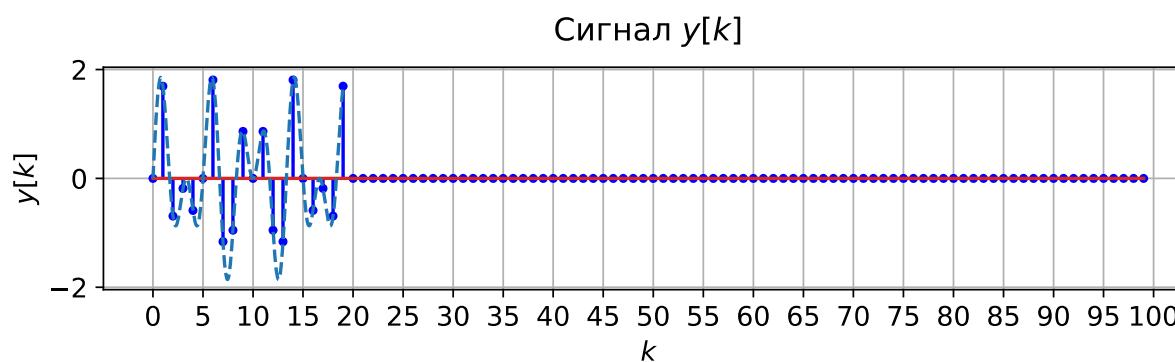
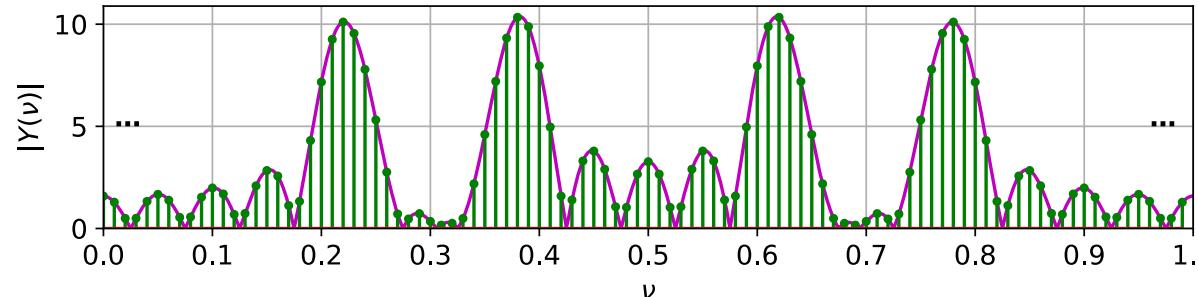
Возврат к примеру.

Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами до длины 50. Отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше, расстояние между ними $\Delta v = 1 / 50$.

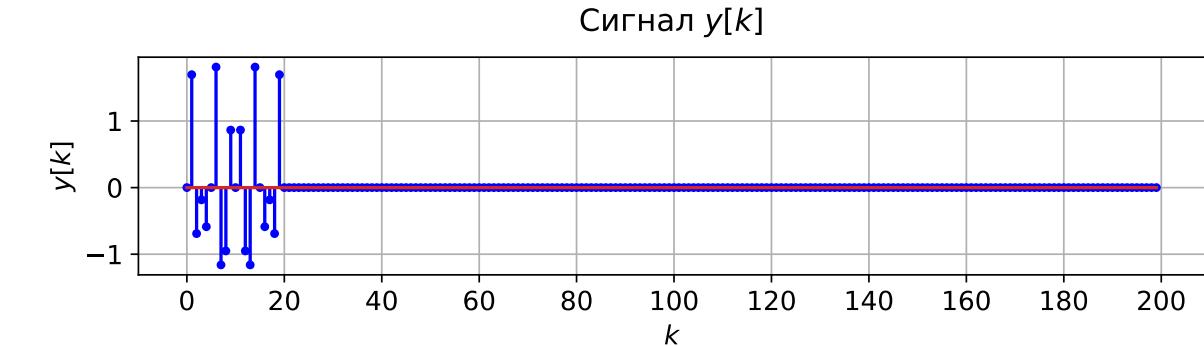
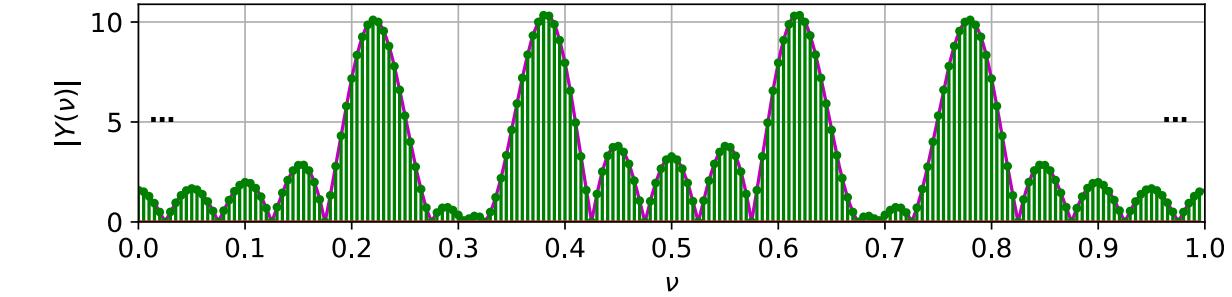


ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

ДВПФ и ДПФ $N=100$ сигнала $y[k]$ (один период)



ДВПФ и ДПФ $N=200$ сигнала $y[k]$ (один период)



ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $v \neq n / N$

Рассмотрим N -точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi v k).$$

Обратное ДПФ для последовательности $x[k]$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

$$X(v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) \right) \exp(-j2\pi v k) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(v - \frac{n}{N}\right)k\right).$$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi(v - n/N)k)$.

Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$, и знаменателем $q = \exp(-j2\pi(v - n/N))$.

В точках $v \neq n / N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N = b_1(1 - q^N) / (1 - q)$ и $\sin \phi = (e^{j\phi} - e^{-j\phi}) / (2j)$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(v - \frac{n}{N}\right)k\right) &= \frac{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N)N)}{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N))} = \\ &= \frac{e^{-j\pi(v - n/N)N} \{ \exp(j\pi(v - n/N)N) - \exp(-j\pi(v - n/N)N) \}}{e^{-j\pi(v - n/N)} \{ \exp(j\pi(v - n/N)) - \exp(-j\pi(v - n/N)) \}} = \\ &= \exp(-j\pi(v - n/N)(N-1)) \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))} \end{aligned}$$

Подставив формулу для суммы в связь, получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(v)$ по коэффициентам ДПФ $X[n]$:

$$X(v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))} \exp(-j\pi(v - n/N)(N-1)).$$

Заметим, что для последовательностей конечной длительности ДВПФ непрерывно, а значит для интерполяционной формулы выполняется

$$\lim_{v \rightarrow n/N} X(v) = X[n].$$

ДПФ периодических последовательностей

ДПФ периодических последовательностей

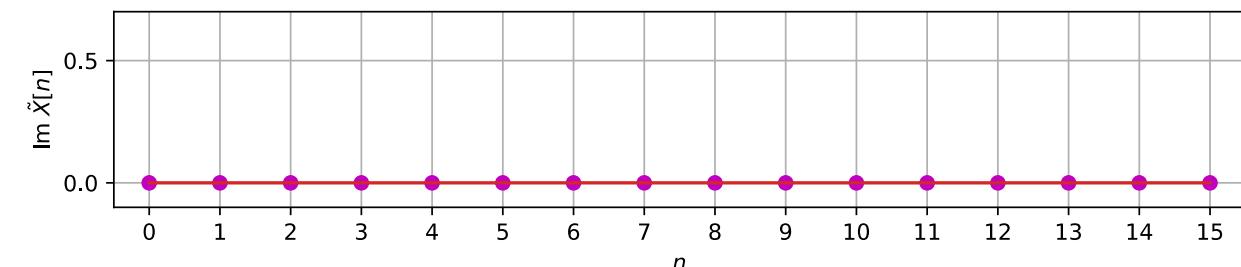
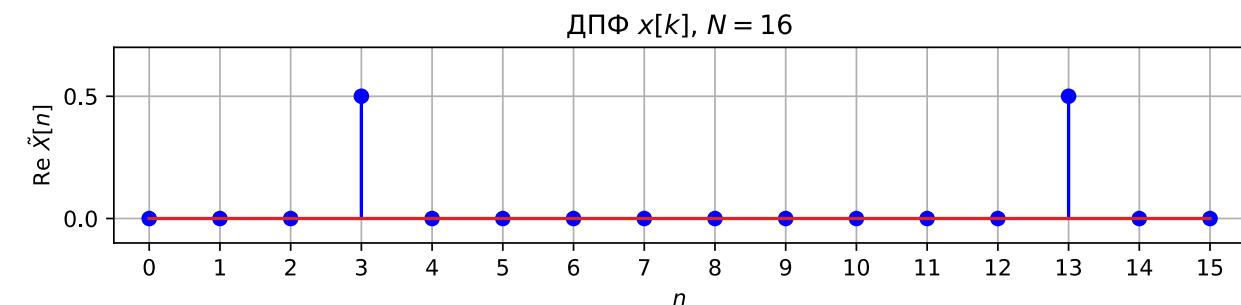
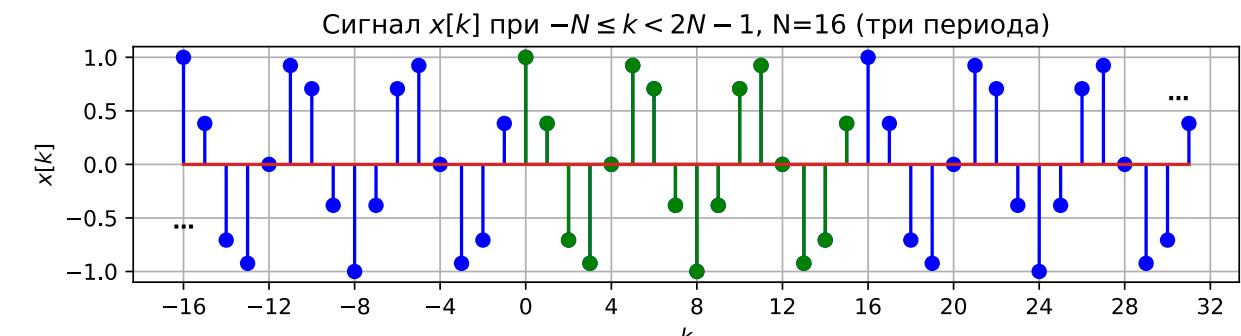
Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ — периодическая последовательность отсчетов сигнала с периодом N . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

$\tilde{X}[n]$ может рассматриваться как N -точечная последовательность коэффициентов ДПФ (отсчетов ДПФ), где $n = 0, 1, \dots, N-1$. $\tilde{X}[n]$ может также рассматриваться как периодическая последовательность с периодом N , $n \in \mathbb{Z}$. В обратном преобразовании последовательность $x[k]$ также получится периодической.

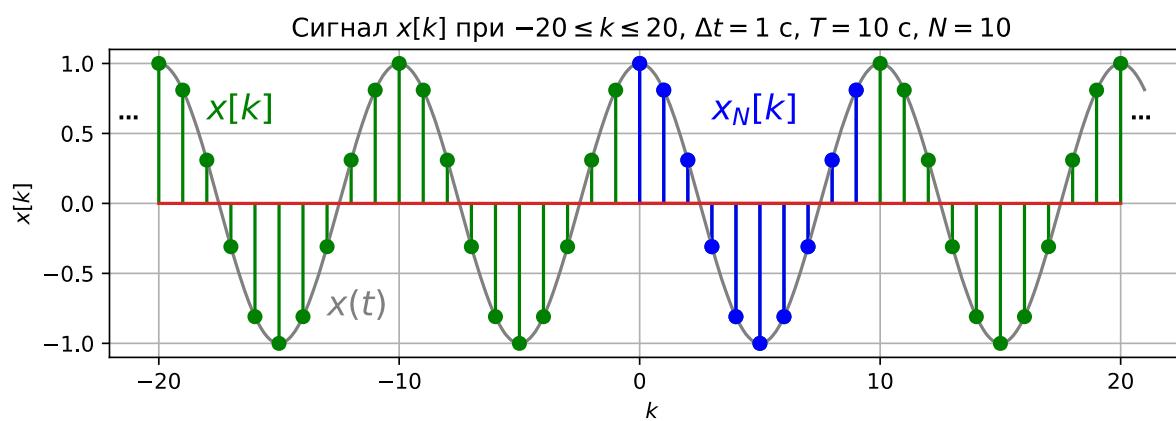


ДПФ периодических последовательностей

Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискретизован с шагом $\Delta t = T / N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов (если крайний правый отсчет попадает на границу периода, то будем считать его относящимся к следующему периоду). Выделим для последовательности отсчетов $x[k]$ один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$



Пусть $x_N[k] \xrightarrow{DTFT} X_N(v)$. Последовательность $x[k]$ может быть представлена в виде дискретной сверки

$$x_N[k] \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN].$$

Причем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Тогда

$$X(v) = \frac{1}{N} X_N(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Последовательность $x_N[k]$ имеет конечную длительность, является абсолютно суммируемой. $X_N(v)$ непрерывна.

$$X(v) = \frac{1}{N} X_N(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

При этом $X(v)$ (ДВПФ периодической последовательности $x[k]$) имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ -функции.

ДПФ периодических последовательностей

$$X(v) = \frac{1}{N} X_N(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Заметим, что для каждого слагаемого в сумме по свойствам δ -функции выполняется равенство

$$\frac{1}{N} X_N(v) \delta\left(v - \frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $\tilde{X}[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(v)$ в точках $v = n / N$:

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n] \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

При этом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$\begin{aligned} x[k] &= \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi v k) dv = \int_0^1 X(v) \exp(j2\pi v k) dv = \\ &= \int_0^1 X_N(v) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi v k) dv = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).$$

Получаем следующую пару формул

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k),$$

определяющую прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ частотная (n) и временная (k) переменная дискретны, функция $\tilde{X}[n]$ периодична с периодом N , а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n = 0, \dots, N-1$.

ДПФ периодических последовательностей

Пример. Предположим, что имеется периодическая последовательность ($-\infty < k < +\infty$)

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

Учитывая, что

$$\cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi \frac{3}{16} k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi \frac{3}{16} k),$$

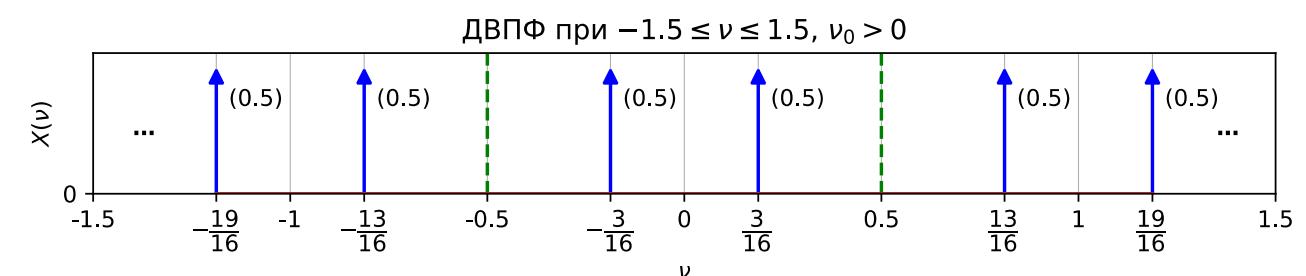
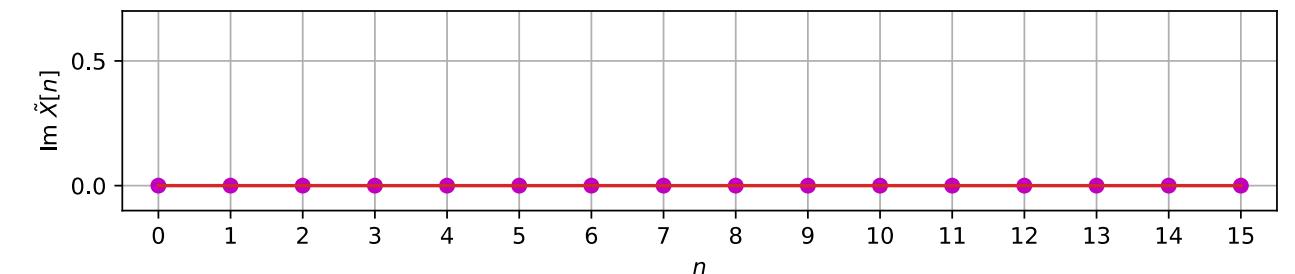
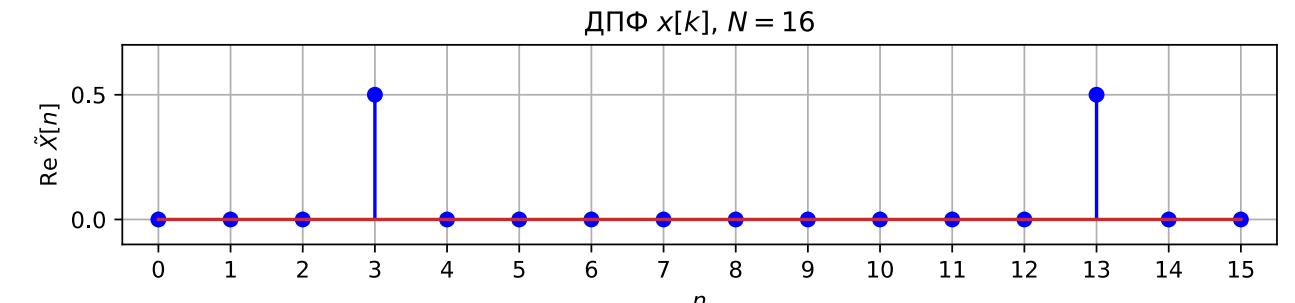
получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$ содержит две δ -функции с площадями $1/2$ на каждом периоде. Рассмотрим период $0 \leq v < 1$ (правую крайнюю точку можем не включать из-за периодичности $X(v)$). На

нем содержится две δ -функции в точках $v_1 = \frac{3}{16}$ и $v_2 = \frac{13}{16}$.

Последовательность имеет период $N=16$ точек. Это означает, что можно установить значения 16-точечного ДПФ $\tilde{X}[3]=1/2$, $\tilde{X}[13]=1/2$, а в остальных точках главного периода $\tilde{X}[n]=0$.



Пример. ДВПФ и окна

Пример.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ последовательности отсчетов $y[k] = x[k]w[k]$, где

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16}k\right),$$

$w[k]$ — прямоугольное окно длиной $N=16$ отсчетов:

$$w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m].$$

Решение. Заметим, что

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)},$$

$$X(v) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{3}{16} - m\right) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(v + \frac{3}{16} - m\right).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности $Y(v)$ может быть представлено в виде циклической свертки

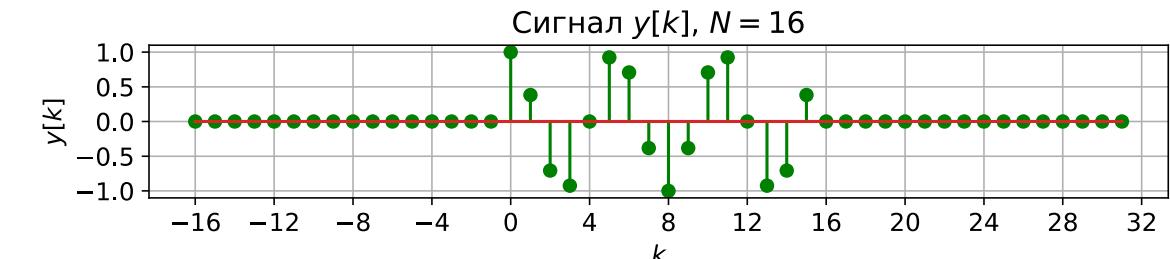
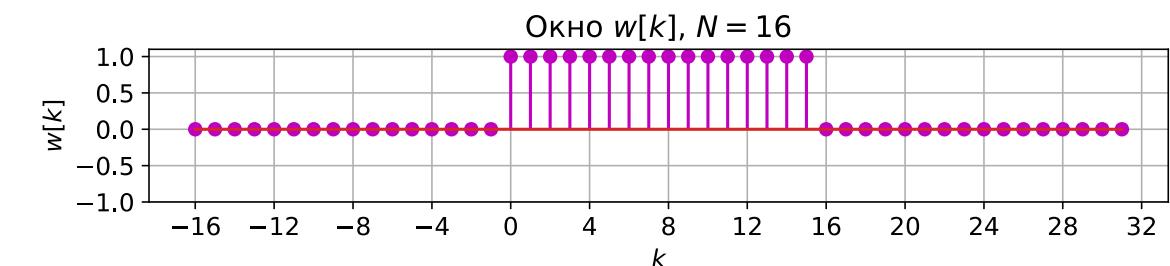
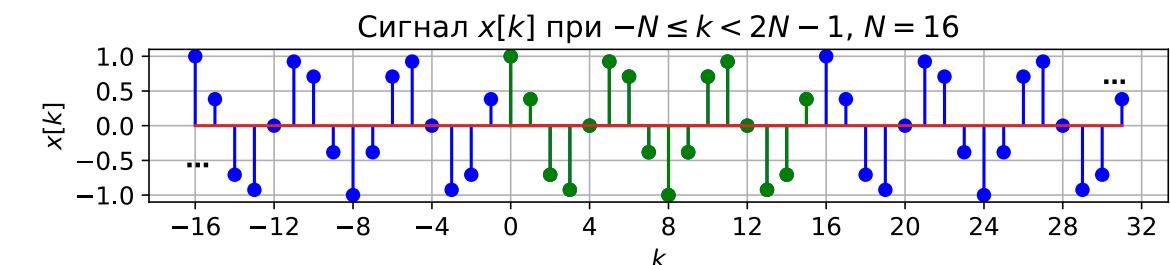
$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v-\tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v-\tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v-v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(v) = 0.5W\left(v - \frac{3}{16}\right) + 0.5W\left(v + \frac{3}{16}\right).$$



Пример. ДВПФ и окна

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

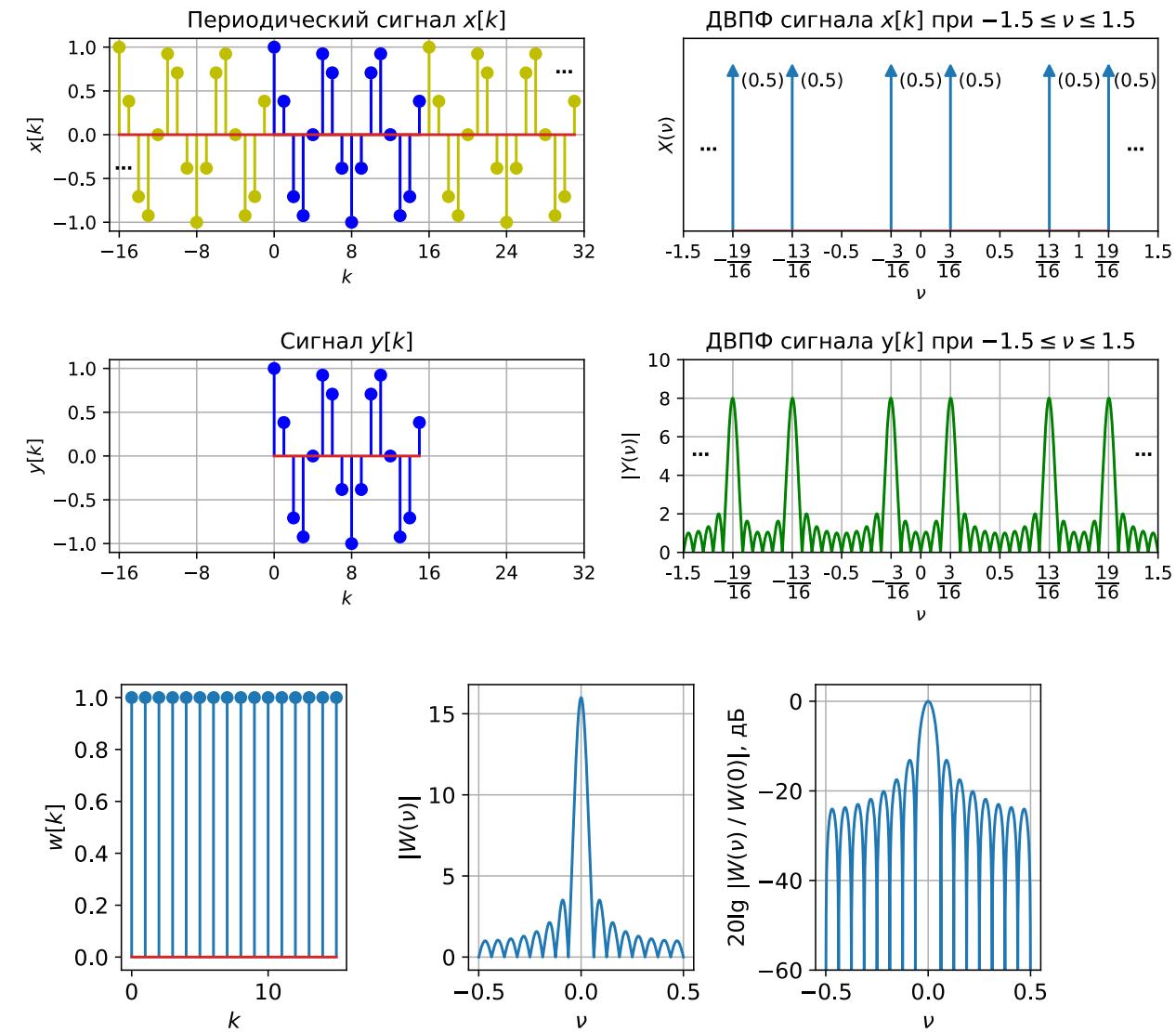
$$y[k] = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

ДПВФ последовательности $y[k]$

$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$



Частотная ось ДПФ

Частотная ось ДПФ

Отчету N - точечного ДПФ с номером n в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке $v = n / N$ по оси нормированных частот:

$$X(v)|_{v=n/N} = X[n].$$

Если рассматривается периодическая последовательность отсчетов, и коэффициенты ДПФ вычисляются по периоду последовательности, то весам дельта-функций в точках $v = n / N$ в ДВПФ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами n :

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n] \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

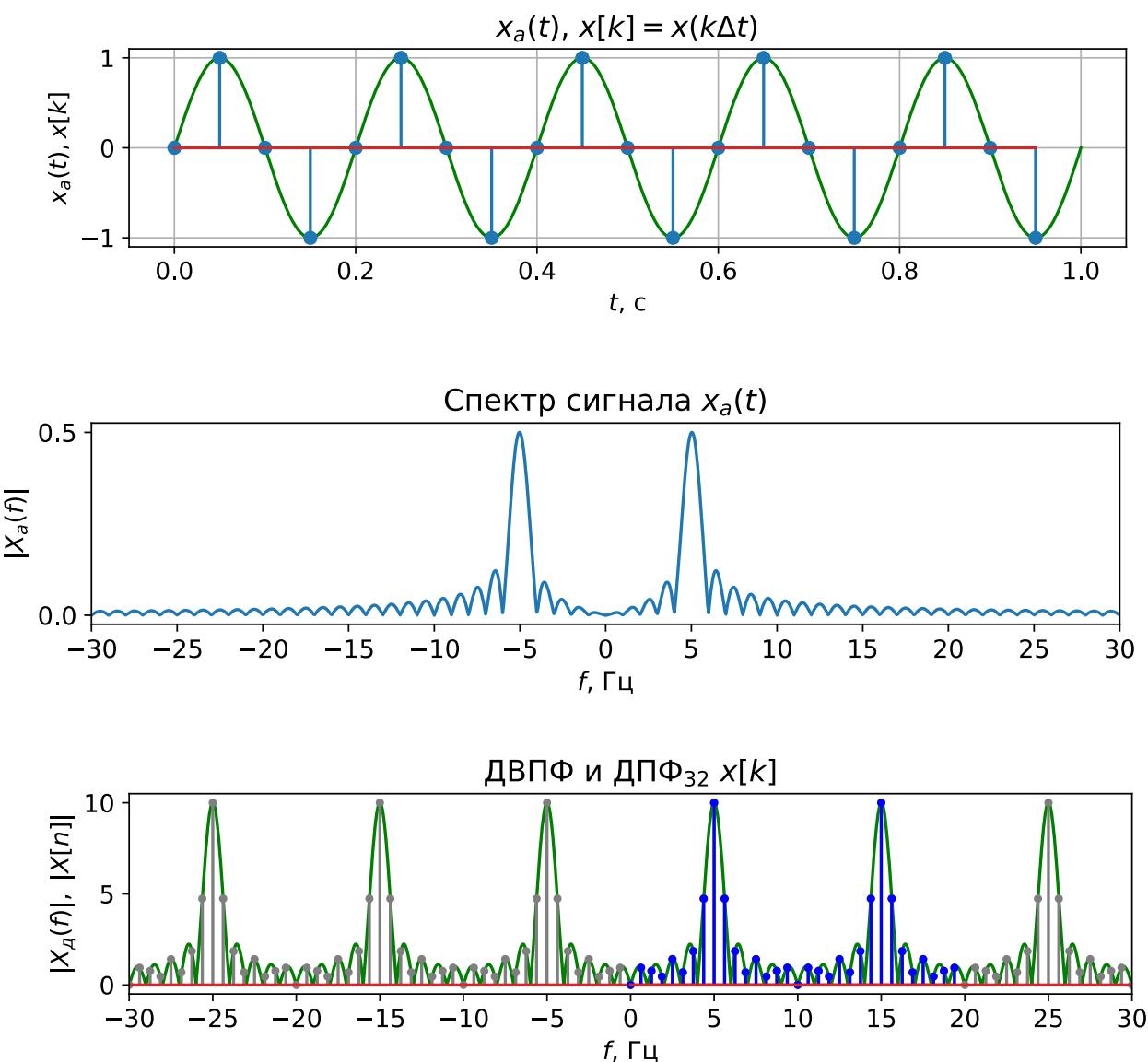
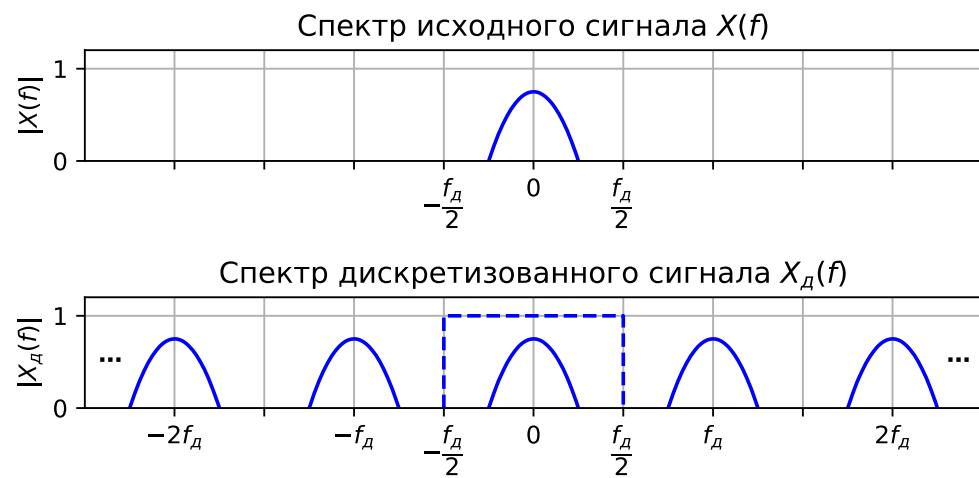
Эти два обстоятельства позволяют сопоставить отсчётам ДПФ частоты в спектре дискретизованного сигнала. Учитывая, что $v = f / f_d = f \Delta t$, где f_d – частота дискретизации, Δt – шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером n соответствует частота $f = n f_d / N = n / (N \Delta t)$ Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет f_d / N Гц.

Частотная переменная и ее размерность	Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ	Разрешение по частоте	Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$
f , [Гц]	$f = \frac{n f_d}{N}$	$\Delta f = \frac{f_d}{N}$	$[0, f_d)$
ω , [рад/с]	$\omega = \frac{n \omega_d}{N}$	$\Delta \omega = \frac{\omega_d}{N}$	$[0, \omega_d)$
v , безразмерная	$v = \frac{n}{N}$	$\Delta v = \frac{1}{N}$	$[0, 1)$
θ , [рад]	$\theta = 2\pi \frac{n}{N}$	$\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}$	$[0, 2\pi)$

В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

Частотная ось ДПФ

Заметим, что $f = n f_{\Delta} / N$ Гц – это частота в спектре дискредитированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогово сигнала с периодом, равным частоте дискретизации (f_{Δ} в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером n будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте $f \in [-f_{\Delta}/2; f_{\Delta}/2]$, такой, что $f = (n + mN)f_{\Delta}/N$, где m – целое число.



