ТЕСТ 10

Вопрос **1**
Верно
Баллов: 2,00 из 2,00
Отметить вопрос

№1. Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$x_1[k] = \cos(\pi k/4) + \cos(17\pi k/64)$,

$x_2[k] = \cos(\pi k/4) + \cos(21\pi k/64)$.

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 64-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы соседние спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

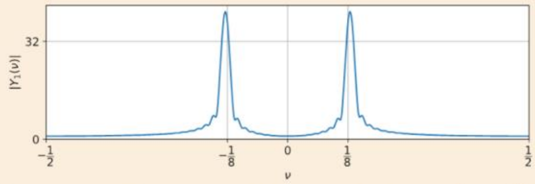
Ответ. Для последовательности $x_1[k]$ соседние спектральные максимумы неразличимы ✔ . Для последовательности $x_2[k]$ соседние спектральные максимумы различимы ✔ .

Сигналы можно представить в виде:

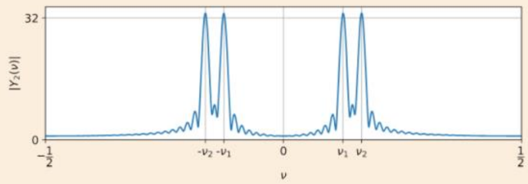
$$x_1[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64} k\right) + \cos\left(2\pi \frac{8,5}{64} k\right),$$

$$x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64} k\right) + \cos\left(2\pi \frac{10,5}{64} k\right).$$

1) В последовательности $x_1[k]$ относительные частоты гармонических компонент $\nu_1 = \frac{8}{64}$ и $\nu_2 = \frac{8,5}{64}$. Расстояние между частотами$\Delta\nu_{12} = \frac{0,5}{64}$ меньше ширины главного лепестка окна на уровне −3 дБ ($\Delta\nu_{12} < 0,89/64$), что означает неразличимость гармонических компонент в ДВПФ.



2) В последовательности $x_2[k]$ относительные частоты гармонических компонент $\nu_1 = \frac{8}{64}$ и $\nu_2 = \frac{10,5}{64}$. Расстояние между ними$\Delta\nu_{12} = \frac{2,5}{64}$. $\Delta\nu_{12}$ больше ширины главного лепестка окна на уровне −6 дБ ($\Delta\nu_{12} > 1,2/64$), что означает различимость гармонических компонент в ДВПФ.



Вопрос **2**
Верно
Баллов: 2,00 из 2,00
Отметить вопрос

№2. Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения (различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды) не менее $\Delta\nu = 0,0075$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$. Используя данные из таблицы приложения к лекции, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу:

а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга,

д) Блэкмана.

Ответ.

Прямоугольное окно позволяет ✔ гарантированно выполнить поставленную задачу.

Окно Бартлетта позволяет ✔ гарантированно выполнить поставленную задачу.

Окно Ханна не позволяет ✔ гарантированно выполнить поставленную задачу.

Окно Хэмминга позволяет ✔ гарантированно выполнить поставленную задачу.

Окно Блэкмана не позволяет ✔ гарантированно выполнить поставленную задачу.

Гарантировано выполнить поставленную задачу позволяют те окна, для которых выполнено $\Delta\nu_{-6\,дБ} < \Delta\nu$. В таблице были приведены значения $\Delta\nu_{-6\,дБ}$ в бинах ДПФ. Один бин составляет $1/N$.

	полоса по уровню −6 дБ	
название окна	в бинах ДПФ	в нормированных частотах
прямоугольное	1,20	0,0047
Бартлетта	1,78	0,0070
Ханна	2,00	0,0078
Хэмминга	1,82	0,0071
Блэкмана	2,30	0,0090

Поставленную задачу позволяют выполнить **прямоугольное окно, окна Бартлетта и Хэмминга.**

ТЕСТ 11

№1. Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^{M} A_m \cos(2\pi \tfrac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; $m = 1,\ 2,\ \ldots, \lfloor 0,5N-1 \rfloor$– целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды A_m и фазы φ_m через отсчеты ДПФ данной последовательности.

Выберите один ответ:

- $A_m = 2\left|\tilde{X}[m]\right|, \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m], \quad m \in \left[0,\ \frac{N}{2}-1\right].$ ✔
- $A_m = 2\left|\tilde{X}[m]\right|, \quad \varphi_m = \frac{\pi}{2} + \arg \tilde{X}[m], \quad m \in \left[0,\ \frac{N}{2}-1\right].$

Ваш ответ верный.

См. решение в файле.

Правильный ответ: $A_m = 2\left|\tilde{X}[m]\right|, \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m], \quad m \in \left[0,\ \frac{N}{2}-1\right].$

Пример.

Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^{M} A_m \cos(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

где A_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; $m = 1, 2, \ldots, \lfloor 0,5N-1 \rfloor$– целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды A_m и фазы φ_m через отсчеты ДПФ данной последовательности.

Решение.

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=1}^{M} A_m \cos(2\pi \frac{m}{N}k + \varphi_m)\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mk+\varphi_m\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mk+\varphi_m\right)}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)k+\varphi_m\right)} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}(m+n)k+\varphi_m\right)}\right)$$

Рассмотрим суммы вида $S_1 = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)k+\varphi_m\right)} = e^{j\varphi_m}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n)k}$ отдельно. Определим их по формуле суммы геометрической прогрессии $b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^{N-1}$,

где $b_1 = e^{j\varphi_m}$ (слагаемое при $k=0$), $q = e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n)}$. Если $q \neq 1$, то

$$S_1 = b_1\frac{1-q^N}{1-q} = e^{j\varphi_m}\frac{1-e^{j2\pi(m-n)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n)}} = 0.$$

Если $q = 1$ (что выполнено при $m-n$ кратном N):

$$S_1 = b_1 N = Ne^{j\varphi_m}.$$

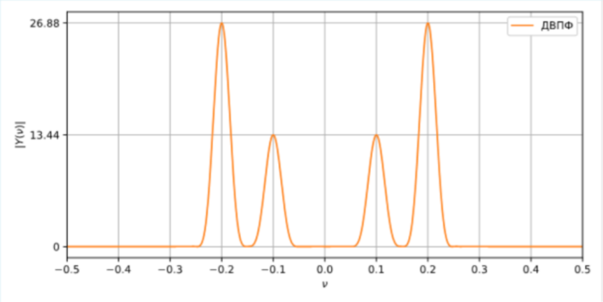
Заметим, что при $n \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right]$ условие $q=1$ выполняется при $m=n$.

