

Лекция 2 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

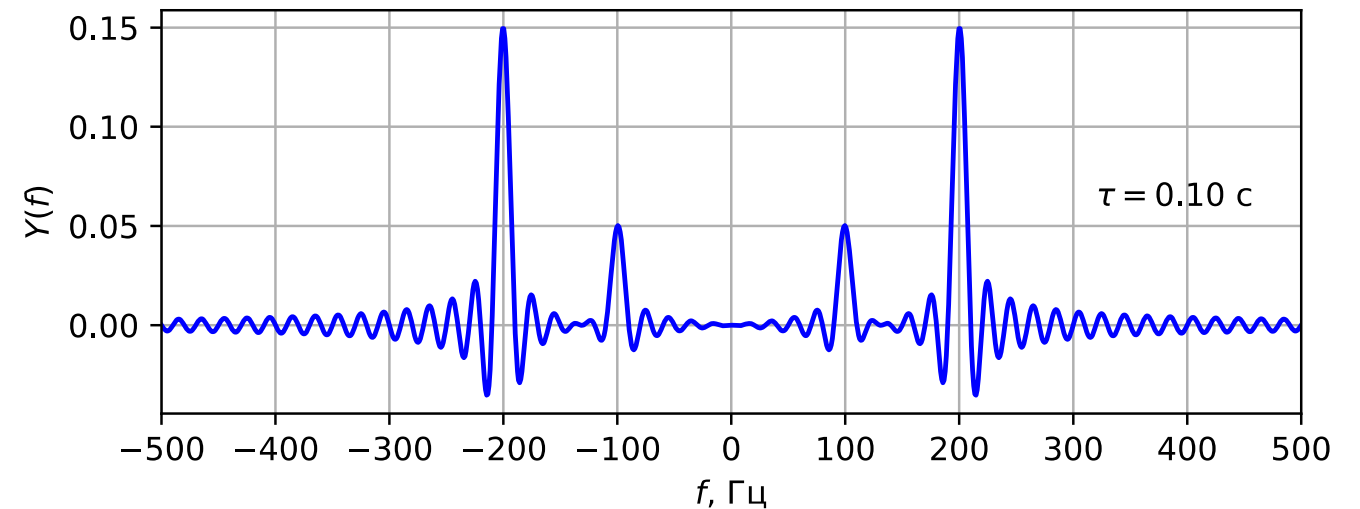
11 февраля 2025 г.

2. Спектры периодических и импульсных сигналов.

Преобразование Фурье, его свойства.

Примеры спектров импульсных сигналов (прямоугольный импульс, треугольный импульс, приподнятый косинус, гауссовский импульс). Спектр дельта-функции. Спектр последовательности из N прямоугольных импульсов.

Частотные характеристики сигнала. Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.



Преобразование Фурье: формулы анализа и синтеза

Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если $x(t)$ — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции $x(t)$ существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанная с $x(t)$ соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 df = 0.$$

Причем, если функции $x(t)$ и $X(f)$ абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df.$$

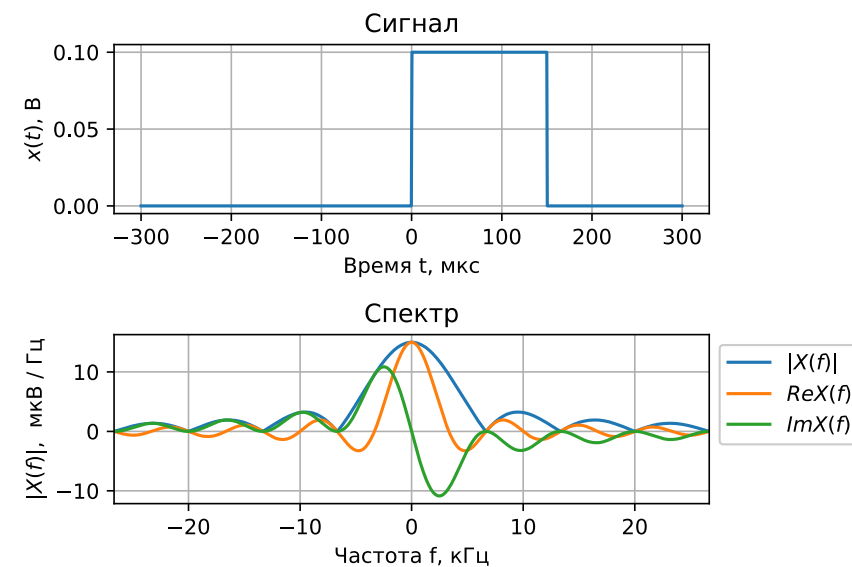
Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (FT), где частота f измеряется в Герцах (Гц).

