



# MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA Univerzita Karlova

Studentská vědecká a odborná činnost

Ondřej Chwiedziuk

## Barvicí invarianty uzlů

Katedra Algebry

Vedoucí studentské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační  
technologie

Studijní obor: Matematika pro informační  
technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto studentskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí studentské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Uzly můžeme barvit různými konečnými quandy a zjišťovat, zda mají netriviální obarvení. Pokud ano, pak dokážeme říct, že daný uzel je rozvázatelný. V práci se však zaměříme na takové quandy, které vždy dávají triviální barvení. Ukáže se totiž, že mají totiž zajímavé algebraické vlastnosti. V této práci dokážeme, že quandle dává pro každý uzel triviální barvení, právě tehdy když je quandle reduktivní, a to je právě tehdy, když je barvicí invariant Vassilievův. Podobnou charakterizaci provedeme pro linky. Tedy quandle dává triviální barvení pro každý link, právě tehdy když se jedná o triviální quandle.

Klíčová slova: Reduktivní quandy Barvení uzlů Vassilievovy invarianty

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: We can color knots by various finite quandles and check if they have non-trivial coloring. If so, we can say that the knot is an unknot. However, we will focus on quandles that always give trivial coloring. It will turn out that they have interesting algebraic properties. In this work, we will show that a quandle gives a trivial coloring for each knot if and only if the quandle is reductive, which is exactly when the coloring invariant is Vassiliev's. We will make a similar characterization for links. That is, a quandle gives a trivial coloring for each link if and only if it is a trivial quandle.

Keywords: Reductive quandles Knot coloring Vassiliev invariants

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Quandlové barvení uzlů</b>	<b>4</b>
1.1 Úvod do teorie uzlů . . . . .	4
1.2 Úvod do teorie quandlů . . . . .	6
1.3 Quandlové barvení . . . . .	7
1.4 Souvislost . . . . .	8
<b>2 Triviální barvení</b>	<b>12</b>
2.1 Reduktivita . . . . .	12
2.2 Barvení pomocí souvislých quandlů . . . . .	14
2.3 Barvení pomocí redukčních quandlů . . . . .	16
<b>3 Quandlové barvení jako Vassilievův invariant</b>	<b>18</b>
3.1 Copánkový index . . . . .	18
3.2 Vassilievovy invarianty . . . . .	19
3.3 Charakterizace Vassilievových barvení uzlů . . . . .	21
3.4 Charakterizace Vassilievových barvení linků . . . . .	22
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>23</b>

# Úvod

Teorie uzlů je oblast topologie, která se zabývá uzly, což jsou jednoduché uzavřené křivky v trojrozměrném prostoru. Uzly samotné se v historii vyskytují v různých kulturách již od pravěku, ale teorie uzlů jako matematická disciplína vznikla až v 18. století. Mezi slavné matematiky, kteří se zasloužili o vznik a rozvoj této disciplíny, patří například C. F. Gauss (1777-1855), J. W. Alexander (1888-1971) nebo H. Seifert (1907-1996). Velký rozvoj nastal po druhé světové válce ve Spojených státech a Japonsku.

Mezi základní otázky patří, zda jsou dva uzly ekvivalentní, tedy zda je jeden z druhého možné získat spojitou deformací, aniž by se v nějakém okamžiku křivka protínala. Dlouho nebylo známo, jestli vůbec existuje algoritmus, který by dokázal rozhodnout, zda dva zadané uzly jsou ekvivalentní. Existence algoritmu byla prokázána Hakenem v roce 1962. Hass a Lagarias následně v roce 1991 dokázali, že jenom rozhodnutí, zda je uzel triviální, patří do kategorie NP.

Základní technikou rozlišování uzlů je hledání invariantů. Mezi nejznámější invarianty patří takzvané barvení uzlů. Z počátku se jednalo např. o Foxovo barvení, kdy je každý oblouk uzlového diagramu obarven jednou ze tří barev a platí, že na každém křížení se vyskytují všechny tři barvy, nebo je monochromatické. Tato technika se následně zobecnila na barvení pomocí quandlů.

Quandle je algebraická struktura, která vznikla přesně pro účely rozlišování uzlů. Takzvaný fundamentální quandle dokonce jednoznačně určuje uzly až na orientaci a překlopení, což dokázal D. Joyce v roce 1982. Bohužel, výpočet fundamentálního quandle je příliš složitý pro praktické použití. Jako zjednodušení se počítá počet homomorfismů do konečného quandle. Tomu pak říkáme barvení pomocí quandle.

## Charakterizace quandlů s triviálním barvením

V této práci se zaměříme na charakterizaci quandlů, které dávají triviální obarvení pro všechny uzly. Hlavním výsledkem je následující věta:

**Věta 1.** *Buď  $Q$  konečný quandle. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- 1)  $Col_Q(K) = 0$  pro všechny uzly  $K \in \mathcal{K}$ .
- 2)  $Q$  je reduktivní.
- 3)  $Col_Q(K)$  je Vassilievův invariant.

Výsledek je zajímavý především z hlediska toho, že zatímco (1) a (3) jsou tvrzení související především s teorií uzlů, tvrzení (2) je čistě algebraické, které vychází spíše z teorie komutátorů pro quandley a s barvením uzlů nemá na první pohled nic společného. Dále pak (1)  $\implies$  (3) je zřejmá implikace, tak (3)  $\implies$  (1) využívá jako prostředníka tvrzení (2).

V první kapitole jsou definovány základní pojmy z teorie uzlů a quandlů. Ve druhé kapitole definujeme reduktivitu a ukážeme (1)  $\iff$  (2). Ve třetí kapitole se zaměříme na Vassilievovy invarianty a ukážeme (2)  $\iff$  (3). Také je zde

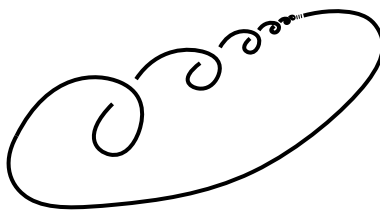
dokázáno obdobné tvrzení pro linky, kde je barvení pomocí quandlů Vassilievův invariant právě tehdy, když je quandle triviální.

Tato práce vychází především ze tří článků: Johnson (1980), Eisermann (1999) a Bonatto a kol. (2021). Využijeme podobné důkazové techniky, abychom dosáhli výše uvedeného výsledku.

# 1. Quandlové barvení uzlů

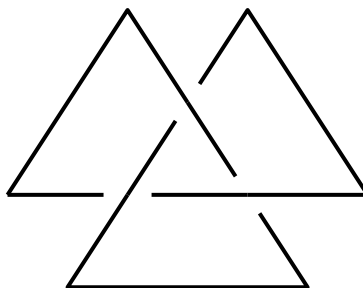
## 1.1 Úvod do teorie uzlů

Základním matematickým objektem, o kterém tato práce pojednává, je *uzel*. Obvykle se tímto pojmem myslí vnoření uzavřené jednoduché křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.



Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmito uzly vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek pouze polygonální křivky. Tedy uzlem rozumíme jednoduchou uzavřenou lomenou čáru. Takovýmto uzlům se pak říká *krotké uzly* (v angličtině *tame knots*). Množinu všech takových uzlů značíme  $\mathcal{K}$ .

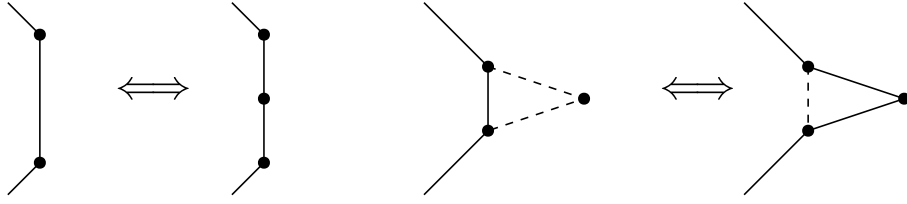


Obrázek 1.2: Trojlístek

Příbuzným pojmem je *link*, což je konečné disjunktní sjednocení uzlů. Množinu všech linků značíme  $\mathcal{L}$ . Linky sdílejí s uzly mnoho vlastností, ovšem v této práci se jim budeme věnovat pouze v poslední kapitole. Jiným zobecněním je *orientovaný uzel*, kdy si na uzlu zvolíme orientaci. Pokud jde o link, orientace je dána na každém uzlu zvlášť.

Existuje nespočetně mnoho uzlů, a proto se nabízí otázka, jak je klasifikovat. Velmi přirozený způsob je zavést *ekvivalenci* uzlů. V reálném světě si můžeme uzly představit jako provázky, které mají spleené konce a jsou různě zamotány do prostoru. Tento provázek můžeme libovolně deformovat, ale nesmíme ho přetrhnout. Na základě toho pak můžeme dva uzly prohlásit za ekvivalentní, pokud dokážeme jeden získat z druhého pomocí takovýchto deformací. Tento způsob klasifikace je velmi intuitivní, tudíž by bylo vhodné ho reflektovat i v matematické teorii.

Pro uzel  $K$  si nejprve zavedeme *základní pohyby* následovně:



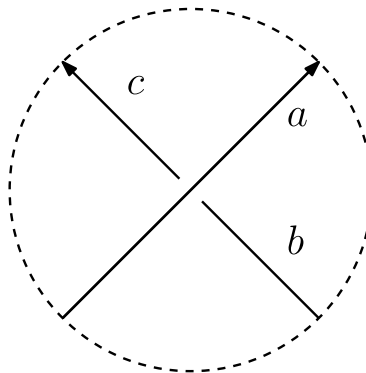
Obrázek 1.3: Základní pohyby

- 1) Mějme hranu křivky  $K$  danou vrcholy  $A$  a  $B$ . Pak můžeme umístit nový vrchol  $C$  na hranu  $AB$ . Naopak, pokud existuje vrchol  $C$  na hraně  $AB$ , která náleží do uzlu  $K$ , můžeme ho odstranit.
- 2) Mějme hranu  $AB$  v  $K$  a nějaký vrchol  $C$  ležící mimo  $K$ . Pak pokud platí, že  $ABC \cap K = AB$ , pak můžeme hranu  $AB$  nahradit hranami  $AC$  a  $CB$ . Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit hrany  $AC$  a  $CB$  za hranu  $AB$ .

Tyto dva pohyby reflektují intuitivní představu o tom, jak můžeme uzly deformovat. Následně můžeme definovat relaci ekvivalence tak, že uzly  $K$  a  $K'$  jsou ekvivalentní, pokud existuje konečná posloupnost základních pohybů, která transformuje jeden uzel v druhý. Tuto relaci značíme  $K \cong K'$ .

Jelikož je práce s objekty ve třech rozměrech velmi obtížná, zavedeme si *diagramy* uzlů. Jedná se o projekce uzlů do roviny, zatímco zachováváme informaci o kříženích tím, že spodní část křivky v místě křížení přerušíme. Zároveň zakážeme patologické případy, kdy dojde pouze k překryvu dvou částí křivky, který není křížením. Diagram uzlu  $K$  budeme značit  $D_K$ . Množinu všech diagramů uzlu  $K$  značíme  $D(K)$ .

Takto daný diagram se skládá z *oblouků*, jimiž rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu všech oblouků diagramu  $D_K$  značíme  $O(D_K)$ . Dále místa, kde dochází k přerušení křivky, nazýváme *křížení*. Toto křížení budeme zapisovat jako uspořádanou trojici oblouků, které se v daném místě kříží ve tvaru  $(a, b, c)$  podle obrázku 1.4. Množinu všech křížení diagramu  $D_K$  značíme  $C(D_K)$ .

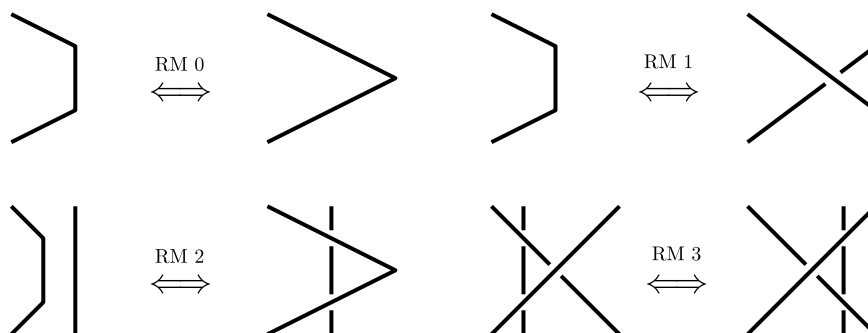


Obrázek 1.4: Křížení

Na diagramech můžeme definovat ekvivalenci. Dva diagramy  $D_K$  a  $D_{K'}$  jsou ekvivalentní, pokud platí, že  $K \cong K'$ . Ovšem, můžeme ekvivalenci zavést přímo na diagramech a to pomocí tzv. *Reidemeisterových pohybů*. Jsou obdobou základních pohybů pro diagramy a platí, že dva diagramy jsou ekvivalentní, pokud jeden



získáme z druhého pomocí konečné posloupnosti Reidemeisterových pohybů. Reidemeisterovy pohyby jsou znázorněny na obrázku 1.5.