Тогда $\tilde{X}[m] = \frac{A_m}{2}e^{j\varphi_m}$ при $m \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right]$.

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m = 2\left|\tilde{X}[m]\right|, \quad \varphi_m = \arg\tilde{X}[m], \quad m \in \left[0, \frac{N}{2}-1\right].$$

№2. На рисунке изображен спектр (ДВПФ) последовательности отсчетов
$x[k] = A_1 \sin(2\pi\nu_1 k) + A_2 \sin(2\pi\nu_2 k), \nu_1 = 0,1, \nu_2 = 0,2,$
где A_1 и A_2 — неизвестные амплитуды (положительные числа), взвешенной окном Блэкмана длиной в 64 отсчета.
Оцените значения A_1 и A_2 по графику.



Ответ.

$A_1 \approx 2 * 13.44/(0,42N) =$ 1 и $A_2 \approx 2 * 26.88/(0,42N) =$ 2 .

1. **Преобразование синусов в экспоненциальную форму**:

$$\sin(2\pi\nu k) = \frac{e^{i2\pi\nu k} - e^{-i2\pi\nu k}}{2i}.$$

Таким образом, сигнал можно записать как:

$$x[k] = \frac{A_1}{2i}\left(e^{i2\pi\nu_1 k} - e^{-i2\pi\nu_1 k}\right) + \frac{A_2}{2i}\left(e^{i2\pi\nu_2 k} - e^{-i2\pi\nu_2 k}\right).$$

2. **Влияние окна Блэкмана**:

Окно Блэкмана уменьшает амплитуды боковых лепестков, но также снижает амплитуду главного лепестка. Коэффициент коррекции амплитуды для окна Блэкмана составляет примерно $0,42$ (это коэффициент, на который умножается амплитуда сигнала из-за применения окна).

3. **Оценка амплитуд по графику**:
   - На графике спектра ищем пики, соответствующие частотам $\nu_1 = 0,1$ и $\nu_2 = 0,2$.
   - Амплитуды пиков на спектре будут равны $\frac{A}{0,42N}$, где A — истинная амплитуда сигнала, $N = 64$ — длина окна.
   - Если на графике пик для ν_1 имеет высоту $13,44$, то:

   $$A_1 \approx 2 \times \frac{13,44}{0,42 \times 64}.$$

   Множитель 2 возникает из-за того, что энергия синусоиды распределяется между положительной и отрицательной частотами.

4. **Расчёт**:

$$A_1 \approx 2 \times \frac{13,44}{0,42 \times 64} = 2 \times \frac{13,44}{26,88} = 2 \times 0,5 = 1.$$

Аналогично для A_2 (если пик для ν_2 имеет высоту, например, $26,88$):

$$A_2 \approx 2 \times \frac{26,88}{0,42 \times 64} = 2 \times 1 = 2.$$

ТЕСТ 12

№1. Предположим, что с помощью окна длиной $M = 8000$ осуществляется вычисление кратковременного дискретного преобразования Фурье последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi\frac{f_1}{f_s}k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi\frac{f_2}{f_s}k + \varphi_2\right)$$

длиной $N = 40000$ отсчетов без перекрытия. Фазы φ_1 и φ_2 заранее неизвестны. Частота дискретизации $f_s = 44100$ Гц.

Указать, начиная с какого значения $\Delta f = |f_1 - f_2|$ можно выбором необходимой размерности ДПФ N_{FFT} обеспечить различимость гармонических компонент на спектрограмме.

Рассмотреть случаи следующих окон: а) прямоугольного, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

Ответы привести с округлением до сотых долей Гц.

Ответ.

а) для прямоугольного окна Δf = 6.62 ✔ Гц,

б) для окна Бартлетта Δf = 9.81 ✔ Гц,

в) для окна Ханна Δf = 11.03 ✔ Гц,

г) для окна Хэмминга Δf = 10.03 ✔ Гц,

д) для окна Блэкмана Δf = 12.68 ✔ Гц.

Поскольку по условию для выбора доступны любые значения размерности ДПФ, то на различимость гармонических компонент влияет только форма главного лепестка окна.
Гарантировать различимость мы можем в том случае, когда расстояние между частотами гармонических компонент больше ширины главного лепестка окна на уровне -6 дБ.

Формула:

Для каждого окна:

Копировать Редактировать

```
Δf = ширина_лепестка_на_-6дБ × (fₛ / M)
```

Используем ширины лепестков (из лекции):