Для частоты циклической частоты $\omega = 2\pi f$, измеряемой в рад/с (радианы в секунду), пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй - интегралом Фурье.



Свойства преобразования Фурье

Далее будем использовать запись вида $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$, что означает, что для сигнала $x(t)$ преобразование Фурье будет $X(f)$. Предположим, что $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$ и $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$. Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \alpha X(f) + \beta Y(f).$$

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени τ (или опережения в случае $\tau < 0$)

$$x(t - \tau) \overset{FT}{\leftrightarrow} \exp(-j2\pi f \tau) X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f + f_0).$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

Здесь «*» означает комплексное сопряжение.

5. Теорема о спектре произведения.

$$\begin{aligned} x(t) y(t) &\overset{FT}{\leftrightarrow} X(f) \otimes Y(f), \\ x(t) y(t) &\overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f}) Y(f - \tilde{f}) d\tilde{f}. \end{aligned}$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$\begin{aligned} x(t) \otimes y(t) &\overset{FT}{\leftrightarrow} X(f) Y(f), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau &\overset{FT}{\leftrightarrow} X(f) Y(f). \end{aligned}$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

Если функция $x(t)$ непрерывна и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$, то

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FT}{\leftrightarrow} j2\pi f X(f).$$

9. Теорема о производной спектра.

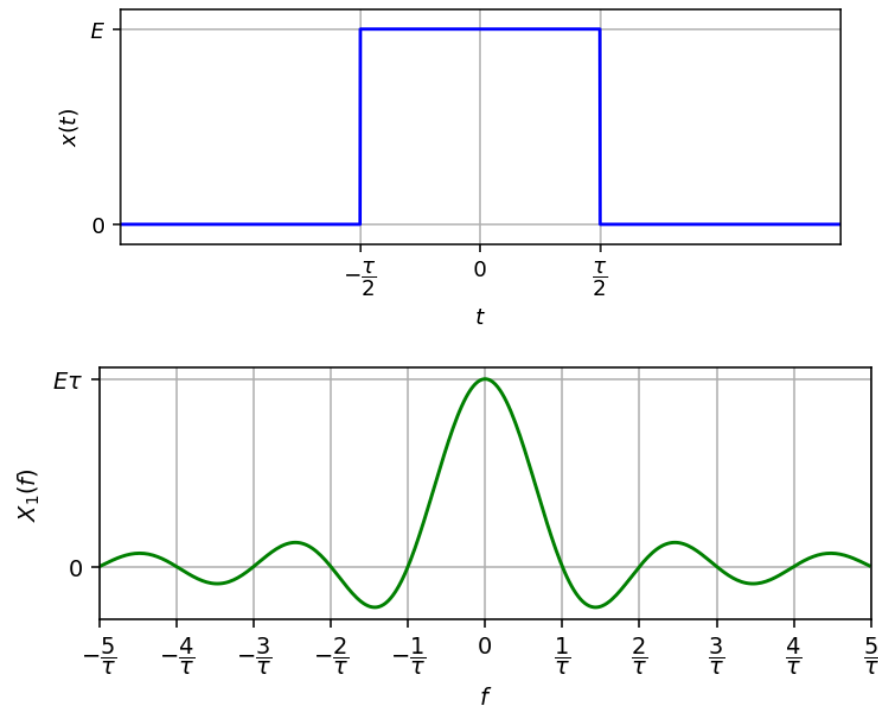
Если функция $X(f)$ непрерывна и $\lim_{f \rightarrow \pm\infty} X(f) = 0$, то

$$t \cdot x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} -\frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$

Спектры прямоугольного и треугольного импульсов

Симметричный прямоугольный импульс длительностью τ .