Obrázek 1.5: Reidemeisterovy pohyby

Na rozlišování uzlů budeme využívat *invarianty*. Invariantem  $I$  rozumíme takové zobrazení z množiny všech uzlů do nějaké množiny, které je konstantní na ekvivalentních uzlech. Tedy pokud  $K_1 \cong K_2$ , pak  $I(K_1) = I(K_2)$ . Invariant se nazývá *úplný*, pokud platí, že  $I(K_1) = I(K_2)$  implikuje  $K_1 \cong K_2$ . Jelikož je ekvivalence uzlů daná pomocí Reidemeisterových pohybů, stačí ověřit, že se invariant zachovává na těchto pohybech.

Mezi základní invarianty patří třeba *crossing number*, což je nejmenší možný počet křížení přes všechny diagramy jednoho uzlu. Dalšími příklady jsou *unknotting number*, *bridge number* nebo *genus*. V této práci se budeme věnovat invariantům založeným na quandleovém barvení.

## 1.2 Úvod do teorie quandlů

Quandle vznikl jako algebraická struktura, která respektuje Reidemeisterovy pohyby, a je tak vhodná pro rozlišování uzlů. V této podkapitole rozvinu základní teorii kolem těchto algebraických struktur.

**Definice 1.** *Quandlem*  $Q = (C, *)$  rozumíme algebraickou strukturu nad množinou  $C$  s binární operací  $*$ , splňující následující podmínky pro všechna  $a, b, c \in C$ :

- 1)  $a * a = a$  (idempotence);
- 2)  $\exists! x \in C : a * x = b$  (jednoznačné levé dělení, značíme  $x = a *^{-1} b$ );
- 3)  $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$  (levá sebedistributivita).

*Příklad.* Příkladem quandle je například *triviální jednoprvkový quandle*  $Q = (\{a\}, *)$ , kde  $a * a = a$ . Značme ho jako  $T_1$ . *Triviální quandle* nad  $A$  definujeme tak, že vezmeme množinu  $A$  a definujeme  $a * b = b$  pro všechna  $a, b \in A$ . Takový quandle značíme  $T_A$ .

*Příklad.* Dalším příkladem může být quandle daný konjugací v grupě  $G$ . Pro  $a, b \in G$  definujeme  $a * b = aba^{-1}$ . Tento quandle značíme  $\text{Conj}(G)$ .

Na quandlech bychom nyní zavedli základní pojmy běžné i pro jiné algebraické struktury, jako homomorfismy, podalgebry a faktoralgebry běžné v univerzální algebře. Pomocí nich si pak můžeme lépe porozumět vlastnostem quandleů.

**Definice 2.** Mějme quandy  $Q$  a  $W$ . Pak *quandlovým homomorfismem*  $\varphi : Q \rightarrow W$  rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy  $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$  pro všechna  $a, b \in Q$ .

**Definice 3.** Mějme quandle  $(Q, *)$ . Pak *podquandlem*  $W \preceq Q$  rozumíme dvojici  $(W, *_|_W)$ , kde  $W \subseteq Q$  a platí, že  $W$  je uzavřená na operaci  $*$  jakožto zúžení operace z  $Q$ .

**Definice 4.** Buď  $Q$  quandle. Na něm zavedeme relaci ekvivalence  $\alpha$  takovou, že  $[a]_\alpha * [b]_\alpha = [a * b]_\alpha$  pro všechna  $a, b \in Q$ . Vzniklý quandle definovaný na blocích ekvivalence značíme  $Q/\alpha$  a nazýváme *faktorquandlem* quandle  $Q$  podle ekvivalence  $\alpha$ .

Víme, že  $a \mapsto [a]_\alpha$  je homomorfismus z  $Q$  na  $Q/\alpha$ . Také platí, že pokud máme homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ , pak jádro, tj množina  $\text{Ker } \varphi = \{(a, b) \in Q \times Q : \varphi(a) = \varphi(b)\}$ , tvoří kongruenci na  $Q$  a faktorquandle  $Q/\text{Ker } \varphi$  je izomorfní s obrazem  $\text{Im } \varphi(Q) \preceq W$ . Jedná se o klasický výsledek univerzální algebry, který můžeme nalézt např. v knize (Ježek, 2008). Dalším takovým výsledkem je, že kongruence tvoří svaz:

**Definice 5.** Kongruence  $\alpha$  na quandle  $Q$  tvoří svaz, který značíme  $\text{Con}(Q)$ . Minimální prvek tohoto svazu značíme  $0_Q$  a je definován jako  $\{(a, a) : a \in Q\}$ . Maximální prvek značíme  $1_Q$  a je definován jako  $Q \times Q$ .

## 1.3 Quandlové barvení

Nyní definujeme pojmy *fundamentální quandle* a *quandlové barvení*, které nám dávají invarianty založené na quandlech.

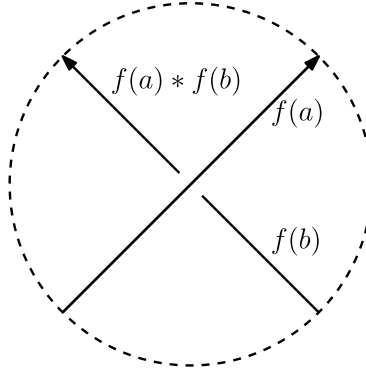
**Definice 6.** *Volným quandlem*  $Q_X$  nad neprázdnou množinou  $X$  rozumíme quandle takový, že pro zobrazení  $f : X \rightarrow Q$ , kde  $Q$  je libovolný quandle, existuje právě jeden homomorfismus  $\varphi : Q_X \rightarrow Q$  takový, že  $\varphi(x) = f(x)$  pro všechna  $x \in X$ .

**Definice 7.** Mějme  $K$  uzel,  $D_K$  jeho diagram, pak *fundamentálním quandlem*  $Q_K$  rozumíme volný quandle nad množinou oblouků  $O(D_K)$  vyfaktorizovaný relacemi dané kříženími  $C(D_K)$  takové, že pro každé křížení  $(a, b, c) \in C(D_K)$  platí  $a * b = c$ .

**Tvrzení 2** (Joyce, 1982). *Fundamentální quandle  $Q_K$  je úplným invariantem až na orientaci.*

Fundamentální quandle dává sice velmi silný invariant, ale je těžké ho spočítat. Fundamentální quandle je nekonečný a určit, zda jsou dva takové quandy izomorfní, je velmi obtížné. Proto se spíše používá z něj odvozený invariant, kterému se říká *quandlové barvení*. Jedná se o počet homomorfismů z fundamentálního quandle do námi zvoleného konečného quandle. Jelikož ovšem vždy existuje homomorfismus takový, všem prvkům přiřadí stejný prvek, tak tyto homomorfismy zanedbáme. Tento invariant je sice slabší, ale lze mnohem snadněji spočítat.