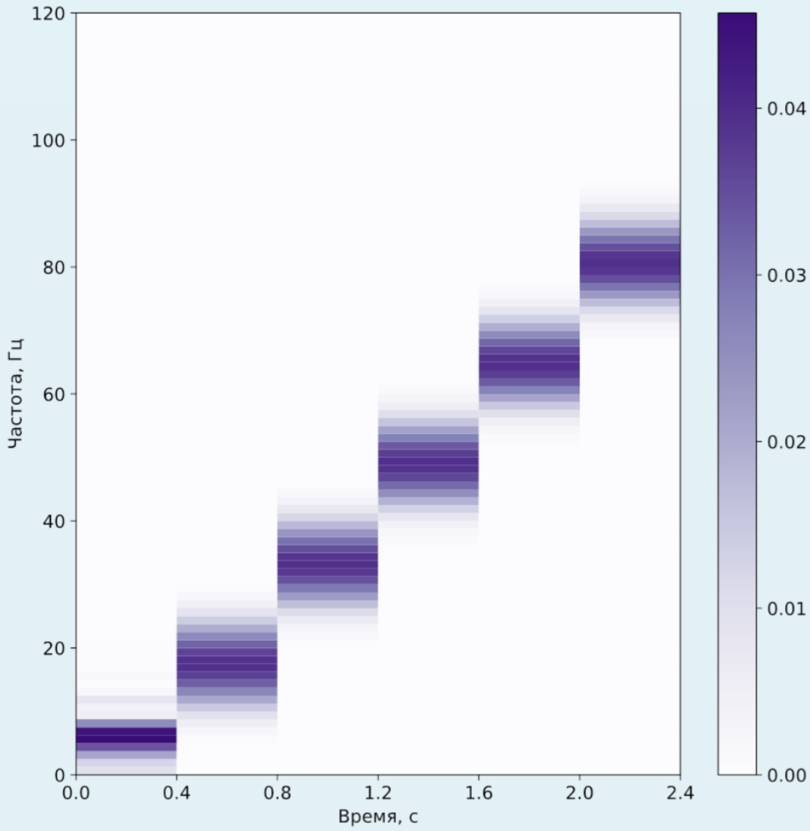
Окно	Ширина лепестка (–6 дБ)	Расчёт	Δf (Гц)
Прямоугольное	0.12	0.12 × 44100 / 8000	**6.62**
Бартлетта	0.178	0.178 × 44100 / 8000	**9.81**
Ханна	0.200	0.200 × 44100 / 8000	**11.03**
Хэмминга	0.182	0.182 × 44100 / 8000	**10.03**
Блэкмана	0.230	0.230 × 44100 / 8000	**12.68**

№2. На рисунке представлены результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала.

В STFT используется окно Ханна, $M = 400$, $L = 200$, $N_{\text{FFT}} = M$, $f_д = 500$ Гц,

за время наблюдения $2,4$ секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц.

Укажите, чему равна ширина прямоугольника (ячейки одного цвета) на графике STFT вдоль оси времени и по оси частот.



Ответ.

Ширина ячейки одного цвета вдоль оси времени составляет 0.4 секунд.

Ширина ячейки одного цвета вдоль оси частот составляет 1.25 Гц.

1. Ширина ячейки по времени:

Окно двигается с шагом **L = 200** отсчётов

Период одного отсчёта = 1 / 500 с = 0.002 с

⇒

`Δt = 200 × (1 / 500) = 0.4 с`

2. Ширина ячейки по частоте:

Размер БПФ = 400 → всего 400 частотных отсчётов

Так как спектр симметричный, анализируют 0–N/2

⇒ количество **уникальных** отсчётов = 400 / 2 = 200

Полоса частот: от 0 до **$f_а$ / 2 = 250 Гц**

⇒

`Δf = 250 / 200 = 1.25 Гц`

№3. Предположим, что для кратковременного дискретного преобразования Фурье используется окно длиной $M = 512$ отсчетов. Проверить, выполнены ли условия COLA(R) и NOLA(R) ($R = M - L$) для случая

а) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 1$, $L_2 = 128$ (25%), $L_3 = 256$ (50%), $L_4 = 384$ (75%), $L_5 = 511$ и прямоугольного окна;

б) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 256$ (50%), $L_2 = 511$ и окна Ханна.

Проверьте результаты с помощью функций scipy.signal.check_COLA и scipy.signal.check_NOLA.

Ответ. а) для прямоугольного окна при $L_0 = 0$ (без перекрытия) условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_1 = 1$ условие COLA не выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_2 = 128$ (25%) условие COLA не выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_3 = 256$ (50%) условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_4 = 384$ (75%) условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_5 = 511$ условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔.

б) для окна Ханна при $L_0 = 0$ условие COLA не выполнено ✔, условие NOLA не выполнено ✔;

$L_1 = 256$ (50%) условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔;

$L_2 = 511$ условие COLA выполнено ✔, условие NOLA выполнено ✔.

Условия COLA и NOLA:

- **COLA (Constant OverLap-Add)** — сумма наложенных окон в каждой точке фиксирована.
  Требуется, чтобы при сложении окон не было провалов или перекрытий больше единицы.
  Обычно выполняется только для **специально подобранных L**, кратных длине окна или её части.
- **NOLA (Nonzero OverLap-Add)** — необходимо, чтобы сумма окон в каждой точке была **ненулевой**, чтобы сигнал мог быть восстановлен.
  Это более **мягкое условие**, и оно часто выполняется даже при "неправильных" сдвигах.

а) Прямоугольное окно (M = 512):

L	COLA	NOLA	Причина
0	✔	✔	нет наложения → сумма окон постоянна (=1)
1	X	✔	окна накладываются почти полностью, сумма скачет
128	X	✔	сумма окон не постоянна, перекрытие частичное
256	✔	✔	ровно 50% перекрытие → окна равномерно дополняют
384	✔	✔	75% перекрытие — корректный шаг для COLA
511	✔	✔	почти полное перекрытие, но сумма ≈ постоянна

✅ **Вывод:** COLA работает только для кратных M/4, M/2 и т.п.
NOLA — всегда выполняется, если L > 0.

b) Окно Ханна:

L	COLA	NOLA	Причина
0	X	X	окно не накладывается — сумма = окно → нарушено
256	✔	✔	50% перекрытие — специально подобранный шаг
511	X	✔	почти полное перекрытие, сумма не постоянна, но не ноль

✅ **Вывод:**

- COLA для окна Ханна выполняется при L = M/2, M/3, M/4 и т.д.
- NOLA — работает **всегда**, кроме случая L = 0.

ТЕСТ 14

Условие

Показан фрагмент графа **быстрого преобразования Фурье (БПФ)** для N = 16 с прореживанием по **частоте**.
Требуется:

1. Понять структуру вычислений.
2. Заполнить недостающие степени коэффициентов W^n в ячейках (2), (3), (4).
3. Указать правильный порядок выходных значений X[k] в столбце (5).