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

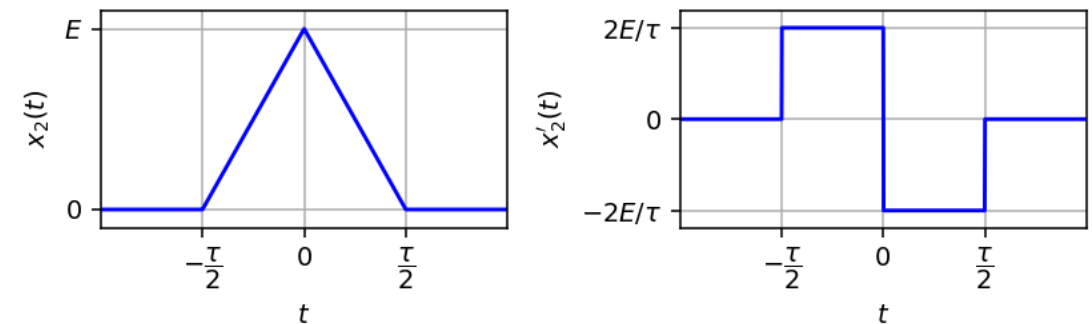


Спектр находим с помощью формулы преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \frac{E}{-j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}. \end{aligned}$$

Симметричный треугольный импульс длительностью τ .

$$x_2(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



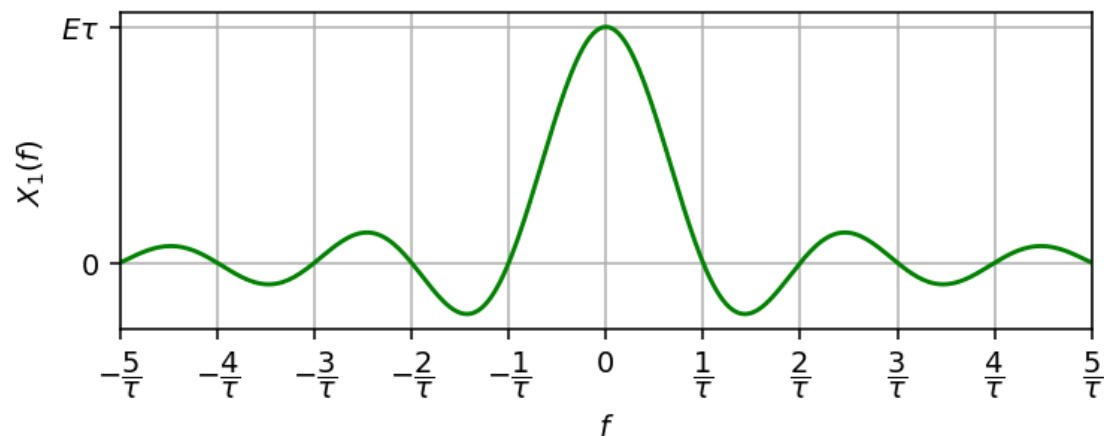
1) Теорема о спектре производной: если $x_2(t) \xleftrightarrow{FT} X_2(f)$, то $\frac{dx_2(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j2\pi f X_2(f)$.

2) Теорема запаздывания: если $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$, то $x(t - \tau) \xleftrightarrow{FT} \exp(-j2\pi f \tau) X(f)$.