**Definice 8.** Mějme uzel  $K$ , jeho fundamentální quandle  $Q_K$  a libovolný quandle  $W$ . Pak *počtem obarvení*  $\text{Col}_W(K)$  rozumíme počet homomorfismů  $\varphi : Q_K \rightarrow W$ . Tedy  $\text{Col}_W(K) = |\text{Hom}(Q_K, W)| - |W|$ .



Obrázek 1.6: Barvení pomocí quandlu

Jak takový invariant funguje, si ukážeme na příkladu *Foxova quandle*. Začneme definicí tohoto quandle. Originálně je Foxovo barvení definováno jako barvení oblouků jednou ze tří barev tak, aby na každém křížení byly měly všechny tři oblouky buď stejnou barvu, nebo navzájem různou. Nyní reformulujme toto barvení jako homomorfismy z fundamentálního quandle do Foxova quandle. Foxův quandle  $F$  definujeme následující tabulkou:

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Nyní si vezměme uzel  $K$  a jeho fundamentální quandle  $Q_K$ . Jelikož je fundamentální quandle je definován jako volný quandle na obloucích diagramu modulo relace na kříženích, tak pokud každému oblouku přiřadíme jednu ze tří barev (tj. prvků z  $F$ ), tak definujeme homomorfismus  $f$  z  $Q_K$  do  $F$ . Jenže ne každé obarvení je homomorfismus, protože musí splňovat relace dané kříženími. Mějme křížení  $(a, b, c)$ . Pak víme, že  $f(a) * f(b) = f(c)$ . Tedy pokud  $f(a) = f(b)$ , pak i  $f(c) = f(a)$ . Naopak, pokud  $f(a) \neq f(b)$ , tak  $f(c) \neq f(a), f(b)$ . Toto nám dává přesně pravidla Foxova barvení.

## 1.4 Souvislost

V této sekci se budeme zabývat souvislými quandly. Tato třída je důležitá hned ze dvou důvodů. Prvním je, že všechny konečné quandly lze rozložit na souvislé podquandly. Druhým je, že fundamentální quandle uzlu je souvislý.

**Definice 9.** Mějme quandle  $Q$ . Pak  $L_q$  značí levou translaci o  $q \in Q$ , tedy  $L_q(x) = q * x$ . Grupa generovaná levými translacemi se značí  $\text{Inn}(Q)$  a nazývá se *grupa vnitřních automorfismů* quandle  $Q$ .

**Definice 10.** Mějme quandle  $Q$ . Pokud platí, že je působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  tranzitivní, pak říkáme, že  $Q$  je souvislý quandle.

**Lemma 3.** Mějme konečný quandle  $Q$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- 1)  $Q$  je souvislý;

2) pro každé dva prvky  $a, b \in Q$  platí, že existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

kde  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

*Důkaz.*

(1)  $\Rightarrow$  (2): Mějme  $a, b \in Q$ . Jelikož je  $Q$  konečný, tak platí, že  $|\text{Inn}(Q)| \leq |Q|!$ , tedy  $\text{Inn}(Q)$  je konečná grupa. Tudíž pro každý prvek  $\varphi \in \text{Inn}(Q)$  existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že  $\varphi = L_{x_1}^{\varepsilon_1} \circ L_{x_2}^{\varepsilon_2} \circ \dots \circ L_{x_n}^{\varepsilon_n}$ , kde  $L_x$  je levá translace o  $x$ .

Jelikož  $\text{Inn}(Q)$  je tranzitivní, tak existuje  $\varphi \in \text{Inn}(Q)$  taková, že  $\varphi(a) = b$ . Tedy existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Jelikož každé dva prvky dokážeme spojit konečnou posloupností prvků, tak platí, že grupa  $G$  daná levými translacemi  $\text{Inn}(Q)$  působí tranzitivně na  $Q$ . Tudíž je  $Q$  souvislý.

□

**Lemma 4.** *Mějme quandle  $Q$  a grupu vnitřních automorfismů  $\text{Inn}(Q)$ . Pak platí, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  rozkládá  $Q$  na orbity a každá orbita je podquandle.*

*Důkaz.* Zafixujme si orbitu nějakou  $W$ . Tak platí, že  $W$  je uzavřená na operaci  $*$ , jelikož pokud  $a, b \in W$ , tak  $a * b = L_a(b) \in W$ . Zároveň je uzavřená na levé dělení, jelikož pokud  $a, b \in W$ , tak  $a *^{-1} b = L_a^{-1}(b) \in W$ . Tedy  $W$  je podquandle.

□

*Příklad.* Mezi souvislé quandly patří např. Foxův quandle  $F$ . Naopak, mezi nesouvislé patří triviální quandly  $T_n$ , kde  $n > 1$ . Tyto quandly se rozpadnou na  $n$  jednoprvkových podquandlů  $T_1$ , který je ale triviálně souvislý.

Obecně neplatí, že působením  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  dostaneme souvislé quandly. Je to z toho důvodu, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na jednu orbitu  $Q'$  může být tranzitivní, ale z pohledu té orbity se jedná o působení  $\text{Aut}(Q')$ . A tedy může nastat, že  $\text{Inn}(Q')$  není tranzitivní na  $Q'$ . Pro konečné quandly však platí, že se dají rekurzivně rozložit na souvislé podquandly.

**Tvrzení 5** (Ehrman a kol., 2006). *Mějme quandle  $Q$ . Pak platí, že se dá jednoznačně rozložit na maximální souvislé podquandly  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ .*

*Důkaz.* Mějme quandle  $Q$  a grupu vnitřních automorfismů  $\text{Inn}(Q)$ . Podle lemmatu 4 platí, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  rozkládá  $Q$  na orbity a každá orbita je podquandle. Jelikož je  $Q$  konečný, tak má konečně mnoho orbit. Pokud je orbita souvislá, tak jsme skončili. Pokud ne, znovu aplikujeme lemma 4. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme rozklad na souvislé podquandly. Jelikož je  $Q$  konečný a velikost orbit se zmenšuje, tak se vždy dostaneme do souvislého podquandlu.

Rozklad je jednoznačný, jelikož pokud by existovaly dva různé rozklady, tak by existovaly dva různé souvislé podquandly  $W$  a  $W'$ , které se protínají, jenže by to znamenalo, že se dokážeme z každého prvku v  $W$  dostat do  $W'$  a naopak, což by znamenalo, že tvoří jeden souvislý quandle a jsou shodné, což je spor.  $\square$

**Definice 11.** Mějme quandle  $Q$ . Pak *rozkladem* quandle  $Q$  rozumíme rozklad na souvislé podquandly  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ . Subquandle  $Q_i$  nazýváme *komponenta*  $Q$ .