Теория

Прореживание по частоте (DIF FFT)

- Алгоритм делит последовательность по **частоте**, а не по времени.
- Исходные значения `x[k]` подаются в **естественном порядке**.
- Результаты `X[k]` получаются в **обратном (битово-инвертированном) порядке**.
- Каждая стадия состоит из **"бабочек"** (Butterfly), вычисляющих:

```vbnet
A' = A + B
B' = (A - B) * Wⁿ
```

- Степень **W^n** (twiddle factor) зависит от уровня (стадии) и номера бабочки.

Этапы алгоритма

Число стадий

Для N = 16:
Количество стадий = $\log_2(16) = 4$
Twiddle-факторы применяются на последних **3 стадиях** (начиная со второй).

Решение по столбцам

(1) — входные отсчёты

В DIF порядок исходных отсчётов не меняется:

```css
x[0], x[1], ..., x[15]
```

(2) — первая стадия применения W^n

Здесь 7 ячеек → вписываем **первые 7 степеней W:**

W^n	Число
W^0	1
W^1	2
W^2	3
W^3	4
W^4	5
W^5	6
W^6	7

Ответ:

```
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
```

(3) — вторая стадия

Используются **чётные степени:** W^0, W^2, W^4, W^6
И они повторяются дважды (всего 6 ячеек):

W^n	Число
W^0	1
W^2	3
W^4	5
W^6	7

Ответ:

```
1, 3, 5, 7, 1, 3
```

(4) — третья стадия

Используются только W^0 и W^4, чередуются:

W^n	Число
W^0	1
W^4	5

Ответ:

```
1, 5, 1, 5
```

(5) — выходные X[k]

Результаты БПФ в алгоритме с прореживанием по частоте (DIF) выводятся в **битово-инвертированном порядке.**

Бинарный индекс	Обратный порядок	Индекс
0000	0000	0
0001	1000	8
0010	0100	4
0011	1100	12
0100	0010	2
0101	1010	10
0110	0110	6
0111	1110	14
1000	0001	1
1001	1001	9
1010	0101	5
1011	1101	13
1100	0011	3
1101	1011	11
1110	0111	7
1111	1111	15

Ответ:

```css
X[0], X[8], X[4], X[12], X[2], X[10], X[6], X[1
```

Финальные ответы

- **(2): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**
- **(3): 1, 3, 5, 7, 1, 3**
- **(4): 1, 5, 1, 5**

- **(5): X[0], X[8], X[4], X[12], X[2], X[10], X[6], X[14], X[1], X[9], X[5], X[13], X[3], X[11], X[7], X[15]**

ошибки: 2 4 6 2 4   4 4 4

ошибки: 4 4 4 4   2 4 6 2 4 6

ТЕСТ 15

№1. Определить спектр функции отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t)}{2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t)},\ \Delta t = \frac{1}{2f_{\text{в}}}.$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Фурье, показать, что в L_2 функции отсчетов ортогональны

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \|\varphi_k\|^2 = \Delta t = \dfrac{1}{2f_{\text{в}}}, & k = l, \end{cases}$$

и имеют конечную удельную энергию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(t)|^2 dt.$$

Решение.

1) Определим спектр функции отсчетов. Определим сначала спектр функции отсчетов с индексом нуль.

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}} t}{2\pi f_{\text{в}} t}, \Delta t = \frac{1}{2f_{\text{в}}}.$$

Будем использовать обозначение $\Pi_{2w}(t)$– прямоугольная функция с ненулевыми значениями на интервале $t \in (-w, w)$ и единичной площадью.

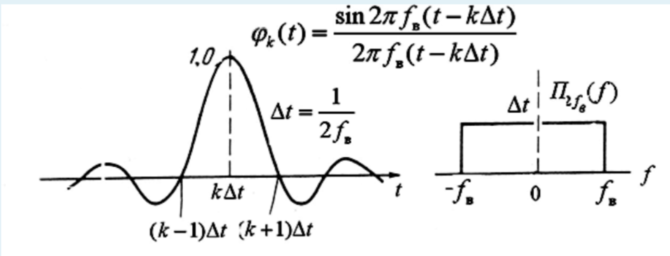
Заметим, что для симметричного прямоугольного импульса единичной площади

$$\Pi_\tau(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$

Найдем обратное преобразование Фурье для $\Pi_{2f_{\text{в}}}(f)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{2f_{\text{в}}}(f) \exp(j2\pi f t)dt = \frac{1}{2f_{\text{в}}} \int\limits_{-f_{\text{в}}}^{f_{\text{в}}} \exp(j2\pi f t)dt = \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}} t}{2\pi f_{\text{в}} t} = \varphi_0(t).$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}} t}{2\pi f_{\text{в}} t} \overset{FT}{\longleftrightarrow} \Pi_{2f_{\text{в}}}(f).$$



Функция отсчетов с индексом k образуется сдвигом по времени функции $\varphi_0(t)$ на $k\Delta t$:

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - k\Delta t),$$

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t)}{2\pi f_{\text{в}}(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_{\text{в}}}.$$

Тогда по теореме запаздывания для преобразования Фурье спектром функции отсчетов $\varphi_k(t)$ является

Выберите один ответ:

- (•) $\Pi_{2f_{\text{в}}}(f) \exp(-j2\pi f k \Delta t)$ ✔
- ( ) $\dfrac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \exp(-j2\pi f k \Delta t)$

Что происходит при сдвиге во времени?

