MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Chwiedziuk

Barvicí invarianty uzlů

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.
Studijní program:	Matematika pro informační technologie
Studijní obor:	Matematika pro informační technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod

Teorie uzlů je oblast topologie, která se zabývá uzly, což jsou jednoduché uzavřené křivky v trojrozměrném prostoru. Uzly samotné se v historii vyskytují v různých kulturách již od pravěku, ale teorie uzlů jako matematická disciplína vznikla až v 18. století. Mezi slavné matematiky, kteří se zasloužili o vznik a rozvoj této disciplíny, patří například C. F. Gauss (1777-1855), J. W. Alexander (1888-1971) nebo H. Seifert (1907-1996). Velký rozvoj nastal po druhé světové válce ve Spojených státech a Japonsku.

Mezi základní otázky patří, zda jsou dva uzly ekvivalentní, tedy zda je jeden z druhého možné získat spojitou deformací, aniž by se v nějakém okamžiku křivka protínala. Dlouho nebylo známé, jestli vůbec existuje algoritmus, který by dokázal rozhodnout, zda dva zadané uzly jsou ekvivalentní. Existence algoritmu byla prokázaná Hakenem v roce 1962. Hass a Lagarias následně v roce 1991 dokázali, že jenom rozhodnutí, zda je uzel triviální, patří do kategorie NP.

Základní technikou rozlišování uzlů je hledání invariantů. Mezi nejznámější invarianty patří takzvané barvení uzlů. Z počátku se jednalo např. o Foxovo barvení, kdy je každý oblouk uzlového diagramu obarven jednou ze tří barev a platí, že na každém křížení se vyskytují všechny tři barvy, nebo je monochromatické. Tato technika se následně zobecnila na barvení pomocí quandlů.

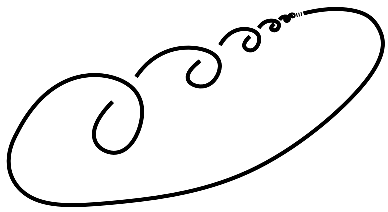
Quandle je algebraická struktura, která vznikla přesně pro účely rozlišování uzlů. Takzvaný fundamentální quandle dokonce jednoznačně určuje uzly až na orientaci a překlopení, což dokázal D. Joyce v roce 1982. Bohužel, výpočet fundamentálního quandle je příliš složitý pro praktické použití. Jako zjednodušení se počítá počet homomorfismů do konečného quandlu. Tomu pak říkáme barvení pomocí quandlu.

V této práci se zaměřím na charakterizaci quandlů, které dávají triviální obarvení pro všechny uzly. V první kapitole jsou definovány základní pojmy z teorie uzlů. Ve druhé kapitole se budu věnovat quandlům a jejich základním vlastnostem jako je spojitost. Ve třetí kapitole ukážu, že barvení quandlem je pro všechny uzly triviální, právě tehdy když je quandle reduktivní. Na závěr ve čtvrté kapitole se zaměřím na koncept Vassilievových invariantů a dokážu, že barvení pomocí quandlů je Vassilievův invariant právě tehdy, když je quandle reduktivní. Také rozvinu výsledek z uzlů na linky a ukážu, že barvení pomocí quandlů je Vassilievův invariant pro linky, právě tehdy když je quandle triviální.

Ve své práci vycházím především ze tří článků: Eisermann (1999), Johnson (1980) a Bonatto a kol. (2020). Využívám podobné důkazové techniky, abych dosáhl svých výsledků.

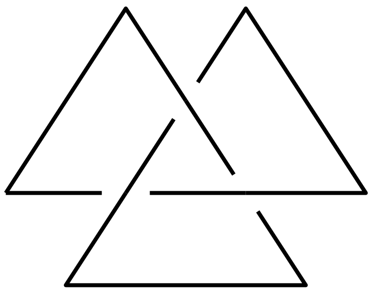
1. Základní pojmy

Základním matematickým objektem, o kterém tato práce pojednává, je *uzel*. Obvykle se tímto pojmem myslí vnoření uzavřené jednoduché křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.



Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmto uzlům vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek pouze polygonální křivky. Tedy uzlem rozumíme jednoduchou uzavřenpu lomenou čáru. Takovýmto uzlům se pak říká *krotké uzly* (v angličtině *tame knots*). Množinu všech takových uzlů značíme $\mathcal{K}$.



Obrázek 1.2: Trojlístek

Příbuzným pojmem je *link*, což je konečné disjunktní sjednocení uzlů. Množinu všech linků značíme $\mathcal{L}$. Linky sdílejí s uzly mnoho vlastností, ovšem v této práci se jim budeme věnovat pouze v poslední kapitole.

Existuje nespočetně mnoho uzlů, a proto se nabízí otázka, jak je klasifikovat. Velmi přirozený způsob je zavést *ekvivalenci* uzlů. V reálném světě si můžeme uzly představit jako provázky, které mají slepené konce a jsou různě zamotány do prostoru. Tento provázek můžeme libovolně deformovat, ale nesmíme ho přetrhnout. Na základě toho pak můžeme dva uzly prohlásit za ekvivalentní, pokud dokážeme jeden získat z druhého pomocí takovýchto deformací. Tento způsob klasifikace je velmi intuitivní, tudíž by bylo vhodné ho reflektovat i v matematické teorii.

Pro uzel K si nejprve zavedeme *základní pohyby* následovně:

TODO - přidat obrázek základních pohybů

1) Mějme hranu křivky K danou vrcholy A a B. Pak můžeme umístit nový vrchol C na hranu AB. Naopak, pokud existuje vrchol C na hraně AB, která náleží do uzlu K, můžeme ho odstranit.