Nyní se podíváme, jak se chová souvislost při homomorfismech.

**Lemma 6** (Bonatto a kol., 2019). *Uvažujme quandly  $Q$  a  $W$ , rozklad  $Q$  jako  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  a homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ . Pak platí, že homomorfním obrazem  $Q_i$  je souvislý podquandle  $\varphi(Q_i) = W_i \preceq W$ .*

*Důkaz.* Mějme  $a, b \in Q$  ve stejné komponentě. Pak podle lemmatu 3 existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

Nyní, když máme homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ , tak platí, že

$$\varphi(x_1) *^{\varepsilon_1} (\varphi(x_2) *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (\varphi(x_n) *^{\varepsilon_n} \varphi(a)) \dots)) = \varphi(b).$$

Tedy platí, že  $\varphi(a)$  a  $\varphi(b)$  jsou ve stejné komponentě.  $\square$

Speciálně, pokud je  $Q$  souvislý quandle, tak jeho homomorfním obrazem je také souvislý quandle.

**Lemma 7** (Joyce, 1982). *Mějme uzel  $K$  a jeho fundamentální quandle  $Q_K$ . Pak platí, že  $Q_K$  je souvislý quandle.*

*Důkaz.* Mějme  $a, b \in Q_K$  generátory. Pak chceme ověřit, že existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q_K$  taková, že  $x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b$ . Jenže, jelikož jsou  $a, b$  generátory, tak odpovídají nějakým obloukům  $a', b' \in O(D_K)$ . Posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pak dostaneme tak, že začneme v  $a'$  a budeme ve směru k  $b'$ . Pokaždé, když narazíme na křížení, kde je  $x'_i$  most, tak si přidáme  $x_i$  do posloupnosti s příslušným znaménkem operace. Jelikož  $a, b$  leží na stejném uzlu, tak se tímto způsobem dostaneme z  $a$  do  $b$ .

Tohle platí pro všechny generátory, tedy i pro všechny prvky  $Q_K$ , jelikož každý prvek je generován posloupností generátorů. Tudíž je  $Q_K$  souvislý quandle.  $\square$

Z lemmat 6 a 7 plyne, že obraz fundamentálního quandlu je souvislý quandle. Jenže to znamená, že nám při výpočtu  $\text{Col}_Q(K)$  stačí uvažovat pouze souvislé quandly. Speciálně je jedním z důsledků následující lemma:

**Lemma 8.** *Mějme quandle  $Q$ , který není souvislý, a uzel  $K$ . Pak platí, že*

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|,$$

kde  $Q_i$  jsou komponenty rozkladu  $Q$ .

*Důkaz.* Mějme homomorfismus  $\varphi \in \text{Hom}(Q_K, Q)$ . Jelikož je  $Q_K$  podle 7 souvislý, tak podle lemmatu 6 platí, že  $\varphi(Q_K)$  je souvislý podquandle  $Q$ . Jelikož se  $Q$  rozkládá na komponenty, které jsou souvislé, tak platí, že  $\varphi$  náleží do  $\text{Hom}(Q_K, Q_i)$  pro nějaké  $i$ . Zároveň patří nejvýše do jedné takové množiny, jelikož jsou orbity disjunktní. Jelikož je  $\varphi$  libovolný homomorfismus, tak platí, že

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|.$$

□

## 2. Triviální barvení

### 2.1 Reduktivita

V této sekci se budeme zabývat reduktivními quandly. Tyto quandle jsou studovány v článcích (Bonatto a kol., 2021), (Bonatto a Stanovský, 2021) a (Jedlička a kol., 2020). Ovšem jejich motivace při definici reduktivity je čistě algebraická. My se budeme zabývat reduktivitou ve vztahu k uzlům a jejich barvením. V této kapitole vycházím primárně z prvního zmíněného článku.

**Definice 12.** Buď  $n \in \mathbb{N}$ . Pak quandle  $Q$  nazýváme  $n$ -reduktivní, pokud platí, že všechny  $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in Q$  splňují:

$$((\dots (a * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n = ((\dots (b * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n$$

Říkáme, že  $Q$  je *reduktivní*, pokud existuje  $n \in \mathbb{N}$ , že je  $n$ -reduktivní.

**Definice 13.** Buď  $Q$  quandle. Pak definujeme grupu  $\text{Dis}_\alpha = \langle L_a L_b^{-1} : a \alpha b \rangle \trianglelefteq \text{Inn}(Q)$ . Tato grupa se nazývá *pohybová grupa* quandle  $Q$  podle relace ekvivalence  $\alpha$ .

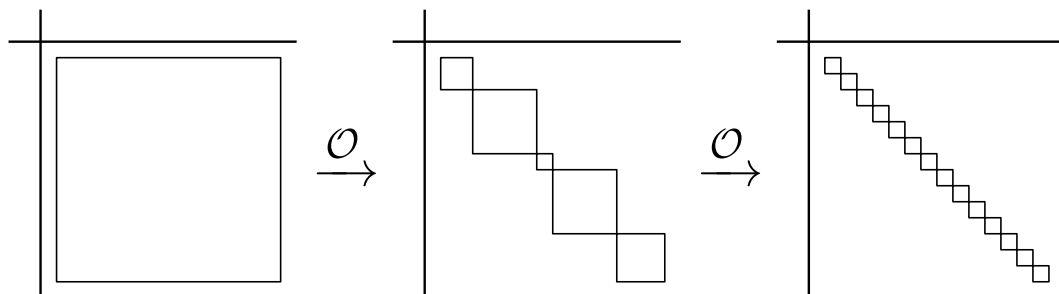
Obecně platí, že pohybové grupy  $\text{Dis}_\alpha \trianglelefteq \text{Inn}(Q)$ . Toho využijeme při definici kongruence na quandlech.

**Definice 14.** Buď  $Q$  quandle a  $N \trianglelefteq \text{Inn}(Q)$ . Pak definujeme  $\mathcal{O}(N) = \{(a, b) \in Q \times Q : \varphi(a) = b, \varphi \in N\}$ .

Pokud budeme volit  $N = \text{Dis}_\alpha$ , kde  $\alpha \in \text{Con}(Q)$ , tak můžeme dostat robustnější definici rozkladu na souvislé komponenty, která nám umožňuje s nimi lépe pracovat za pomoci kongruencí. První iterace vlastně odpovídá rozkladu na orbity pod působením  $\text{Inn}(Q)$ .

**Definice 15.** Buď  $Q$  quandle. Pak definujeme  $\mathcal{O}^0(Q) = 1_Q$ . Dále definujeme  $\mathcal{O}^{n+1}(Q) = \mathcal{O}(\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)})$ .