Частотная ось ДПФ

Пример.

Рассмотрим для $f_0 = 5$ Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t), 0 \leq t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации $f_d = 20$ Гц ($\Delta t = 0,05$ с)

Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

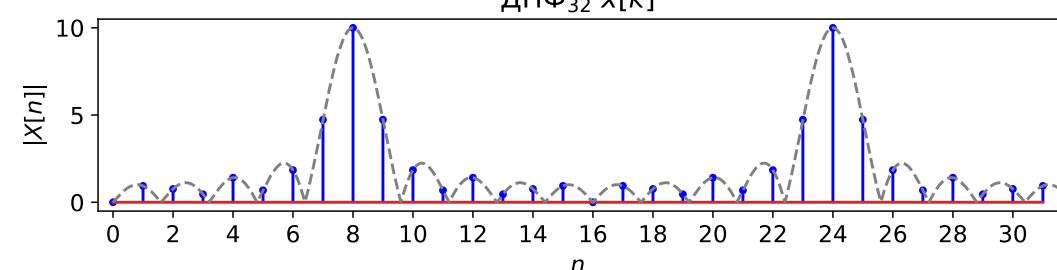
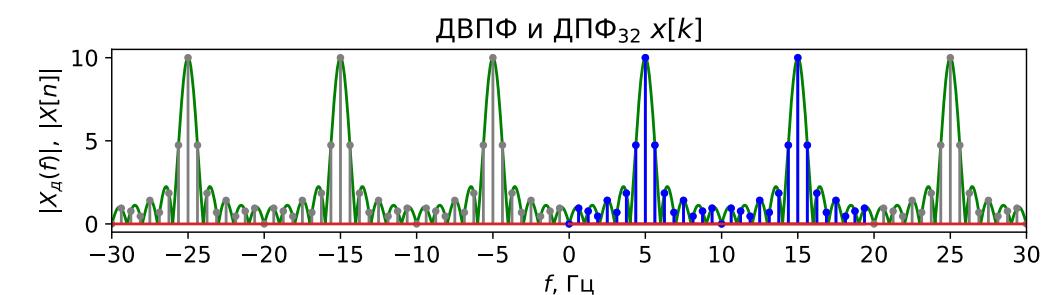
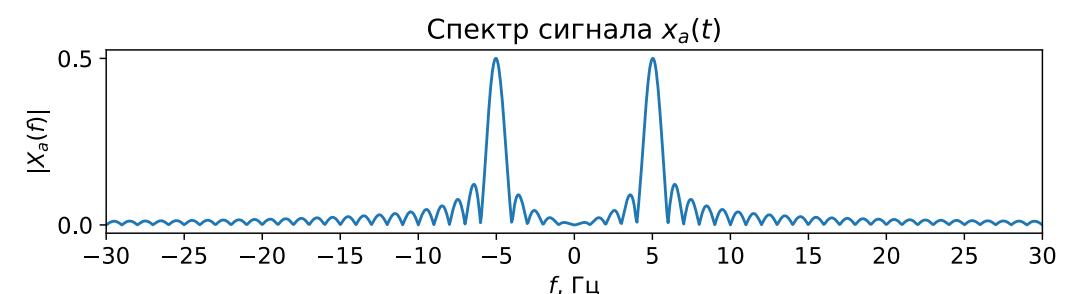
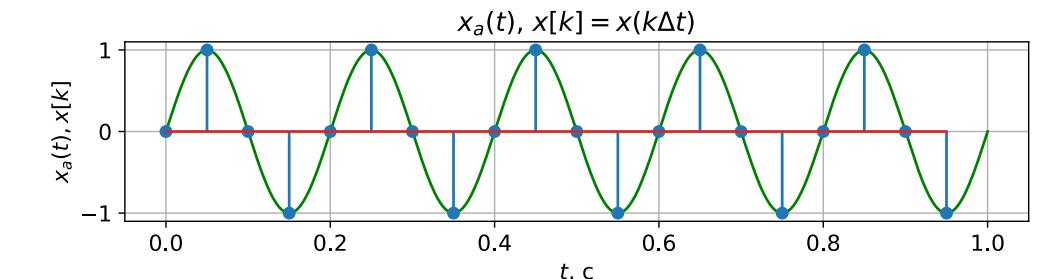
$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k\right).$$

Спектр $X_d(f)$ дискретизованного сигнала связан со спектром $X_a(f)$ аналогового сигнала соотношением

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

где Т определено соотношением $x[k] = T x_a(k\Delta t)$. Если бы эффекта наложения не было, то $X_d(f)$ и $X_a(f)$ совпадали бы на интервале $[-f_d/2, f_d/2]$, т.е. от -10 Гц до 10 Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности $N = 32$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$ находятся на полуинтервале $[0, f_d)$.



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

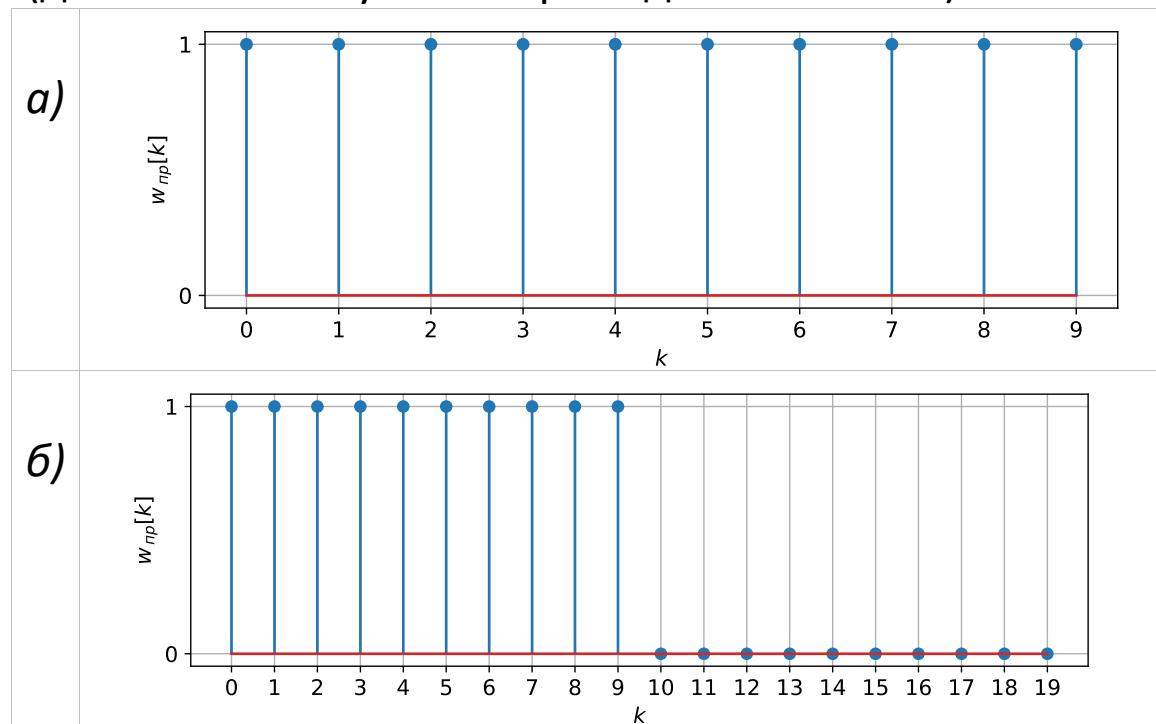
№1. Последовательность $x[k]$ из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой $f_d = 20480$ Гц. Обозначим через $X[n]$ 1024-точечное ДПФ последовательности $x[k]$ (дополненной нулевыми отсчетами). Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

№2. Вычислить ДВПФ прямоугольного окна длины $N=10$:

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Изобразить по модулю на одном графике:

- ДВПФ и 10-точечное ДПФ для последовательности отсчетов данного окна;
- ДВПФ и 20-точечное ДПФ для той же последовательности (дополненной нулями справа до 20 отсчетов).



Задачи с лекции

№3. Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, $f_0 = 17$ Гц,
дискретизован с частотой $f_d = 170$ Гц. Найти ДВПФ $X(v)$ (в
нормированных частотах) последовательности отчетов этого
сигнала $x[k] = x(k\Delta t)$. Построить график $X(v)$ для значений
нормированных частот $v \in [-2,5; 2,5]$.

№4. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ кГц
(f_b – верхняя граничная частота) дискретизуется с шагом Δt .
В результате получается последовательность $x[k] = x(k\Delta t)$.
Вычисляется N -точечное ДПФ, где $N = 2^m$, m – натуральное
число. Определить минимальное значение m , при котором
анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ по
оси частот в герцах будет меньше 5 Гц. Для этого значения m
определить допустимые пределы для частоты
дискретизации $f_{\min} < f_d < f_{\max}$.

Задачи с лекции

№5 (с решением). Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_{\text{в}} = 10$ кГц ($f_{\text{в}}$ – верхняя граничная частота) дискретизуется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность $x[k]$. Обозначим через $X[n]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x[k]$.

а) Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности $x[k]$ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами $n_1 = 200$ и $n_2 = 900$?

б) Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала $x(t)$ соответствуют индексы $n_1 = 200$ и $n_2 = 900$ в последовательности $X[n]$?

Решение №5. Поскольку сигнал $x(t)$ дискретизован в соответствии с теоремой отсчетов, минимально возможная частота дискретизации $f_{\text{д}} = 2f_{\text{в}} = 10$ кГц.

а) Заметим, что из связи ДВПФ и ДПФ для последовательностей конечной длительности отсчету ДПФ с

номером n_0 соответствует значение ДВПФ в точке $f_0 = \frac{n_0}{N} f_{\text{д}}$, при этом оно также равно (в силу периодичности ДВПФ) значениям в точках $f_0 + mf_{\text{д}}$, $m \in Z$. Тогда отсчетам n_1 и n_2 соответствуют частоты (можно также указать одну частоту при $m = 0$)

$$f_1 = \frac{n_1}{N} f_{\text{д}} + mf_{\text{д}} = 10(0,2 + m) \text{ кГц},$$

$$f_2 = \frac{n_2}{N} f_{\text{д}} + mf_{\text{д}} = 10(0,9 + m) \text{ кГц}.$$

б) Так как сигнал $x(t)$ дискретизован в соответствии с теоремой отсчетов, его спектр ограничен диапазоном $[-f_{\text{д}}/2; f_{\text{д}}/2]$. В этот диапазон из перечисленных выше попадают лишь значения $f_1 = 2$ кГц и $f_2 = -1$ кГц, которые соответствуют коэффициентам ДПФ с номерами n_1 и n_2 .

Задачи с лекции

№6 (с решением). Рассмотреть для $f_0 = 5$ Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t), 0 \leq t < 1.$$

Частота дискретизации $f_d = 20$ Гц ($\Delta t = 0,05$ с).

Каким частотам в спектре аналогового сигнала будут соответствовать коэффициенты ДПФ $n_1 = 8$ и $n_2 = 20$?

Решение №6. Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k\right).$$

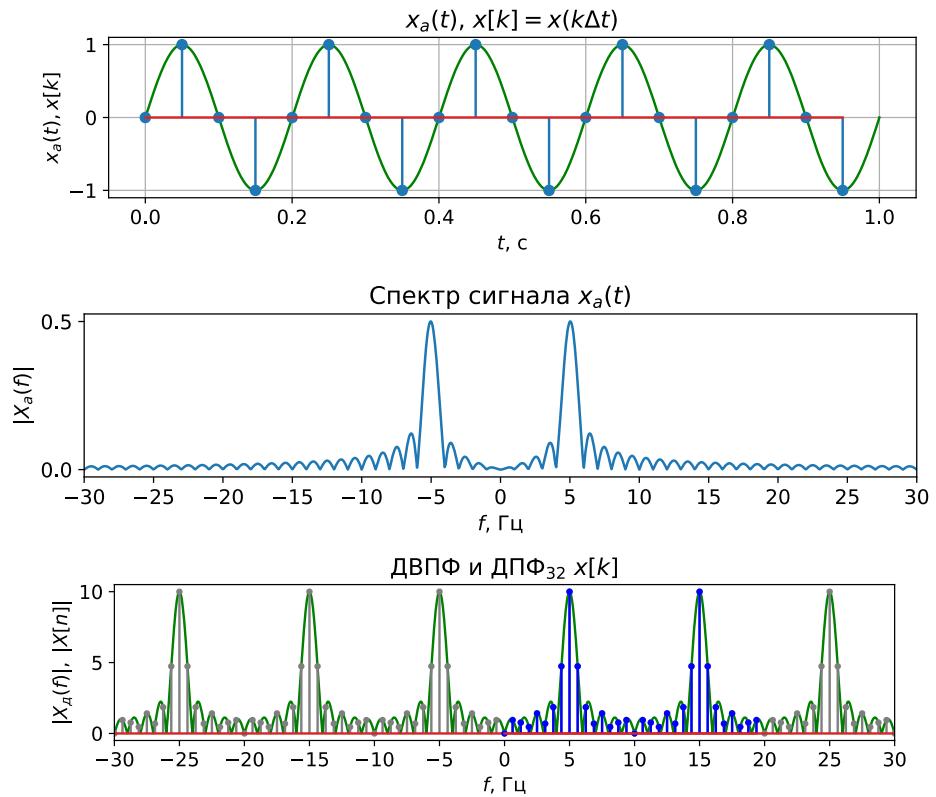
Спектр $X_d(f)$ дискретизованного сигнала связан со спектром $X_a(f)$ аналогового сигнала соотношением

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

где Т определено соотношением $x[k] = T x_a(k\Delta t)$.

Если бы эффекта наложения не было, то $X_d(f)$ и $X_a(f)$ совпадали бы на интервале $[-f_d/2, f_d/2]$, т.е. от -10 Гц до 10 Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности $N = 32$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$ находятся на полуинтервале $[0, f_d)$.



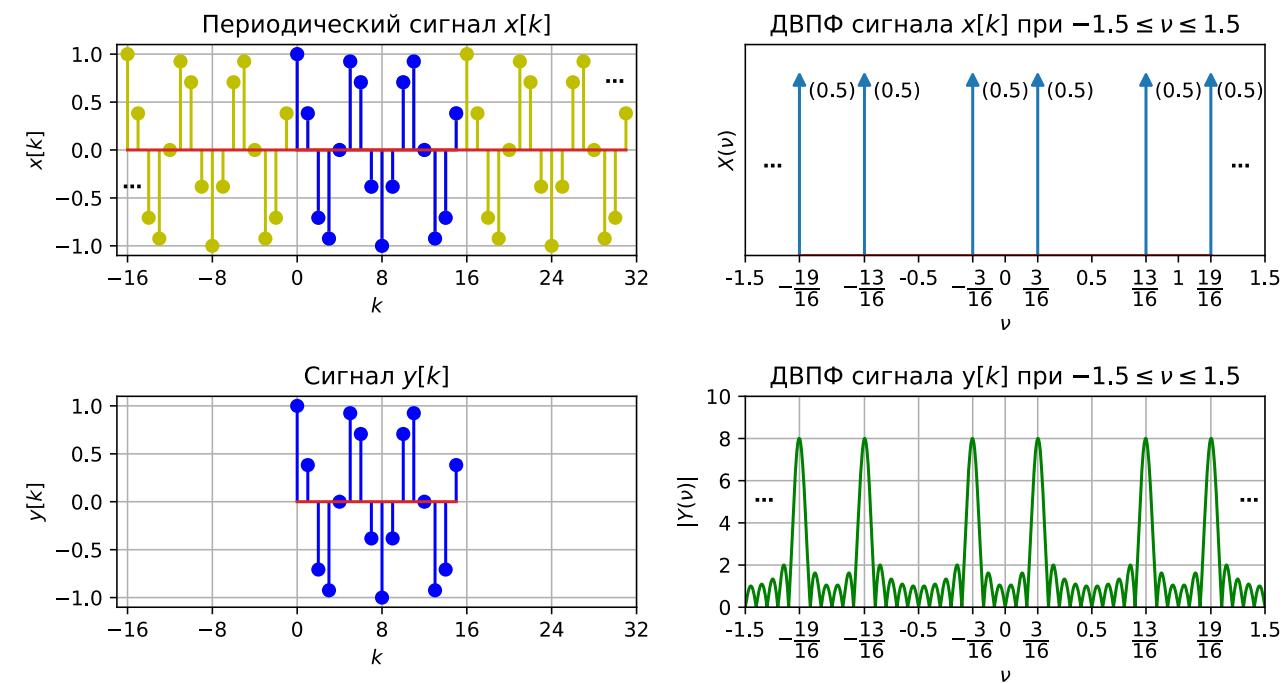
Отчету $n_1 = 8$ из первой половины периода соответствует частота $f_1 = \frac{n_1}{N} f_d = 5$ Гц, а отчету $n_2 = 20$ из второй половины периода $f_2 = \frac{n_2}{N} f_d - f_d = -7,5$ Гц

Лекция 10 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

8 апреля 2025 г.

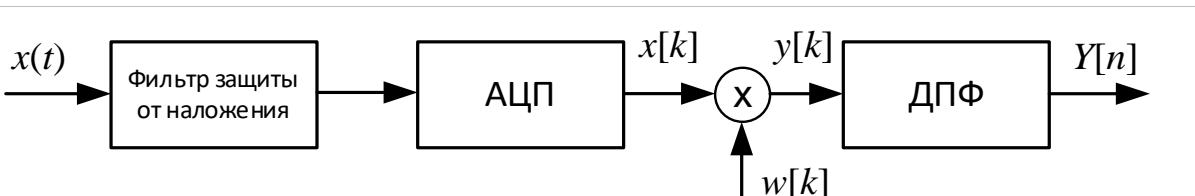
7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ.

- Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.
- Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна.
- Примеры основных оконных функций (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга, Блэкмана) и их характеристики.
- Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды.



Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ

Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.

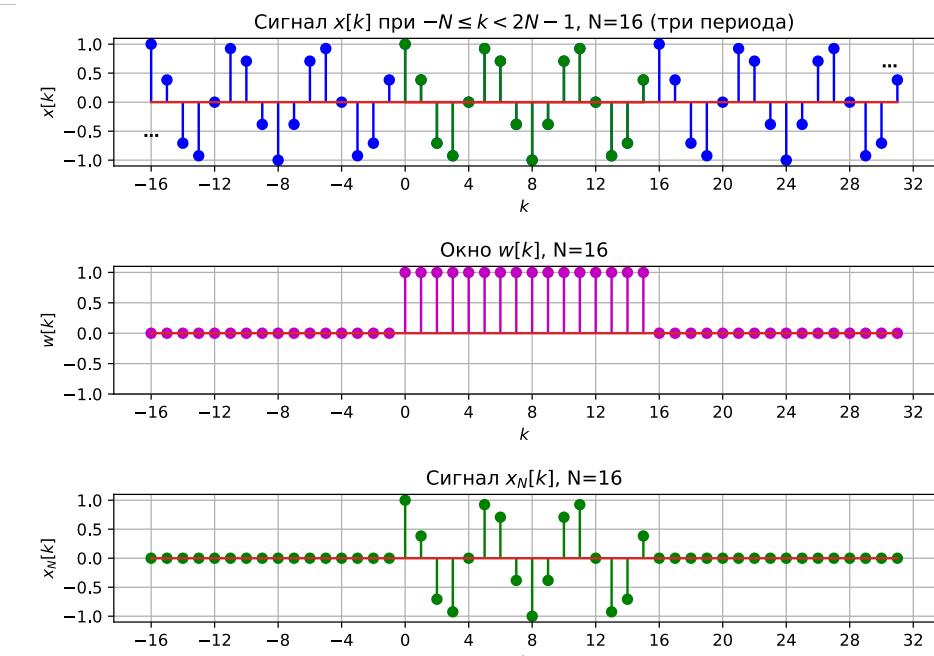


Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.

Аналоговый фильтр защиты от наложения ослабляет компоненты сигнала $x(t)$ выше частоты Найквиста $f_{\Delta} / 2$.

Следующий за ним аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выполняет операции дискретизации по времени и квантования выборок сигнала по уровню. На выходе АЦП будет цифровой сигнал $x[k]$, представленный последовательностью отсчетов.

Во многих случаях длительность сигнала $x(t)$ велика, поэтому перед вычислением ДПФ последовательность отсчетов $x[k]$ умножается на временное окно $w[k]$ длительностью N .



Взвешивание сигнала прямоугольным окном

В результате получается конечная последовательность $y[k] = x[k]w[k]$, которой в частотной области соответствует периодическая свёртка

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v}.$$

Здесь $v = f\Delta t = f / f_{\Delta}$ – нормированная частота (доля частоты дискретизации), $X(v)$ – ДВПФ (спектр) сигнала $x[k]$, $W(v)$ – ДВПФ оконной функции $w[k]$.

Эффекты растекания спектральных компонент «leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна

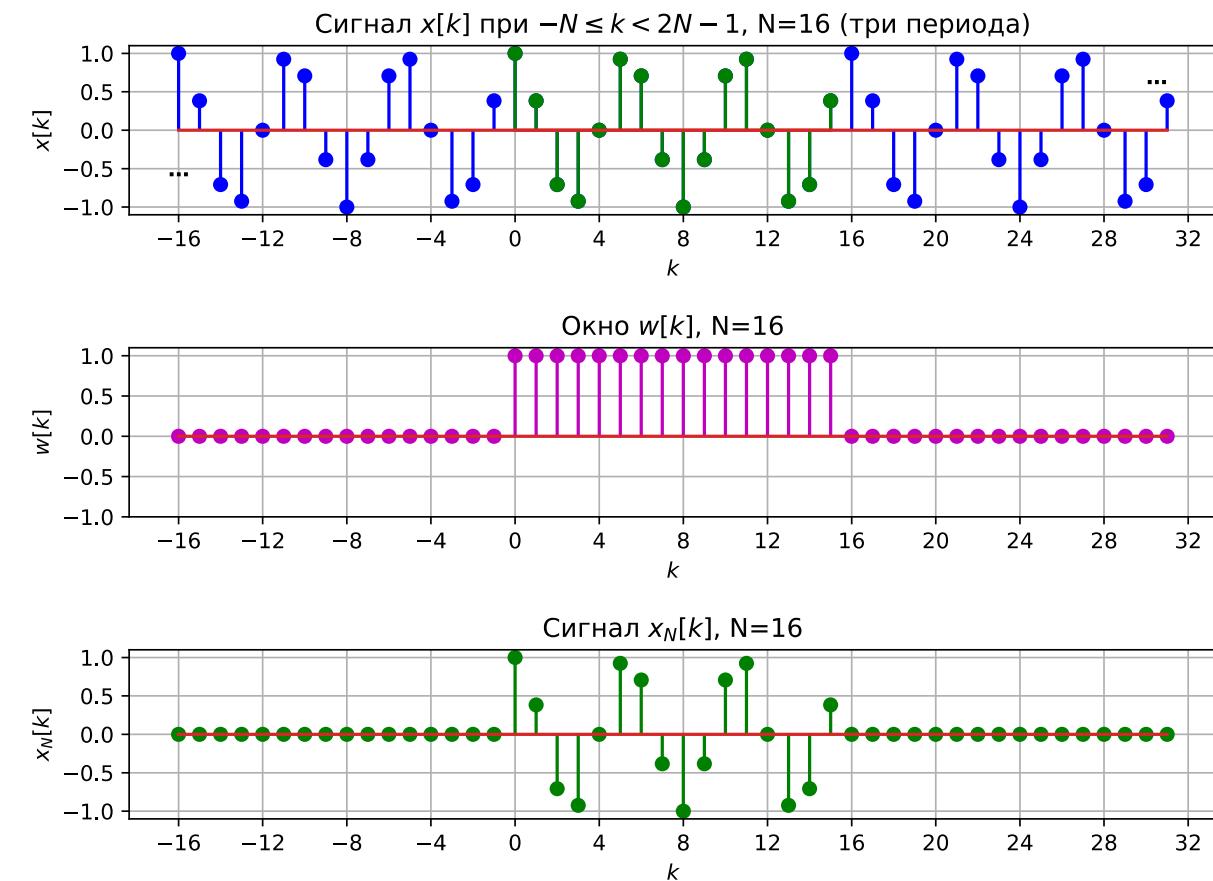
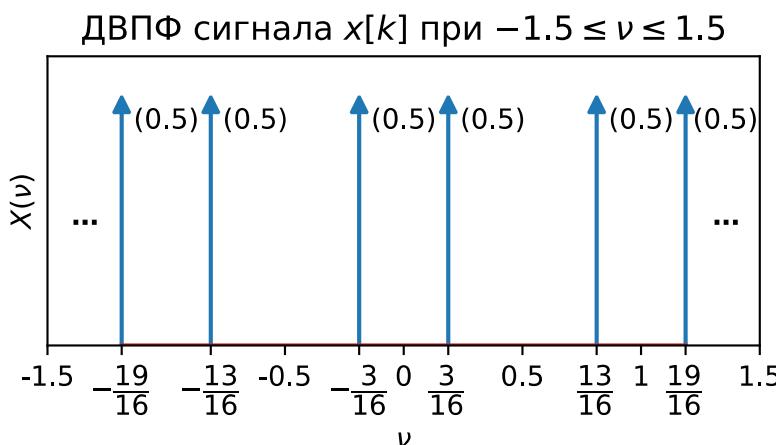
Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Рассмотрим этот эффект на следующем примере. Предположим, что имеется периодическая последовательность

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta\left(v - \frac{3}{16} - n\right) + \frac{1}{2} \delta\left(v + \frac{3}{16} - n\right).$$

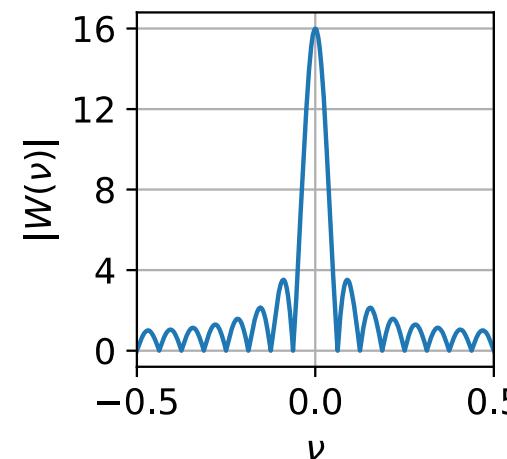
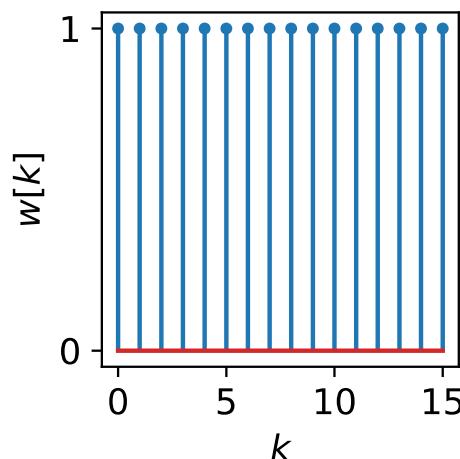
$X(v)$ содержит по две δ -функции с весами $1/2$ на периоде.



Предположим, что используется прямоугольное окно длиной в $N=15$ отсчетов и для дальнейшего спектрального анализа используется сигнал $y[k] = x[k]w[k]$.

Для прямоугольного окна спектр мы ранее вычисляли

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)}.$$



ДВПФ последовательности $y[k]$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v-\tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v-\tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v-v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

Тот же результат можно получить через теорему смещения:

$$y[k] = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

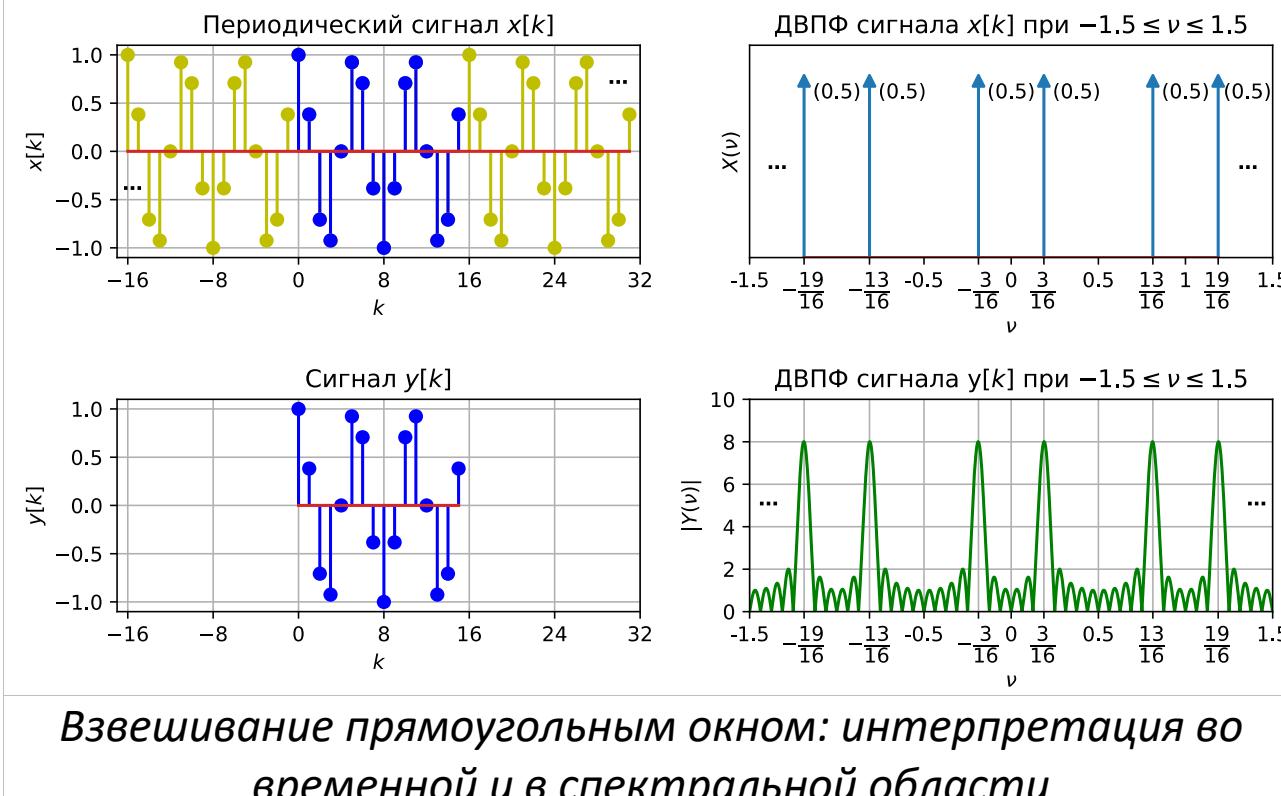
$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

В итоге

$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$





Взвешивание прямоугольным окном: интерпретация во временной и в спектральной областях

Эффект растекания спектральных компонент

заключается в том, что гармоники (дельта-функции) в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

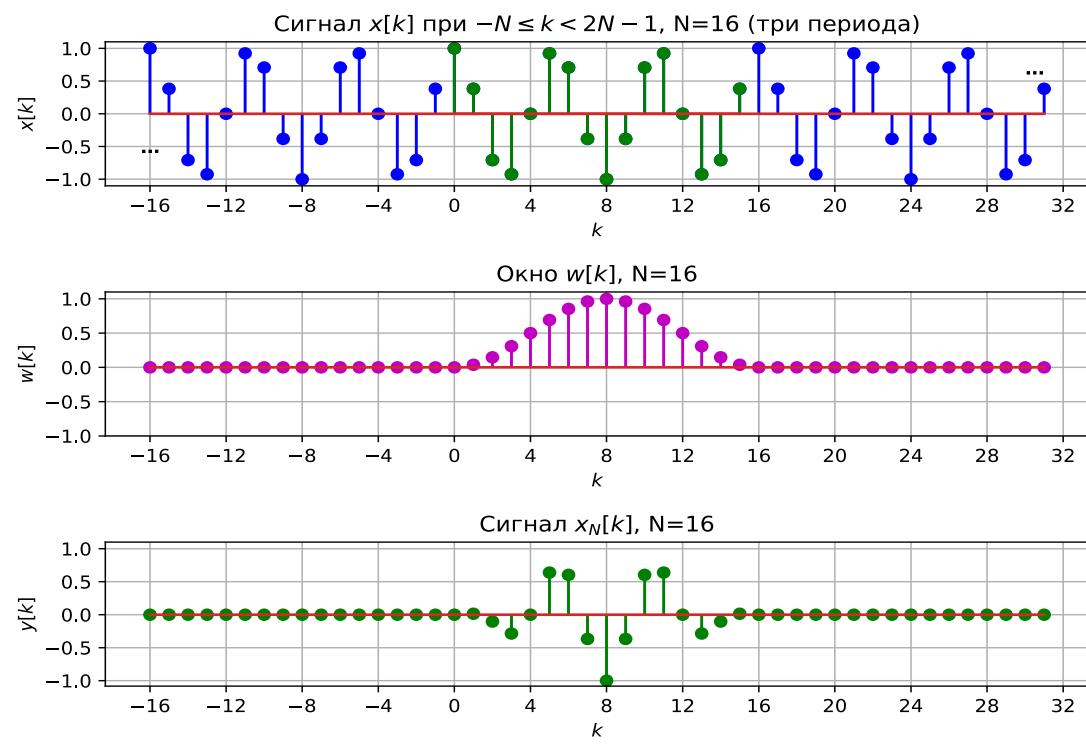
Помимо этого, наблюдается **эффект утечки спектра через боковые лепестки** прямоугольного окна, который приводит к появлению боковых выбросов.

Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна — "ложные периодичности".

Примечание. Физик Франц Артур Фридрих Шустер (нем. Franz Arthur Friedrich Schuster; 1851—1934), называл их "ложными периодичностями". Многие исследователи его времени ошибочно утверждали, эти максимумы обусловлены скрытыми периодичностями в сигнале. Шустер увидел здесь аналогию с дифракционными полосами в оптическом спектроскопе, которые возникали из-за ограниченной апертуры прибора.

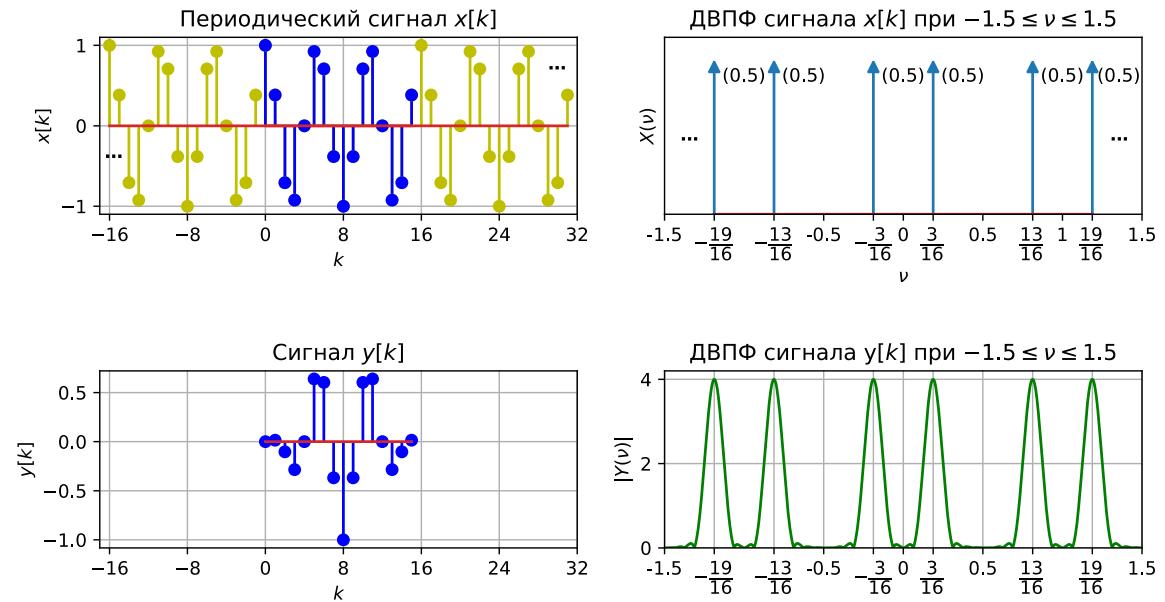
leakage

Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна.



Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности $x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16}k\right)$, т.е. для последовательности $y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$, где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$



Применение окна Ханна позволило снизить уровень боковых лепестков по сравнению с их уровнем в случае прямоугольного окна. Однако это даётся ценой расширения главного лепестка спектрального окна $W(v)$, что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков.

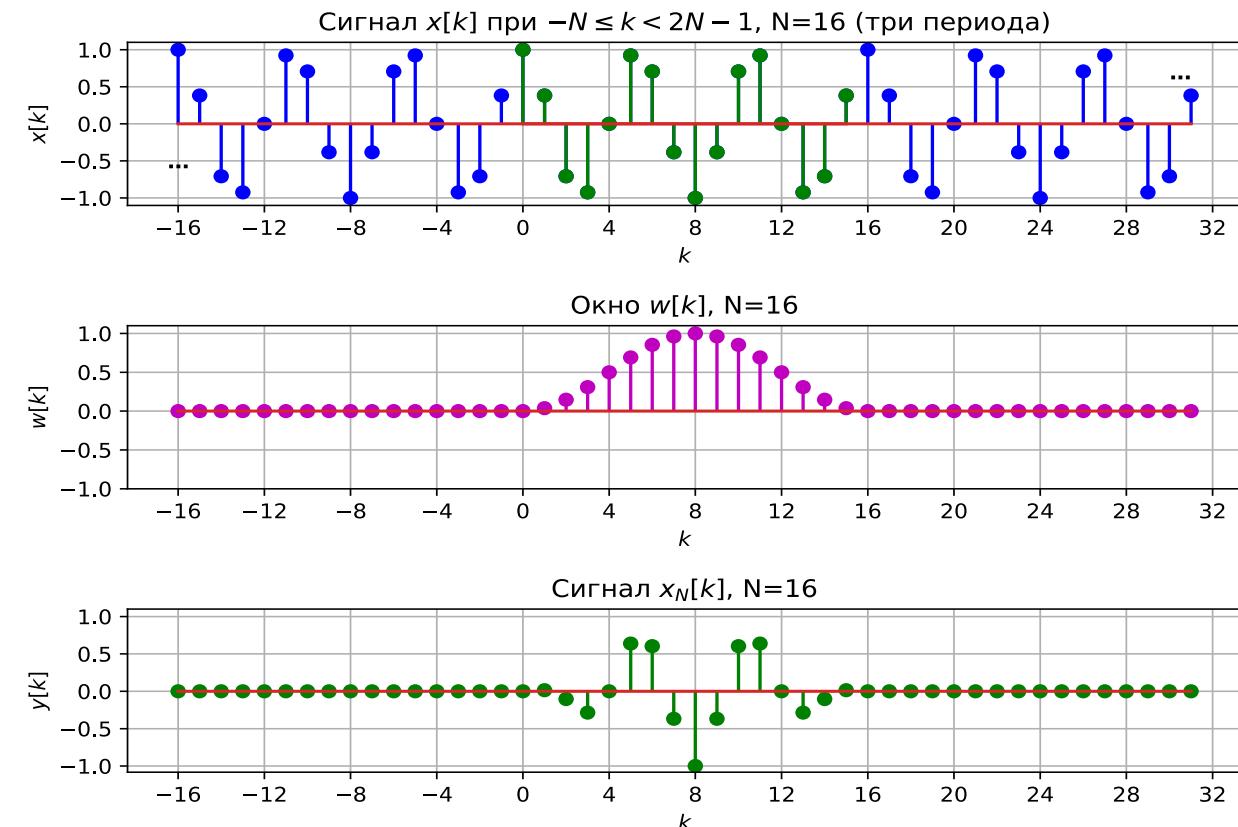
Примеры оконных функций для спектрального анализа

Примеры оконных функций для спектрального анализа.

Рассмотрим примеры оконных функций $w[k]$ для ДПФ, которые часто используются. Для того, чтобы определить, к чему приводит умножение на ту или иную оконную функцию, для окон будем использовать следующие спектральные характеристики.

- Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка окна на нулевом уровне.
- Ширина $\Delta\nu$ полосы на уровне половинной мощности (на уровне, который на 3 дБ ниже максимального уровня).
- Максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ.
- Асимптотическая скорость спада уровней боковых лепестков в дБ/октаву.

Октáва — интервал частот, в котором соотношение граничных частот составляет один к двум. Например, расстояние между частотами $\nu_1 = 0.1$ и $\nu_2 = 0.2$ составляет одну октаву.



Прямоугольное окно

Прямоугольное окно

Во временной области прямоугольное окно длительностью N задается формулой

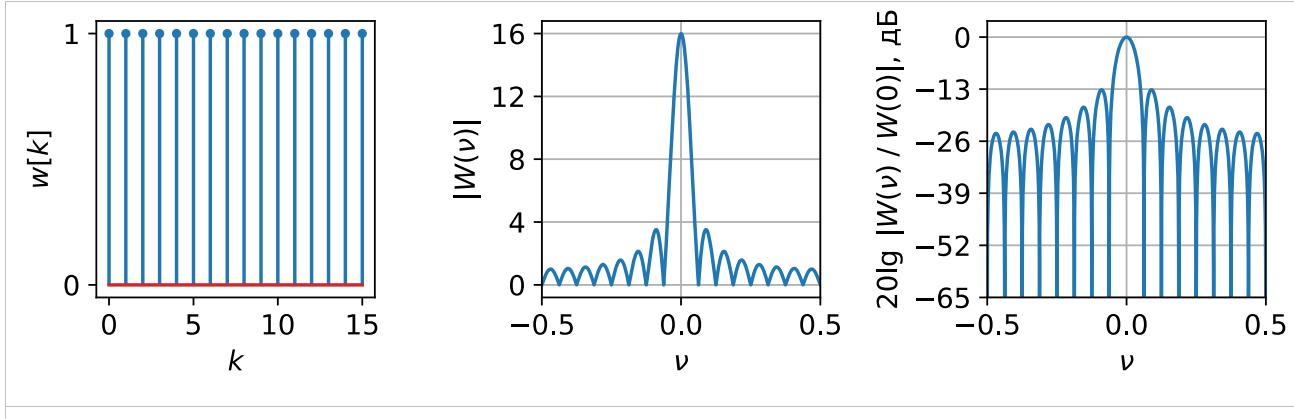
$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Умножение на прямоугольную оконную функцию эквивалентно ограничению сигнала по длительности.
Вычислим ДВПФ оконной функции

$$\begin{aligned} W_{\text{пр}}(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \exp(-j2\pi v k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi v k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi v N)}{1 - \exp(-j2\pi v)} = \frac{2j}{2j} \frac{e^{-j\pi v N}}{e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi v N} - e^{-j\pi v N})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \\ &= \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v). \end{aligned}$$

АЧХ оконной функции

$$|W_{\text{пр}}(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$



Прямоугольное окно

Основные характеристики прямоугольного окна длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta v = 2 / N$ (2 бина ДПФ);
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta v = 0,89 / N$ (0,89 бина ДПФ);
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-13,3$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 6 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -3,92$ дБ.

Окно Бартлетта

Временное окно Бартлетта имеет треугольную форму:

$$w_{\text{Бартлетта}}[k] = \begin{cases} 1 - \frac{2}{N} \left| k - \frac{N}{2} \right|, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases} \quad (1)$$

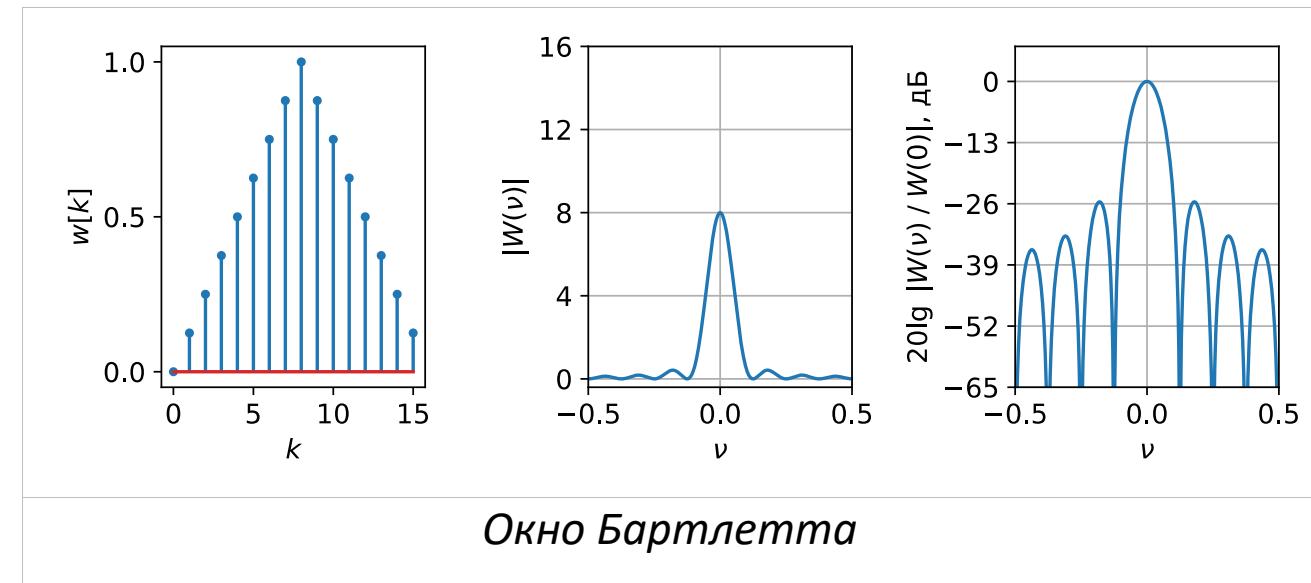
Для четного N окно Бартлетта можно представить как свертку двух прямоугольных окон длиной $N/2$, от нормированную на их длину. Тогда по теореме о свертке для ДВПФ частотная характеристика этого окна

$$W_{\text{Бартлетта}}(\nu) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin \pi \nu \frac{N}{2}}{\sin \pi \nu} \right)^2 \exp(-j\pi \nu N). \quad (2)$$

В итоге ширина главного лепестка окна на нулевом уровне в два раза больше, чем у прямоугольного, и составляет $\Delta\nu = 4/N$ (4 бина).

Основные характеристики окна Бартлетта длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = \frac{4}{N}$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = \frac{1,28}{N}$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-26,5$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 12 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -1,82$ дБ.



Окно Ханна

Окно Ханна

Окно Ханна для ДПФ во временной области описывается следующей формулой:

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить это окно в спектральной области, заметим, что

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi k}{N}} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$$

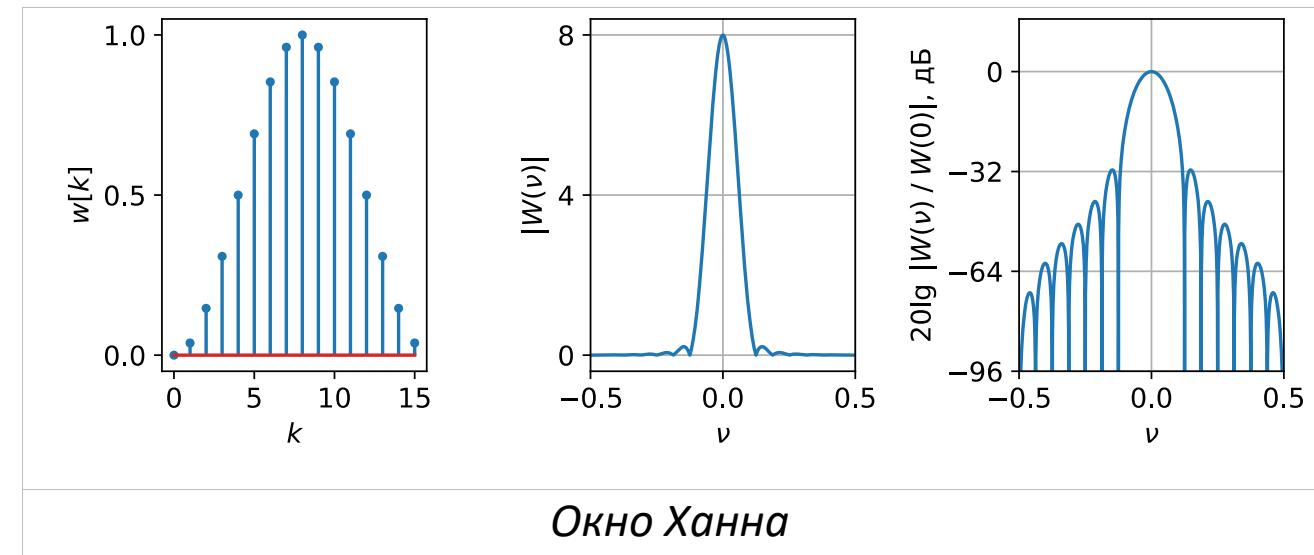
Тогда по теореме смещения для ДВПФ, окно Ханна в спектральной области может быть записано через частотную характеристику прямоугольного окна:

$$W_{\text{Ханна}}(\nu) = \frac{1}{2} W_{\text{пр}}(\nu) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

где $W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu)$.

Как нетрудно видеть, у окна Ханна всего три ненулевых отсчета ДПФ на одном периоде:

$$\tilde{W}_{\text{Ханна}}[n] = \frac{1}{N} W_{\text{Ханна}}[n] = \begin{cases} 0,5, & \text{при } n = mN, m \in \mathbb{Z}, \\ -0,25, & \text{при } n = \pm 1 + mN, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$



Основные характеристики окна Ханна длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = 4/N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = 1,44/N$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет $-31,5$ дБ;
- скорость спада боковых лепестков 18 дБ / октава.

Окно Хэмминга

Окно Хэмминга

Американский математик Ричард Уэсли Хэмминг, известный своими работами по теории информации, предложил использовать окно следующего вида:

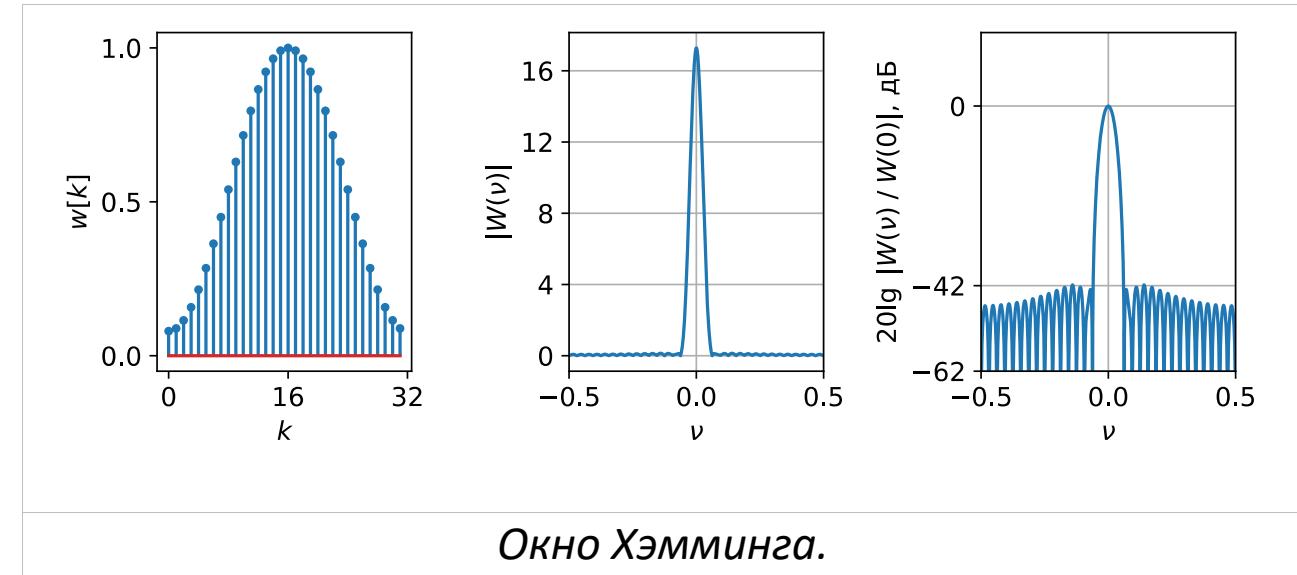
$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Множители 0,54 и 0,46 позволяют практически полностью устраниТЬ максимальный боковой лепесток.

Используя теорему смещения для ДВПФ, получаем частотную характеристику окна Хэмминга

$$W_{\text{Хэмминга}}(\nu) = 0,54W_{\text{пр}}(\nu) - 0,23W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,23W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

где $W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu)$.

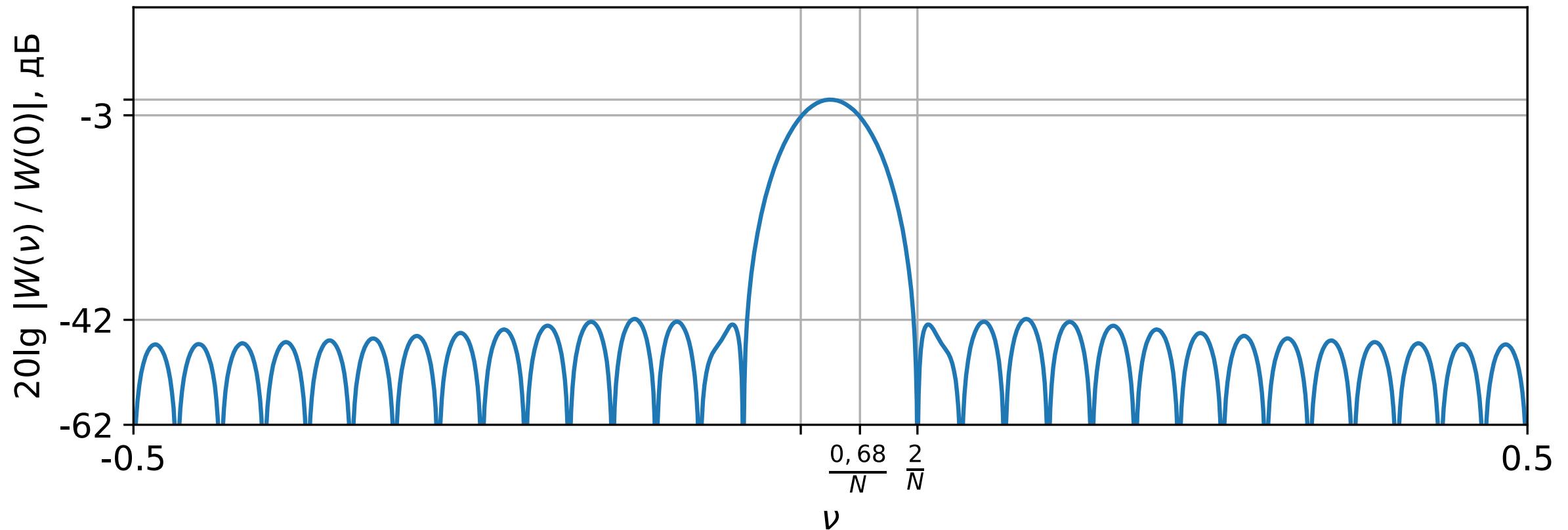


Окно Хэмминга.

Основные характеристики окна Хэмминга длиной N :

- ширина главного лепестка на нулевом уровне $\Delta\nu = 4/N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta\nu = 1,36/N$;
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет -42 дБ;
- скорость спада боковых лепестков 6 дБ / октава,
- коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}} = -1,78$ дБ.

Окно Хэмминга



Определение параметров АЧХ окна Хэмминга по графику.

- ширина главного лепестка на нулевом уровне
 $\Delta v = 4/N$;
- полоса по уровню -3 дБ составляет $\Delta v = 1,36/N$;
- уровень максимального бокового лепестка
относительно главного составляет -42 дБ;

Окно Блэкмана

Окно Блэкмана

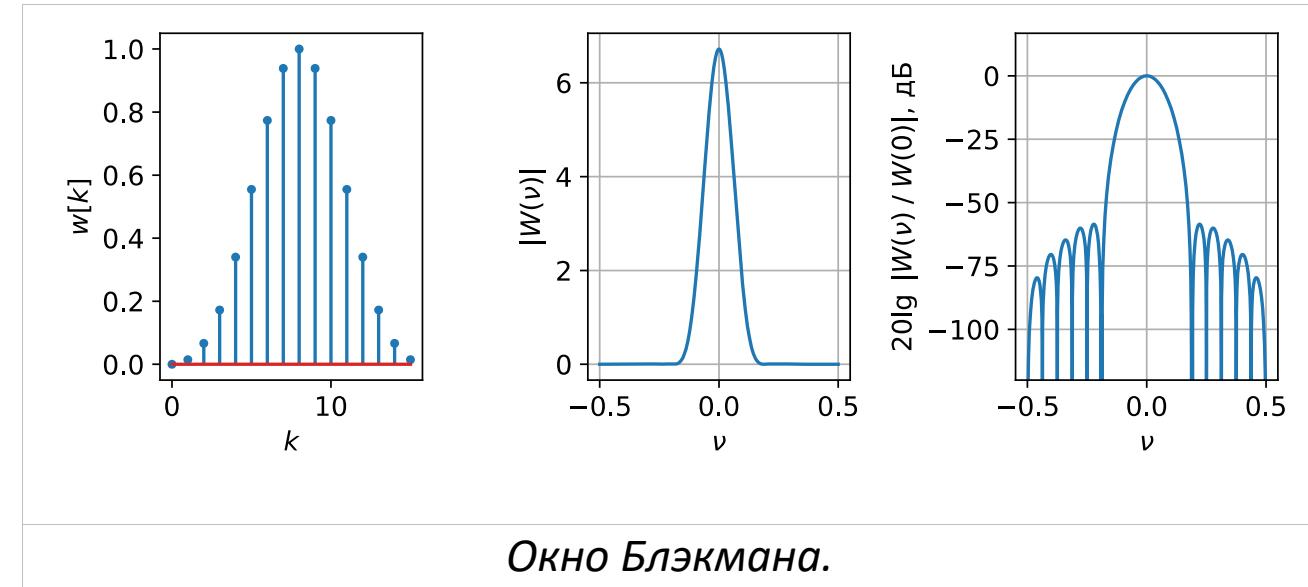
Окно Блэкмана имеет следующий вид:

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

ДВПФ может быть выражено через спектр прямоугольного окна:

$$\begin{aligned} W_{\text{Блэкмана}}(\nu) &= 0,42W_{\text{пр}}(\nu) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + \\ &+ 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{2}{N}\right) + 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{2}{N}\right). \end{aligned}$$

Окно Блэкмана обладает низким максимальным уровнем боковых лепестков относительно главного (-58 дБ), но при этом ширина главного лепестка на нулевом уровне составляет $\Delta\nu = 6/N$ (6 бин).



Условия различения соседних гармонических компонент

Условия различения соседних гармонических компонент

одинаковой амплитуды

Достаточно близкие спектральные компоненты могут оказаться неразличимыми из-за слияния главных лепестков их максимумов.

Рассмотрим условия, которые позволяют сделать выводы о различии соседних спектральных компонент по заданному расстоянию между их относительными частотами $\Delta\nu_{1,2}$ и известным характеристикам главного лепестка окна.

а) Слияние компонент при $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$.

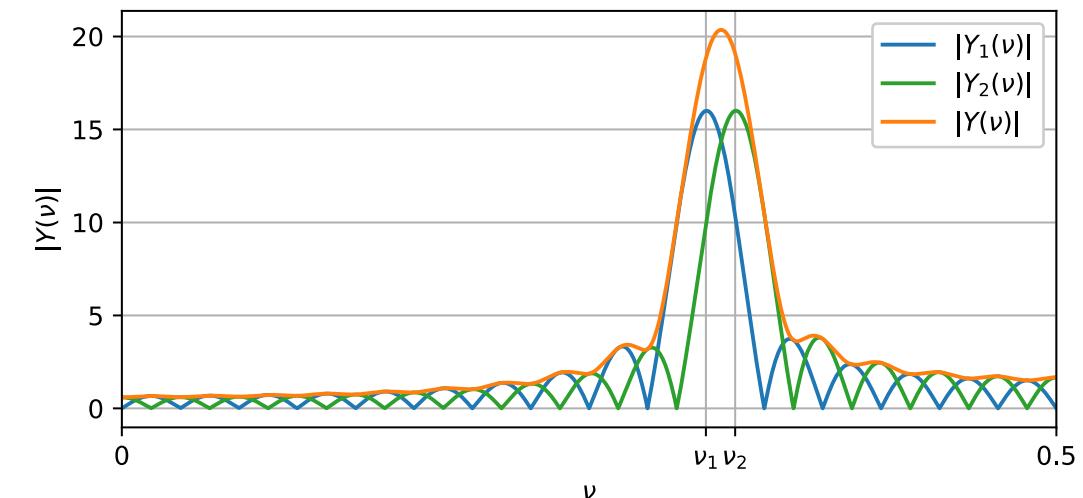
Если $\Delta\nu_{1,2}$ меньше ширины главного лепестка на уровне половинной мощности $\Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ ($10\lg(0.5) \approx -3\text{дБ}$), то спектральные компоненты, как правило, неразрешимы и спектральные пики сольются в один.

Пример. На рисунке приведены ДВПФ $Y(\nu)$, $Y_1(\nu)$ и $Y_2(\nu)$

$$\text{последовательностей } y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32}k\right)w[k],$$

$$y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{10,5}{32}k\right)w[k] \text{ и их суммы } y[k] = y_1[k] + y_2[k] \text{ для}$$

прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин ДПФ).



Поскольку $\Delta\nu_{1,2} = 0,5 / N$, то $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ и спектральные максимумы сливаются в один. Две спектральные компоненты неразличимы на графике спектра.

Условия различения соседних гармонических компонент

б) Различимость компонент при $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

В ДПФ анализе условием различимости спектральных компонент служит ширина главного лепестка по уровню половинной амплитуды $\Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ ($20\lg(0.5) \approx -6\text{дБ}$).

Это связано с тем, что если вклад в когерентное суммирование вносят две спектральные компоненты одной амплитуды, то усиление от каждой компоненты в точке их пересечения не должно превышать 0,5 от их максимумов.

Таким образом, различимость спектральных компонент будет гарантирована при $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

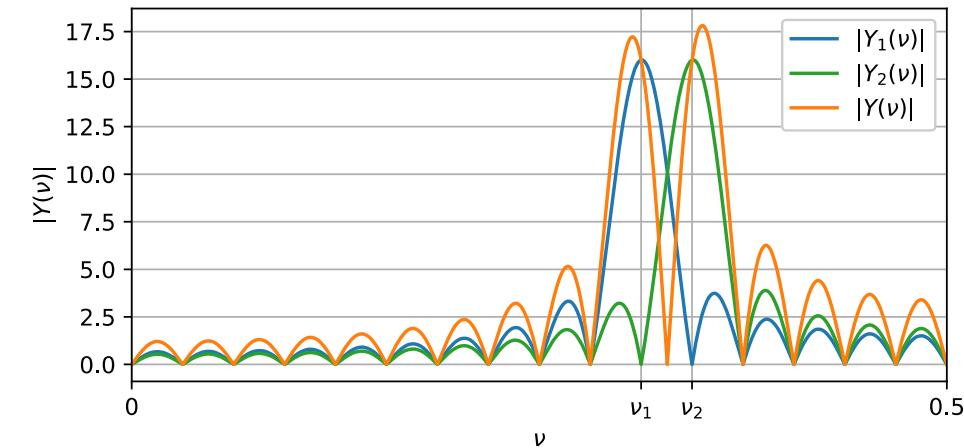
Пример. На рисунке приведены приведены ДВПФ $Y(v)$, $Y_1(v)$

и $Y_2(v)$ последовательностей $y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32}k\right)w[k]$,

$y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{11}{32}k\right)w[k]$ и их суммы $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ для

прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого

$\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин), $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$ (1,2 бина).



В этом случае $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$, и $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

Две спектральные компоненты оказались различимы на графике спектра, однако, как будет показано далее, гарантировать эту различимость по расстоянию между гармониками нельзя.

Заметим, что здесь наблюдается значительное смешение максимумов, вызванное влиянием боковых лепестков соседних спектральных компонент. Применение оконных функций, отличных от прямоугольной, могло бы ослабить этот эффект, но при этом может привести к неразличимости компонент из-за широкого главного лепестка.