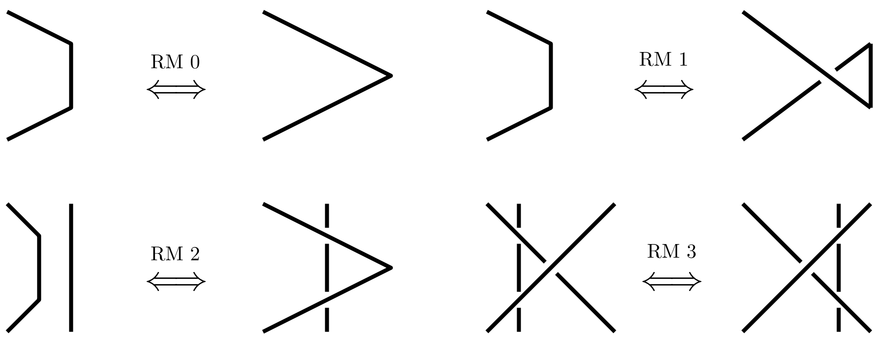
2) Mějme hranu AB v K a nějaký vrchol C ležící mimo K. Pak pokud platí, že $ABC \cap K = AB$, pak můžeme hranu AB nahradit hranami AC a CB. Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit hrany AC a CB za hranu AB.

Tyto dva pohyby reflektují intuitivní představu o tom, jak můžeme uzly deformovat. Následně můžeme definovat relaci ekvivalence tak, že uzly K a K' jsou ekvivalentní, pokud existuje konečná posloupnost základních pohybů, která transformuje jeden uzel v druhý. Tuto relaci značíme $K \cong K'$.

Jelikož je práce s objekty ve třech rozměrech velmi obtížná, zavedeme si *diagramy* uzlů. Jedná se o projekce uzlů do roviny, zatímco zachováváme informaci o kříženích tím, že spodní část křivky v místě křížení přerušíme. Zároveň zakážeme patologické případy, kdy dojde pouze k překryvu dvou částí křivky, který není křížením. Diagram uzlu K budeme značit D_K. Množinu všech diagramů uzlu K značíme $D(K)$.

Takto daný diagram se skládá z *oblouků*, jimiž rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu všech oblouků diagramu D_K značíme $O(D_K)$. Dále místa, kde dochází k přerušení křivky, nazýváme *křížení*. Toto křížení budeme zapisovat jako uspořádanou trojici oblouků, které se v daném místě kříží podle obrázku (TODO). Množinu všech křížení diagramu D_K značíme $C(D_K)$.

Na diagramech můžeme definovat ekvivalenci. Dva diagramy D_K a $D'_{K'}$ jsou ekvivalentní, pokud platí, že $K \cong K'$. Ovšem, můžeme ekvivalenci zavést přímo na diagramech a to pomocí tzv. *Reidemeisterových pohybů*. Jsou obdobou základních pohybů pro diagramy a platí, že dva diagramy jsou ekvivalentní, pokud jeden získáme z druhého pomocí konečné posloupnosti Reidemeisterových pohybů. Reidemeisterovy pohyby jsou znázorněny na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Reidemeisterovy pohyby

Na rozlišování uzlů budeme využívat *invarianty*. Invariantem I rozumíme takové zobrazení z množiny všech uzlů do nějaké množiny, které je konstantní na ekvivalentních uzlech. Tedy pokud $K_1 \cong K_2$, pak $I(K_1) = I(K_2)$. Invariant se nazývá *úplný*, pokud platí, že $I(K_1) = I(K_2)$ implikuje $K_1 \cong K_2$. Jelikož je ekvivalence uzlů daná pomocí Reidemeisterových pohybů, stačí ověřit, že se invariant zachovává na těchto pohybech.

Mezi základní invarianty patří třeba *crossing number*, což je nejmenší možný počet křížení přes všechny diagramy jednoho uzlu. Dalšími příklady jsou *unknotting number*, *bridge number* nebo *genus*. V této práci se budeme věnovat invariantům založených na quandlovém barvení.

TODO - přidat orientované uzly

2. Quandly

Quandle vznikl jako algebraická struktura, která respektuje Reidemeisterovy pohyby, a je tak vhodná pro rozlišování uzlů. V této kapitole rozvinu základní teorii kolem těchto algebraických struktur.

Definice 1. *Quandlem* $Q = (C, *)$ rozumíme algebraickou strukturu nad (konečnou) množinou A s binární operací $*$, splňující následující podmínky pro všechna $a, b, c \in C$:

1) $a * a = a$ (idempotence);
2) $\exists! x \in C : a * x = b$ (jednoznačné levé dělení, značíme $x = a *^{-1} b$);
3) $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ (levá samodistributivita).

Příklad. Příkladem quandle je například *triviální jednoprvkový quandle* $Q = (\{a\}, *)$, kde $a * a = a$. Značme ho jako T_1. *Trivální quandle* nad A definujeme tak, že vezmeme množinu A a definujeme $a * b = b$ pro všechna $a, b \in A$. Takový quandle značíme T_A.

Příklad. Dalším příkladem může být quandle daný konjugací v grupě G. Pro $a, b \in G$ definujeme $a * b = aba^{-1}$. Tento quandle značíme $\mathrm{Conj}(G)$.

Na quandlech bychom zavedli základní pojmy běžné i pro jiné algebraické struktury, jako homomorfismy, podalgebry a faktoralgebry běžné v univerzální algebře. Pomocí nich si pak můžeme lépe porozumět vlastnostem quandlů.