Cílem je ukázat, že pokud  $\mathcal{O}^n(Q) = 0_Q$ , tedy se dostaneme do stavu jako na obrázku 2.1, pak je  $Q$  reduktivní a naopak. Abychom mohli využít síly výše definované konstrukce, potřebujeme nejprve technické lemma.



Obrázek 2.1: Rozklad quandle na komponenty

**Lemma 9.** *Bud'  $Q$  quandle a  $\alpha \in \text{Con}(Q)$ . Pak platí, že*

$$\mathcal{O}^n(Q/\alpha) = \{[b]_\alpha : b \mathcal{O}^n(Q) a\}.$$

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme indukcí podle  $n$ . Pro  $n = 0$  je tvrzení triviální, protože vlastně jen popisuje úvodní definici.

Dále budeme předpokládat, že tvrzení platí pro  $n$ . Tedy:

$$\{[b]_\alpha : [b]_\alpha \mathcal{O}^n(Q/\alpha) [a]_\alpha\} = \{[b]_\alpha : b \mathcal{O}^n(Q) a\}.$$

Nyní vezměme přirozenou projekci  $\pi_\alpha : \text{Inn}(Q) \twoheadrightarrow \text{Inn}(Q/\alpha)$  definovanou jako  $\pi_\alpha(L_a) = L_{[a]_\alpha}$ . Pak platí, že  $\pi_\alpha(\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)}) = \text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q/\alpha)}$ , jelikož grupa na pravé straně je generována prvky tvaru  $L_{[a]_\alpha} L_{[b]_\alpha}^{-1}$ , kde  $[a]_\alpha \mathcal{O}^n(Q/\alpha) [b]_\alpha$ . Jenže  $L_{[a]_\alpha} L_{[b]_\alpha}^{-1} = \pi_\alpha(L_a) \pi_\alpha(L_b)^{-1} = \pi_\alpha(L_a L_b^{-1})$ . To jsou ale generátory grupy  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)}$ , protože  $b \mathcal{O}^n(Q) a$ .

Zafixujme si prvek  $A = [a]_{\mathcal{O}^{n+1}(Q/\alpha)} = \{d([a]_\alpha) : d \in \text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q/\alpha)}\}$ . Z tvrzení výše plyne, že

$$A = \{\pi_\alpha(h)([a]_\alpha) : h \in \text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q/\alpha)}\} = \{[h(a)]_\alpha : h \in \text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)}\}.$$

Z toho už ale dostáváme, že:

$$[a]_{\mathcal{O}^{n+1}(Q/\alpha)} = \{b_\alpha : b \mathcal{O}^{n+1}(Q) a\} = \{[b]_\alpha : b \mathcal{O}^{n+1}(Q) a\},$$

což jsme chtěli dokázat. □

**Tvrzení 10** (Bonatto a kol., 2021). *Bud'  $Q$  konečný quandle. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- 1)  $Q$  je  $n$ -reduktivní pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2)  $\mathcal{O}^n(Q) = 0_Q$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3) Pro každou komponentu  $Q_i$  rozkladu  $Q$  platí, že  $|Q_i| = 1$ .

*Důkaz.* (1)  $\implies$  (2):

Dokážeme indukcí podle  $n$ :

Případ  $n = 1$  je triviální, protože se jedná o triviální quandle  $T_m$  a tudíž  $\mathcal{O}^1(Q) = 0_Q$ .

Dále bud'  $Q$   $n + 1$ -reduktivní. Zadefinujme homomorfismus  $L : Q \rightarrow Q$  tak, že  $L : x \mapsto L_x$ . Tím dostaneme faktorquandle definovaný jako  $Q/\lambda = L(Q)$ , který je ale  $n$ -reduktivní. Podle indukčního předpokladu tedy platí, že  $\mathcal{O}^n(Q/\lambda) = 0_{Q/\lambda}$ . Z lemmatu 9 pak plyne, že  $\{[b]_\lambda : b \mathcal{O}^n(Q) a\} = [[a]_\lambda]_{\mathcal{O}^n(Q/\lambda)} = \{[a]_\lambda\}$ . Tedy pokud  $b \mathcal{O}^n(Q) a$ , tak  $[b]_\lambda = [a]_\lambda$  a tudíž i  $b = a$ . Tedy  $\mathcal{O}^n(Q) \subseteq \lambda$  a tudíž  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)} \leq \text{Dis}_\lambda$ . Z toho plyne, že  $\mathcal{O}^{n+1}(Q) = \mathcal{O}(\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)}) \subseteq \mathcal{O}(\text{Dis}_\lambda) = 0_Q$ . Tedy  $\mathcal{O}^{n+1}(Q) = 0_Q$ .

(2)  $\implies$  (1):

Také dokážeme indukcí podle  $n$ :

Případ  $n = 1$  je triviální ze stejného důvodu jako výše.



Dále předpokládejme, že  $\mathcal{O}^{n+1}(Q) = 0_Q$ . Definujme  $Q' = Q/\mathcal{O}^n(Q)$ . Přírozená projekce  $\pi_{\mathcal{O}^n(Q)}$  posílá  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^k(Q)}$  na  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^k(Q)/\mathcal{O}^n(Q)}$  a podle lemmatu 9 platí, že  $\mathcal{O}^k(Q') = \mathcal{O}^k(Q)/\mathcal{O}^n(Q)$  pro každé  $k \leq n$ . Tudíž  $Q'$  má řetěz kongruencí:

$$1_{Q'} = \mathcal{O}^0(Q') \subseteq \mathcal{O}^1(Q') \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}^n(Q') = \mathcal{O}^n(Q)/\mathcal{O}^n(Q) = 0_{Q'}.$$

Z indukce víme, že  $Q'$  je  $n$ -reduktivní. Jelikož  $\mathcal{O}^{n+1}(Q) = 0_Q$ , pak orbity  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)}$  jsou triviální. Tedy  $\text{Dis}_{\mathcal{O}^n(Q)} \subseteq \lambda$ . Reduktivitu si můžeme reformulovat tak, že platí:

$$((\dots (a * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n \lambda = ((\dots (b * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n \lambda.$$

Z toho ale plyne, že  $Q$  je  $n+1$ -reduktivní.

(2)  $\implies$  (3):

Vidíme, že  $\mathcal{O}^n(Q)$  odpovídá tomu, že budeme postupně rozkládat  $Q$  na menší a menší orbity, až dosáhneme rozkladu na souvislé komponenty. Jelikož  $\mathcal{O}^n(Q) = 0_Q$ , tak všechny komponenty mají velikost 1.