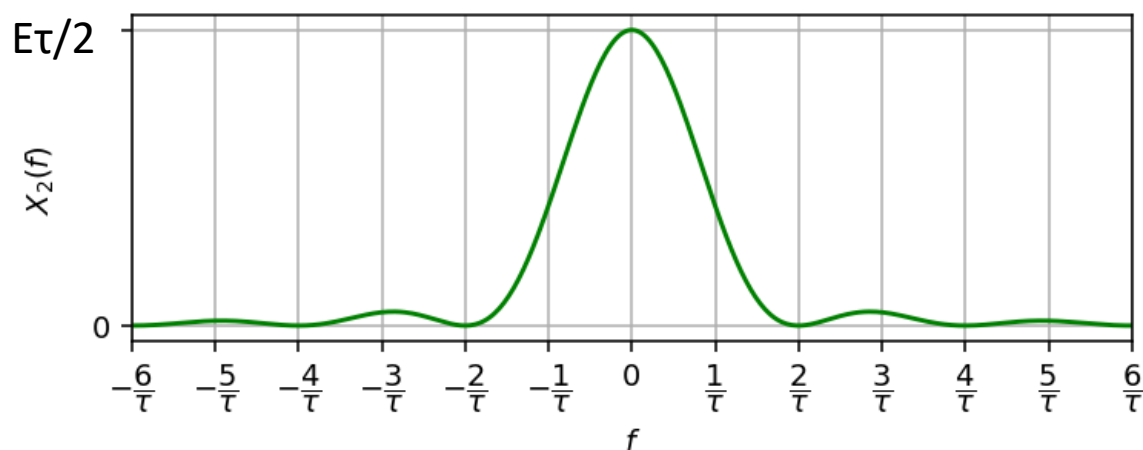
$$X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} \left(e^{j\pi f \tau/2} - e^{-j\pi f \tau/2} \right) \frac{2E}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau/2)}{(\pi f \tau/2)^2}$$

Спектры прямоугольного и треугольного импульсов

Спектр прямоугольного импульса $X_1(f) = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$.