Definice 2. Mějme quandly Q a W. Pak *quandlovým homomorfismem* $\varphi : Q \to W$ rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in Q$.

Definice 3. Mějme quandle $(Q, *)$. Pak *podquandlem* W rozumíme dvojici $(W, *|_W)$, kde $W \subseteq Q$ a platí, že W je uzavřená na operaci $*$ jakožto zúžení operace z Q. Vztah značíme $W \preccurlyeq Q$.

Definice 4. Buď Q quandle. Na něm zavedeme relaci ekvivalence α takovou, že $[a]_\alpha * [b]_\alpha = [a * b]_\alpha$ pro všechna $a, b \in Q$. Vzniklý quandle definovaný na blocích ekvivalence značíme $Q \,/\, \alpha$ a nazýváme *faktorquandlem* quandlu Q podle ekvivalence α.

Víme, že $a \mapsto [a]_\alpha$ je homomorfismus z Q na $Q \,/\, \alpha$. Také platí, že pokud máme homomorfismus $\varphi : Q \to W$, pak jádro, tj množina $\operatorname{Ker} \varphi = \{(a, b) \in Q \times Q : \varphi(a) = \varphi(b)\}$, tvoří kongruenci na Q a faktorquandle $Q \,/ \operatorname{Ker} \varphi$ je izomorfní s obrazem $\operatorname{Im} \varphi(Q) \preccurlyeq W$. Jedná se o klasický výsledek univerzální algebry.

Nyní tyto pojmy využijeme, abychom definovali fundamentální quandle. Ten je základním nástrojem pro studium barvení uzlů.

Definice 5. *Volným quandlem* Q_X nad neprázdnou množinou X rozumíme quandle takový, že pro zobrazení $f : X \to Q$, kde Q je libovolný quandle, existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : Q_X \to Q$ takový, že $\varphi(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$.

Definice 6. Mějme K uzel, D_K jeho diagram, pak *fundamentálním quandlem* Q_K rozumíme volný quandle nad množinou oblouků $O(D_K)$ vyfaktorizovaný relacemi dané kříženími $C(D_K)$ takové, že pro každé křížení $(a, b, c) \in C(D_K)$ platí $a * b = c$.

Tvrzení 1 ((Joyce, 1982))**.** *Fundamentální quandle Q_K je úplným invariantem až na orientaci.*

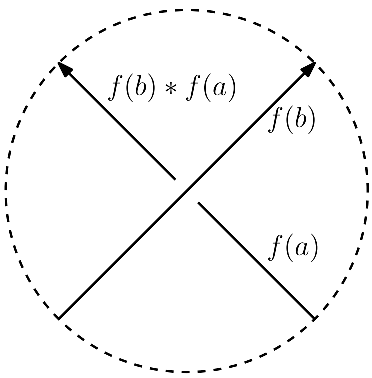
Fundamentální quandle dává sice velmi silný invariant, ale je těžké ho spočítat. Fundamentální quandle je nekonečný a určit, zda jsou dva takové quandly izomorfní, je velmi obtížné. Proto se spíše používá z něj odvozený invariant, kterému se říká *quandlové barvení.* Jedná se homomorfismus z fundamentálního quandlu do námi zvoleného konečného quandlu. Tento invariant je sice slabší, ale lze mnohem snadněji spočítat. Dále lze odvodit další invariant a to počet takových homomorfismů.

Definice 7. Mějme uzel K, jeho fundamentální quandle Q_K a libovolný quandle W. Pak *počtem obarvení* $\mathrm{Col}_W(K)$ rozumíme počet homomorfismů $\varphi : Q_K \to W$. Tedy $\mathrm{Col}_W(K) = |\mathrm{Hom}(Q_K,W)|$.

Jak takový invariant funguje, si ukážeme na příkladu *Foxova quandlu.* Začneme definicí tohoto quandlu. Originálně je Foxovo barvení definováno na diagramu tak, že každému oblouku přiřadíme jednu ze tří barev tak, aby na každém přížení byly všechny tři barvy, nebo právě jedna. Nyní si reformulujme toto barvení jako homomorfismus z fundamentálního quandlu do Foxova quandlu. Foxův quandle F definujeme následující tabulkou:

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Nyní si zvolme uzel K a jeho fundamentální quandle Q_K. Pro každý oblouk $a \in O(D_K)$ si zvolme jeden z prvků $f(a) \in F$ tak, abychom dostali homomorfismus $f : Q_K \to F$. Jelikož je fundamentální quandle Q_K definovaný na obloucích diagramu, tak každý homomorfismus lze vyjádřit tímto způsobem. Naopak ne pro každé přiřazení prvků $f(a)$ dostaneme homomorfismus.



Obrázek 2.1: Barvení pomocí quandlu

2.1 Souvislost

Definice 8. Mějme quandle Q. Pak L_q značí levou translaci o $q \in Q$, tedy $L_q(x) = q * x$. Grupa generovaná levými translacemi se značí $\mathrm{Inn}(Q)$ a nazývá se *grupa vnitřních automorfismů* quandlu Q.

Definice 9. Mějme quandle Q. Pokud platí, že je působení $\mathrm{Inn}(Q)$ na Q tranzitivní, pak říkáme, že Q je souvislý quandle.