По **теореме запаздывания** для преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}\{\varphi(t-\tau)\} = \mathcal{F}\{\varphi(t)\} \cdot e^{-j2\pi f\tau}$$

Значит, если:

- $\varphi_k(t) = \varphi_0(t - k\Delta t)$
- спектр `ϕ₀(t)` равен $\Pi_{f_s}(f)$

→ спектр `ϕₖ(t)` будет:

$$\Pi_{f_s}(f) \cdot \exp(-j2\pi fk\Delta t)$$

Подстановка:

Так как $\Delta t = \frac{1}{2f_s}$, получаем:

$$\Pi_{f_s}(f) \cdot \exp\left(-j2\pi f \cdot k \cdot \frac{1}{2f_s}\right) = \Pi_{f_s}(f) \cdot \exp\left(-j\frac{\pi kf}{f_s}\right)$$

2. Используя равенство Парсеваля, получаем

$$(\varphi_k(t),\ \varphi_m(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_m^*(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi_{2f_s}(f)\exp(-j2\pi fk\Delta t)\left(\Pi_{2f_s}(f)\exp(-j2\pi fm\Delta t)\right)^* df =$$

$$= (\Delta t)^2 \int\limits_{-f_s}^{f_s} \exp(-j2\pi f(k-m)\Delta t)df = \Delta t \cdot \mathbf{1}[k-m]$$

Ортогональность функций отсчетов: если $k \neq m$, то $(\varphi_k(t),\ \varphi_m(t)) =$ 0 ✔ .

Конечность удельной энергии: $(\varphi_m(t),\ \varphi_m(t)) = \Delta t < \infty$.

$$(\varphi_k(t), \varphi_m(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_m^*(t)dt$$

Переход в частотную область через преобразование Фурье и подстановка спектров:

$$= (\Delta t)^2 \int_{-f_s}^{f_s} \exp\left(-j2\pi f(k-m)\Delta t\right) df$$

Это интеграл от комплексной экспоненты на конечном интервале, который выражается через **функцию δ_{km} (Кронекера)**:

- Если $k = m$, то экспонента = 1 → интеграл даёт $2f_s$
- Если $k \neq m$, то интеграл = 0 (ортогональность)

Следовательно:

$$(\varphi_k(t), \varphi_m(t)) = \Delta t \cdot [k = m]$$

А значит:

- **если** $k \neq m$, то:

$$(\varphi_k(t), \varphi_m(t)) = \boxed{0}$$

№2. Изобразить первые шестнадцать функций Уолша в нумерации Уолша и в нумерации Пэли. Проверить, совпадают ли получившиеся множества (без учета нумерации) из первых 16 базисных функций.

Ответ.

Первые восемь функций системы Уолша изображены на рисунке в следующем порядке (перечисление сверху вниз):

$\mathrm{wal}(0, \theta) = \mathrm{pal}(0, \theta)$

$\mathrm{wal}(15, \theta) = \mathrm{pal}(8, \theta)$

$\mathrm{wal}(7, \theta) = \mathrm{pal}(4, \theta)$

$\mathrm{wal}(8, \theta) = \mathrm{pal}(12, \theta)$

$\mathrm{wal}(3, \theta) = \mathrm{pal}(2, \theta)$

$\mathrm{wal}(12, \theta) = \mathrm{pal}(10, \theta)$

$\mathrm{wal}(4, \theta) = \mathrm{pal}(6, \theta)$

$\mathrm{wal}(11, \theta) = \mathrm{pal}(14, \theta)$

$\mathrm{wal}(1, \theta) = \mathrm{pal}(1, \theta)$

$\mathrm{wal}(14, \theta) = \mathrm{pal}(9, \theta)$

$\mathrm{wal}(6, \theta) = \mathrm{pal}(5, \theta)$

$\mathrm{wal}(9, \theta) = \mathrm{pal}(13, \theta)$

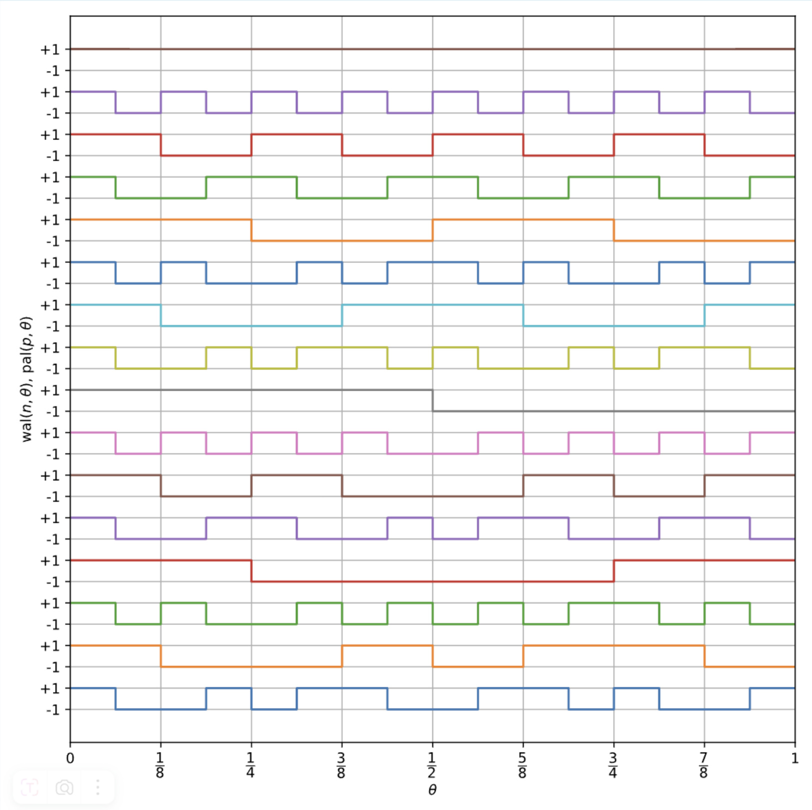
$\mathrm{wal}(2, \theta) = \mathrm{pal}(3, \theta)$

$\mathrm{wal}(13, \theta) = \mathrm{pal}(11, \theta)$

$\mathrm{wal}(5, \theta) = \mathrm{pal}(7, \theta)$

$\mathrm{wal}(10, \theta) = \mathrm{pal}(15, \theta)$

Множества функций совпадают с точности до нумерации.