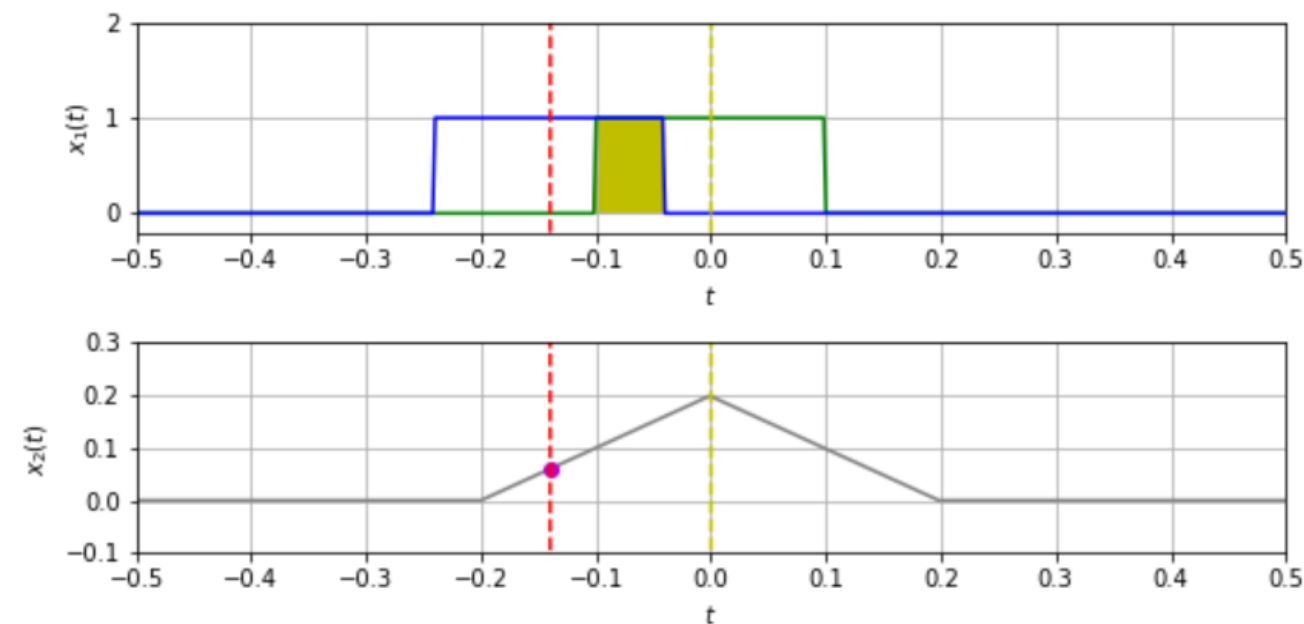


Спектр треугольного импульса $X_2(f) = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau / 2)}{(\pi f \tau / 2)^2}$



Заметим, что ширина главного лепестка $X_2(f)$ в два раза больше, чем у $X_1(f)$.

Спектр треугольного импульса можно получить, используя теорему о свертке: если $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$ и $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)Y(f)$. Треугольный импульс можно рассматривать как свертку двух прямоугольных соответствующей высоты с длительностью $\tau/2$.



Спектр гауссова импульса

Определим спектральную плотность гауссова импульса

$$x_G(t) = \exp(-\beta^2 t^2).$$

$$X_G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_G(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 t^2 - j2\pi f t) dt.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi},$$

который может быть получен из условия нормировки гауссова распределения

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты

$$\beta^2 t^2 + j2\pi f t = \beta^2 t^2 + j2\pi f t - \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2} + \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2} = \left(\beta t + j \frac{\pi f}{\beta} \right)^2 + \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}$$

Обозначим $\xi = \beta t + j \frac{\pi f}{\beta}$, $d\xi = \beta dt$.

$$X_G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\xi^2 - \frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}\right) \frac{d\xi}{\beta}.$$

$$X_G(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}\right).$$

Спектр дельта-функции

Используя преобразование Фурье, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^0 = 1,$$

т. е. спектр дельта-функции постоянен на всех частотах:

$$\delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 1.$$

Спектр пачки равноотстоящих импульсов2

Частотные характеристики сигнала

В общем случае спектральная плотность $X(f)$ – комплексная функция частоты:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

$$X(f) = \operatorname{Re} X(f) + j \operatorname{Im} X(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)},$$

где

$$\operatorname{Re} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt,$$

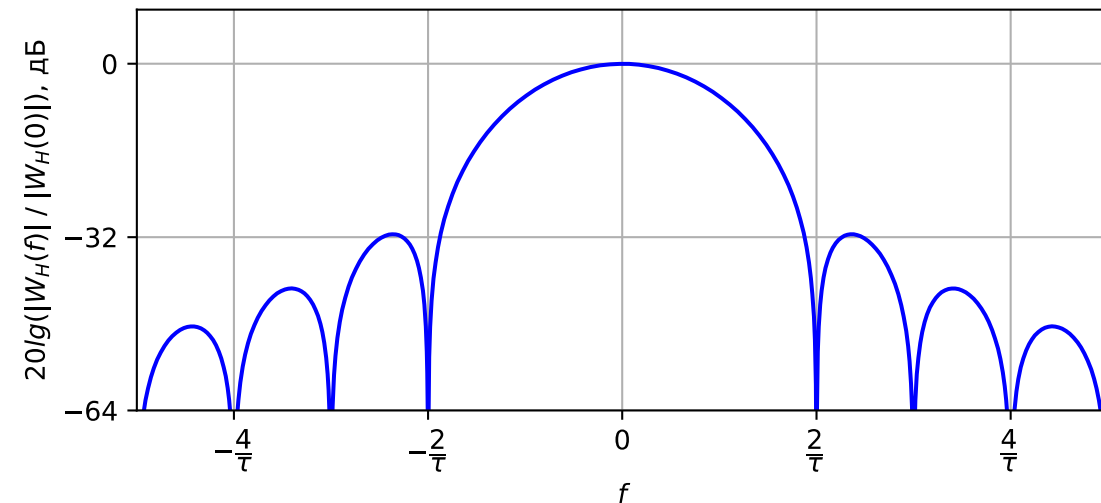
$$\operatorname{Im} X(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi ft dt,$$