Lemma 2. *Mějme konečný quandle Q. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) Q je souvislý;

2) pro každé dva prvky $a, b \in Q$ platí, že existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

kde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2): Mějme $a, b \in Q$. Jelikož je Q konečný, tak platí, že $|\mathrm{Inn}(Q)| \leq |Q|!$, tedy $\mathrm{Inn}(Q)$ je konečná grupa. Tudíž pro každý prvek $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$ existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že $\varphi = L_{x_1}^{\varepsilon_1} \circ L_{x_2}^{\varepsilon_2} \circ \dots \circ L_{x_n}^{\varepsilon_n}$, kde L_x je levá translace o x.

Jelikož $\mathrm{Inn}(Q)$ je tranzitivní, tak existuje $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$ taková, že $\varphi(a) = b$. Tedy existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Jelikož každé dva prvky dokážeme spojit konečnou posloupností prvků, tak platí, že grupa G daná levými translacemi $\mathrm{Inn}(Q)$ působí tranzitivně na Q. Tudíž je Q souvislý.

□

Lemma 3. *Mějme quandle Q a grupu vnitřních automorfismů $\mathrm{Inn}(Q)$. Pak platí, že působení $\mathrm{Inn}(Q)$ na Q rozkládá Q na orbity a každá orbita je podquandle.*

Důkaz. Zafixujme si orbitu nějakou W. Tak platí, že W je uzavřená na operaci $*$, jelikož pokud $a, b \in W$, tak $a * b = L_a(b) \in W$. Zároveň je uzavřená na levé dělení, jelikož pokud $a, b \in W$, tak $a *^{-1} b = L_a^{-1}(b) \in W$. Tedy W je podquandle. □

Definice 10. Mějme quandle Q. Pak $\mathrm{Orb}(Q)$ značíme faktorquandle Q/α, kde α je kongruence taková, že $a \alpha b$ právě tehdy, když a a b leží ve stejné orbitě působení $\mathrm{Inn}(Q)$.

Tvrzení 4 ((Ehrman a kol., 2006))**.** *Mějme quandle Q. Pak platí, že se dá jednoznačně rozložit na maximální souvislé podquandly $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$.*

Důkaz. Mějme quandle Q a grupu vnitřních automorfismů $\mathrm{Inn}(Q)$. Podle lemmatu 3 platí, že působení $\mathrm{Inn}(Q)$ na Q rozkládá Q na orbity a každá orbita je podquandle. Jelikož je Q konečný, tak má konečně mnoho orbit. Pokud je orbita souvislá, tak jsme skončili. Pokud ne, znovu aplikujeme lemma 3. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme rozklad na souvislé podquandly. Jelikož je Q konečný a velikost orbit se zmenšuje, tak se vždy dostaneme do souvislého podquandlu.

Rozklad je jednoznačný, jelikož pokud by existovaly dva různé rozklady, tak by existovaly dva různé souvislé podquandly W a W', které se protínají, jenže by to znamenalo, že se dokážeme z každého prvku v W dostat do W' a naopak, což by znamenalo, že tvoří jeden souvislý quandle a jsou shodné, což je spor.

□

Definice 11. Mějme quandle Q. Pak *rozkladem* quandle Q rozumíme rozklad na souvislé podquandly $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Subquandle Q_i nazýváme *komponenta* Q.

Lemma 5 ((Bonatto a kol., 2018))**.** *Uvažujme quandly Q a W, rozklad Q jako $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ a homomorfismus $\varphi : Q \to W$. Pak platí, že homomorfním obrazem Q_i je souvislý podquandle $\varphi(Q_i) = W_i \preccurlyeq W$.*

Důkaz. Mějme $a, b \in Q$ ve stejné komponentě. Pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \ldots) = b.$$

Nyní, když máme homomorfismus $\varphi : Q \to W$, tak platí, že

$$\varphi(x_1) *^{\varepsilon_1} (\varphi(x_2) *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (\varphi(x_n) *^{\varepsilon_n} \varphi(a)) \ldots) = \varphi(b).$$

Tedy platí, že $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ jsou ve stejné komponentě.

□

Speciálně, pokud je Q souvislý quandle, tak jeho homomorfním obrazem je také souvislý quandle.

Lemma 6 ((Joyce, 1982))**.** *Mějme uzel K a jeho fundamentální quandle Q_K. Pak platí, že Q_K je souvislý quandle.*

Důkaz. Mějme $a, b \in Q_K$ generátory. Pak chceme ověřit, že existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q_K$ taková, že $x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \ldots) = b$. Jenže, jelikož jsou a, b generátory, tak odpovídají nějakým obloukům $a', b' \in O(D_K)$. Posloupnost prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pak dostaneme tak, že začneme v a' a budeme ve směru k b'. Pokaždé, když narazíme na křížení, kde je x_i' most, tak si přidáme x_i do posloupnosti s příslušným znaménkem operace. Jelikož a, b leží na stejném uzlu, tak se tímto způsobem dostaneme z a do b.

Tohle platí pro všechny generátory, tedy i pro všechny prvky Q_K, jelikož každý prvek je generován posloupností generátorů. Tudíž je Q_K souvislý quandle.

□

Lemma 7. *Mějme quandle Q, který není souvislý, a uzel K. Pak platí, že*

$$Col_Q(K) = \sum_{i=1}^{n} |Col_{Q_i}(K)|,$$

kde Q_i jsou komponenty rozkladu Q.