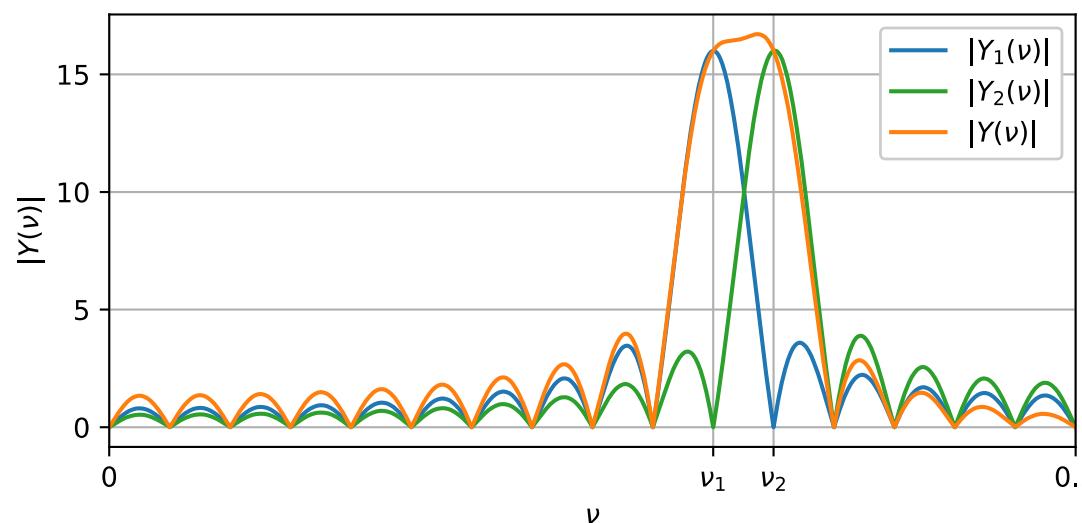
Условия различения соседних гармонических компонент

Пример. На рисунке приведены приведены ДВПФ $|Y(\nu)|$, $|Y_1(\nu)|$ и $|Y_2(\nu)|$ последовательностей

$y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32}k + 0,58\pi\right)w[k]$, $y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{11}{32}k\right)w[k]$ и их суммы $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ для прямоугольного окна $w[k]$ длиной $N = 32$, для которого $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ (0,89 бин), $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$ (1,2 бина).

Однако из-за сдвига $y_1[k]$ по фазе в данном случае действительные и мнимые части спектральных компонент сложились так, что спектральные максимумы не различимы. При этом мы не могли гарантировать их различимость.

Заметим, что, если условие $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ выполняется (с некоторым запасом) то мы можем гарантировать различимость спектральных компонент в спектре.



В этом случае также $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$, и $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$$x_1[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(17\pi k / 64),$$

$$x_2[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(21\pi k / 64).$$

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 64-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы соседние спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

№2. Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения (различия соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды) не менее $\Delta\nu = 0,0075$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$. Используя данные из таблицы приложения к лекции, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу:

- а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

№3. Предположим, что требуется провести ДПФ-анализ сигнала $x[k]$ с использованием окна Ханна $w[k]$.

Размерность ДПФ, длина окна и длина сигнала равны N . Доказать, что для вычисления ДПФ $Y[n]$ сигнала $x[k]w[k]$ достаточно провести $2N$ сдвигов на один двоичный разряд и $2N$ сложений для коэффициентов ДПФ $X[n]$ последовательности $x[k]$, т.е. показать, что

$$Y[n] = \frac{1}{2} \left(X[n] - \frac{1}{2} (X[n-1]_N + X[n+1]_N) \right).$$

Приложение

Приложение. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10
Flattop	10	зависит от длины окна		-0,02

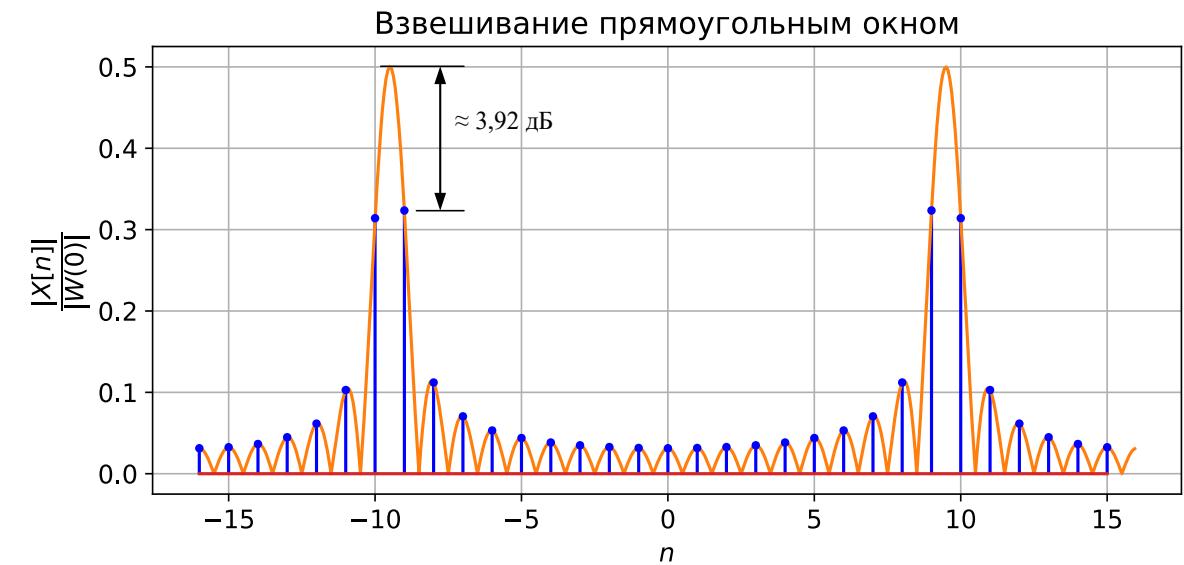
название окна	полоса по уровню –3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню –6 дБ (в бинах ДПФ)	ЭШП (в бинах ДПФ)	$\delta = \frac{\Delta v_{\text{ш}} - \Delta v_{-3\text{дБ}}}{\Delta v_{-3\text{дБ}}}$	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1,00	0,124	1
Бартлетта	1,28	1,78	1,33	0,039	0,5
Ханна	1,44	2,00	1,50	0,042	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	1,36	0,023	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	1,73	0,055	0,42
Flattop	3,74	4,60	3,77	0,008	0,21557895

Лекция 11 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

15 апреля 2025 г.

7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ (продолжение).

- Оценка амплитуд компонент: усиление преобразования, паразитная амплитудная модуляция спектра, коэффициент амплитудной модуляции, окно с плоской вершиной.
- Примеры параметрических окон: окно Чебышева, окно Кайзера.



Пример задачи оценивания параметров сигнала

Пример задачи оценивания параметров сигнала

Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \sin\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; $m = 1, 2, \dots, \lfloor 0,5N-1 \rfloor$ – целые числа, определяющие нормированные частоты $v_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ. Требуется выразить неизвестные амплитуды A_m и фазы φ_m через отсчеты ДПФ данной последовательности.

Решение.

$$\begin{aligned}\tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M A_m \sin\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right) \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2j} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} mk + \varphi_m \right)} - \frac{1}{2j} e^{-j \left(\frac{2\pi}{N} mk + \varphi_m \right)} \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} \left(-j \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} (m-n)k + \varphi_m \right)} + j \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \left(\frac{2\pi}{N} (m+n)k + \varphi_m \right)} \right)\end{aligned}$$

Рассмотрим суммы вида

$$S_1 = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} (m-n)k + \varphi_m \right)} = e^{j \varphi_m} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)k} \text{ отдельно.}$$

Определим их по формуле суммы геометрической прогрессии $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{N-1}$,

$$\text{где } b_1 = e^{j \varphi_m} \text{ (слагаемое при } k=0\text{), } q = e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)}. \text{ Если } q \neq 1, \text{ то}$$
$$S_1 = b_1 \frac{1 - q^N}{1 - q} = e^{j \varphi_m} \frac{1 - e^{j 2\pi (m-n)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)}} = 0.$$

Если $q = 1$ (что выполнено при $m-n$ кратном N):

$$S_1 = b_1 N = N e^{j \varphi_m}.$$

Заметим, что при $n \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right]$ условие $q = 1$ выполняется

при $m=n$. Тогда $\tilde{X}[m] = \frac{A_m}{2} e^{j(\varphi_m - \pi/2)}$ при $m \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right]$.

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m = 2 |\tilde{X}[m]|; \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m] + \pi/2, \quad m \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right].$$

Оценка амплитуд гармоник

Оценка амплитуд гармоник.

Предположим, что некоторая последовательность анализируется с применением окна $w[k]$ и имеет вид

$$x[k] = A \exp(j2\pi v_k k) \quad (1)$$

где

- v_k – нормированная частота гармонической компоненты (известна),
- A – ее амплитуда (неизвестна).

Амплитуду A требуется оценить, используя ДПФ-анализ.

Обозначим

- $W(v)$ – ДВПФ окна $w[k]$,

$$W(v) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \exp(-j2\pi v k),$$

- $X_w(v)$ – ДВПФ $x[k]w[k]$ (взвешенного окном сигнала),

$$X_w(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]w[k] \exp(-j2\pi v k).$$

С учетом (1)

$$X_w(v) = A \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j2\pi v_k k) w[k] \exp(-j2\pi v k).$$

На частоте v_k

$$X_w(v_k) = A \sum_{k=0}^{N-1} w[k] = AW(0). \quad (2)$$

Из (2) следует, что в отсутствии шума определить неизвестную амплитуду можно по формуле

$$A = X_w(v_k) / W(0). \quad (3)$$

Значение $W(0)$ отражает величину **когерентного усиления по амплитуде**.

название окна	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	1
Бартлетта	0,5
Ханна	0,5
Хэмминга	0,54
Блэкмана	0,42

Оценка амплитуд гармоник

Пример. Оценка амплитуд гармоник.

Предположим, что анализируемая последовательность имеет вид

$$x[k] = A \cos(2\pi\nu_k k)$$

где $\nu_k = 0,2$, A – неизвестная амплитуда, которую нужно оценить. Анализ осуществляется по последовательности $y[k] = x[k]w[k]$, где $w[k]$ – окно Блэкмана длиной $N = 100$.

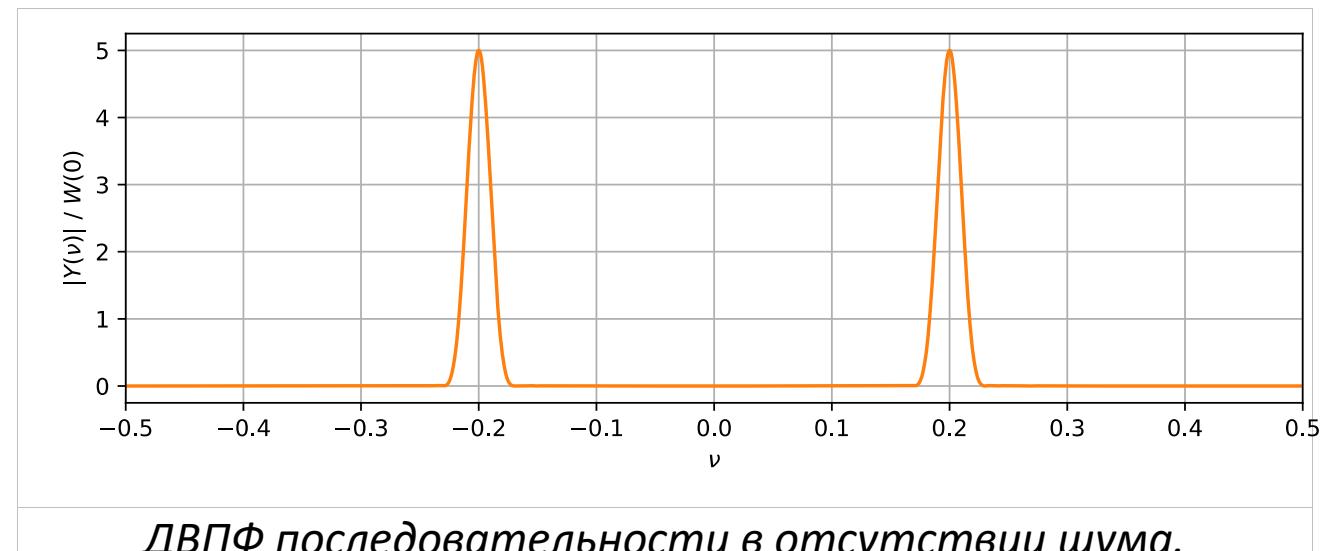
Заметим, что

$$A \cos(2\pi\nu_k k) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi\nu_k k) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi\nu_k k)$$

Из предыдущей лекции спектр окна Блэкмана:

$$\begin{aligned} W(\nu) &= 0,42W_{\text{пр}}(\nu) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + \\ &\quad + 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{2}{N}\right) + 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{2}{N}\right), \\ W_{\text{пр}}(\nu) &= \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

Функция $W_{\text{пр}}(\nu)$ в точках $\nu = \pm 1/N$ и $\nu = \pm 2/N$ равна нулю, $W_{\text{пр}}(0) = N$ (значение определяется в пределе). Тогда $W(0) = 0,42N$.



ДВПФ последовательности в отсутствии шума.

На рисунке показан график модуля ДВПФ с нормировкой на величину когерентного усиления $W(0) = 0,42N$. По графику можно сделать оценку $A \approx 10$ ($A/2 \approx 5$).

Паразитная амплитудная модуляция спектра

Паразитная амплитудная модуляция спектра.

Паразитная амплитудная модуляция $K_{\text{мод}}$ характеризует амплитуду гармонического сигнала, которую можно оценить с помощью ДПФ анализатора с оконной функцией. В самом неблагоприятном случае частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ. Пусть спектр (ДВПФ) оконной функции $W(v)$. Величина $K_{\text{мод}}$, выраженная в децибелах, определяется как

$$K_{\text{мод}} = 20 \lg \left| \frac{W(0,5/N)}{W(0)} \right|.$$

Для прямоугольной функции $K_{\text{мод}} = -3,92 \text{ дБ}$, для окна Бартлетта $K_{\text{мод}} = -1,82 \text{ дБ}$, для окна Хэмминга $K_{\text{мод}} = -1,78 \text{ дБ}$. При этом для окна с плоской вершиной (flattop) $K_{\text{мод}} = -0,02 \text{ дБ}$. Заметим, что для снижения этой погрешности можно также воспользоваться методом дополнения нулями анализируемой последовательности.



Эффект искажения амплитуд из-за паразитной амплитудной модуляции спектра.

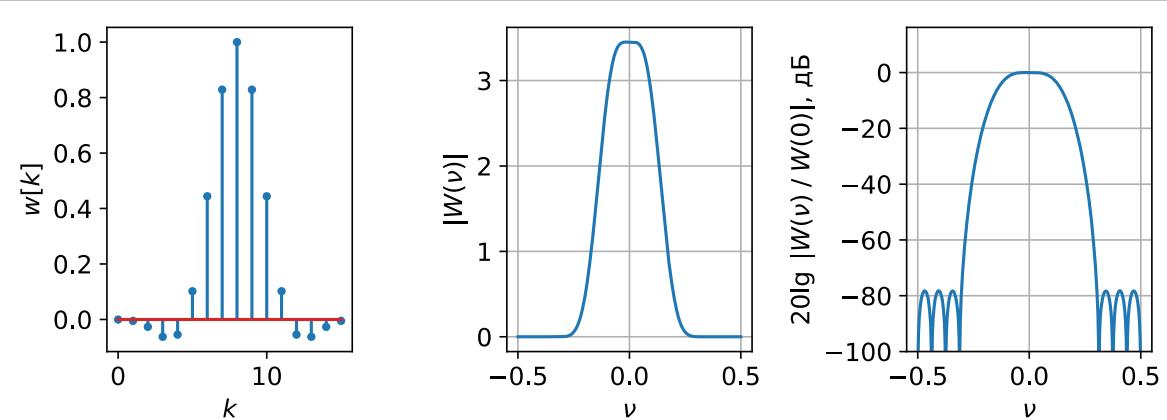
Окно с плоской вершиной

Окно с плоской вершиной

Как было показано ранее, форма главного лепестка оконной функции приводит к искажению амплитуд гармоник, частоты которых не соответствуют бинам ДПФ. Если требуется уменьшить этот эффект, то следует использовать окно с плоской вершиной:

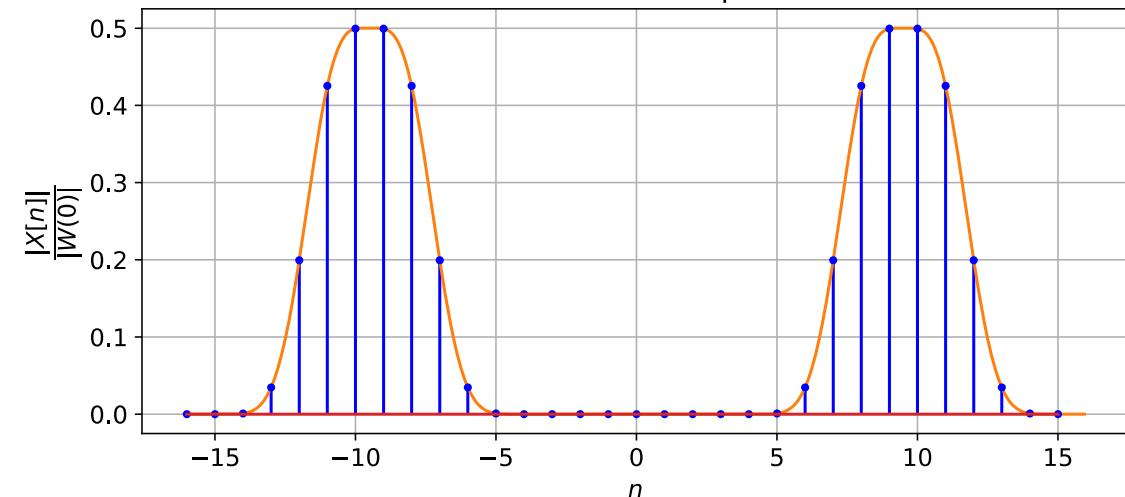
$$w_{flattop}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^4 (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

где $a_0 = 0,21557895$, $a_1 = 0,41663158$, $a_2 = 0,277263158$, $a_3 = 0,083578947$, $a_4 = 0,006947368$. Заметим, что временная функция $w_{flattop}[k]$ может принимать отрицательные значения. Как было ранее отмечено, для окна с плоской вершиной $K_{\text{мод}} = -0,02$ дБ. Это означает, что использование этого окна позволяет минимизировать эффект паразитной амплитудной модуляции.



Окно с плоской вершиной

Взвешивание flattop окном



Исключение эффекта искажения амплитуд из-за паразитной амплитудной модуляции спектра.

Окно Чебышёва (равноволновое окно)

Окно Чебышёва (равноволновое окно)

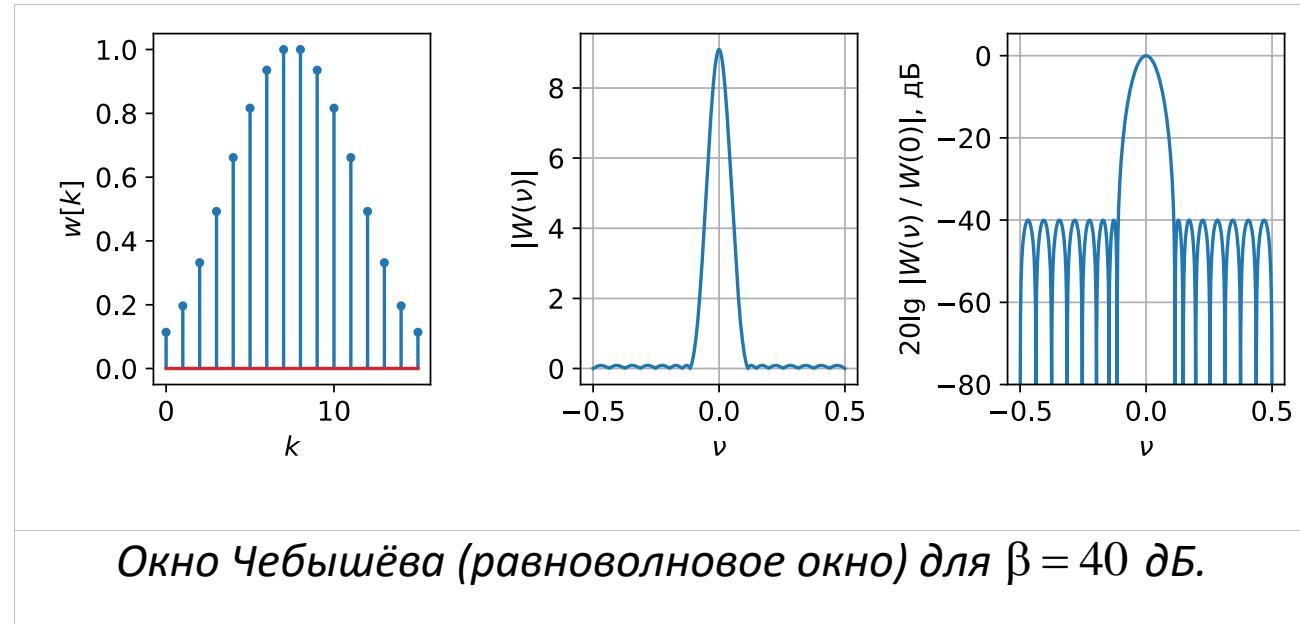
Частотная характеристика окна Чебышева длины N задается формулой

$$W_{\text{Чебышева}}(\nu) = \frac{\cos((N-1)\alpha \operatorname{arccos}(\alpha \cos \pi \nu))}{\operatorname{ch}((N-1)\operatorname{arch} \alpha)}, \quad \alpha = \operatorname{ch} \frac{\operatorname{arch} 10^{\beta/20}}{N-1},$$

где β — разность уровней главного и боковых лепестков в дБ. Во временной области окно Чебышева можно получить, взяв обратное ДПФ для выборок $W_{\text{Чеб.}}(\nu_n)$, таких, что $\nu_n = n / N$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

У окна Чебышева все боковые лепестки имеют одинаковый уровень, спада боковых лепестков по мере удаления от главного у него нет.

Однако из всех N — точечных дискретных окон с уровнем боковых лепестков относительно главного, не превосходящем β дБ, оно имеет самый узкий главный лепесток.



Окно Чебышёва (равноволновое окно) для $\beta = 40$ дБ.

Окно Кайзера

Окно Кайзера

Джеймс Кайзер (Лаборатории Белла, MIT) предложил использовать окна следующего вида

$$w_{\text{Кайзера}}[k] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2k}{N} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

где N — длина окна, β — параметр окна Кайзера, $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, которая может быть вычислена с помощью быстро сходящегося степенного ряда (обычно достаточно $L < 25$)

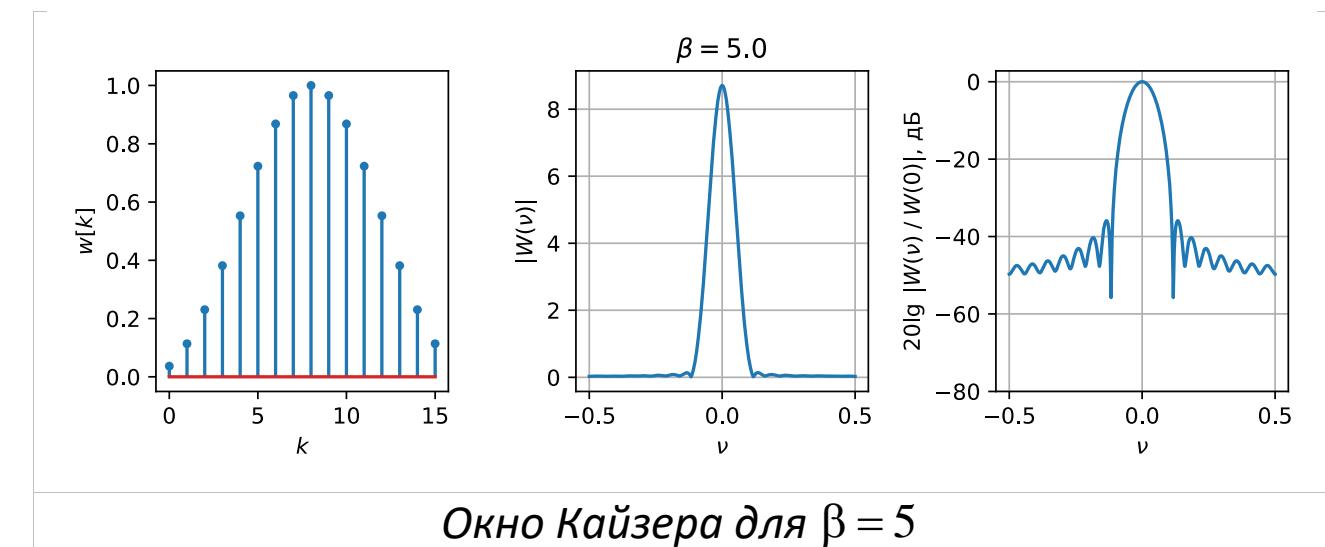
$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^L \left(\frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2.$$

Варьируя β и N , можно найти компромисс между относительным уровнем боковых лепестков окна и шириной главного. Характерно то, что относительный уровень боковых лепестков не зависит от длины окна, и

определяется лишь параметром β . Кайзер и Шафер получили следующие эмпирические зависимости:

$$\beta = \begin{cases} 0,12438(a+6,3), & 60 < a \leq 120, \\ 0,76609(a-13,26)^{0.4} + 0,09834(a-13,26), & 13,26 < a \leq 60, \\ 0, & a \leq 13,26, \end{cases}$$
$$N \approx \frac{24\pi(a+12)}{155\Delta\nu} + 1,$$

где a — уровень боковых лепестков относительно уровня главного в дБ, $\Delta\nu$ — ширина главного лепестка окна на нулевом уровне.



Окно Кайзера для $\beta = 5$

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \cos\left(2\pi \frac{m}{N} k + \phi_m\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где A_m и ϕ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; $m = 1, 2, \dots, \lfloor 0,5N - 1 \rfloor$ – целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m / N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды A_m и фазы ϕ_m через отсчеты ДПФ данной последовательности.

Пример практического применения оценки амплитуд.

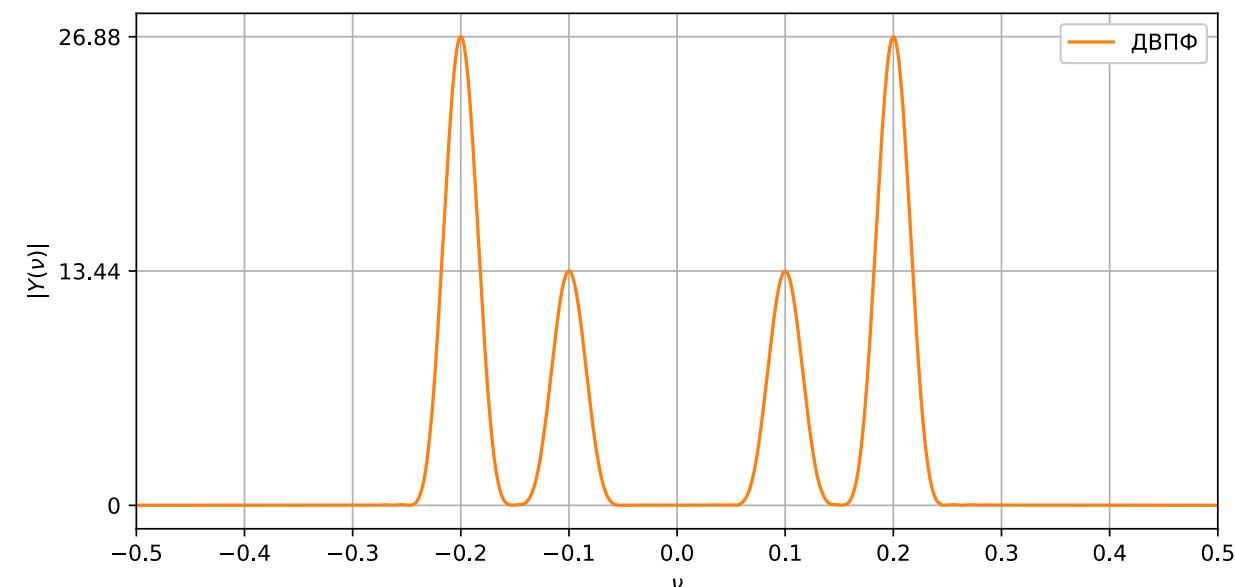
Investigation of the correlations between the field pavement in-place density and the intelligent compaction measure value (ICMV) of asphalt layers

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123439>

№2. На рисунке изображен спектр (ДВПФ) последовательности отсчетов

$$x[k] = A_1 \sin(2\pi\nu_1 k) + A_2 \sin(2\pi\nu_2 k), \nu_1 = 0,1, \nu_2 = 0,2,$$

где A_1 и A_2 – неизвестные амплитуды (положительные числа), взвешенной окном Блэкмана длиной в 64 отсчета. Оцените значения A_1 и A_2 по графику.



Задачи с лекции

Приложение. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10
Flattop	10	зависит от длины окна		-0,02

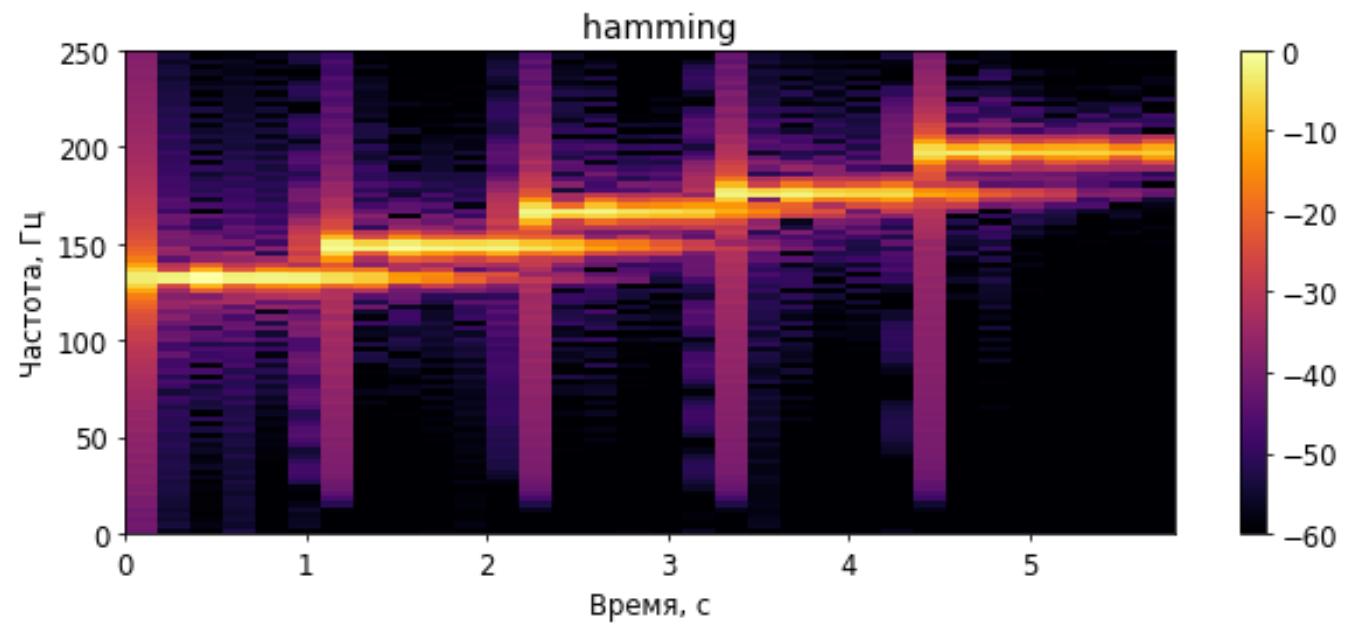
название окна	полоса по уровню –3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню –6 дБ (в бинах ДПФ)	ЭШП (в бинах ДПФ)	$\delta = \frac{\Delta v_{\text{ш}} - \Delta v_{-3\text{дБ}}}{\Delta v_{-3\text{дБ}}}$	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1,00	0,124	1
Бартлетта	1,28	1,78	1,33	0,039	0,5
Ханна	1,44	2,00	1,50	0,042	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	1,36	0,023	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	1,73	0,055	0,42
Flattop	3,74	4,60	3,77	0,008	0,21557895

Лекция 12 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

22 апреля 2025 г.

8. Кратковременное дискретное преобразование

Фурье (STFT). Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Обратимость.



Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

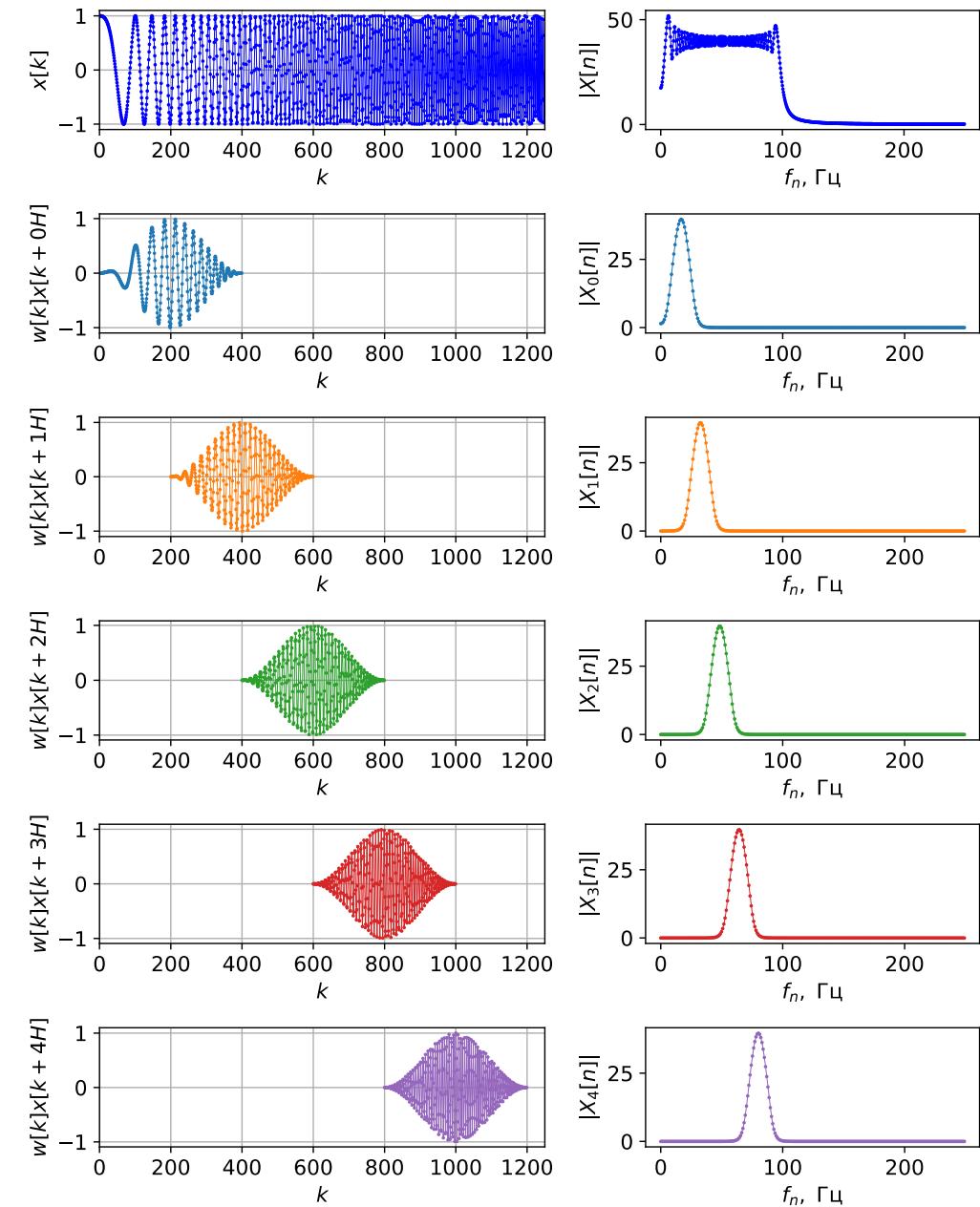
Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).

Кратковременное дискретное преобразование Фурье (Discrete STFT, англ. Discrete Short-time Fourier transform) может задаваться формулой

$$X_m[n] = \sum_{k=mR}^{mR+M-1} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right),$$

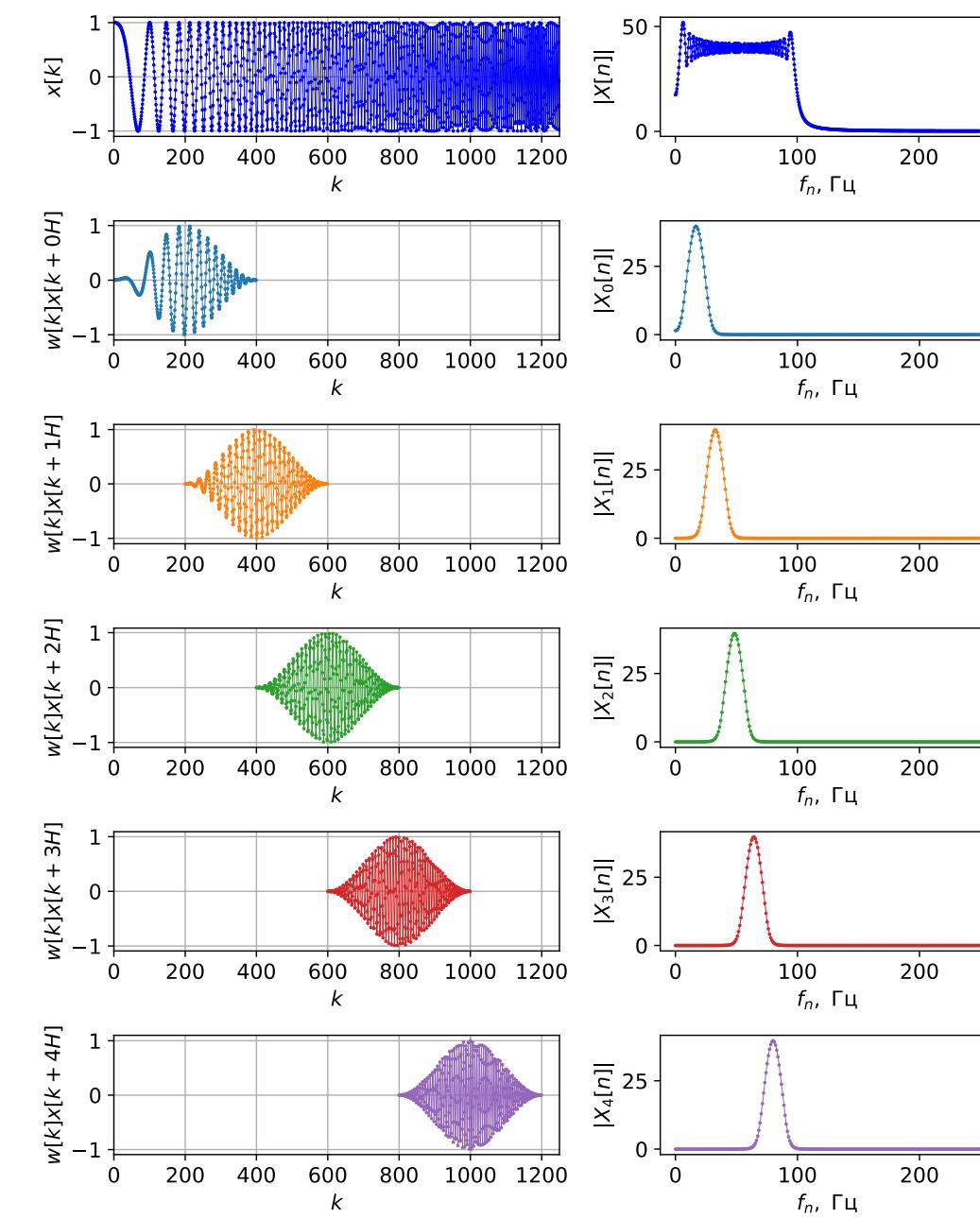
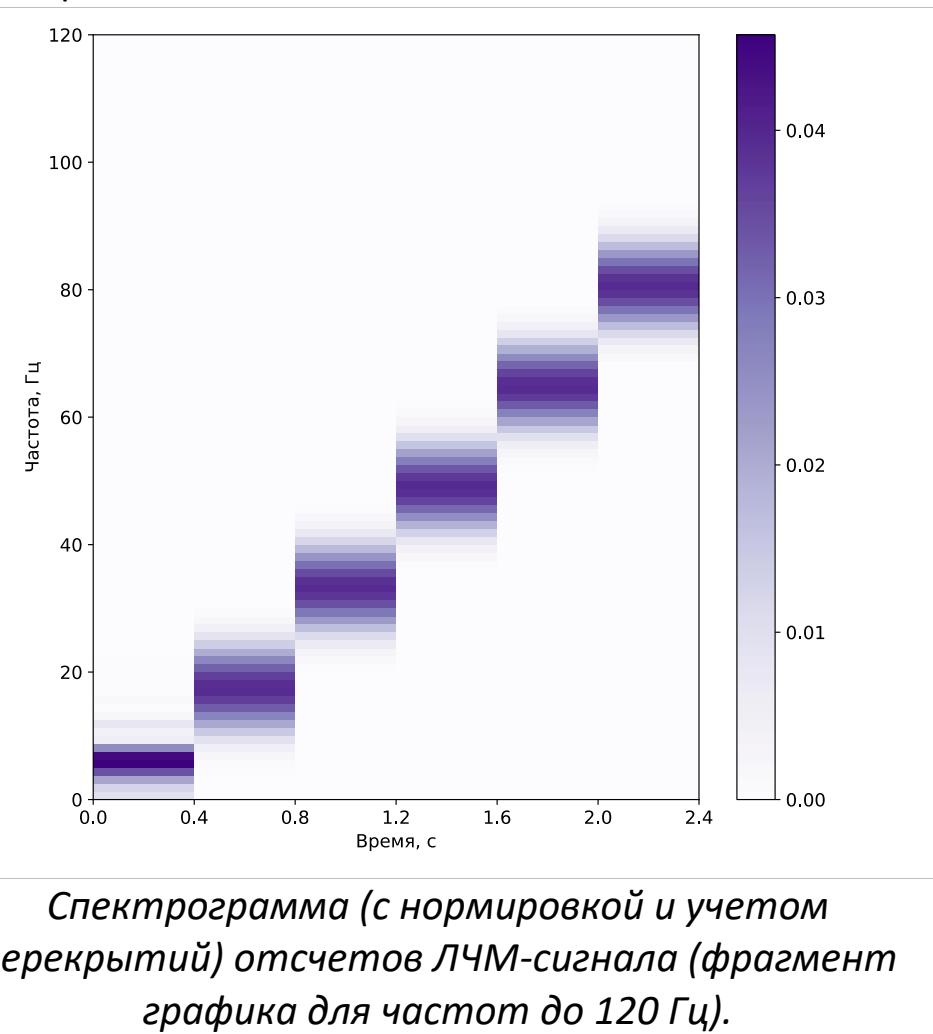
- $w[k]$ — временное окно,
- m — порядковый номер кадра,
- M — длина окна (сегмента),
- N_{FFT} — размерность ДПФ,
- $R = M - L$ — единичный сдвиг окна,
- L — число точек перекрытия.

Это преобразование позволяет осуществлять ДПФ-анализ на коротких интервалах времени. Для графического отображения результатов часто используется представление в виде графика с двумя осями, где по горизонтальной оси отображается время (или номер кадра m), по вертикальной — соответствующие частоты, а цветом — $|X_m[n]|$, $|X_m[n]|^2$, или фазовая часть $X_m[n]$.



Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

Пример. Рассмотрим результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна, $M = 400$, $L = 200$, $N_{\text{FFT}} = M$, $f_{\text{д}} = 500$ Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц.



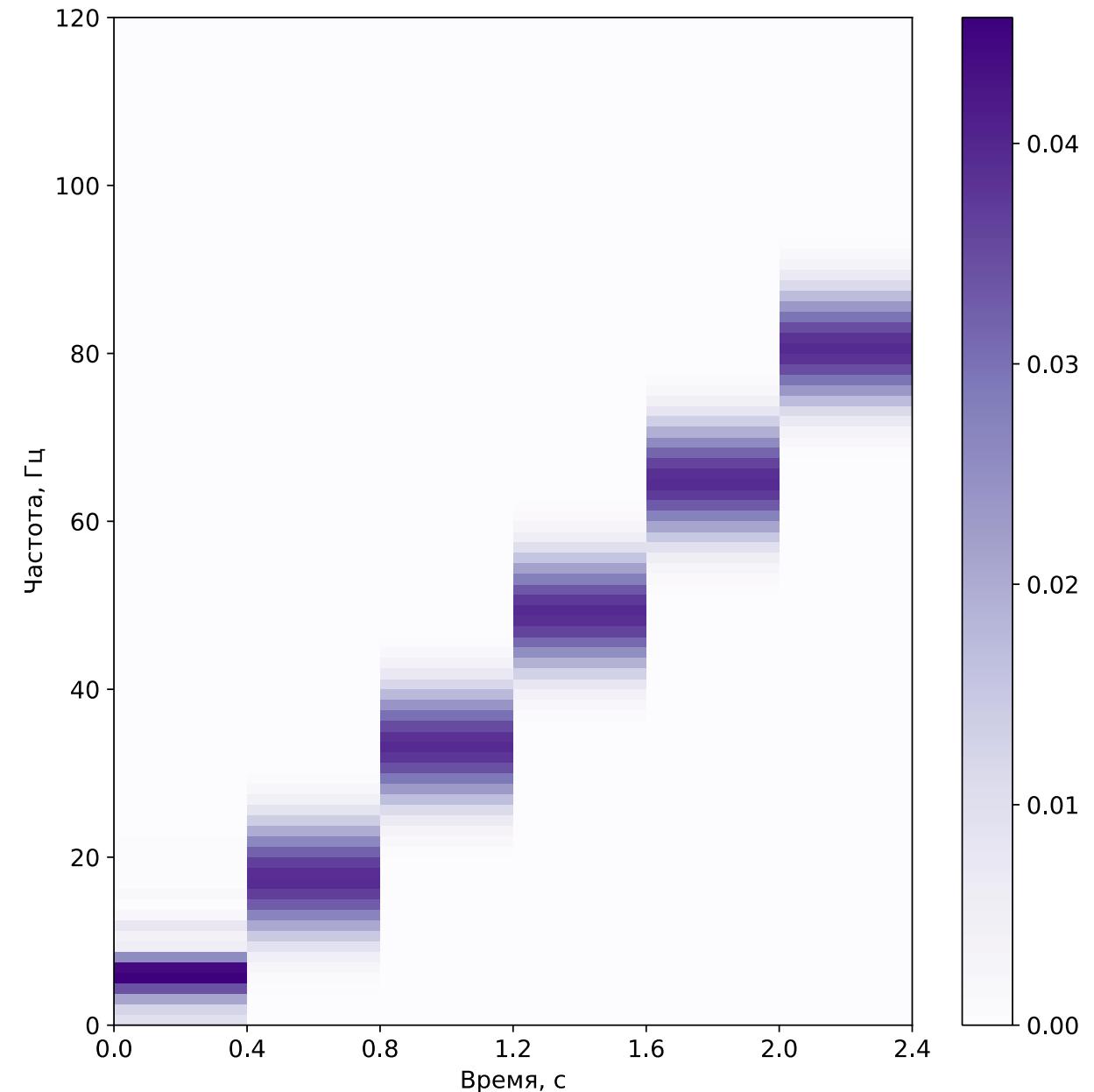
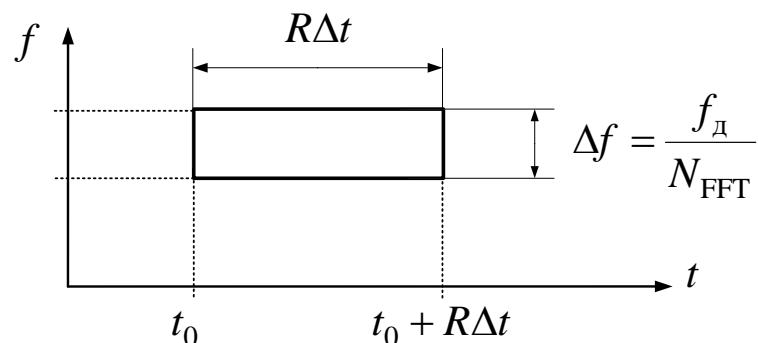
Разрешение по времени и по частоте для STFT

Разрешение по времени и по частоте для STFT

Результат кратковременного дискретного преобразования Фурье является дискретным по времени и по частоте. Если рассматривать вопрос о разрешении по времени и по частоте, обусловленный дискретностью сетки времени и частот, то можно установить следующее.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **времени** равна длине единичного сдвига окна в секундах, т.е. $R\Delta t$. В приведенном ранее примере $R\Delta t = 0,4$ с.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **частот** равно расстоянию между отсчетами отдельных ДПФ, входящих в формулу STFT: $\Delta f = f_d / N_{\text{FFT}}$, где N_{FFT} — размерность ДПФ.



Разрешение по времени и по частоте для STFT

На возможность различения гармонических компонент, также как и в ДПФ, здесь также влияет ширина главного лепестка окна (на уровне -3 дБ и -6 дБ). Она зависит от

- длины окна M ,
- вида окна.

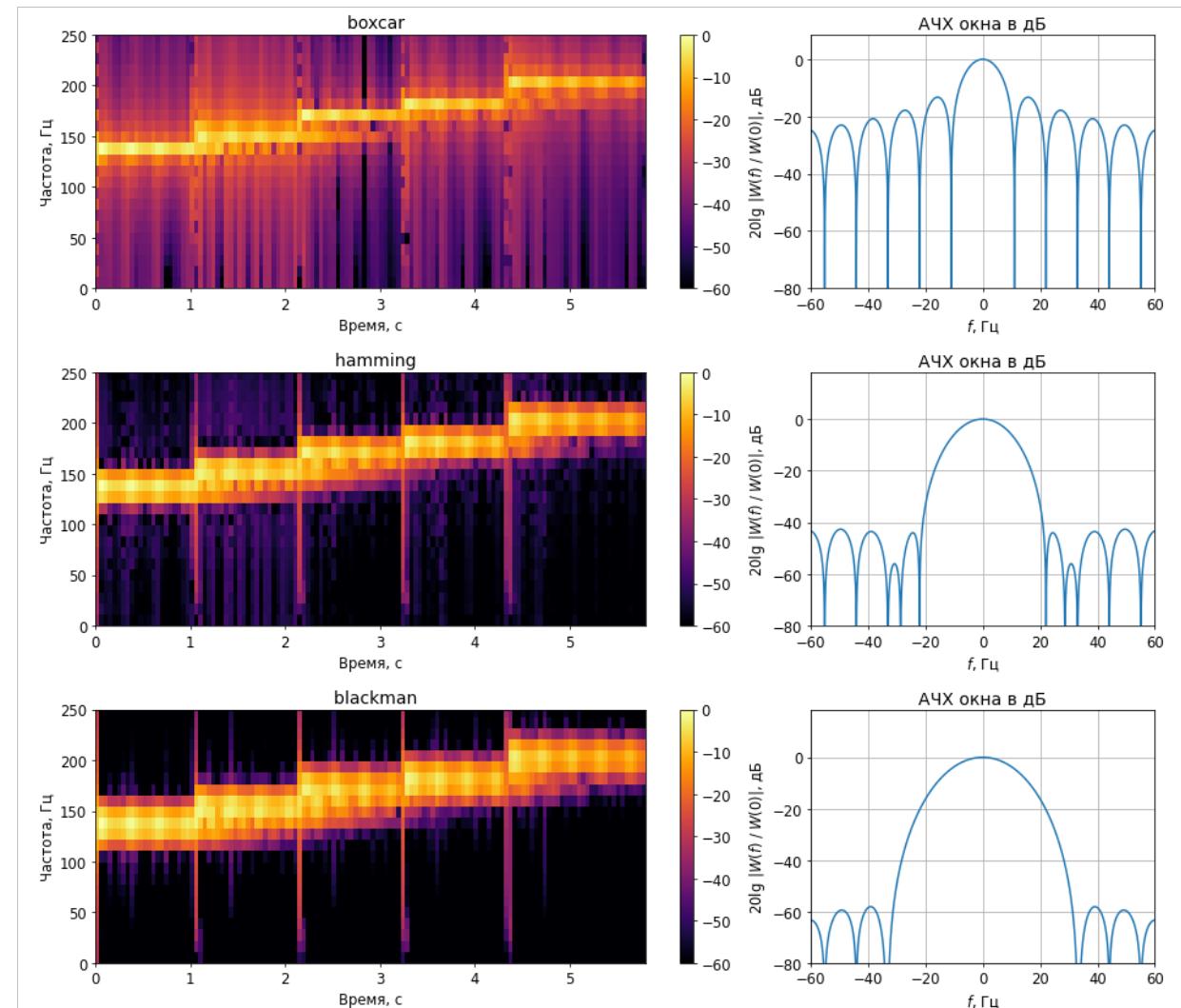
Необходимо учитывать, что увеличивая длину окна M мы улучшаем разрешение по частоте (главный лепесток становится уже), но вместе с тем, ухудшаем разрешение по времени (ширина прямоугольника по времени на графике больше).

Пример. В качестве сигнала используются отсчеты из WAV файла записи сигнала от вибрафона, $f_{\text{д}} = 44100$ Гц, воспроизвелись соседние ноты. Перекрытие сегментов 50%. За 0 дБ взято максимальное значение $|X_m[n]|^2$.

$$R = M - L = M - M / 2 = M / 2.$$

В случае $M = 4000$ ширина главного лепестка у некоторых окон больше требуемой для разрешения соседних нот.

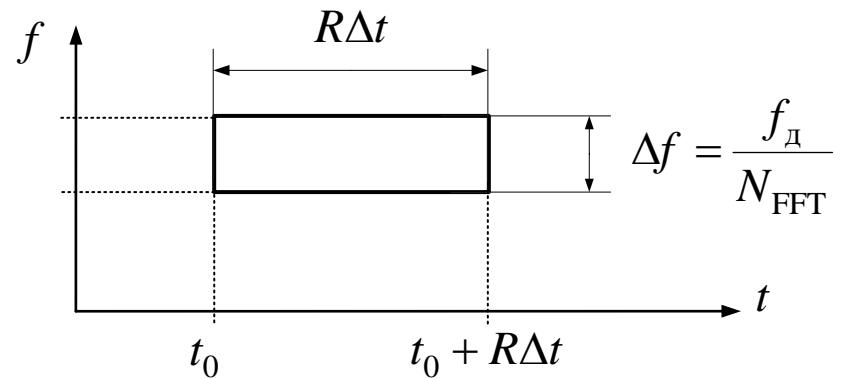
Ширина прямоугольника по времени на графике $R\Delta t \approx 0,04$ с.



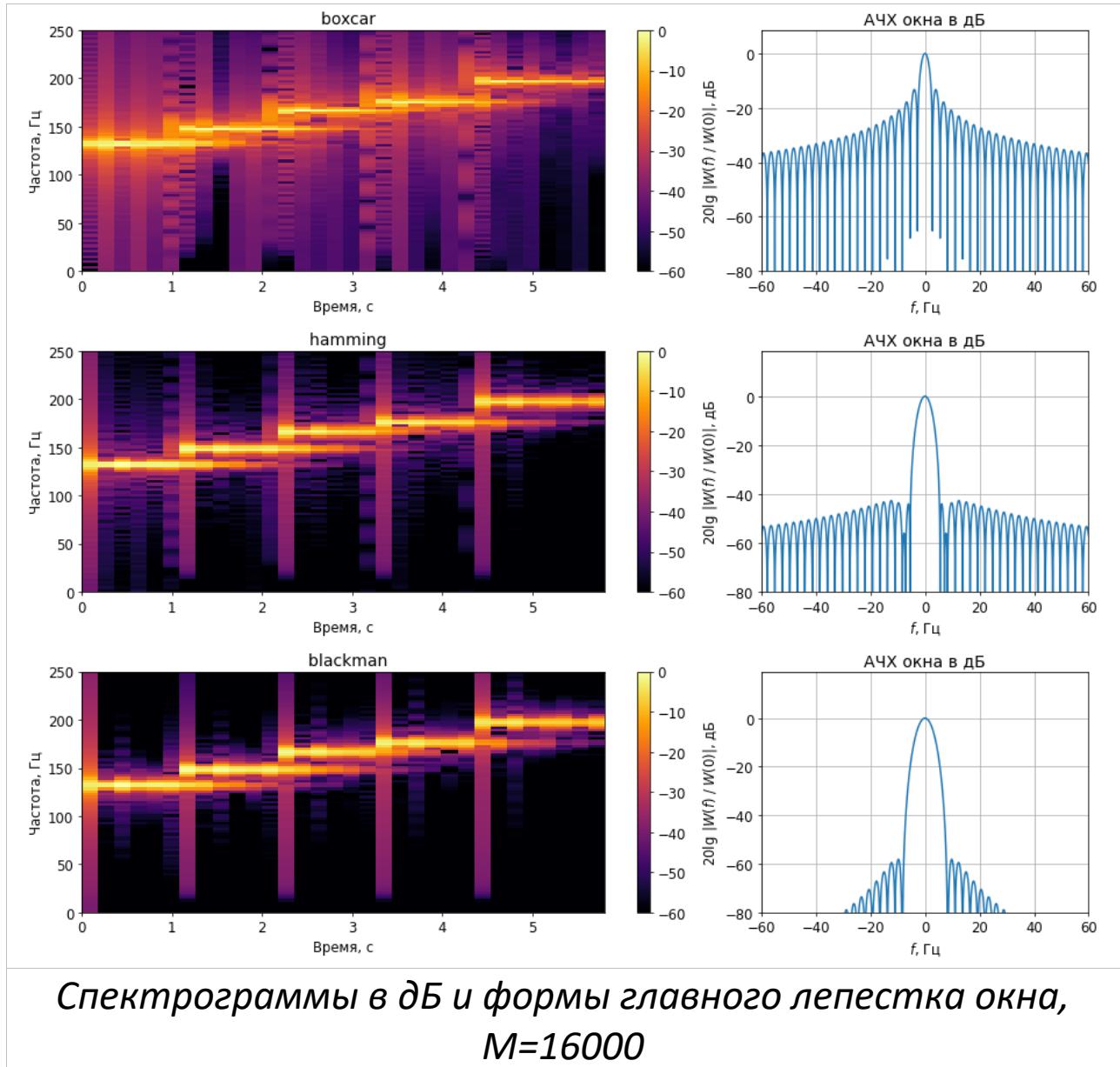
Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна, $M=4000$

Разрешение по времени и по частоте для STFT

В случае $M = 16000$ у всех окон достаточно узкие главные лепестки и соседние ноты различимы. Вместе с тем $R\Delta t = M\Delta t / 2 \approx 0,18$ с. Т.е. увеличивая M мы получили более узкий главный лепесток окна, но вместе с тем, ухудшили разрешение по времени.



Заметим, что $\Delta f = f_{\text{д}} / N_{\text{FFT}}$ (ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси частот) может быть меньше реального разрешения спектральных компонент.



Условия COLA и NOLA

Условия COLA и NOLA

По определению, для окна $w[k]$ выполнено условие **COLA(R)** (Constant OverLap-Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = \text{const } \forall k \in \mathbf{Z}$$

Если выполнено COLA(R), то

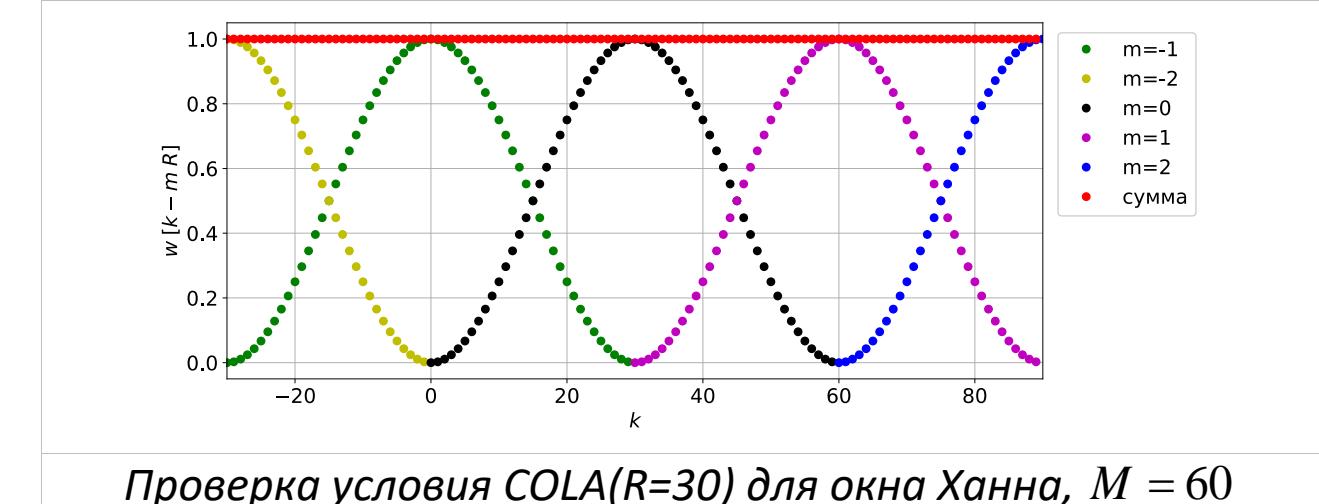
$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = \text{const} \cdot X[n] \\ X[n] &= \text{const} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n]. \end{aligned}$$

Формула означает, что для каждого коэффициента n сумма ДПФ по всем интервалам равна ДПФ всего сигнала.

Если условие COLA(R) выполнено, то по известному STFT гарантировано можно найти исходную последовательность.

Примеры окон и L , для которых условие выполнено:

- прямоугольное окно с перекрытием $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ от M ;
- окно Бартлетта с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ от M ;
- окно Ханна с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ от M ;
- любое окно при $L=M-1$, т.е. COLA(R=1) для любого окна выполнено.



Проверка условия COLA($R=30$) для окна Ханна, $M = 60$

По определению, окно $w[k]$ удовлетворяет условию **NOLA(R)** (Nonzero Overlap Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR]^2 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

Условие **NOLA(R)** необходимо для обратимости STFT.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Предположим, что с помощью окна длиной $M = 8000$ осуществляется вычисление кратковременного дискретного преобразования Фурье последовательности

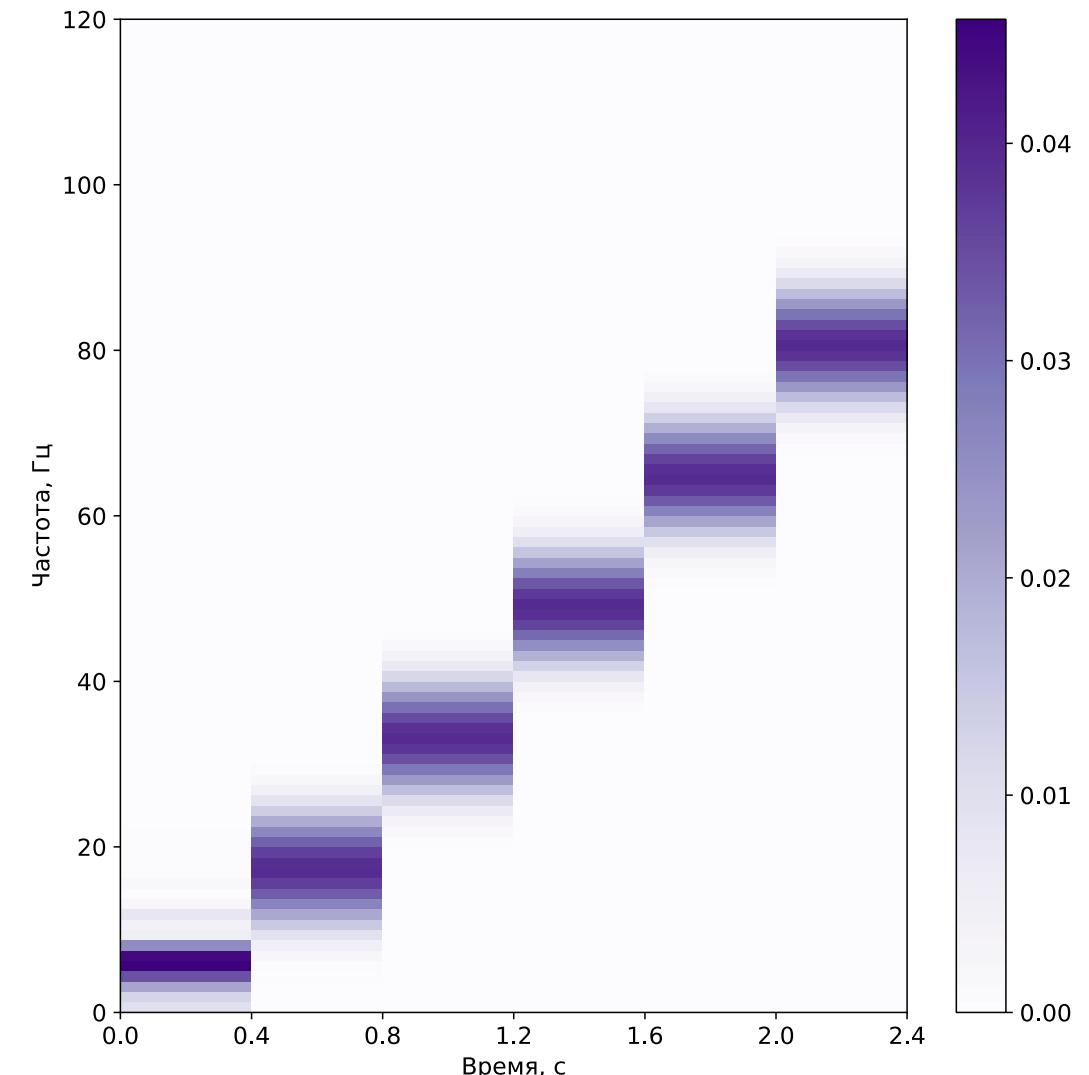
$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_d} k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_d} k + \varphi_2\right)$$

длиной $N = 40000$ отсчетов без перекрытия. Фазы φ_1 и φ_2 заранее неизвестны. Частота дискретизации $f_d = 44100$ Гц.