$|X(f)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(f) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

АЧХ в децибелах (дБ) измеряется относительно некоторого значения. Для окон обычно требуется определить уровень на частоте f относительно главного лепестка:

$$20 \lg \left| \frac{W(f)}{W(0)} \right| = 10 \lg \frac{|W(f)|^2}{|W(0)|^2}.$$



Свойства симметрии спектра реального сигнала

Для действительного сигнала

$$X(f) = X^*(-f).$$

Это означает, что для действительного сигнала $\operatorname{Re} X(f)$ и $|X(f)|$ – чётные функции, а $\operatorname{Im} X(f)$ и $\varphi(f)$ – нечётные функции частоты. Если в дополнение к этому $x(t)$ – чётная функция, то

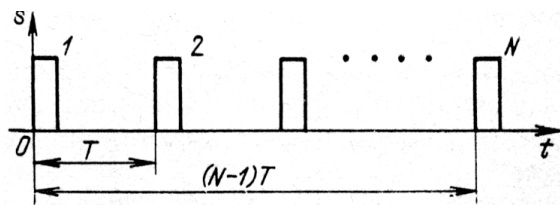
$$X(f) = X(-f),$$

т. е. спектральная плотность является действительной и чётной функцией частоты f .

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Пример. Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из N прямоугольных импульсов



Обозначим через $X_1(\omega)$ ($\omega = 2\pi f$) спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из N равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания

$$X(\omega) = X_1(\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega(N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

Суммируя N членов геометрической прогрессии, получаем

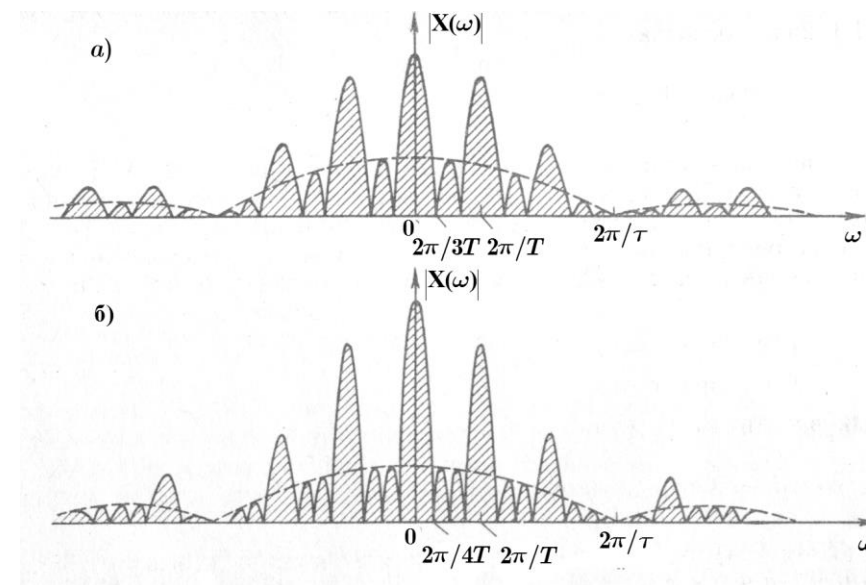
$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} (e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2})}{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})} = \\ &= X_1(\omega) \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2} \exp\left(-j\omega \left(\frac{T}{2}(N-1)\right)\right). \end{aligned}$$

Видно, что на частотах $\omega = m2\pi / NT$, где m – целое, $X(\omega) = 0$. Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \exp\left(-j\omega \frac{\tau}{2}\right),$$