Důkaz. Mějme homomorfismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(Q_K, Q)$. Jelikož je Q_K podle 6 souvislý, tak podle lemmatu 5 platí, že $\varphi(Q_K)$ je souvislý podquandle Q. Jelikož se Q rozkládá na komponenty, které jsou souvislé, tak platí, že φ náleží do $\mathrm{Hom}(Q_K, Q_i)$ pro nějaké i. Zároveň patří nejvýše do jedné takové množiny, jelikož jsou orbity disjunktní. Jelikož je φ libovolný, tak platí, že

$$\mathrm{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Col}_{Q_i}(K)|.$$

□

3. Triviální barvení

3.1 Reduktivita

Definice 12. Buď $n \in \mathbb{N}$. Pak quandle Q nazýváme *n-reduktivní*, pokud platí, že všechny $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in Q$ splňují:

$$((\dots(a * c_1)\dots) * c_{n-1}) * c_n = ((\dots(b * c_1)\dots) * c_{n-1}) * c_n$$

.

Říkáme, že Q je *reduktivní*, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$, že je n-reduktivní.

Definice 13. Buď Q quandle. Pak *lokálně n-reduktivním* quandlem rozumíme takový quandle, že pro každé $a, b \in Q$ platí rovnost:

$$((\dots(a * \underbrace{b)\dots) * b) * b}_{n} = b$$

,

Říkáme, že Q je *lokálně reduktivní*, pokud je lokálně n-reduktivní pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 8. *Pokud všechny orbity jsou lokálně n-reduktivní, tak je quandle lokálně $n+1$-reduktivní.*

Důkaz. Mějme quandle $\mathrm{Orb}(Q)$. Víme, že pro každý vnitřní automorfismus $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$ platí, že $[\varphi(a)] = [a]$ pro všechna $[a] \in \mathrm{Orb}(Q)$. Tedy $\mathrm{Orb}(Q)$ je triviální quandle, který je 1-reduktivní.

Dále mějme nějaké $[a] \in \mathrm{Orb}(Q)$ a $b \in Q$. Pak platí, že

$$[a * b] = [a] * [b] = [b]$$

.

Jelikož orbita b je lokálně n-reduktivní, tak z toho už plyne, že:

$$((\dots(a * \underbrace{b)\dots) * b) * b}_{n+1} = b$$

,

protože tím prvním krokem se dostaneme do orbity, ve které je b, a v ní už uplatníme lokální reduktivitu. Tedy Q je lokálně $n+1$-reduktivní.

□

Věta 9. *Pro konečné quandly platí, že je lokálně reduktivní, právě tehdy když je reduktivní.*

Poznámka. Dost těžký dokázat, používá se dost pokročilá teorie grup. Má cenu to zde dokazovat?

Lemma 10. *Jediný souvislý reduktivní quandle je triviální quandle velikosti 1.*

Důkaz. Mějme souvislý reduktivní quandle Q, ten je i lokálně reduktivní. tedy máme, že pro každé $a, b \in Q$ platí, že

$$((\dots(a * \underbrace{b)\dots) * b) * b}_{n} = b$$

.

Jelikož je Q souvislý, pak existuje $L \in \mathrm{Inn}(Q)$ takové, že $L(a) = b$. Pak působením L dostaneme, že

□

Tvrzení 11. *Buď Q quandle. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1) Q je reduktivní.

2) Pro každou komponentu Q_i rozkladu Q platí, že $|Q_i| = 1$.

Důkaz. (1) $\implies$ (2):

Buď Q reduktivní, pak platí, že i každý jeho subquandle je reduktivní. Uvažme libovolnou komponentu Q_i rozkladu Q. Jelikož je Q_i souvislý, ale i reduktivní, pak podle 10 platí, že $|Q_i| = 1$.

(2) $\implies$ (1):

Uděláme to indukcí podle podle velikosti Q. Pro $|Q| = 1$ tvrzení platí triviálně. Na Q budeme působit grupou $\mathrm{Inn}(Q)$. Orbity jsou podquandly, pro něž víme, že jejich komponenty mají velikost 1. Podle indukčního předpokladu tedy víme, že jsou reduktivní, a tedy i lokálně reduktivní. Podle lemmatu 8 pak plyne, že i Q je lokálně reduktivní. Nyní aplikujeme 9 a dostaneme, že Q je reduktivní.

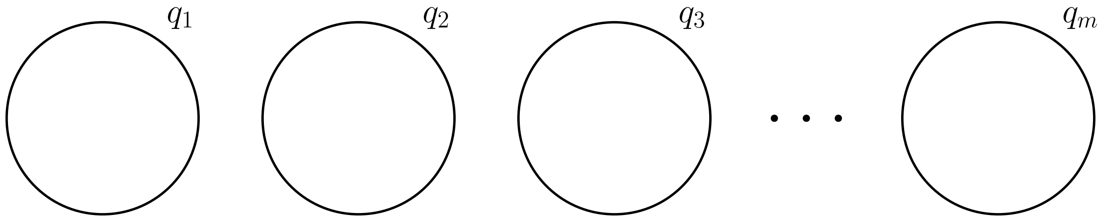
□

3.2 Charakterizace triviálních barvení

Věta 12. *Pro každý souvislý quandle Q, $|Q| > 1$ existuje takový uzel K, že $Col_Q(K) > |Q|$.*

Důkaz. Pro důkaz této věty použijeme konstrukci, která se poprvé objevila v článku (Johnson, 1980), a kterou si upravíme tak, aby řešila náš problém. Konstrukce je následující:

Nejprve uvažujme orientovaný m-link, $m = |Q|$, takový, že každou komponentu obarvíme jiným prvkem z Q. Následně budeme postupně propojovat pomocí pásků tak dlouho, dokud nám nevznikne uzel. Na konci dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení, jelikož každá komponenta bude obarvena jiným prvkem z Q. Pak bude platit, že $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$.