(3)  $\implies$  (2):

Pokud všechny komponenty rozkladu mají velikost 1, tak to znamená, že existuje  $n \leq |Q|$  takové, že  $\mathcal{O}^n(Q) = 0_Q$ , protože  $Q$  je konečný quandle. □

**Důsledek 11.** *Jediný souvislý reduktivní quandle je  $T_1$ .*

*Důkaz.* Mějme souvislý reduktivní quandle  $Q$ . Jelikož je reduktivní, tak podle 10 všechny komponenty rozkladu mají velikost 1. Jenže zároveň je  $Q$  souvislý. Tudíž se jedná o  $T_1$ . □

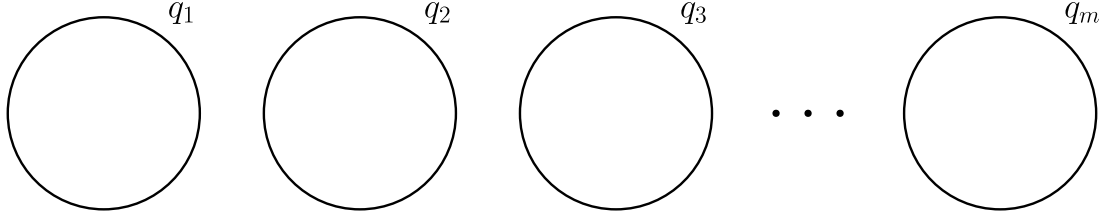
## 2.2 Barvení pomocí souvislých quandlů

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že homomorfním obrazem fundamentálního quandlu je souvislý quandle. Nyní naopak ukážeme, že pro každý netriviální souvislý quandle existuje takový uzel, který má netriviální obarvení. Na základě toho ukážeme, že quandle dává triviální obarvení pro všechny uzly, právě tehdy když je reduktivní.

**Věta 12.** *Pro každý souvislý quandle  $Q$ ,  $|Q| > 1$  existuje takový uzel  $K$ , že  $\text{Col}_Q(K) > 0$ .*

*Důkaz.* Pro důkaz této věty použijeme konstrukci, která se poprvé objevila v článku (Johnson, 1980), a kterou si upravíme tak, aby řešila náš problém. Konstrukce je následující:

Nejprve uvažujme orientovaný  $m$ -link, kde  $m = |Q|$ , viz obrázek 2.2. Každou komponentu obarvíme jiným prvkem z  $Q$ . Následně budeme postupně propojovat pomocí pásků tak dlouho, dokud nám nevznikne uzel. Na konci dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení, jelikož každá komponenta bude obarvena jiným prvkem z  $Q$  a toto obarvení se v průběhu konstrukce zachovává. Z toho pak bude plynout, že  $\text{Col}_Q(K) > 0$ .



Obrázek 2.2:  $m$ -link

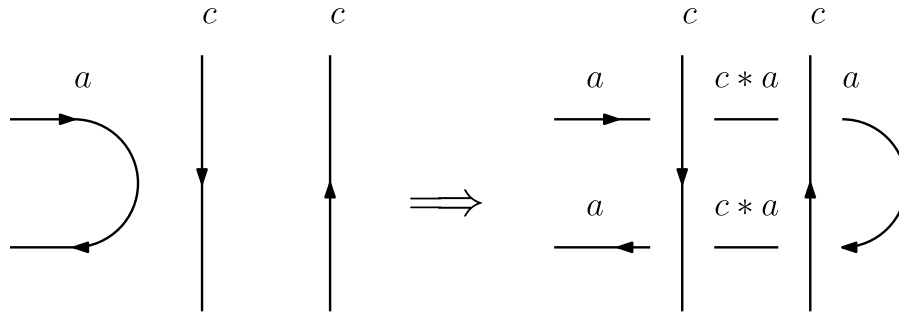
Mějme zadaný souvislý quandle  $Q$ . Jelikož je  $Q$  souvislý, pak podle lemmatu 3 existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

pro každé dva prvky  $a, b \in Q$ . Naším cílem bude postupně provádět levé translace  $L_{x_1}^{\varepsilon_1}, L_{x_2}^{\varepsilon_2}, \dots, L_{x_n}^{\varepsilon_n}$  tak, abychom na konci mohli propojit dvě komponenty uzlu a získat tak link o  $m - 1$  komponentách. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel.

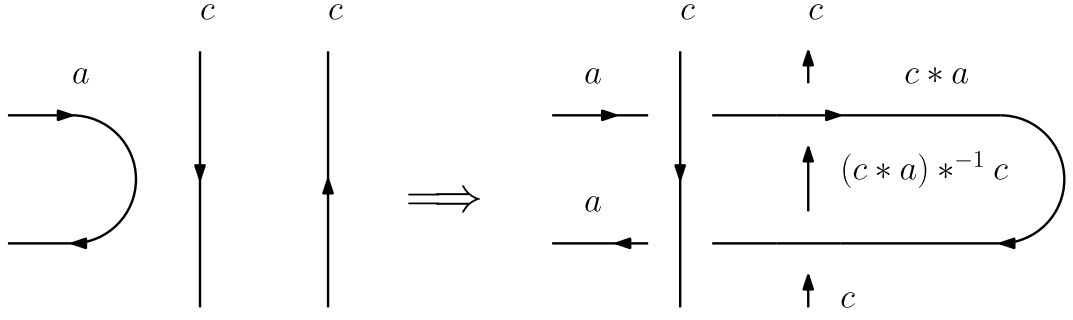
Začneme s komponentou obarvenou prvkem  $a$ . Z ní povedeme pásek. Pokud pásek bude křížovat s nějakou jinou komponentou, tak budeme postupovat podle jedné z následujících situací:

- 1) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c \neq x_1$  pak pásek povedeme pod celou komponentou. Dojde tedy k situaci na obrázku 2.3. Tedy pásek povedeme pod celou komponentou, aniž bychom změnili obarvení konce pásku i komponenty.

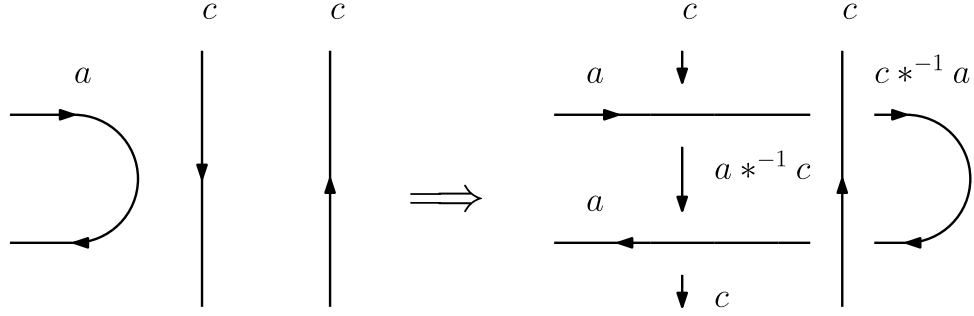


Obrázek 2.3: Pásek pod komponentou

- 2) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c = x_1$  a platí, že  $\varepsilon_1 = 1$ , pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 2.4. Konec pásku bude obarvený prvkem  $x_1 * a$ , zatímco komponenta obarvená prvkem  $x_1$  zůstane nezměněná.
- 3) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c = x_1$  a platí, že  $\varepsilon_1 = -1$ , pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 2.5. Konec pásku bude obarvený prvkem  $x_1 *^{-1} a$ , zatímco komponenta obarvená prvkem  $x_1$  zůstane nezměněná.