P.S. Функции на графике приведены в нумерации Адамара. См. также Гоноровский И.С. "Радиотехнические цепи и сигналы".

1. Нумерация Уолша (по числу смен знака)

Функции Уолша упорядочиваются по **числу изменений знака** (или по "степени").

- Пример: `wal(0, θ)` = постоянная → 0 изменений знака
- `wal(1, θ)` = один переход +1 → −1 → 1 смена
- `wal(3, θ)` = три перехода → три смены и т.д.

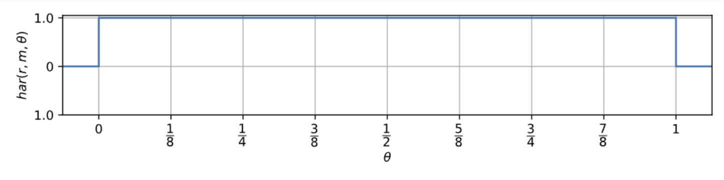
2. Нумерация Пэли (по отражённому двоичному коду Gray)

Функции нумеруются по позиции строк в **матрице Адамара**, построенной рекурсивно
Каждая строка считается как отражённый двоичный код (gray code).

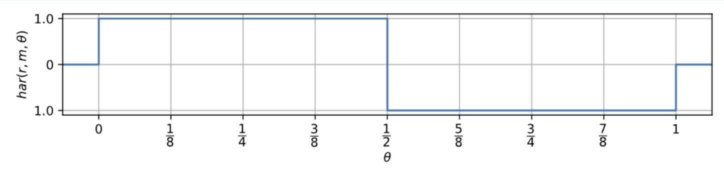
№3. Построить первые 16 функций Хаара.

Ответ (заполнить пропуски в заголовках графиков).

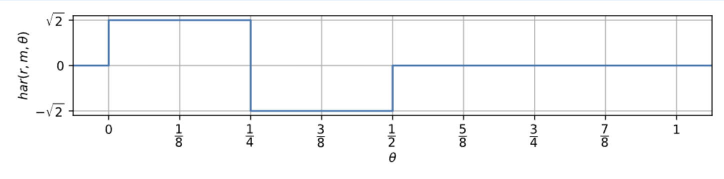
har(0 , 0 , θ)



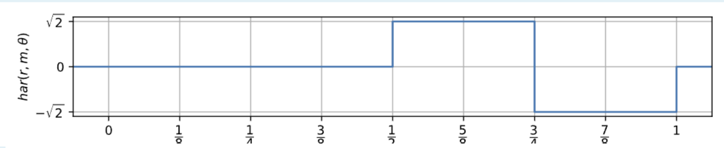
har(0 , 1 , θ)



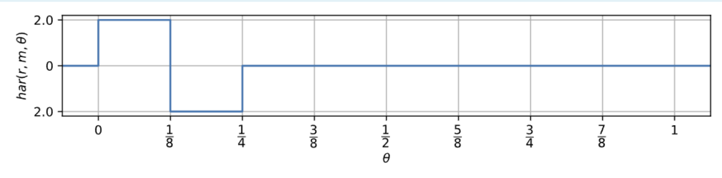
har(1 , 1 , θ)



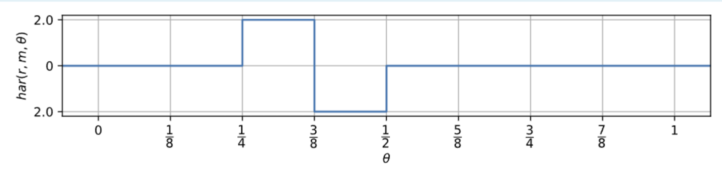
har(1 , 2 , θ)



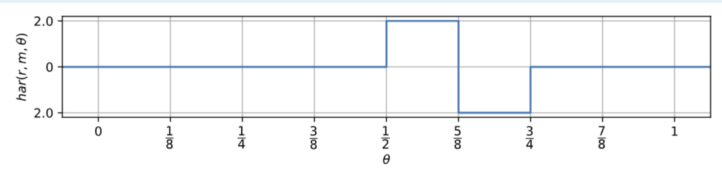
har(2 , 1 , θ)



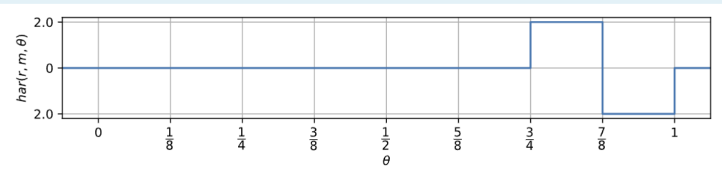
har(2 , 2 , θ)



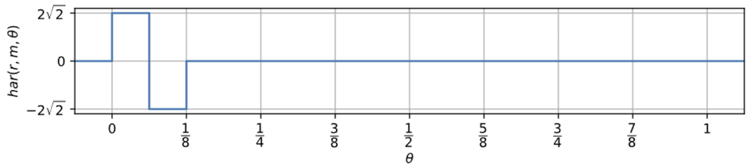
har(2 , 3 , θ)



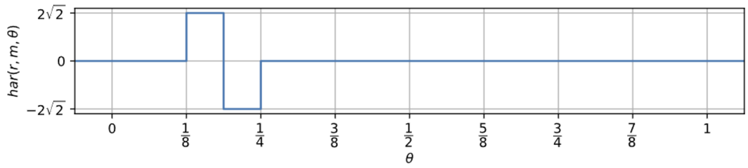
har(2 , 4 , θ)



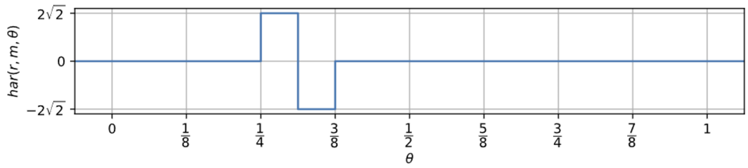
har(3 , 1 , θ)