Obrázek 3.1: m-link

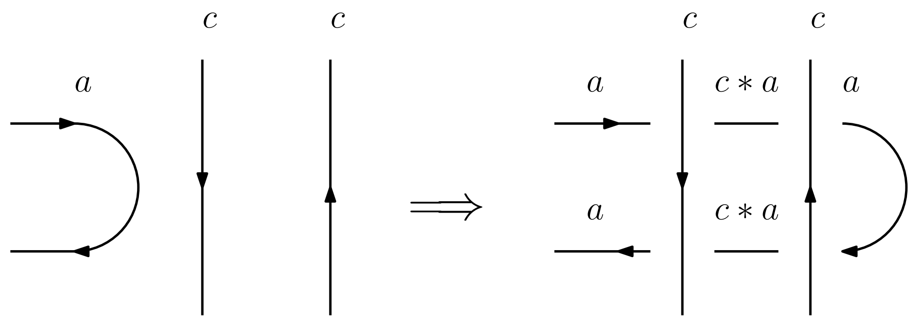
Mějme zadaný souvislý quandle Q. Jelikož je Q souvislý, pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

pro každé dva prvky $a, b \in Q$.

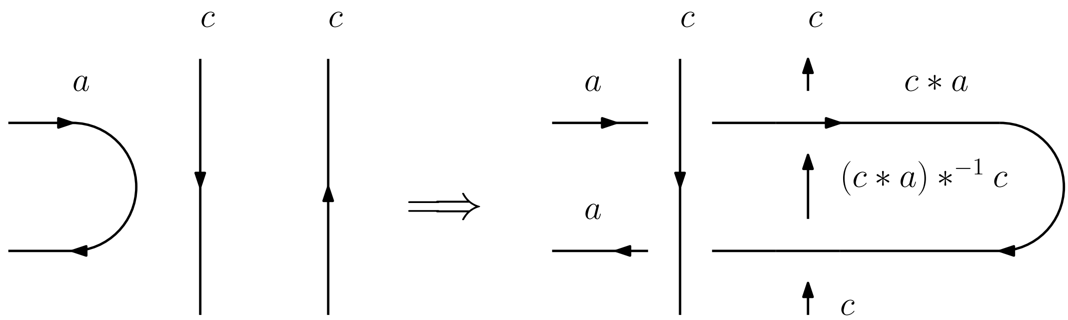
Začněme s komponentou obarvenou prvkem a. Z ní povedeme pásek. Pokud pásek bude křižovat s nějakou jinou komponentou, tak budeme postupovat podle jedné z následujících situací:

1) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c \neq x_1$ pak pásek povedeme pod celou komponentou. Dojde tedy k situaci na obrázku 3.2. Tedy pásek povedeme pod celou komponentou, aniž bychom změnili obarvení konec pásku.



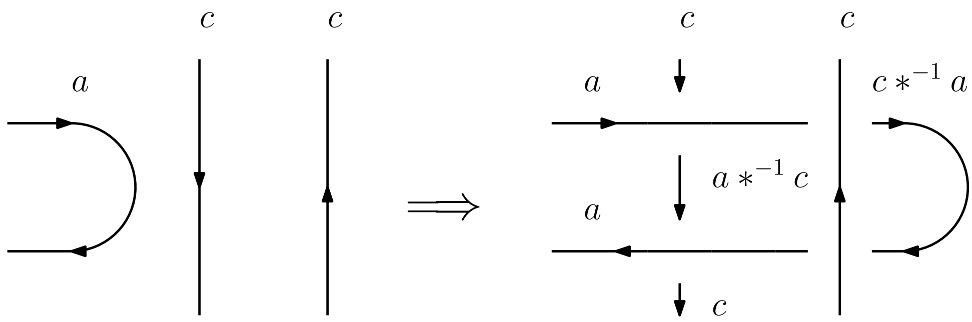
Obrázek 3.2: Pásek pod komponentou

2) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = 1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.3. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 * a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.



Obrázek 3.3: $x_1 * a$

3) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = -1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.4. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 *^{-1} a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.



Obrázek 3.4: $x_1 *^{-1} a$

Tento způsob budeme opakovat pro konec pásku tak dlouho, dokud konec pásku nebude obarvený prvkem b. Jelikož je posloupnost $x_1, x_2, \ldots x_n$ konečná, tak k němu opravdu dojdeme. Následně pásek připojíme na komponentu obarvenou prvkem b.

Počet komponent je konečný a jednou iterací algoritmu jsme snížili počet komponent o jedna. Algoritmus budeme tedy opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel. Takový uzel nazývá *stuhový uzel* (anglicky *ribbon knot*). Jelikož jsme každou komponentu $|Q|$-linku obarvili jiným prvkem z Q a algoritmus toto obarvení zachovává, dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení. Tedy $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$.

□

Věta 13. *Mějme konečný quandle Q. Pak platí, že $Col_Q(K)$ je konstantní, právě tehdy když je Q reduktivní.*

Důkaz. Pokud je Q souvislý, tak z předpokladu víme, že $|Q| > 1$. Pak podle věty 12 zkonstruujeme příslušný stuhový uzel K tak, že bude mít netriviální obarvení $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$. Tedy není konstantní.

Jestliže Q není souvislý, pak se Q podle věty 4 rozkládá na komponenty $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Z předpokladu víme, že existuje komponenta Q_i taková, že $|Q_i| > 1$. Označme si Q_i jako W. Pak podle 12 platí, že $\mathrm{Col}_W(K) > |W|$. Jelikož $W \preccurlyeq Q$, tak podle lemmatu 7 platí, že $\mathrm{Col}_Q(K) \geq \mathrm{Col}_W(K) - |W| + |Q| > |Q|$. A tedy není konstantní.