Указать, начиная с какого значения $\Delta f = |f_1 - f_2|$ можно выбором необходимой размерности ДПФ N_{FFT} обеспечить различимость гармонических компонент на спектограмме. Рассмотреть случаи следующих окон: а) прямоугольного, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

№2. На рисунке представлены результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна, $M = 400$, $L = 200$, $N_{\text{FFT}} = M$, $f_d = 500$ Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала

изменяется от 1 Гц до 80 Гц. Укажите, чему равна ширина прямоугольника (ячейки одного цвета) на графике STFT вдоль оси времени и по оси частот.



Задачи с лекции

№3. Предположим, что для кратковременного дискретного преобразования Фурье используется окно длиной $M = 512$ отсчетов. Проверить, выполнены ли условия COLA(R) и NOLA(R) ($R = M - L$) для случая

- а) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 1$, $L_2 = 128$ (25%), $L_3 = 256$ (50%), $L_4 = 384$ (75%), $L_5 = 511$ и прямоугольного окна;
- б) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 256$ (50%), $L_2 = 511$ и окна Ханна.

* Проверьте результаты с помощью функций
`scipy.signal.check_COLA` и `scipy.signal.check_NOLA`.

Лекция 13 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

29 апреля 2025 г.

9. Быстрое преобразование Фурье.

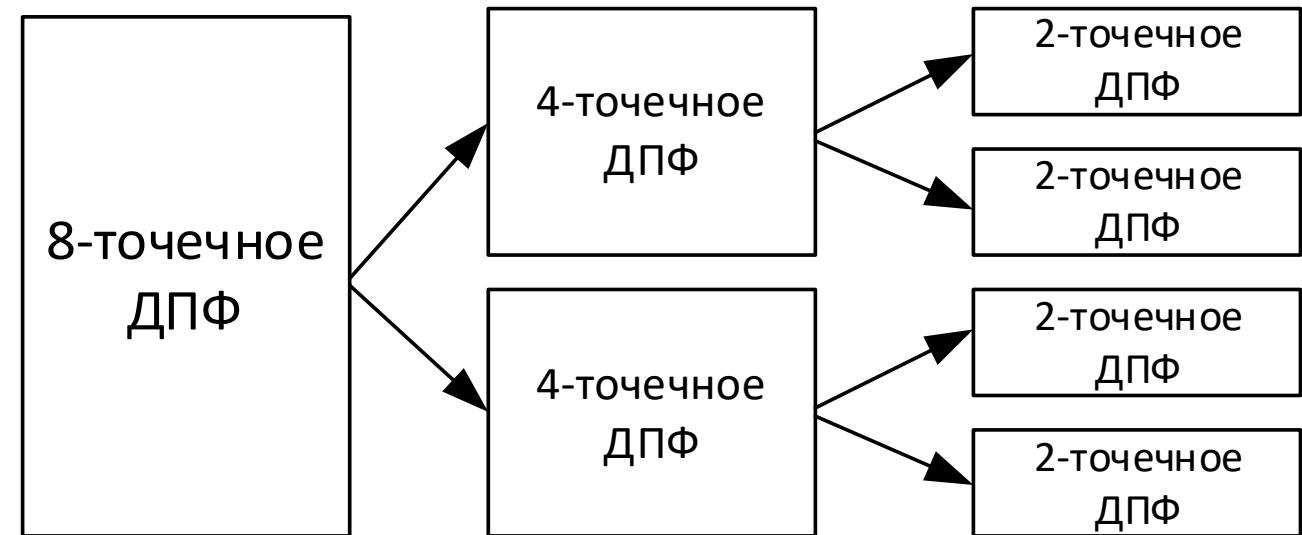
Алгоритм БПФ для составной размерности N.

Алгоритмы БПФ с основанием 2.

Разбиение N-точечного ДПФ на два N/2-точечных.

Алгоритм БПФ с основанием 4.

Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ.



Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

5.4. Быстрое преобразование Фурье.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, англ. *FFT*) представляет собой эффективный метод вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Его эффективность заключается в существенном уменьшении числа операций умножения и суммирования, затрачиваемых для получения всех N коэффициентов ДПФ.

В этой лекции будем использовать запись ДПФ

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right) \quad (1)$$

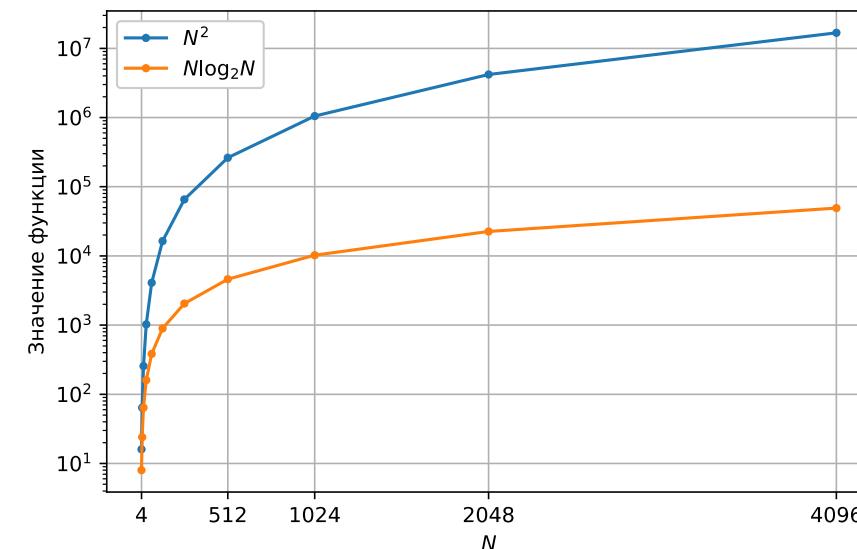
в виде

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk}, \quad (2)$$

где $W_N^{nk} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right)$ – дискретные экспоненциальные функции, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Если все множители W_N^{nk} заранее вычислены, то прямое вычисление всех N коэффициентов ДПФ $X[n]$ по формуле (2) требует порядка N^2 операций вида «комплексное умножение плюс сложение». Асимптотическая сложность алгоритма $O(N^2)$.

Алгоритмы БПФ позволяют заметно сократить число операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ для некоторых размерностей N . Например, если N является степенью числа 2, то асимптотическая сложность алгоритма БПФ $O(N \log_2 N)$.



Алгоритм БПФ для составной размерности N

Алгоритм БПФ для составной размерности N

Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную N -точечную последовательность на две более короткие последовательности, из ДПФ которых можно получить ДПФ исходной N -точечной последовательности.

Предположим, что размерность ДПФ представима составным числом

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_p \quad (3)$$

Рассмотрим случай двух сомножителей:

$$N = N_1 N_2. \quad (4)$$

При этом входной массив из N отсчетов $x[k]$ можно разбить на N_2 блоков по N_1 элементов в каждом.

k_2	k_1					
	0	1	2	...	N_1-1	
0	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$...	$x[N_1-1]$	
1	$x[N_1]$	$x[N_1+1]$	$x[N_1+2]$...	$x[2N_1-1]$	
...	...					
N_2-1	$x[N_1(N_2-1)]$	$x[N_1(N_2-1)+1]$	$x[N_1(N_2-1)+2]$...	$x[N-1]$	

Например, для $N = 35$, $N_1 = 7$, $N_2 = 5$.

k_2	k_1						
	0	1	2	3	4	5	6
0	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$
1	$x[7]$	$x[8]$	$x[9]$	$x[10]$	$x[11]$	$x[12]$	$x[13]$
2	$x[14]$	$x[15]$	$x[16]$	$x[17]$	$x[18]$	$x[19]$	$x[20]$
3	$x[21]$	$x[22]$	$x[23]$	$x[24]$	$x[25]$	$x[26]$	$x[27]$
4	$x[28]$	$x[29]$	$x[30]$	$x[31]$	$x[32]$	$x[33]$	$x[34]$

Расположив блоки один под другим, получаем двумерный массив. Элементы двумерного массива соответствуют одномерному как

$$k = N_1 k_2 + k_1, \quad (5)$$

$$x[k_2, k_1] = x[N_1 k_2 + k_1]. \quad (6)$$

Первое слагаемое соответствует целому числу (k_2) блоков, предшествующих номеру k , а второе слагаемое определяет номер элемента в блоке, содержащем номер k .

Алгоритм БПФ для составной размерности N

ДПФ также представим в виде двумерного массива с индексами n_1 и n_2 , $n_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$;
 $n_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$.

n_1	n_2				
	0	1	2	...	N_2-1
0	$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$...	$X[N_2-1]$
1	$X[N_2]$	$X[N_2+1]$	$x[N_2+2]$...	$X[2N_2-1]$
...	...				
N_1-1	$X[N_2(N_1-1)]$	$X[N_2(N_1-1)+1]$	$X[N_2(N_1-1)+2]$...	$X[N-1]$

Например, для $N = 35$, $N_1 = 7$, $N_2 = 5$.

n_1	n_2				
	0	1	2	3	4
0	$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$	$X[3]$	$X[4]$
1	$X[5]$	$X[6]$	$X[7]$	$X[8]$	$X[9]$
2	$X[10]$	$X[11]$	$X[12]$	$X[13]$	$X[14]$
3	$X[15]$	$X[16]$	$X[17]$	$X[18]$	$X[19]$
4	$X[20]$	$X[21]$	$X[22]$	$X[23]$	$X[24]$
5	$X[25]$	$X[26]$	$X[27]$	$X[28]$	$X[29]$
6	$X[30]$	$X[31]$	$X[32]$	$X[33]$	$X[34]$

Одномерный индекс n может быть представлен в виде

$$n = N_2 n_1 + n_2, \quad (7)$$

$$X[n_1, n_2] = X[N_2 n_1 + n_2]. \quad (8)$$

Для базисной функции ДПФ W_N^{nk} с учетом (5) и (7) можем записать

$$W_N^{nk} = W_N^{(N_2 n_1 + n_2)(N_1 k_2 + k_1)} = W_N^{N n_1 k_2} W_N^{N_1 n_2 k_2} W_N^{N_2 n_1 k_1} W_N^{n_2 k_1}.$$

Учитывая, что

$$W_N^{N n_1 k_2} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} N n_1 k_2\right) = \exp(-j 2\pi n_1 k_2) = 1;$$

$$W_N^{N_1 n_2 k_2} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1 N_2} N_1 n_2 k_2\right) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2\right) = W_{N_2}^{n_2 k_2},$$

$$W_N^{N_2 n_1 k_1} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1 N_2} N_2 n_1 k_1\right) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1\right) = W_{N_1}^{n_1 k_1},$$

получаем

$$W_N^{nk} = W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2}. \quad (9)$$

При этом ДПФ

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk}. \quad (10)$$

Алгоритм БПФ для составной размерности N

Подставим (9) в (10). Используя (6) и (8), получаем

$$X[n_1, n_2] = \underbrace{\sum_{k_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{n_1 k_1} \cdot W_N^{n_2 k_1}}_{\text{вектор поворота}} \underbrace{\sum_{k_2=0}^{N_2-1} x[k_2, k_1] W_{N_2}^{n_2 k_2}}_{N_2 - \text{точечные ДПФ}}. \quad (11)$$

Этапы вычисления коэффициентов ДПФ по формуле (11).

1) Вычисление N_2 -точечных ДПФ с ядром $W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}$ по столбцам матрицы $x[k_2, k_1]$:

$$Y[k_1, n_2] = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x[k_2, k_1] W_{N_2}^{n_2 k_2}.$$

2) Умножение на поворачивающие множители $W_N^{n_2 k_1}$

$$Z[k_1, n_2] = Y[k_1, n_2] W_N^{n_2 k_1};$$

3) Вычисление ДПФ с ядром $W_{N_1}^{n_1 k_1}$

$$X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} Z[k_1, n_2] W_{N_1}^{n_1 k_1}.$$

$$O(N_1(N_2)^2)$$

$$O(N_1 N_2)$$

$$O(N_2(N_1)^2)$$

Сложность алгоритма

$$O(N_1(N_2)^2 + N_1 \cdot N_2 + N_2 \cdot (N_1)^2) = O(N(N_1 + N_2 + 1)).$$

Для больших N это существенно меньше $O(N^2)$.

Пример. Пусть требуется вычислить ДПФ с основанием

$$39203 = 197 * 199. \text{ Тогда}$$

$$N(N_1 + N_2 + 1) = 15\ 563\ 591,$$

$$N^2 = 1\ 536\ 875\ 209.$$

Пример. ДПФ с основанием $N = 6 = 2 \cdot 3$ ($N_1 = 2$, $N_2 = 3$).

k_2	k_1	
	0	1
0	$x[0]$	$x[1]$
1	$x[2]$	$x[3]$
2	$x[4]$	$x[5]$

k_2	k_1	
	0	1
0	$x[0, 0]$	$x[0, 1]$
1	$x[1, 0]$	$x[1, 1]$
2	$x[2, 0]$	$x[2, 1]$

$$X[n_1, n_2] = \underbrace{\sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 k_1} \cdot W_6^{n_2 k_1}}_{\text{вектор поворота}} \underbrace{\sum_{k_2=0}^2 x[k_2, k_1] W_3^{n_2 k_2}}_{3 - \text{точечные ДПФ}}.$$

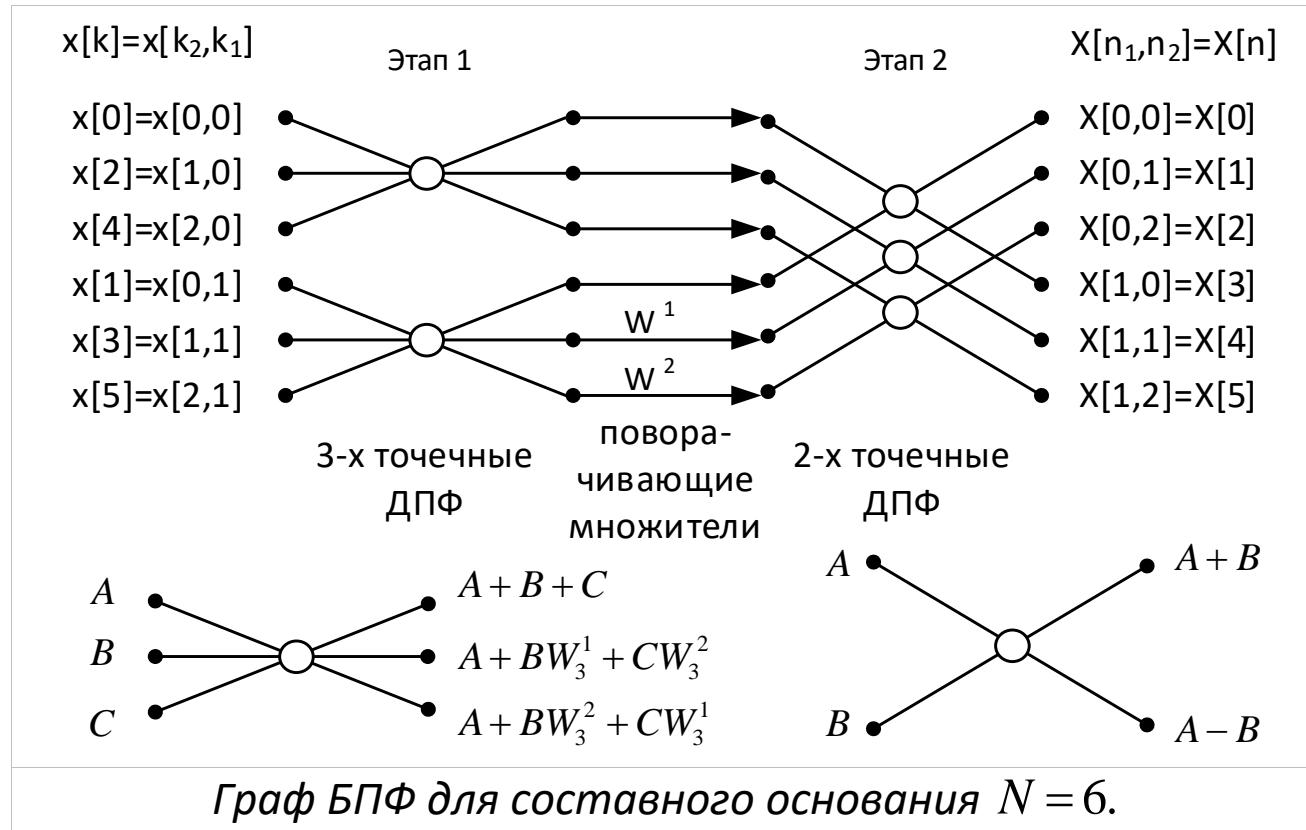
$2 - \text{точечные ДПФ}$

Алгоритм БПФ для составной размерности N

k_2	k_1	
	0	1
0	$x[0]$	$x[1]$
1	$x[2]$	$x[3]$
2	$x[4]$	$x[5]$

$$X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 k_1} \cdot W_6^{n_2 k_1} \underbrace{\sum_{k_2=0}^2}_{\substack{\text{вектор} \\ \text{поворота}}} \underbrace{x[k_2, k_1]}_{\substack{\text{3 - точечные ДПФ}}} W_3^{n_2 k_2}.$$

2 - точечные ДПФ



- Для столбца $k_1 = 0$ поворачивающие множители $W_6^{n_2 k_1} = W_6^0 = 1$, и умножение на них можно не производить.
- Для столбца $k_1 = 1$ значения повторяющихся множителей зависят от того, для вычисления каких отсчетов 6-точечного ДПФ далее используются результаты.

Для $n_2 = 1$ получаем $W_6^1 = \exp(-j2\pi/6) = \exp(-j\pi/3)$,
для $n_2 = 2$ получаем $W_6^2 = \exp(-j2\pi2/6) = \exp(-j2\pi/3)$.

- Нижний индекс на графах алгоритма БПФ для поворачивающих множителей, как правило, не указывают, если он совпадает с размерностью БПФ.
- Умножение на поворачивающие множители обозначено стрелками, рядом с которыми записаны значения коэффициентов $W_6^{n_2 \cdot k_1}$. Точкой обозначены ячейки памяти.
- В графике алгоритма необходимо определить базовые операции (здесь 3-х и 2-х точечные ДПФ).

Алгоритмы БПФ с основанием 2

Алгоритмы БПФ с основанием 2.

Разбиение N -точечного ДПФ на два $N/2$ -точечных.

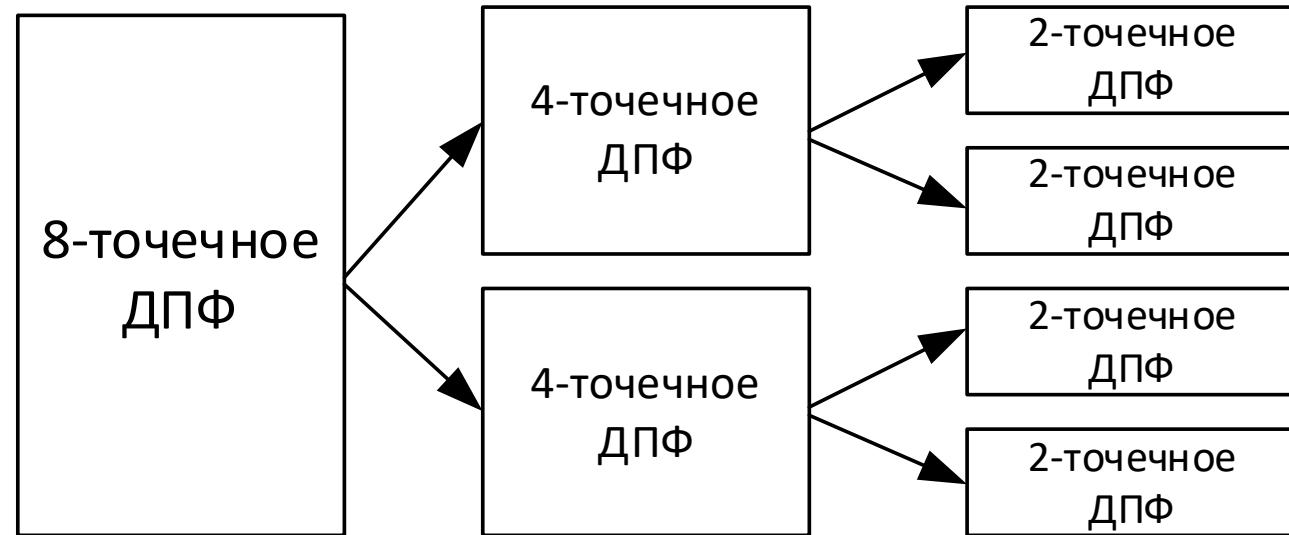
Рассмотрим случай, когда N является степенью двойки. Пусть в (4) $N_1 = 2$, $N_2 = N/2$, тогда на первой итерации N -точечное ДПФ представляется через двухточечные и $N/2$ -точечные ДПФ:

$$X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 \cdot k_1} W_N^{n_2 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^{(N/2)-1} W_{N/2}^{n_2 \cdot k_2} x[k_2, k_1]. \quad (12)$$

Эта же схема вычислений может быть использована на следующей итерации для получения каждого из $N/2$ -точечных ДПФ. В результате перейдем к $N/4$ -точечным ДПФ и т. д., пока не останутся только двухточечные ДПФ.

Этот подход лежит в основе алгоритмов БПФ с основанием 2, в которых N является степенью двух.

Рассмотрим сначала пример алгоритма БПФ для $N = 4 = 2 \cdot 2$, а затем для $N = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

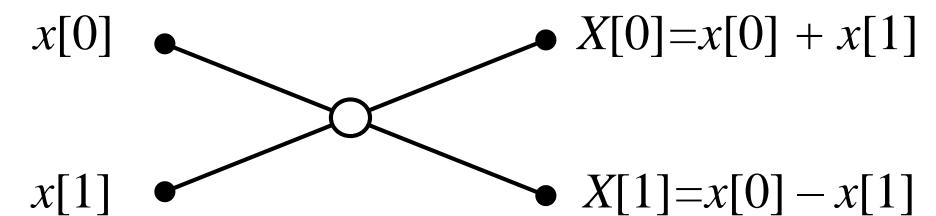


Пусть ДПФ_2 вычисляется для последовательности $x[0], x[1]$.

$$X[n] = \sum_{k=0}^1 x[k] W_2^{nk} = x[0] + W_2^n x[1].$$

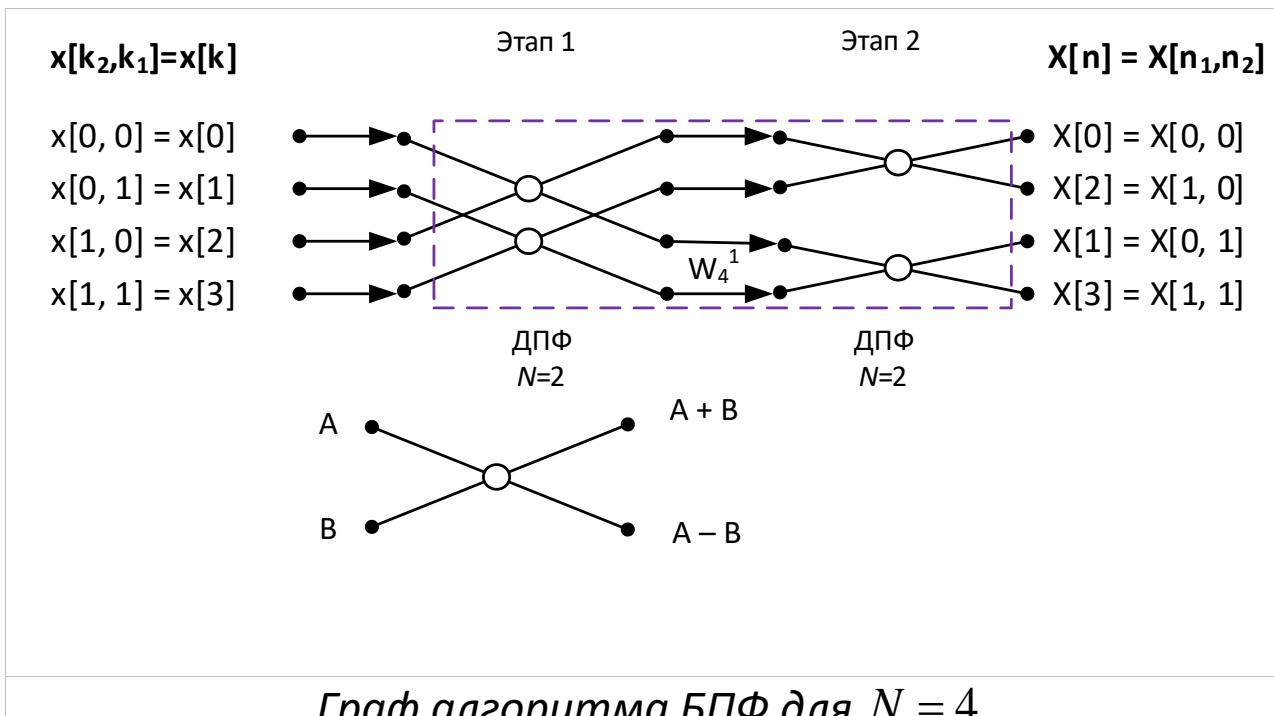
где $W_2^n = 1$ при $n=0$ и $W_2^n = -1$ при $n=1$.

Поэтому 2-х точечное ДПФ не содержит умножений.



Алгоритмы БПФ с основанием 2

Пример. Граф алгоритма БПФ с основанием 2 для $N = 4$.



Граф алгоритма БПФ для $N = 4$.

Разделим последовательность $x[k]$ из $N = 4$ отсчетов на $N_2 = 2$ блока по $N_1 = 2$ элемента в каждом. Получим массив $x[k_2, k_1] = x[2k_2 + k_1]$.

$$X[n_1, n_2] = \underbrace{\sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 \cdot k_1} \cdot \underbrace{W_4^{n_2 \cdot k_1}}_{\substack{\text{вектор} \\ \text{поворота}}} \underbrace{\sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}}_{\substack{\text{двуточечное ДПФ}}}}_{\substack{\text{4 - точечные ДПФ}}}$$

На первом этапе для каждого $k_1 = 0, 1$ вычисляются

$$\text{двуточечные ДПФ } Y[n_2] = \sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}.$$

Двуточечные ДПФ, домноженные на векторы поворота $W_N^{n_2 \cdot k_1}$:

$$Y_{k_1}[n_2] = W_N^{n_2 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}, n_2 = 0, 1.$$

При $n_2 = 0$ и $k_1 = 0$ поворачивающие множители $W_4^{n_2 \cdot k_1} \equiv 1$.

При $n_2 = 1$ поворачивающие множители $W_4^{k_1}, k_1 = 0, 1$.

Нижний индекс в схеме можно опустить, если он равен размерности ДПФ (четырем).

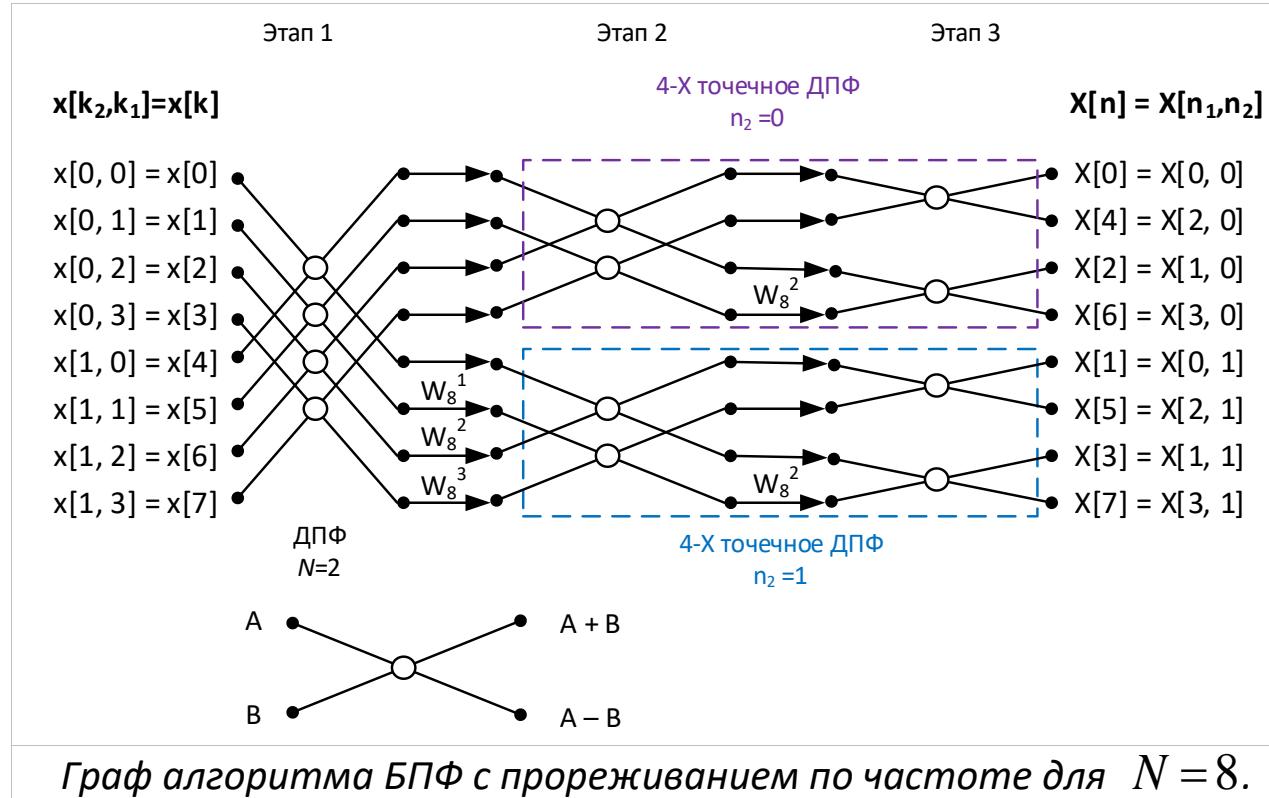
Далее результаты поступают на два двуточечных ДПФ $n_1 = 0, 1, 2, 3$:

$$X[n_1 + 2n_2] = X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^1 Y_{k_1}[n_2] W_2^{n_1 \cdot k_1}.$$

Заметим, что порядок отсчетов на входе схемы прямой, а на выходе – с инверсией разрядов. В случае четырехточечного ДПФ значения двоичных разрядов в точности соответствуют k_2, k_1 и n_1, n_2 .

Алгоритмы БПФ с основанием 2

Пример. Граф алгоритма БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте для $N = 8$.



Разделим последовательность $x[k]$ из $N = 8$ отсчетов на

$N_2 = 2$ блока по $N_1 = 4$ элемента в каждом.

$$X[n_1, n_2] = \underbrace{\sum_{k_1=0}^3 W_4^{n_1 \cdot k_1} \cdot \underbrace{W_8^{n_2 \cdot k_1}}_{\substack{\text{вектор} \\ \text{поворота}}} \underbrace{\sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}}_{\text{двуточечное ДПФ}}}_{4\text{-точечные ДПФ}}. \quad (13)$$

$$x[k_2, k_1] = x[4k_2 + k_1].$$

На первом этапе для каждого $k_1 = 0, 1, 2, 3$ вычисляются двуточечные ДПФ

$$Y[n_2] = \sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}$$

Двуточечные ДПФ, домноженные на векторы поворота $W_N^{n_2 \cdot k_1}$:

$$Y_{k_1}[n_2] = W_N^{n_2 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^1 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 \cdot k_2}, n_2 = 0, 1.$$

При $n_2 = 0$ поворачивающие множители $W_8^{n_2 \cdot k_1} = W_8^0 \equiv 1$ и их на графике указывать не обязательно.

При $n_2 = 1$ поворачивающие множители $W_8^{k_1}$, $k_1 = 0, 1, 2, 3$.