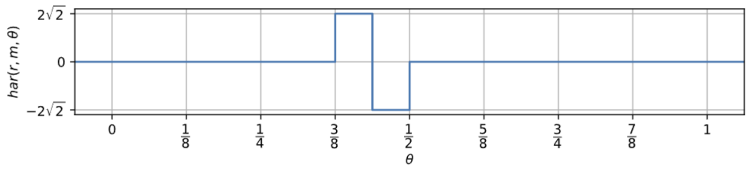
har(3 , 2 , θ)



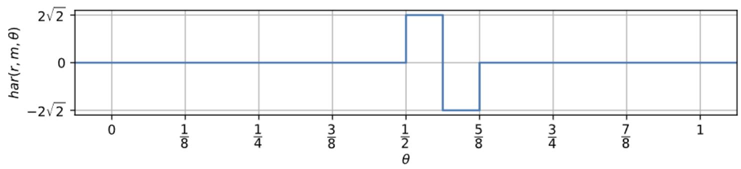
har(3 , 3 , θ)



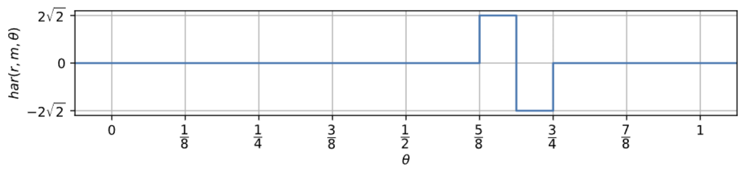
har(3 , 4 , θ)



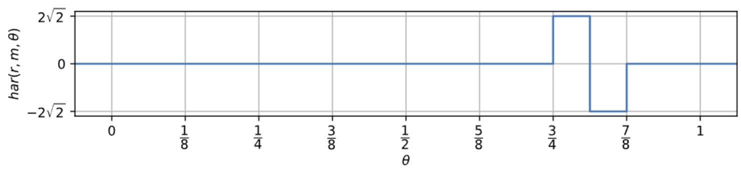
har(3 , 5 , θ)



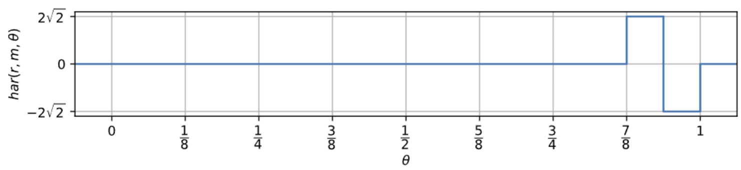
har(3 , 6 , θ)



har(3 , 7 , θ)



har(3 , 8 , θ)



№4 (повторение). Найти коэффициенты разложения в ряд по

$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(j2\pi k \frac{n}{16})$

периодической (с периодом $N = 16$) последовательности

$x[k] = \cos(2\pi \frac{1}{16} k) + \sin(2\pi \frac{3}{16} k)$.

Сравнить их с коэффициентами ДПФ.

Ответ.

C_0 = 0

C_1 = 0,5

C_2 = 0

C_3 = -0,5j

C_4 = 0

C_5 = 0

C_6 = 0

C_7 = 0

C_8 = 0

C_9 = 0

C_{10} = 0

C_{11} = 0

C_{12} = 0

C_{13} = 0,5j

C_{14} = 0

C_{15} = 0,5 .

Значения C_n совпадают с отсчетами ДПФ.

В этой задаче нужно найти коэффициенты C_n разложения сигнала

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{1}{16} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$$

в ряд по дискретным экспонентам (то есть это обычное БПФ-представление, $N = 16$):

$$x[k] = \sum_{n=0}^{15} C_n \cdot \exp\left(j2\pi \frac{nk}{16}\right)$$

Шаг 1: представить cos и sin через комплексные экспоненты

Используем формулы Эйлера:

- $\cos\left(2\pi \frac{1}{16} k\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi \cdot \frac{1}{16} k} + e^{-j2\pi \cdot \frac{1}{16} k}\right)$
- $\sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi \cdot \frac{3}{16} k} - e^{-j2\pi \cdot \frac{3}{16} k}\right)$

Шаг 2: выписать спектральные компоненты

Получаем:

$$x[k] = \frac{1}{2} e^{j2\pi \cdot \frac{1}{16} k} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \cdot \frac{1}{16} k} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi \cdot \frac{3}{16} k} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi \cdot \frac{3}{16} k}$$

Соответствует:

- $C_1 = \frac{1}{2}$
- $C_{15} = \frac{1}{2}$ (т.к. $e^{-j2\pi \cdot \frac{1}{16} k}$ = $C_{-1} \to C_{15}$ в модуле 16)
- $C_3 = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}$
- $C_{13} = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2}$

Все остальные $C_n = 0$

№5. Для линейно меняющегося сигнала $x(t) = t$, $t \in [0, 1)$ найти первые четыре коэффициента Фурье по системе Уолша $\mathbf{wal}(n,\ \theta)$.
Найти среднеквадратичную ошибку представления такого сигнала четырьмя первыми членами ряда Фурье по системе функций Уолша.
Сравнить эту величину ее с оценкой

$$\hat{\varepsilon}^2(N) = \frac{1}{12N^2}\int\limits_0^1 (x'(\theta))^2 d\theta + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Ответ. $C_0 =$ 0.5 ✔ , $C_1 =$ -0.25 ✔ , $C_2 =$ -0.125 ✖ , $C_3 =$ 0 ✖ ,
среднеквадратичная погрешность оценки в квадрате равна

$\varepsilon^2(N) = 1/$ 192 ✔

и совпадает со своей оценкой.