Naopak, pokud platí, že Q je reduktivní, pak podle lemmatu 5 platí, že jedinými homomorfismy z Q_K do Q jsou takové, že jejich obraz je triviální. Tedy platí, že $\mathrm{Col}_Q(K) = |Q|$, a tudíž $\mathrm{Col}_Q(K)$ je konstantní pro všechny uzly K.

□

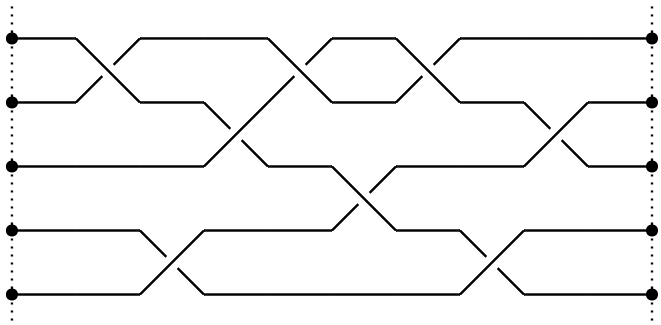
4. Barvení jako Vassilievův invariant

4.1 Copánky

Jedním z užitečných pohledů na uzly je přes takzvané copánky. Něco o historii.

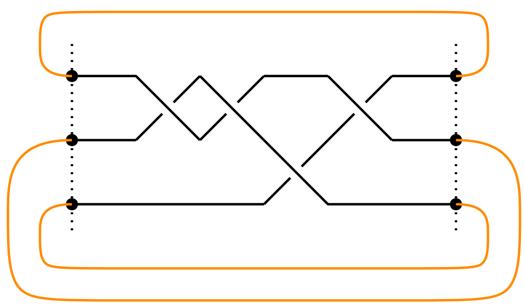
Definice 14. Buď zadané číslo n. Pak B_n značí grupu danou prezentací $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}; |i - j| \geq 2$.

Copánky si můžeme představit jako n šňůrek natažených mezi dvěma deskami, přičemž pro ně platí Reidemeisterovy pohyby 2 a 3. Skládání $a \cdot b$ funguje tak, že se vezme spodní deska z a a přilepí se k horní desce b tak, aby na sebe navazovaly provázky, a pak se ty desky odstraní, aby byly opět jenom horní a dolní. Prvky b tedy budeme ztotožňovat s příslušnou geometrickou konstrukcí.



Obrázek 4.1: Příklad copánku

Mějme copánkovou grupu B_n . Pak *uzávěrem* $b \in B_n$ rozumíme uzel K_b takový, který vznikne z b tak, že konce šňůrek přilepíme k sobě tak, že i-tá šňůrka zhora se přilepí k i-té šňůrce zdola. Tímto způsobem nevznikne vždy uzel podle naší definice, ale obecně vznikne *link*, což je disjunktní sjednocení konečně mnoha uzlů.



Obrázek 4.2: Lepení copánku

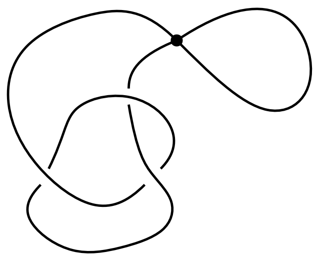
Věta 14 (Alexanderova věta). *Pro každý uzel K existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ a $b \in B_n$, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.*

Definice 15. Pro daný uzel K rozumíme *copánkovým indexem* $s(K)$ (anglicky *braid index*) nejmenší číslo n takové, že existuje $b \in B_n$ tak, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.

Pozorování. Copánkové číslo $s(K)$ je invariant.

4.2 Vassilievův invariant

Definice 16. *Singulárním* uzlem $K^\bullet$ s n protnutími rozumíme uzel takový, že sám sebe protíná v n bodech právě dvěma úseky.



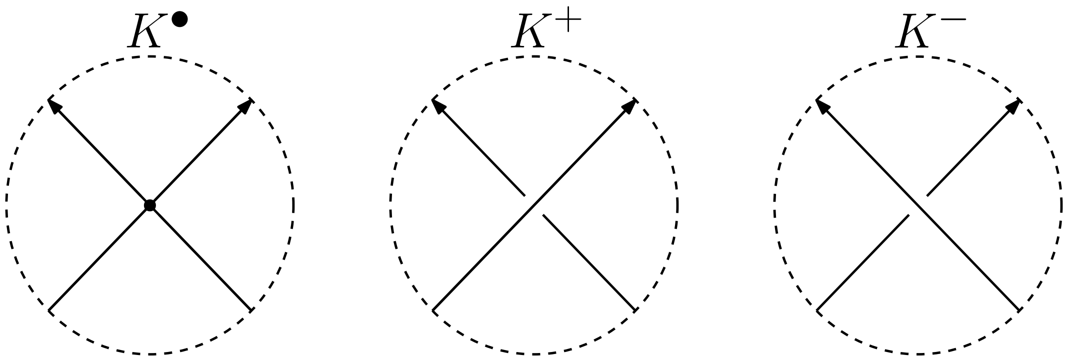
Obrázek 4.3: Singulární uzel s 1 křížením

Definice 17. Mějme singulární uzel $K^\bullet$ s $n \geq 1$ a invariant v, zvolíme si nějaké protnutí. Pak pro dané protnutí *Vassilievovou skein relací* nazýváme rovnici:

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-)$$

,

kde $K^\bullet$, K^+ a K^- odpovídají obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Vassilievova skein relace

Definice 18. Invariant v se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně $\leq m$, pokud platí, že pro každý singulární uzel $K^\bullet$ s počtem protnutí $> m$ platí $v(K^\bullet) = 0$. Řekneme, že je stupně m, pokud je stupně $\leq m$, ale není stupně $\leq m - 1$.