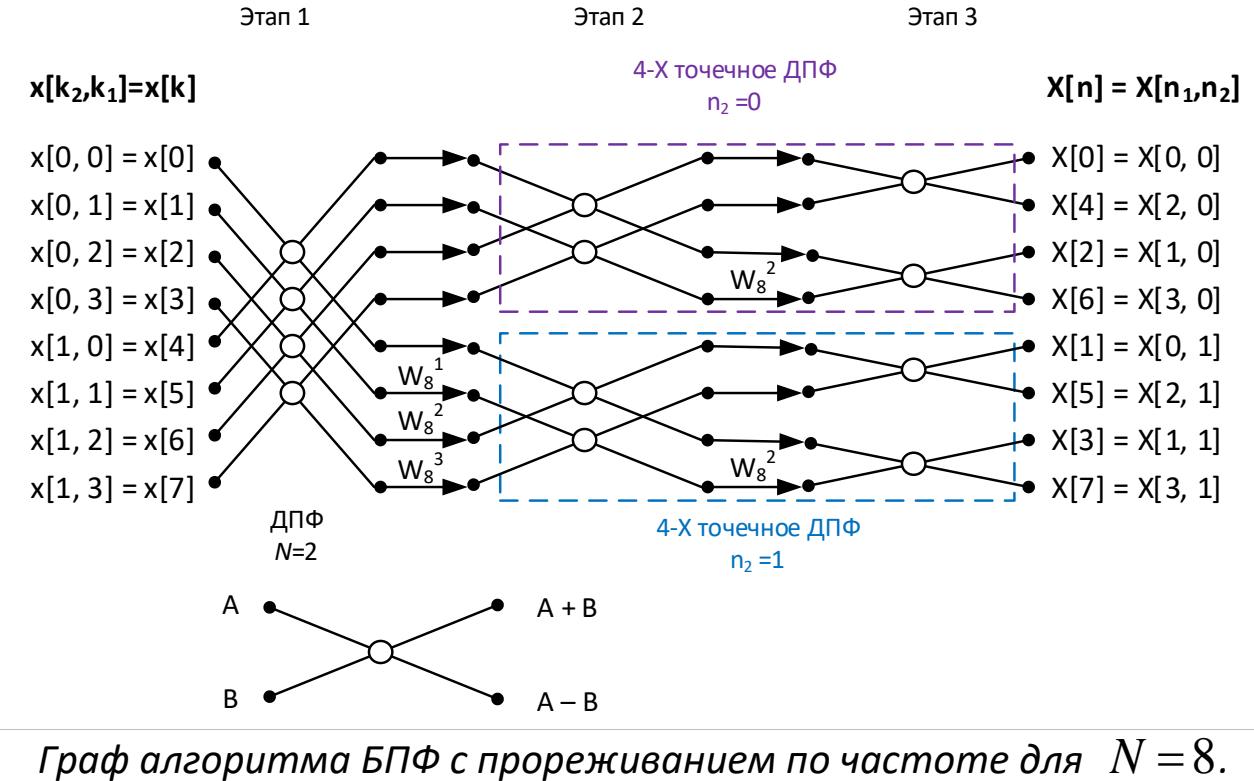
Нижний индекс в схеме можно опустить, если он равен размерности ДПФ (восьми).

Далее результаты поступают на два 4-точечных ДПФ $n_1 = 0, 1, 2, 3$:

$$X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^3 Y_{k_1}[n_2] W_4^{n_1 \cdot k_1}.$$

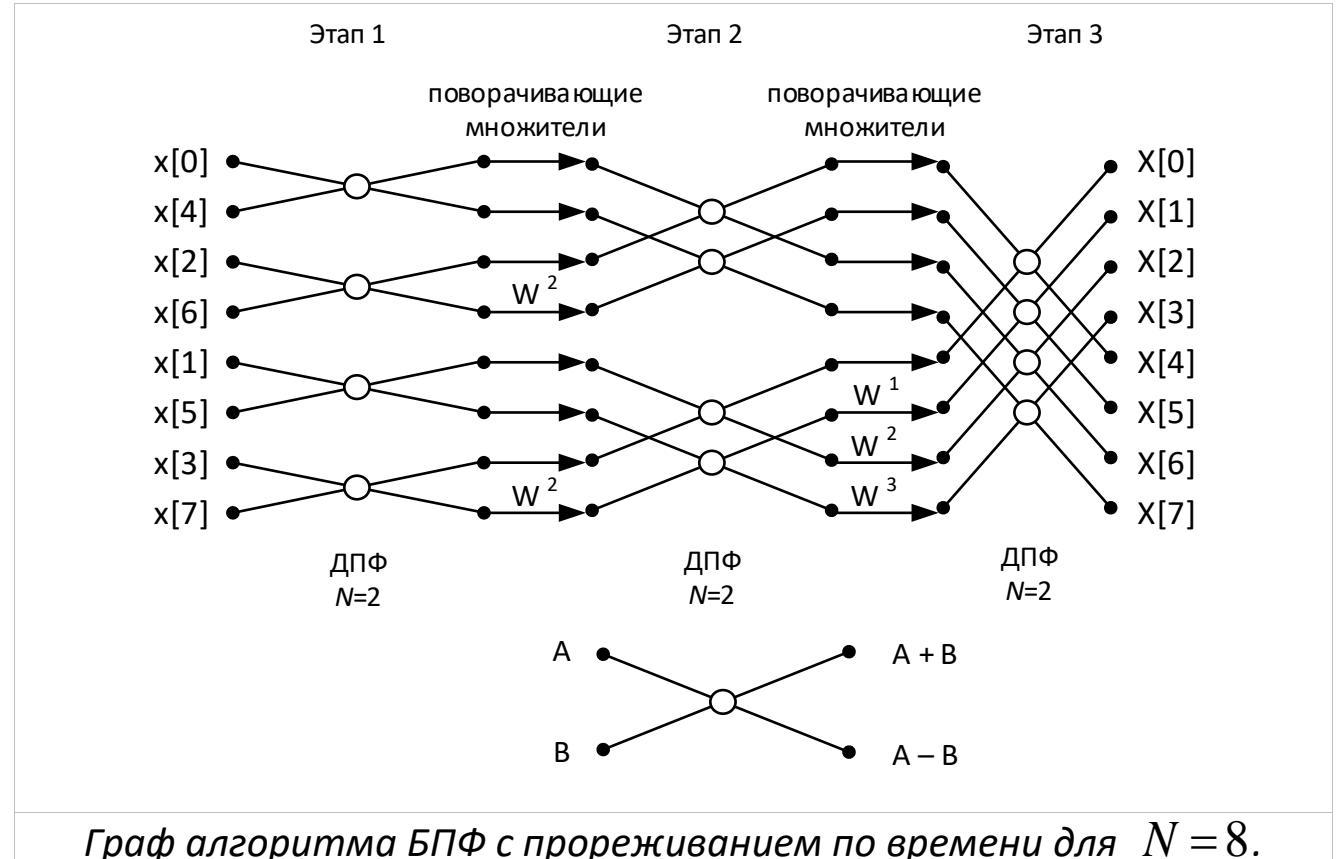
Блоки четырехточечного ДПФ нами уже получены, $W_8^2 = W_4^1$.

Алгоритмы БПФ с основанием 2



Номер	Двоичное представление	Инверсия разрядов	Разрядно-инверсный порядок
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Пример. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для $N = 8$.



$$X[n_1, n_2] = \underbrace{\sum_{k_1=0}^1 W_2^{n_1 \cdot k_1} \cdot W_8^{n_2 k_1}}_{\substack{\text{вектор} \\ \text{поворота}}} \underbrace{\sum_{k_2=0}^3 x[k_2, k_1] W_2^{n_2 k_2}}_{\substack{4 - \text{точечное ДПФ}}}.$$

двуточечные ДПФ

(14)

Алгоритмы БПФ с основанием 2

Пояснения к примеру.

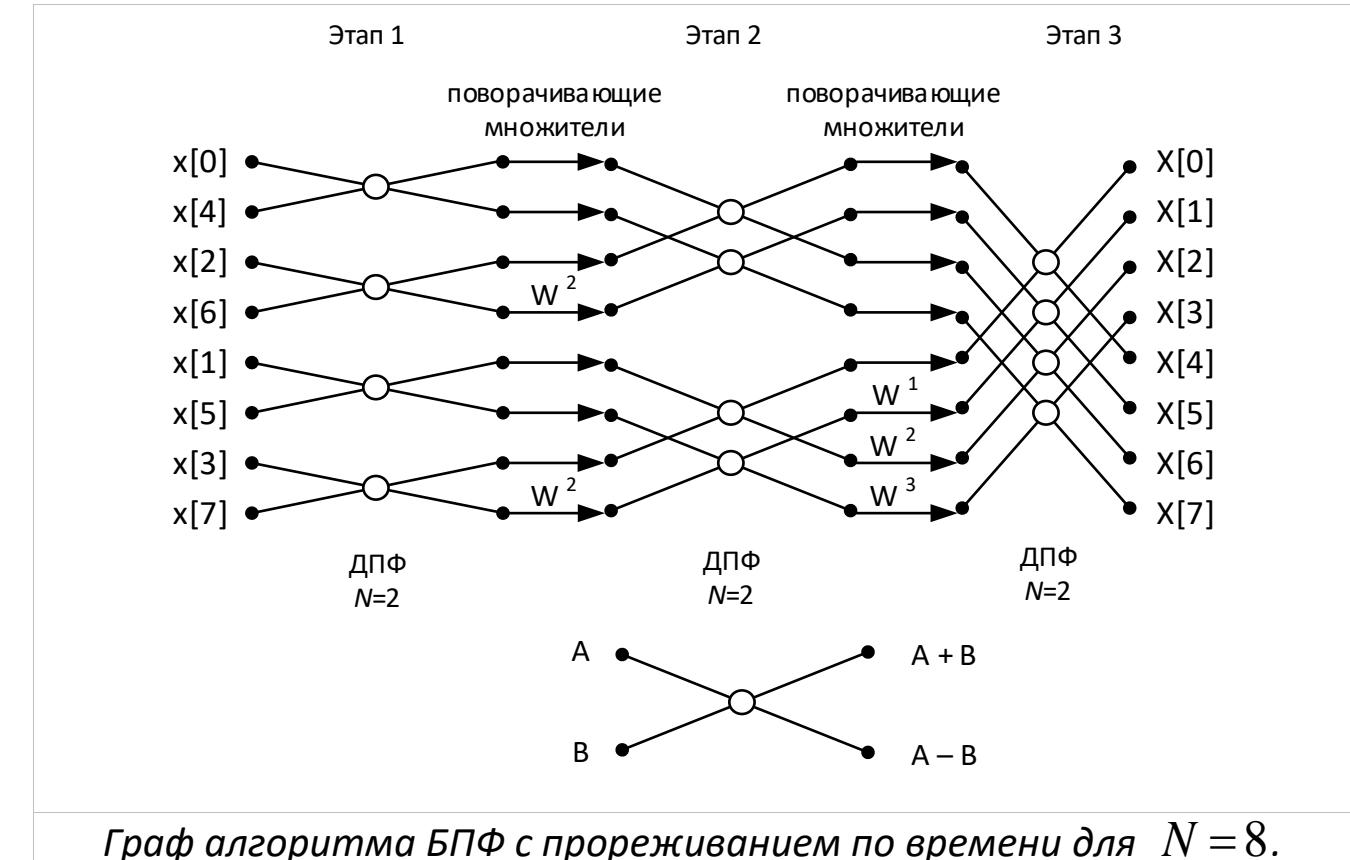
Формула (14) отличается от (13) порядком вычисления. При прореживании по времени сначала вычисляются 4-х точечные ДПФ, затем они умножаются на поворачивающие множители, а затем на последнем шаге считаются двухточечные ДПФ.

Для представленного графа алгоритма БПФ с прореживанием по времени характерны:

- разрядно-инверсный порядок входных отсчетов,
- прямой порядок коэффициентов ДПФ .

Для аналогичного графа алгоритма БПФ с прореживанием по частоте характерны:

- прямой порядок входных отсчетов,
- разрядно-инверсный порядок коэффициентов ДПФ.



Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для $N=8$.

Оценка числа операций для БПФ $N=8$:

- 5 умножений,
- 12 двухточечных ДПФ: 24 операции вида «сложение/вычитание».

Оценка числа операций при работе прямого алгоритма:

- $7 \cdot 8 = 56$ сложений (7 сложений на каждый отсчет),
- $7 \cdot 7 = 49$ умножений (умножения не требуются для $X[0]$).

Алгоритмы БПФ с основанием 4

Алгоритм БПФ с основанием 4

Пусть N является степенью 4. Тогда можно записать

$$N = N / 4 \cdot 4 \quad (N = N_1 \cdot N_2; N_1 = N / 4, N_2 = 4).$$

Разобьем последовательность $x[k]$ на $N_2 = 4$ блока с номерами $k_2 = 0, 1, 2, 3$. Каждый из блоков будет содержать по $N_1 = N / 4$ элементов с номерами $k_1 = 0, 1, 2, \dots, N / 4 - 1$.

$$k = (N / 4) \cdot k_2 + k_1.$$

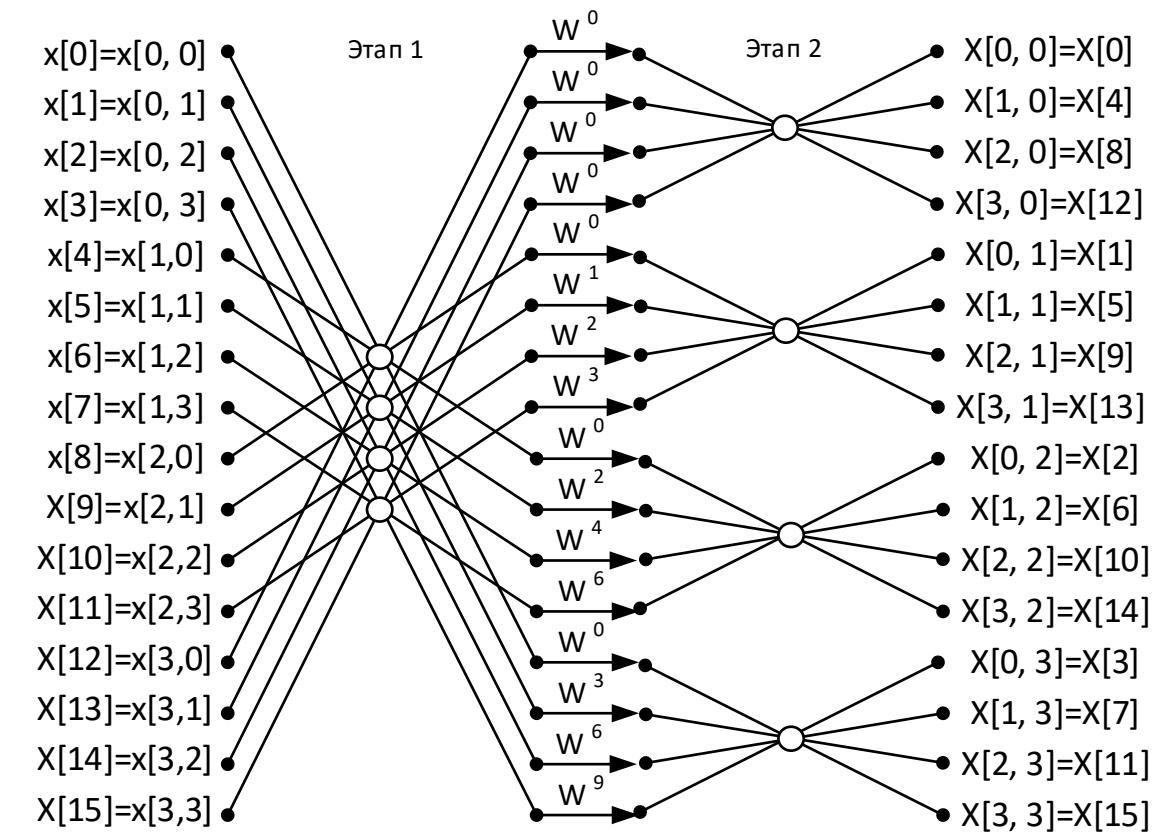
$$n = 4n_1 + n_2,$$

$$\begin{aligned} nk &= (4n_1 + n_2)[(N / 4) \cdot k_2 + k_1] = \\ &= Nn_1 \cdot k_2 + 4n_1 \cdot k_1 + (N / 4) \cdot n_2 \cdot k_2 + n_2 \cdot k_1. \end{aligned}$$

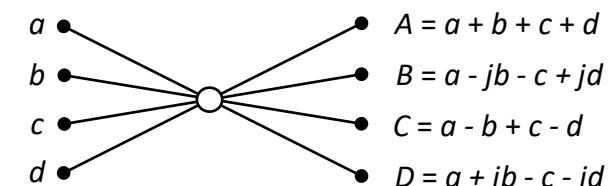
Подставив это в формулу для ДПФ, получаем

$$X[n] = X[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^{N/4-1} W^{4n_1 \cdot k_1} \sum_{k_2=0}^3 x[k_2, k_1] W^{(N/4) \cdot n_2 \cdot k_2}.$$

В свою очередь вычисление каждого из $N / 4$ -точечных ДПФ можно разбить на рассмотренные этапы, используя представление $N / 4 = (N / 16) \cdot 4$ и т. д. Процесс уменьшения размерности ДПФ продолжается до тех пор, пока не останутся 4-точечные ДПФ.



ДПФ
 $N=4$ поворачивающие
множители ДПФ
 $N=4$



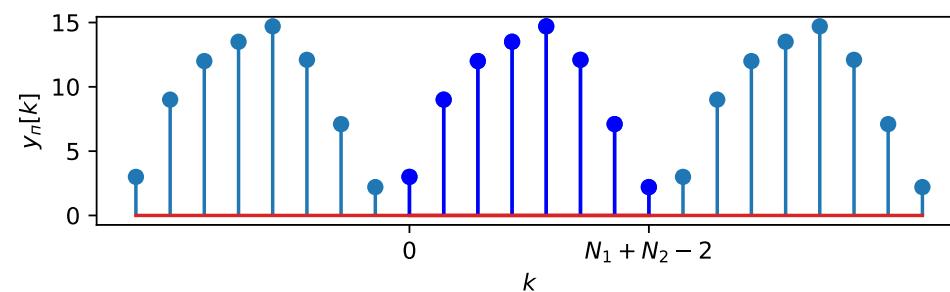
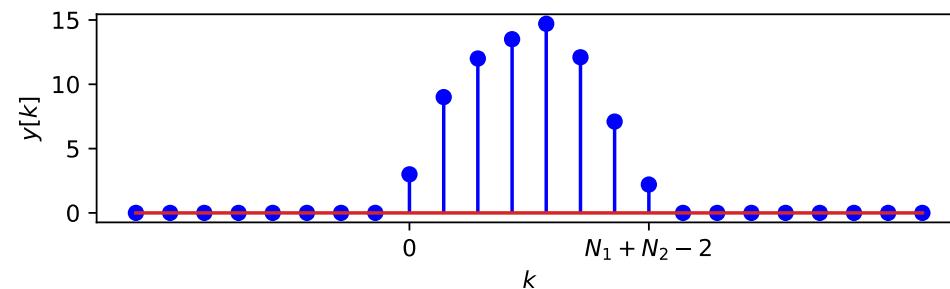
Граф 16-точечного БПФ по основанию 4

Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ

Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ

Пусть имеются две последовательности $x[k]$ и $h[k]$ длиной в N_1 и N_2 отсчетов. Требуется вычислить их линейную дискретную свертку

$$y[k] = \sum_{m=0}^k x[m]h[k-m] \quad (15)$$



Рассмотрим также циклическую с периодом $N = N_1 + N_2 - 1$ свертку $y_\pi[k]$ последовательностей $x[k]$ и $h[k]$:

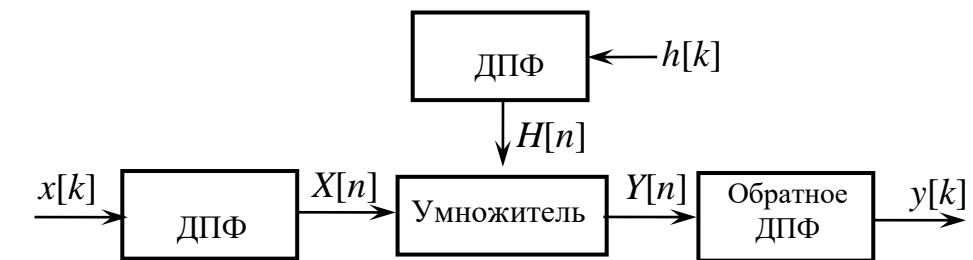
$$y_\pi[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[k-m]_N$$

Заметим, что для $0 \leq k < N$ значения $y_\pi[k]$ и $y[k]$ совпадают.

По теореме о свертке для ДПФ если $x[k] \xrightarrow{\text{ДПФ}} X[n]$ и $h[k] \xrightarrow{\text{ДПФ}} H[n]$, то

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[k-m]_N \xrightarrow{\text{ДПФ}} X[n]H[n].$$

Можно предложить следующую схему вычисления свертки последовательностей $x[k]$ и $h[k]$:



Размерности всех ДПФ должны быть равны $N = N_1 + N_2 - 1$.

Эффективность данного способа обеспечивается использованием алгоритма БПФ для вычисления всех ДПФ.

При больших N выигрыш в объеме вычислений по сравнению с прямым способом вычисления свертки по формуле (15) во временной области может быть весьма значительным.

Приложение

Приложение.

В таблице ниже приведены стандартные функции для работы с ДПФ и БПФ в MATLAB и библиотеках Python.

	Python (SciPy, NumPy)	MATLAB
Матрица $[W]_N$ из матричной формы ДПФ	<code>scipy.linalg.dft(n, scale)</code>	<code>dftmtx(n)</code>
Вычисление прямого ДПФ по алгоритму БПФ	<code>scipy.fft.fft(x)</code> <code>np.fft.fft(x)</code>	<code>fft(x)</code>
Вычисление обратного ДПФ по алгоритму БПФ	<code>scipy.fft.ifft(x)</code> <code>np.fft.ifft(x)</code>	<code>ifft(x)</code>
Сдвиг коэффициентов ДПФ на половину периода	<code>scipy.fft.fftshift</code> <code>np.fft.fftshift</code>	<code>fftshift</code>
Вычисление следующего значения N , для которого вычисления по алгоритму БПФ эффективны	<code>scipy.fft.next_fast_len</code>	нет аналога

Историческая справка.

Алгоритм БПФ по основанию 2 был предложен Кули и Тьюки в 1965 году и дал огромный импульс развитию цифровых методов обработки сигналов.

Однако алгоритмы БПФ для составного N (в наиболее общем виде) были получены известным математиком Гауссом (1777–1855) уже в 1805 году при исследовании орбит астероидов Паллада и Юнона.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Изобразить граф алгоритма БПФ с основанием 2 с прореживанием по частоте для $N=16$. Объяснить, в чем заключается базовая операция данного алгоритма.

№2. Изобразить граф алгоритма БПФ с основанием 2 с прореживанием по времени для $N=16$. Объяснить, в чем заключается базовая операция данного алгоритма.

Литература

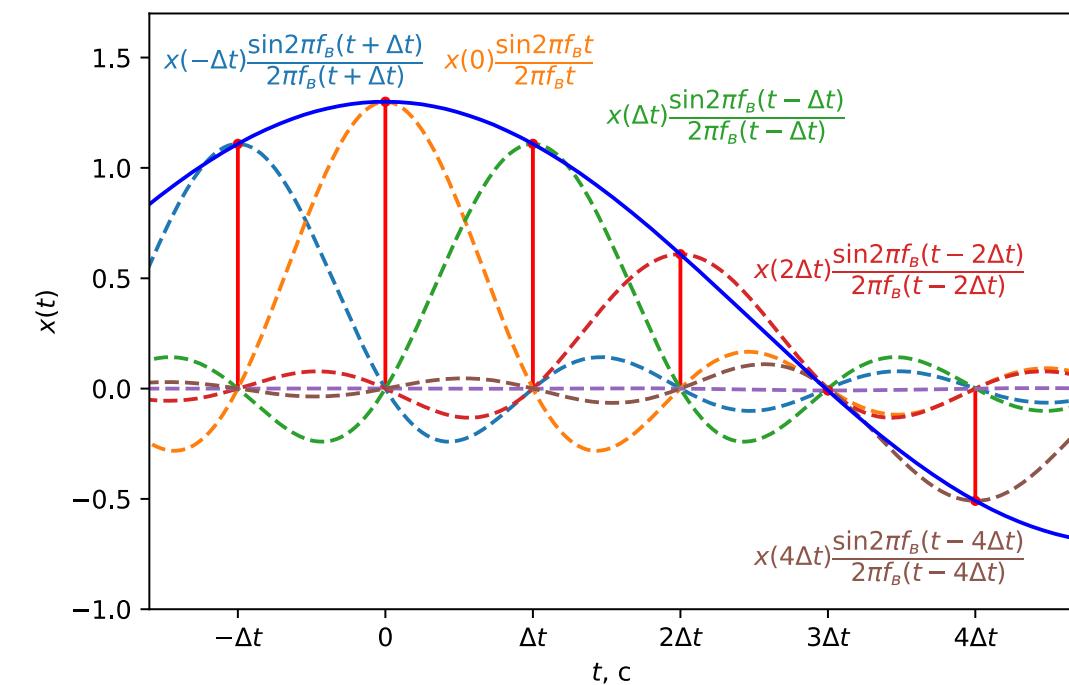
1. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. под ред. С. Ф. Боева .— 3-е изд., испр. — М. : Техносфера, 2019 .— 1048 с.
2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.
3. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. Москва. 2007г.

Лекция 14 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

6 мая 2025 г.

10. Представление сигналов ортогональными рядами. Общий метод дискретизации. Полные ортонормированные системы. Обобщённые ряды Фурье.

Примеры базисных функций: функции отсчётов, комплексные экспоненциальные и дискретные экспоненциальные функции, функции Уолша, функции Хаара.



Обобщённые ряды Фурье

Представление сигналов ортогональными рядами.

Общий метод дискретизации

Аналоговый сигнал $x(t)$, определенный на интервале T , конечном или бесконечном, при соблюдении некоторых условий может быть представлен в виде

$$x(t) = \sum_n c_n \varphi_n(t),$$

где

- $\{\varphi_n(t)\}$ – ортогональный базис (возможно бесконечномерный),
- $\{c_n\}$ – коэффициенты разложения сигнала по базису $\{\varphi_n(t)\}$ (могут быть комплексными).

Считаем, что $x(t)$ является функцией с интегрируемым квадратом:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Для реальных физических сигналов это означает конечность их удельной энергии, выделяемой на единичном сопротивлении.

Базисные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны на интервале T :

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|\varphi_n\|^2 = \int_T |\varphi_n(t)|^2 dt, & m = n. \end{cases}$$

Замена аналогового сигнала $x(t)$ последовательностью $\{c_n\}$, представляющей коэффициенты разложения этого сигнала по какому-либо ортогональному базису, – самый общий метод дискретизации.

Вместо того, чтобы рассматривать функциональную зависимость $x(t)$ в несчётном множестве точек, мы можем характеризовать сигнал счётной системой коэффициентов c_n . Базис выбирается из удобства физической реализации, и простоты вычисления коэффициентов.

Обобщённые ряды Фурье

Обобщённые ряды Фурье. Полные ортонормированные системы

Для практических расчетов часто требуется перейти бесконечномерного базиса к приближенным конечным представлениям, необходимым для численных расчетов и при физических измерениях сигналов:

$$x(t) \approx \sum_{|n| \leq N} c_n \phi_n(t).$$

В связи с этим возникает ряд математических и практических вопросов, к которым, в частности, относятся следующие.

1) Как следует выбирать коэффициенты c_n , чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon^2(N) = \int_T \left| x(t) - \sum_{|n| \leq N} c_n \phi_n(t) \right|^2 dt ?$$

$$\varepsilon^2(N) = \int_T \left(x(t) - \sum_{|n| \leq N} c_n \phi_n(t) \right) \left(x(t) - \sum_{|m| \leq N} c_m^* \phi_m^*(t) \right) dt.$$

2) В каких случаях можно также обеспечить

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon^2(N) = 0.$$

Продифференцируем $\varepsilon^2(N)$ по некоторому фиксированному c_n . Используя ортогональность базисных функций, получаем

$$\frac{d(\varepsilon^2(N))}{dc_n} = -2(x, \Phi_n) + 2c_n(\Phi_n, \Phi_n),$$

$$\frac{d^2(\varepsilon^2(N))}{dc_n^2} = 2(\Phi_n, \Phi_n) > 0.$$

Приравняв производную нулю и решая относительно c_n , получим, что абсолютный минимум среднеквадратичной ошибки достигается при

$$c_n = \frac{(x, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_T x(t) \phi_n^*(t) dt.$$

Коэффициенты c_n , выбираемые по этому правилу, называются коэффициентами Фурье по системе $\{\phi_n(t)\}$.

Из всех полиномов N -го порядка наименьшее среднеквадратическое отклонение от данного сигнала $x(t)$ имеет N -я частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\phi_n(t)\}$.

Обобщённые ряды Фурье

Отметим, что при увеличении N величины ранее вычисленных коэффициентов c_n остаются неизменными.

В результате значительно экономится объем вычислений, если после оценки ошибки приходится принять решение об улучшении качества аппроксимации.

Для ортонормированной системы функций

$$\phi_n(t) = \frac{\Phi_n(t)}{\|\Phi_n\|}$$

коэффициенты Фурье будут вычисляться по формуле

$$a_n = \int_T x(t) \phi_n^*(t) dt.$$

Ответим теперь на второй вопрос

$$\varepsilon^2(N) = \int_T \left(x(t) - \sum_{|n| \leq N} a_n \phi_n(t) \right) \left(x(t) - \sum_{|m| \leq N} a_m^* \phi_m^*(t) \right) dt.$$

Тогда

$$\varepsilon^2(N) = \int_T x^2(t) dt - \sum_{|n| \leq N} |a_n|^2.$$

Поэтому при любом конечном N имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{|n| \leq N} |a_n|^2 \leq \int_T x^2(t) dt$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Если $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon^2(N) = 0$ для всех $x(t)$ с конечной энергией, то

$\{\phi_n(t)\}$ – полная ортонормированная система в пространстве L_2 . Смысл полноты системы заключается в том, что для такой системы ошибка $\varepsilon^2(N)$ при увеличении N может быть сделана как угодно малой. Для полных ортонормированных систем имеет место *равенство Парсеваля*:

$$\int_T x^2(t) dt = \sum_{|n|=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

$$\varepsilon^2(N) = \sum_{|n|>N} |a_n|^2.$$

Значит, ошибка определяется суммой квадратов модулей отброшенных коэффициентов Фурье.

Примеры систем базисных функций в L_2 . Функции отсчетов.

Примеры систем базисных функций в L_2 .

Функции отсчётов

Функциями отсчетов называют функции, определяемые как

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_e(t - k\Delta t)}{2\pi f_e(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_e}.$$

Эти функции отличаются друг от друга только сдвигом на целое число интервалов Δt , они ортогональны на $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \|\Phi_n\|^2 = \Delta t = \frac{1}{2f_e}, & k = l. \end{cases}$$

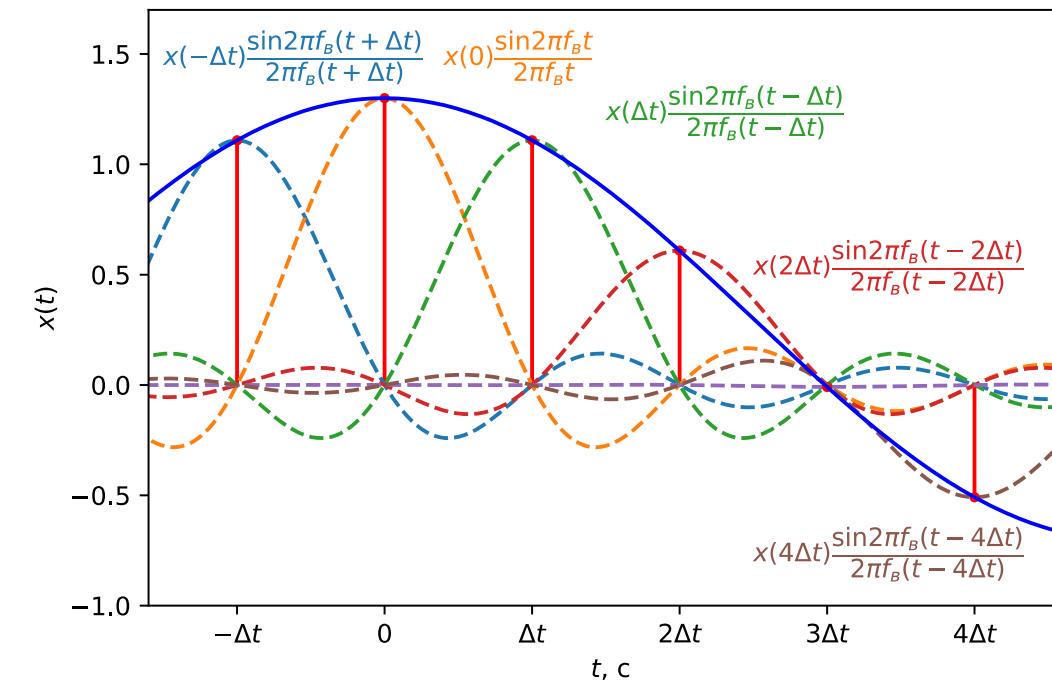
Функции отсчетов используются для дискретного представления аналоговых сигналов по теореме отсчетов Котельникова. В случае сигнала с финитным спектром, ограниченным интервалом $(-f_e, f_e)$, коэффициенты Фурье c_k по этим функциям являются отсчётами сигнала при $t = k\Delta t$:

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin 2\pi f_e(t - k\Delta t)}{2\pi f_e(t - k\Delta t)} dt = x(k\Delta t).$$

Простота вычисления коэффициентов c_k является большим преимуществом ряда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_e(t - k\Delta t)}{2\pi f_e(t - k\Delta t)},$$

который называется рядом Котельникова.