Примечание. Коэффициенты определяются по формуле

$$C_n = \int_0^1 x(\theta)\mathbf{wal}(n,\theta)\ .$$

Оценка сигнала, получаемая при аппроксимации первыми четырьмя Функциями Уолша

$$\hat{x}(\theta) = \sum_0^3 C_n \mathbf{wal}(n,\theta),$$

$$\hat{x}(\theta) = \begin{cases} 1/8,\ 0 < \theta < 1/4, \\ 3/8,\ 1/4 < \theta < 1/2, \\ 5/8,\ 1/2 < \theta < 3/4, \\ 7/8,\ 3/4 < \theta < 1. \end{cases}$$

поменять местами

Для сигнала $x(t) = t, t \in [0,1]$, нужно найти первые 4 коэффициента разложения по системе функций Уолша $\mathrm{wal}(n,\theta)$, используя формулу:

$$C_n = \int_0^1 x(\theta) \cdot \mathrm{wal}(n,\theta)\, d\theta$$

Шаг 1: Коэффициент C_0

Поскольку $\mathrm{wal}(0,\theta) = 1$ на всём [0,1], то:

$$C_0 = \int_0^1 \theta \cdot 1\, d\theta = \int_0^1 \theta\, d\theta = \frac{1}{2}$$

Шаг 2: Коэффициент C_1

$$\mathrm{wal}(1,\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le \theta \le 1 \end{cases}$$

$$C_1 = \int_0^1 \theta \cdot \mathrm{wal}(1,\theta)\, d\theta = \int_0^{1/2} \theta \cdot 1\, d\theta + \int_{1/2}^1 \theta \cdot (-1)\, d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}$$

Шаг 3: Коэффициент C_2

$$\mathrm{wal}(2,\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta < \frac{1}{4} \text{ и } \frac{1}{2} \le \theta < \frac{3}{4} \\ -1, & \frac{1}{4} \le \theta < \frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{4} \le \theta \le 1 \end{cases}$$

Выражаем интеграл как сумму 4-х участков:

$$C_2 = \int_0^{1/4} \theta\, d\theta - \int_{1/4}^{1/2} \theta\, d\theta + \int_{1/2}^{3/4} \theta\, d\theta - \int_{3/4}^{1} \theta\, d\theta$$

Посчитаем:

- $\int_0^{1/4} \theta d\theta = \frac{(1/4)^2}{2} = \frac{1}{32}$
- $\int_{1/4}^{1/2} \theta d\theta = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$
- $\int_{1/2}^{3/4} \theta d\theta = \frac{1}{2}(\frac{1/2+3/4}{)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5/4}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$
- $\int_{3/4}^{1} \theta d\theta = \frac{1}{2}(\frac{3/4+1}{)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7/4}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$

Собираем:

$$C_2 = \frac{1}{32} - \frac{3}{32} + \frac{5}{32} - \frac{7}{32} = \frac{-4}{32} = -\frac{1}{8}$$

СКО (среднеквадратичная ошибка):

Из теоремы:

$$\varepsilon^2(N) = \frac{1}{12N^2}, \quad N = 4 \Rightarrow \frac{1}{192}$$

И это совпадает с точным вычислением ошибки:

$$\varepsilon^2(N) = \frac{1}{192}$$

№6. Записать матрицу Адамара порядка 8. Изобразить первые 8 функций Уолша в нумерации Адамара $\mathrm{had}(h, \theta)$ с непрерывным временем.

Решение (заполнить пропуски). Матрица Адамара H_N порядка $N = 2^\nu$ строится по правилу

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$H_{2L} = \begin{bmatrix} L & L \\ L & -L \end{bmatrix}$$

Тогда матрица Адамара порядка 8 образуется из матриц порядка 4, которые в свою очередь образуются из матриц порядка 2.

Матрица порядка 4.

1	1	1	1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	-1	1

Матрица порядка 8.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Первые восемь функций системы Уолша-Адамара изображены на рисунке в следующем порядке (перечисление сверху вниз).

$had($ 0 $, \theta)$

$had($ 1 $, \theta)$

$had($ 2 $, \theta)$

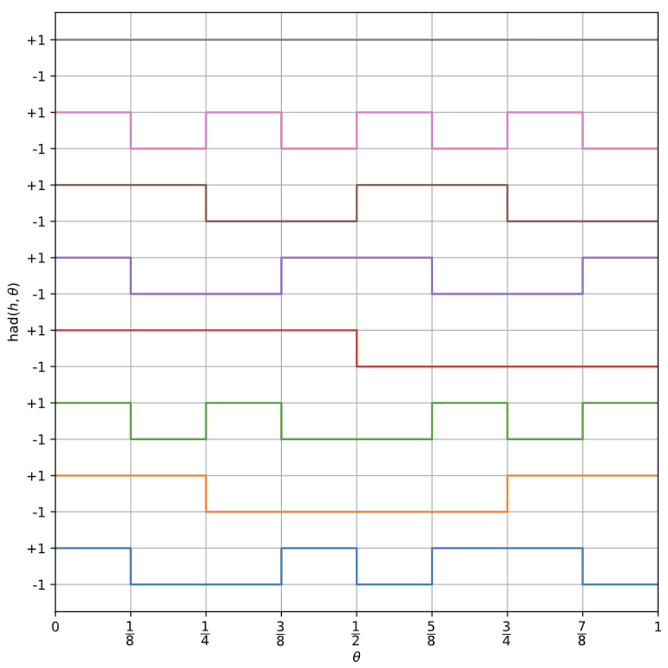
$had($ 3 $, \theta)$

$had($ 4 $, \theta)$

$had($ 5 $, \theta)$

$had($ 6 $, \theta)$

$had($ 7 $, \theta)$



Матрица Адамара H_N, где $N = 2^r$, строится рекурсивно:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2L} = \begin{bmatrix} L & L \\ L & -L \end{bmatrix}, \quad \text{где } L = H_L$$

Функции Уолша-Адамара $\mathrm{had}(h, \theta)$ — это строки матрицы H_8, масштабированные и интерпретируемые как кусочно-постоянные функции на интервале $\theta \in [0, 1]$, с 8 равными интервалами (по 1/8 каждый).

Нумерация **сверху вниз** на графике совпадает с индексами **h = 0...7**.