где τ – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из N равноотстоящих прямоугольных импульсов:

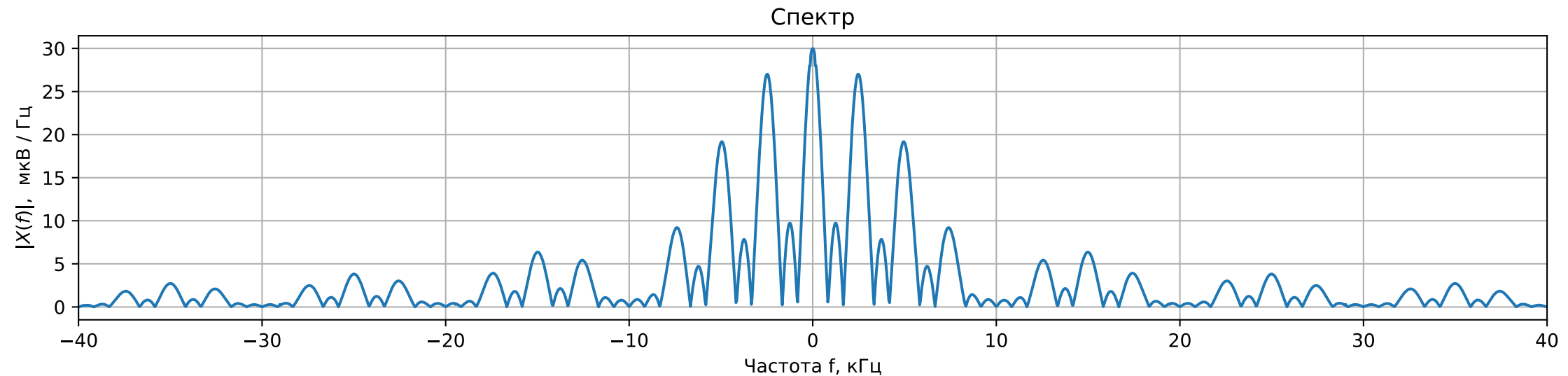
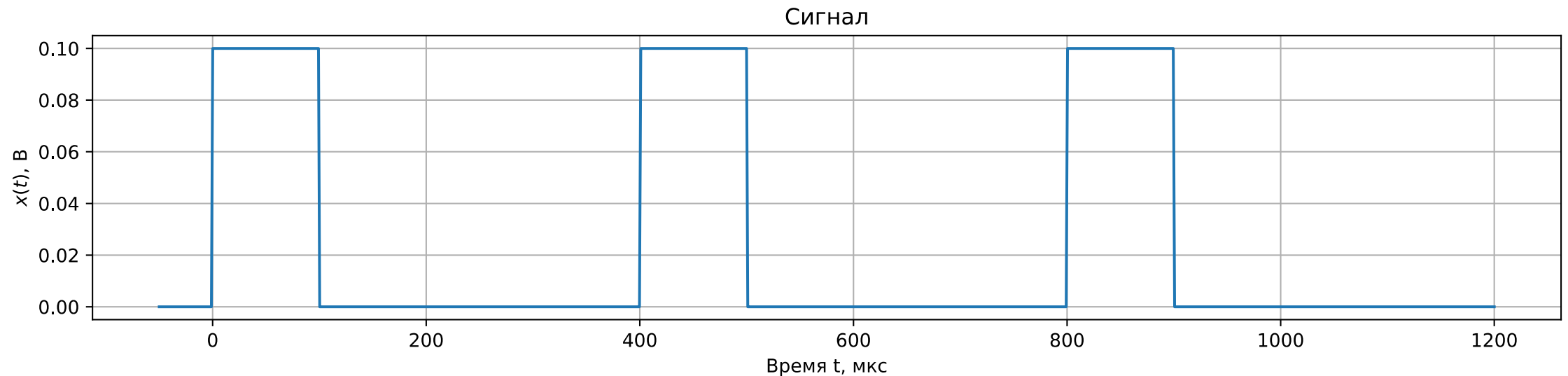
$$X(\omega) = \exp\left(-j\omega \left(\frac{T}{2}(N-1) + \frac{\tau}{2}\right)\right) E\tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2}.$$