- В пространстве $L_2.(-\infty, \infty)$ система функций отсчетов ортогональна, но не полна.
- Однако в подпространстве $B \subset L_2$. функций с финитным спектром в полосе $[-f_e, f_e]$ она полна.

Примеры систем базисных функций в L_2 . Функции отсчетов.

Определим спектр функции отсчетов. Определим сначала спектр функции отсчетов с индексом нуль.

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin 2\pi f_e t}{2\pi f_e t}, \Delta t = \frac{1}{2f_e}.$$

Будем использовать обозначение $\Pi_{2w}(t)$ – прямоугольная функция с ненулевыми значениями на интервале $t \in (-w, w)$ и единичной площадью.

Заметим, что для симметричного прямоугольного импульса единичной площади

$$\Pi_\tau(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$

Тогда найдем обратное преобразование Фурье для $\Pi_{2f_e}(f)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{2f_e}(f) \exp(j2\pi ft) dt = \frac{1}{2f_e} \int_{-f_e}^{f_e} \exp(j2\pi ft) dt = \frac{\sin 2\pi f_e t}{2\pi f_e t} = \varphi_0(t).$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin 2\pi f_e t}{2\pi f_e t} \xleftrightarrow{FT} \Pi_{2f_e}(f).$$

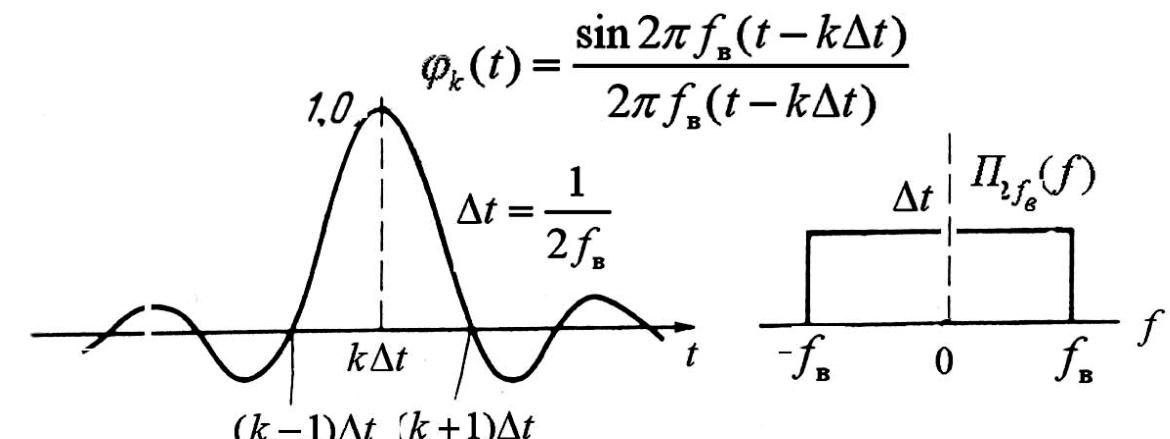
$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_e(t - k\Delta t)}{2\pi f_e(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_e}.$$

Функция отсчетов с индексом k образуется сдвигом по времени функции $\varphi_0(t)$ на $k\Delta t$:

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - k\Delta t).$$

Тогда по теореме запаздывания для преобразования Фурье

$$\varphi_k(t) \xleftrightarrow{FT} \Pi_{2f_e}(f) \exp(-j2\pi fk\Delta t).$$



Комплексные экспоненциальные функции. Функции Уолша.

Комплексные экспоненциальные функции

Комплексные экспоненциальные функции — это функции вида

$$\varphi_n(t) = \exp(j \frac{2\pi}{T} nt), \quad n \in (-\infty, \infty).$$

Функции $\varphi_n(t)$ периодичны по оси t с периодом T . Система $\{\varphi_n\}$ составляет счетное бесконечное множество и является мультипликативной, ортогональной и полной в $L_2[0, T]$.

Нетрудно убедиться, что

$$\int_T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m, \\ \|\varphi_n\|^2 = T, & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Поэтому для сигнала $x(t) \in L_2[0, T]$ коэффициенты Фурье по этой системе определяются следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} nt} dt.$$

Пространство, натянутое на базис $\{\varphi_n\}$, составляют T -периодические сигналы. Разложение сигналов по этим функциям называется разложением в ряд Фурье.

Функции Уолша

Система Уолша $\{\text{wal}(n, \theta)\}$, где $\theta = \frac{t}{T}$ — безразмерное время и $t \in [0, T]$, была введена Уолшем (Walsh) в 1923 году как полная ортонормированная система функций в $L_2[0, 1]$, каждая из которых принимает значения ± 1 и обладает тем свойством, что ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{wal}(n, \theta),$$

$$c_n = \int_0^1 x(\theta) \text{wal}(n, \theta) d\theta,$$

для непрерывной функции $x(\theta)$ равномерно сходится по подпоследовательности частичных сумм с номерами $N = 2^\nu$, ν — целое, положительное число.

Функции Уолша.

Построение базисных функций $\text{wal}(n, \theta)$.

Характерным для нумерации Уолша является то, что число перемен знака у функции $\text{wal}(n, \theta)$ внутри интервала $[0, 1)$ равно n . Рассмотрим процедуру построения функции $\text{wal}(n, \theta)$. По определению

$$\text{wal}(0, \theta) = 1,$$

$$\text{wal}(n, 0) = 1 \text{ для всех } n.$$

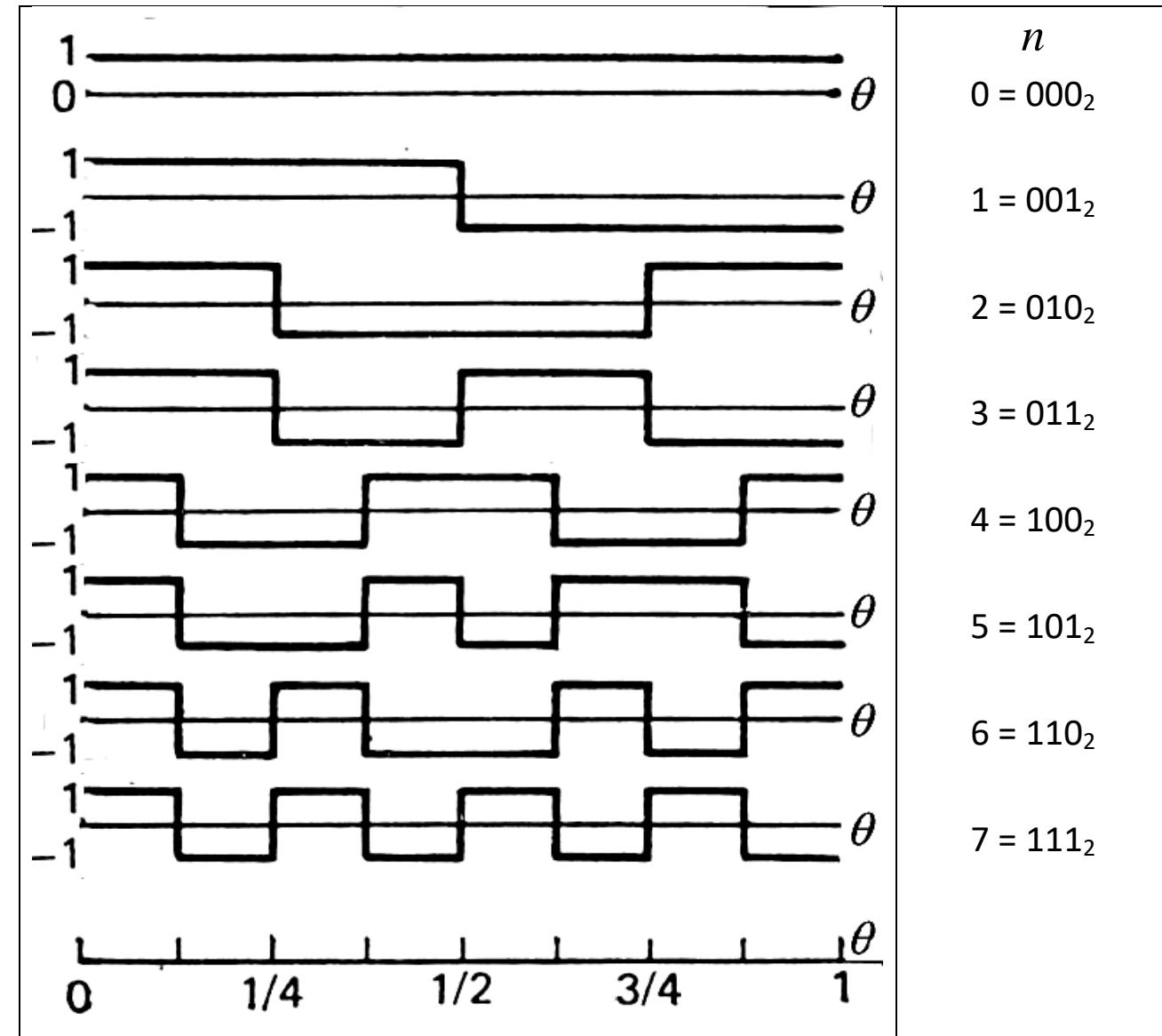
$\text{wal}(n, \theta)$ или симметрична (если n – чётное), или антисимметрична (если n – нечётное) относительно оси, проходящей через точку $\theta = 1/2$.

Смена знака у функций Уолша может происходить только в двоично-рациональных точках. Представим номер функции n в двоичном виде:

$$n = \sum_{i=0}^{v-1} n_i 2^i, \text{ где или } n_i = 0, \text{ или } n_i = 1, n = (n_{v-1} \dots n_1 n_0).$$

Если $n_i = 1$, то должна происходить смена знака в точках

$$\theta = \frac{1}{2^{i+1}}, \frac{3}{2^{i+1}}, \frac{5}{2^{i+1}}, \dots, \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$



Функции Уолша.

Построение базисных функций в нумерации Пэли $\text{pal}(p, \theta)$.

В 1932 году Пэли (Paley) рассмотрел систему Уолша в другой нумерации. Обозначим её $\text{pal}(p, \theta)$. Функции $\text{pal}(p, \theta)$ определяются через функции Радемахера (меандровые функции).

$$R_0(\theta) = 1,$$

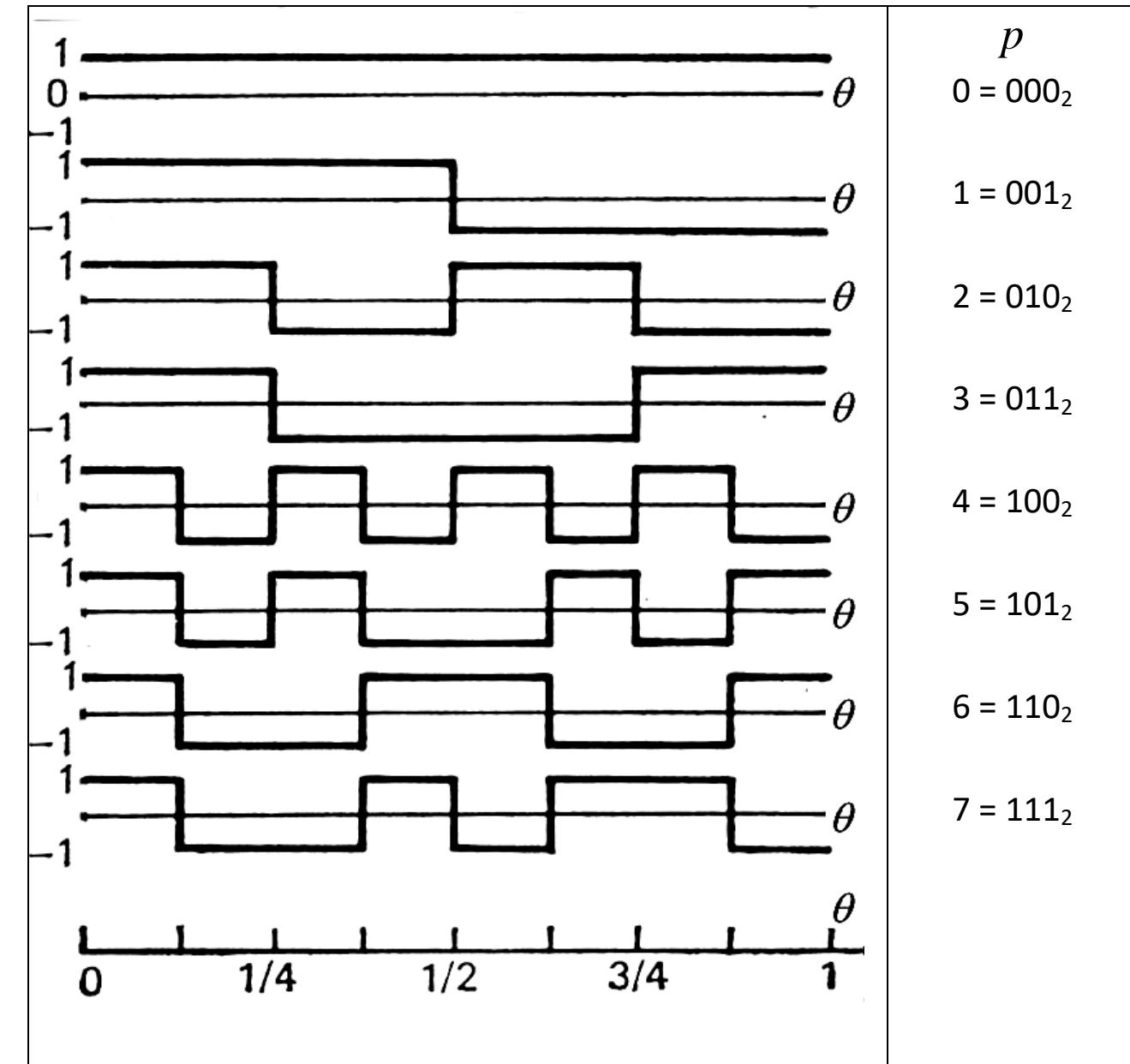
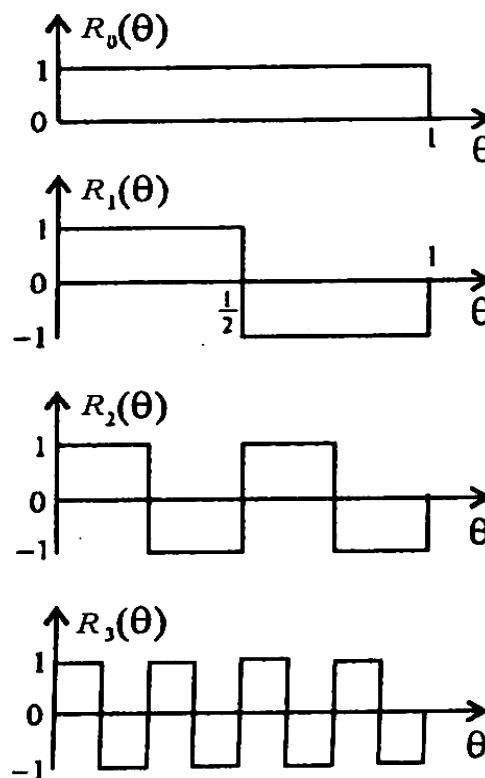
$$R_i(\theta) = \text{sgn}(\sin 2^i \pi \theta), i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\theta \in [0, 1].$$

$$\text{pal}(p, \theta) = \prod_{i=0}^{v-1} R_{i+1}^{p_i}(\theta).$$

$$p = \sum_{i=0}^{v-1} p_i 2^i, \text{ где } p_i = 0, \text{ либо}$$

$$p_i = 1;$$



Функции Уолша.

- Для некоторых сигналов ряд Фурье по системе Уолша–Пэли сходится быстрее, чем по системе Уолша.
- Функции Уолша *ортонормальны* на интервале $[0, 1]$. Система Уолша является *мультипликативной*. Однако при перемножении двух функций сдвиг по индексу не арифметический, а *диадный*, определяемый через поразрядное сложение по модулю 2:
 $\text{wal}(n, \theta)\text{wal}(m, \theta) = \text{wal}((n + m) \bmod 2, \theta).$
- Функции Уолша могут быть периодически продолжены по оси θ с периодом 1.

Рассмотрим теперь частичную сумму ряда Уолша–Фурье:

$$S_N(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{wal}(n, \theta),$$

$$c_n = \int_0^1 x(\theta) \text{wal}(n, \theta) d\theta.$$

При $N = 2^v$, где v – целое положительное число, частичная сумма $S_N(\theta)$ является кусочно-ступенчатой функцией с интервалами постоянства длиной $1/N$, принимающей на

этих интервалах значения, равные средним значениям сигнала $x(\theta)$:

$$S_N(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}_k \Pi_k(\theta),$$

$$\bar{x}_k = N \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}} x(\theta) d\theta,$$

$$\Pi_k(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } k/N \leq \theta \leq (k+1)/N, \\ 0, & \text{при других } \theta. \end{cases}$$

Кусочно-ступенчатая аппроксимация средними значениями приводит к среднеквадратичной ошибке:

$$\varepsilon^2(N) = \int_0^1 (x(\theta) - S_N(\theta))^2 d\theta$$

для которой в [1] приводится простая инженерная формула для оценки этой ошибки при $N = 2^v$:

$$\hat{\varepsilon}^2(N) = \frac{1}{12N^2} \int_0^1 (x'(\theta))^2 d\theta + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

[1] Романюк Ю.А. Дискретные преобразования сигналов. М.: МФТИ, 1981.

Функции Уолша.

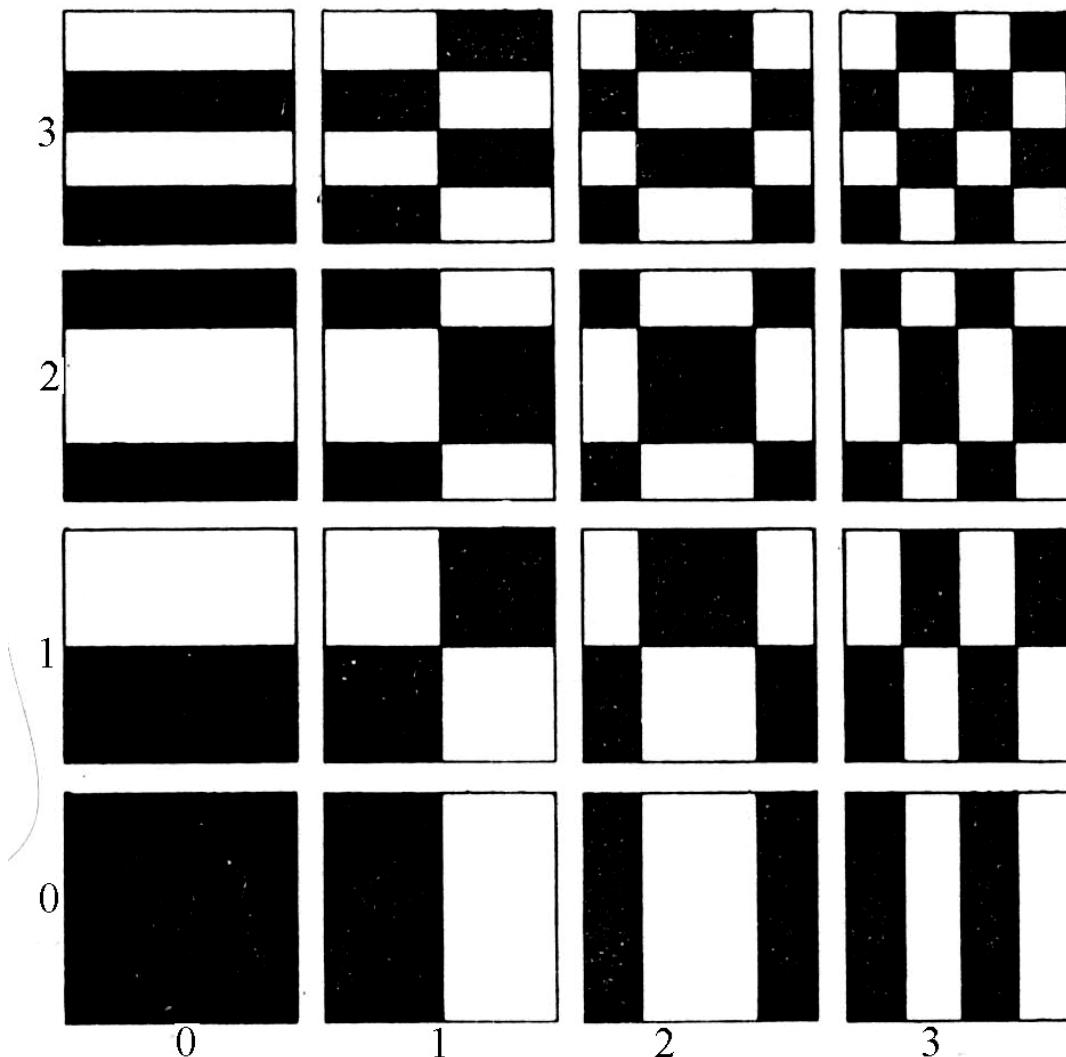
Двумерные функции Уолша

Двумерные функции Уолша получают как произведение одномерных:

$$\text{wal}_{n,m}(\theta, \tau) = \text{wal}(n, \theta)\text{wal}(m, \tau).$$

Предполагается, что θ и τ заданы в прямоугольных координатах; $\theta \in [0,1)$, $\tau \in [0,1)$,

Это делается для того, чтобы упростить вычисление коэффициентов представления сигналов по таким двумерным функциям. Вычисление двумерного интеграла скалярного произведения сводится к вычислению двух одномерных.



Первые шестнадцать двумерных функций Уолша

Примеры базисных функций из I_2^N

Пространства I_2 и I_2^N .

- Элементами пространства I_2 являются счетномерные векторы — последовательности отсчетов

$$x = (x[0], x[1], \dots, x[k], \dots), x[k] \in \mathbb{C},$$

такие, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty.$$

- Ограничение размерности вектора до N приводит к пространству I_2^N :

$$x = (x[0], x[1], \dots, x[k], \dots, x[N-1]), x[k] \in \mathbb{C},$$

Примеры базисных функций из I_2^N .

Система единичных импульсов

$$\phi_n[k] = \mathbf{1}[n=k], 0 \leq n, k \leq N-1.$$

Коэффициенты разложения совпадают с отсчетами $x[k]$.

Дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ) (повторение).

Функции ДЭФ определяются следующим образом:

$$\varphi_n[k] = W_N^{nk} = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

Здесь n и k — целые числа, $n, k = 0, 1, \dots, N-1$, т. е. число функций в системе равно числу отсчетов каждой функции. Система ДЭФ является ортонормированной и полной в пространстве I_2^N .

Основные свойства ДЭФ.

1. ДЭФ являются комплекснозначными функциями.
2. Матрица $\|W_N^{nk}\|$ является симметричной.
3. Система ДЭФ периодична с периодом N по обеим переменным.
4. Система ДЭФ ортогональна:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_n[k] \varphi_m^*[k] = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} W_N^{-mk} = \begin{cases} N, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Примеры базисных функций из ℓ_2^N

5. Система ДЭФ мультипликативная:

$$W_N^{nk} W_N^{mk} = W_N^{lk},$$

где $l = (n+m)_{\text{mod } N}$, т. е. индексы суммируются по модулю N .

6. Ряд Фурье по этой системе

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk},$$

где коэффициенты Фурье

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{-nk}.$$

Эти два соотношения определяют пару (прямое и обратное) дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Пример. Вычислить 16-точечное ДПФ для периодической последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

Обратное ДПФ:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi k \frac{n}{16}) = \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{3}{16}} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k \frac{3}{16}}$$

$$x[k] = \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{3}{16}} + \frac{1}{2} e^{j2\pi k \frac{13}{16}}$$

Отсюда

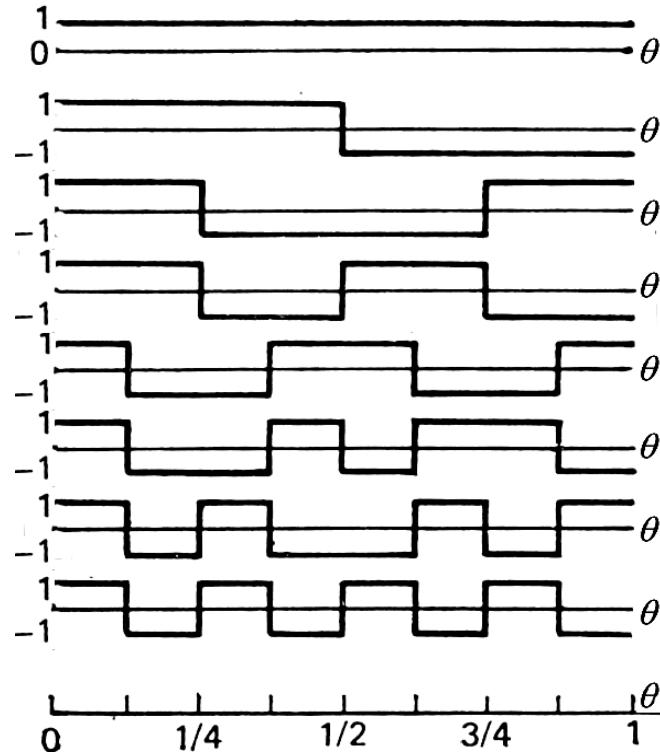
$$\tilde{X}[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \pm 3 + 16m, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n \neq \pm 3 + 16m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значения ДПФ на основном периоде ($n = 0, 1, \dots, N-1$)

n	3, 13	0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15
$\tilde{X}[n]$	0,5	0

Примеры базисных функций из I_2^N

Дискретные функции Уолша



Поскольку функции Уолша $wal(n, \theta)$ кусочно постоянные на участках

$$\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right), N = 2^v, k = 0, 1, \dots, N-1,$$

то для аргумента θ достаточно указать принадлежность некоторому участку. Тогда можно рассмотреть функции Уолша дискретного аргумента $wal(n, k)$. Первым $N = 2^v$ функциям Уолша можно поставить в соответствие матрицу.

$$W_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W_N W_N^T = N E_N, W_N = W_N^T.$$

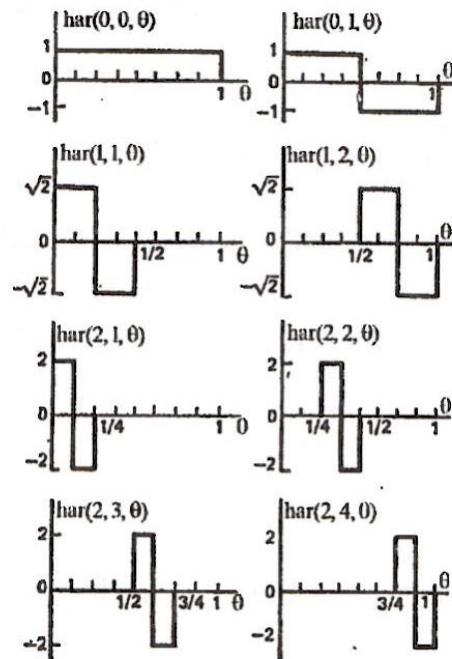
Система Адамара $had(h, k)$ — другой способ нумерации функций Уолша. Матрица Адамара H_N порядка $N = 2^v$ строится по правилу

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_{2L} = \begin{bmatrix} H_L & H_L \\ H_L & -H_L \end{bmatrix}.$$

Примеры базисных функций из L_2^N

Функции Хаара.

Система функций Хаара $\{\text{har}(r, m, \theta)\}$, где $\theta = t/T$ – безразмерное время и $t \in [0, T]$, является полной ортонормированной в $L_2[0,1]$. Введена Хааром в 1910 г.



Функции Хаара связаны с ортогональными вейвлетами Хаара.

Функции Хаара определяются следующим образом.
 $\text{har}(0, 0, \theta) = 1$, $\theta \in [0, 1]$;

$$\text{har}(r, m, \theta) = \begin{cases} 2^{r/2}, & \frac{m-1}{2^r} \leq \theta < \frac{m-0,5}{2^r}; \\ -2^{r/2}, & \frac{m-0,5}{2^r} \leq \theta < \frac{m}{2^r}; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

при $0 \leq r < \log_2 N$, $1 \leq m \leq 2^r$. Из них получают дискретные функции Хаара, которые могут быть определены матрицей H_n , $n = \log_2 N$. Пример матрицы H_3 из первых восьми функций Хаара приведен ниже.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. Определить спектр функции отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_e(t - k\Delta t)}{2\pi f_e(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_b}.$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Фурье, показать, что в L_2 функции отсчетов ортогональны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \|\Phi_n\|^2 = \Delta t = \frac{1}{2f_e}, & k = l, \end{cases}$$

и имеют конечную удельную энергию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(t)|^2 dt.$$

№2. Изобразить первые шестнадцать функций Уолша в нумерации Уолша и в нумерации Пэли. Проверить, совпадают ли получившиеся множества (без учета нумерации) из первых 16 базисных функций.

№3. Построить первые 16 функций Хаара.

№4 (повторение). Найти коэффициенты разложения в ряд по системе дискретных экспоненциальных функций

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(j2\pi k \frac{n}{16})$$

периодической (с периодом $N = 16$) последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{1}{16} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

Сравнить их с коэффициентами ДПФ.

№5. Для линейно меняющегося сигнала $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$ найти первые четыре коэффициента Фурье по системе Уолша $\text{wal}(n, \theta)$. Найти среднеквадратичную ошибку представления такого сигнала четырьмя первыми членами ряда Фурье по системе функций Уолша. Сравнить эту величину ее с оценкой

$$\hat{\varepsilon}^2(N) = \frac{1}{12N^2} \int_0^1 (x'(\theta))^2 d\theta + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

№6. Записать матрицу Адамара порядка 8. Изобразить первые 8 функций Уолша в нумерации Адамара $\text{had}(h, \theta)$ с непрерывным временем.

Теоретические вопросы к диф. зачету

Теоретические вопросы к диф. зачету (программа курса).

1. Классификация сигналов. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Понятия дискретизации и квантования. Шум квантования АЦП.

2. Спектры периодических и импульсных сигналов.

Преобразование Фурье, его свойства. Спектры гармонических сигналов. Примеры спектров импульсных сигналов (прямоугольный импульс, треугольный импульс, приподнятый косинус, гауссовский импульс). Растекание спектральных компонент при ограничении сигнала по длительности.

3. Дискретизация аналоговых сигналов. Спектр дискретизованного сигнала. Эффект наложения. Теорема Котельникова во временной области. Выбор частоты дискретизации.

4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов. Формы записи ДВПФ для разных частотных переменных. Сходимость ДВПФ. Примеры. Свойства ДВПФ: линейность, теорема запаздывания, теорема смещения, равенство Парсеваля, теоремы о свертке, ДВПФ периодических последовательностей.

5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ): формы записи, свойства, области применения (периодические сигналы и сигналы конечной длительности). Матричная форма ДПФ.

6. Связь между ДПФ и ДВПФ. Связь ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей, пример для отсчетов гармонического сигнала. Связь ДПФ и ДВПФ для последовательностей конечной длительности, интерполяция ДВПФ путем добавления нулевых отсчетов в сигнал. Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ. Частотная ось ДПФ, связь с частотами в спектрах аналогового и дискретного сигналов.

7. Окна в цифровом спектральном анализе методом ДПФ.

Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ. Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна. Примеры основных оконных функций (прямоугольное, треугольное, Ханна, Хемминга, Блэкмана) и их характеристики. Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды. Оценка амплитуд компонент: усиление преобразования, паразитная амплитудная модуляция спектра, коэффициент амплитудной модуляции, окно с плоской вершиной. Примеры параметрических окон: окно Чебышева, окно Кайзера.

8. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).

Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Обратимость.

Теоретические вопросы к диф. зачету

9. Быстрое преобразование Фурье. Алгоритм БПФ для составной размерности N . Алгоритмы БПФ с основанием 2.

Разбиение N -точечного ДПФ на два $N/2$ -точечных. Алгоритм БПФ с основанием 4. Эффективное вычисление свертки с использованием БПФ.

10. Представление сигналов ортогональными рядами. Полные ортонормированные системы. Обобщённые ряды Фурье. ДПФ как ряд Фурье по системе дискретных экспоненциальных функций.