Tvrzení 15. *Vzorec pro Vassilievův invariant.*

V článku (Eisermann, 1999) se autor zabývá otázkou, zda je počet grupových homomorfismů z fundamentální grupy do zvolené grupy G Vassilievův invariant. Jeho výsledkem je charakterizace, že pokud je G nilponentní, tak je počet homomorfismů konstantní, jinak není Vassilievův invariant. V tété kapitole se pokusíme zobecnit tento výsledek na quandle.

Motivací je, že fundamentální quandle je úplný invariant, tedy plně charakterizuje uzel. Zároveň platí, že grupové homomorfismy mají svojí representaci i jako quandleové homomorfismy, ovšem ne každý quandleový homomorfismus má svojí reprezentaci jako grupový homomorfismus. Tedy pokud bychom dokázali obdobný výsledek pro quandleové homomorfismy, tak bychom mohli získat silnější výsledek, než který je v původním článku.

4.3 Barvení uzlů

Věta 16 ((Eisermann, 1999))**.** *Buď $s(K)$ copánkový index uzlu K. Pak pokud invariant $v : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ splňuje, že $|v(K)| \leq f(s(K))$ pro nějakou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a pro všechny uzly $K \in \mathcal{K}$, pak v není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Věta 17. *Pro každý quandle Q platí, že počet obarvení $Col_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Důkaz. Mějme fixně zadaný quandle Q a pro něj uvažujme libovolný uzel K a jeho minimální copánkovou reprezentaci odpovídající copánkovému indexu $s(K)$. Pak platí, že máme-li konkrétní obarvení $f \in \mathrm{Hom}(Q_K, Q)$, tak je jednoznačně určeno obarvením konců provázků v copánkové reprezentaci. Tedy platí, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ dokážeme omezit tak, že každému konci přiřadíme nějaký prvek z Q. Tedy

$$\mathrm{Col}_Q(K) \leq |Q|^{s(K)}.$$

Použitím věty 16 dostáváme, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.

□

Důsledek. Mějme quandle Q. Pak platí, že není Vassilievův invariant, právě tehdy když není reduktivní.

Důkaz. Z věty 13 plyne, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ není konstantní, právě tehdy když Q není reduktivní. Z věty 17 plyne, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant, právě tehdy když není konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní.

□

Důsledek. Mějme grupu G. Pak platí, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) G je nilpotentní;

2) quandle $\mathrm{Conj}(G)$ je reduktivní.

Důkaz. V článku (Eisermann, 1999) bylo obdobným způsobem dokázáno, že grupa G je nilpotentní, právě tehdy když počet homomorfismů z fundamentální grupy uzlu do G je konstantní. Naopak z věty 13 plyne, že quandle $\mathrm{Conj}(G)$ je reduktivní, právě tehdy když počet obarvení uzlu quandlem $\mathrm{Conj}(G)$ je konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní.

□

4.4 Barvení linků

Obdobnou charakterizaci můžeme získat i pro linky. Ovšem, v tomto případě bude vše jednodušší.

Věta 18. *Uvažujme quandle Q a link L s alespoň 2 komponentami. Pak platí, že $Col_Q(L)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. Navíc $Col_Q(L)$ je konstantní, právě tehdy když Q je trivialní quandle.*

Důkaz. První část je jen variací věty 17, kde místo uzlu uvažujeme link.

Dále, pokud je Q triviální quandle, tak jak platí, že $\mathrm{Col}_Q(L) = |Q|^l$, kde l je počet komponent linku L. Tedy $\mathrm{Col}_Q(L)$ je konstantní pro všechny linky L s l komponentami.

Naopak Uvažujme quandle Q, který není triviální. Pak jako L označíme 2-link a jako H hopf link.

Pro L platí, že $\mathrm{Col}_Q(L) = |Q|^2$ pro všechny quandly Q.

Jelikož Q není trivialní, tak existuje dvojice prvků $a, b \in Q$ taková, že $a \neq b$ a $a * b \neq b$. Pokud obarvíme H tak, že první komponentu obarvíme prvkem a a druhou komponentu obarvíme prvkem b, tak ze vztahu výše plyne, že H nejde touto dvojicí prvků obarvit. Tedy $\mathrm{Col}_Q(H) < |Q|^2$. Tedy Col_Q není konstantní.

□

Závěr

Toto je závěr mé práce.

Seznam použité literatury

Bonatto, M., Crans, A. S. a Whitney, G. T. (2018). On the structure of hom quandles.

Bonatto, M., Crans, A. S., Nasybullov, T. a Whitney, G. T. (2020). Quandles with orbit series conditions.

Ehrman, G., Gurpinar, A., Thibault, M. a Yetter, D. (2006). Toward a classification of finite quandles. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **17**. doi: 10.1142/S0218216508006270.

Eisermann, M. (1999). The number of knot group representations is not a vassiliev invariant. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16945432.

Johnson, D. (1980). Homomorphs of knot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **78**(1), 135–138. ISSN 00029939, 10886826. URL http://www.jstor.org/stable/2043056.

Joyce, D. (1982). A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23**, 37–65. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120011159.

Murasugi, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: 10.1007/978-0-8176-4719-3_2. URL https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2.