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке. интервал между соседними импульсами $T = 3\tau$. Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

$$X(f) = \exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1) + \frac{\tau}{2}\right)\right) E\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \frac{\sin(\pi N T f)}{\sin(\pi T f)}, \quad T = 400 \text{ мкс}, \tau = 100 \text{ мкс}, N = 3. \quad \frac{1}{\tau} = 10 \text{ кГц}, \frac{1}{T} = 2,5 \text{ кГц}.$$



Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.

Двойственность (дуальность) преобразования Фурье.

Схожесть формул прямого и обратного преобразования Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df,$$

позволяет сделать следующий вывод.

$$\text{Если } x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f), \text{ то } X(-t) \overset{FT}{\leftrightarrow} x(f).$$

Это свойство называется двойственностью (дуальностью) преобразования Фурье. Оно позволяет находить спектры сигналов, описываемых теми же функциями, что и известные нам спектры (вида $\text{sinc}(x)$ и др.).

Пример. Пусть $\Pi_{\lambda}(t)$ — прямоугольная функция с единичной площадью, определяемая формулой

$$\Pi_{\lambda}(t) = \begin{cases} 1/\lambda, & \text{если } |t| < \lambda/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \lambda/2. \end{cases}$$

Нам известно, что

$$\lambda \Pi_{\lambda}(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \lambda \frac{\sin(\pi f \lambda)}{\pi f \lambda}.$$

Тогда

$$\Pi_{\lambda}(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{\sin(\pi f \lambda)}{\pi f \lambda}.$$

Поскольку сигнал и спектр обладают четной симметрией, то

$$\frac{\sin(\pi t \lambda)}{\pi t \lambda} \overset{FT}{\leftrightarrow} \Pi_{\lambda}(f)$$

Здесь λ имеет разную размерность в разных соответствиях.

Задачи для самостоятельного решения

№1. а) Вычислите спектр $X_1(f)$ одностороннего экспоненциального импульса для случая $\alpha > 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} E \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Найдите амплитудный $|X_1(f)|$ и фазовый $\varphi_1(f)$ спектры этого сигнала.

б) Воспользовавшись этим результатом, определите спектральную плотность для двухстороннего экспоненциального импульса

$$x_2(t) = E \exp(-\alpha |t|) = x_1(t) + x_1(-t).$$

в) Используя свойство преобразования Фурье — теорему о производной спектра, определить для случая $\alpha > 0$ спектральную плотность сигнала

$$x_3(t) = \begin{cases} t \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

№2. Получить и изобразить по модулю спектр пачки из $N=3$ симметрично расположенных относительно нуля прямоугольных импульсов высотой $E=1$ В, длительностью $\tau=1$ мкс и интервалом следования в пачке $T=3$ мкс.

№3. а) Используя свойство дуальности преобразования Фурье, определить спектр функции

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin(2\pi f_B t)}{2\pi f_B t},$$

где f_B - константа размерности частоты в Гц.

б) Используя теорему запаздывания, определить спектр функций

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - k\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_B (t - k\Delta t))}{2\pi f_B (t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

в) Используя обобщенное равенство Парсеваля, доказать ортогональность функций $\varphi_k(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_m^*(t) dt = 0 \text{ при } k \neq m.$$

№4. Используя спектры прямоугольного и треугольного импульсов и обобщённое равенство Парсеваля, вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta, \text{ б) } \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta, \text{ в) } \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^4 d\eta.$$

№5. Пусть $X(f)$ — спектр некоторого сигнала $x(t)$ конечной длительности. Определить спектр сигнала $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$, где $f_0 = 10$ кГц.