Obrázek 2.4:  $x_1 * a$



Obrázek 2.5:  $x_1 *^{-1} a$

Tento způsob budeme opakovat pro konec pásku tak dlouho, dokud konec pásku nebude obarvený prvkem  $b$ . Jelikož je posloupnost  $x_1, x_2, \dots, x_n$  konečná, tak k němu opravdu dojdeme. Následně pásek připojíme na komponentu obarvenou prvkem  $b$  a tím získáme link o  $m - 1$  komponentách.

Počet komponent je konečný a jednou iterací algoritmu jsme snížili počet komponent o jedna. Algoritmus budeme tedy opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel. Takový uzel nazývá *stuhový uzel* (anglicky *ribbon knot*). Jelikož jsme každou komponentu  $|Q|$ -linku obarvili jiným prvkem z  $Q$  a algoritmus toto obarvení zachovává, dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení. Tedy  $\text{Col}_Q(K) > 0$ .

□

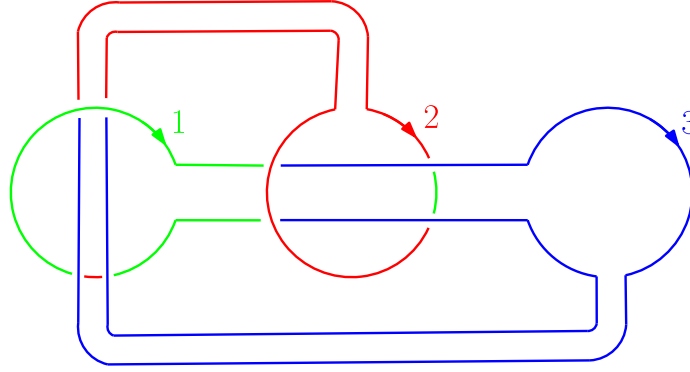
*Příklad.* Nyní provedeme konstrukci pro Foxův quandle  $F$ . Víme, že  $2 * 1 = 3$  a  $1 * 2 = 3$ . Nejprve propojíme komponenty 1 a 3, následně připojíme zbývající komponentu 2 a dostaneme stuhový uzel  $R_F$  jako na obrázku 2.6.

## 2.3 Barvení pomocí reduktivních quandlů

Nyní už přistoupíme k samotnému důkazu ekvivalence prvních dvou tvrzení z věty 1.

**Věta 13.** *Mějme konečný quandle  $Q$ . Pak platí jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- 1)  $\text{Col}_Q(K)$  je konstantní,
- 2)  $Q$  je reduktivní.



Obrázek 2.6: Stuhový uzel pro Foxův quandle

*Důkaz.* Pokud je  $Q$  souvislý a netriviální, pak podle věty 12 zkonstruujeme příslušný stuhový uzel  $R$  tak, že bude mít netriviální obarvení  $\text{Col}_Q(R) > 0$ . Zároveň lze unknot  $U$  obarvit pouze triviálně, tedy  $\text{Col}_Q(U) = 0$ . Tedy  $\text{Col}_Q(K)$  není konstantní.

(1)  $\implies$  (2):

Tuto implikaci ukážeme obměnou. Předpokládáme, že  $Q$  není reduktivní.  $Q$  podle věty 5 rozkládá na komponenty  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ . Jelikož  $Q$  není reduktivní, pak z 10 víme, že existuje komponenta  $Q_i$  taková, že  $|Q_i| > 1$ . Označme si  $Q_i$  jako  $W$ . Pak podle 12 platí, že  $\text{Col}_W(K) > 0$ . Jelikož  $W \preceq Q$ , tak podle lematu 8 platí, že  $\text{Col}_Q(K) \geq \text{Col}_W(K) > 0$ . A tedy není konstantní.

(2)  $\implies$  (1):

Jestliže  $Q$  je reduktivní, pak z věty 10 platí, že všechny komponenty jsou izomorfní  $T_1$ . Z věty 6 plyne, že  $\text{Col}_Q(K) = 0$ , a tudíž  $\text{Col}_Q(K)$  je konstantní pro všechny uzly  $K$ .

□

### 3. Quandlové barvení jako Vassilievův invariant

V této kapitole ukážu další charakterizaci reduktivních quandlů a to pomocí Vassilievových invariantů. Nejprve je ovšem uvést několik základních výsledků z teorie copánkových grup, které následně budou aplikovány v příslušném důkazu.

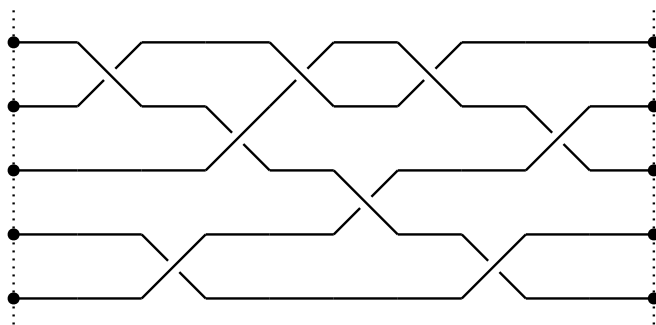
#### 3.1 Copánkový index

Copánkovou grupu jako první zavedl Emil Artin v roce 1925. Copánky se skládají z  $n$  pramenů, které jsou upevněny k horní a dolní desce a mohou se mezi sebou křížit ve smyslu Reidemeistrových pohybů 2 a 3. My si zavedeme copánkovou grupu pomocí prezentace.

**Definice 16.** Buď zadané číslo  $n$ . Pak  $B_n$  značí grupu danou prezentací  $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle$ , kde v první sadě relací  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  a ve druhé  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}; |i - j| \geq 2$ .

První relace je ekvivalentem Reidemeistrova pohybu 3 a druhá relace říká, že pokud jsou příslušné prameny disjunktní, tak se mohou prohazovat.

Skládání  $a \cdot b$  funguje geometricky tak, že se vezme spodní deska z  $a$  a přilepí se k horní desce  $b$  tak, aby na sebe navazovaly příslušné prameny, a pak se prostřední deska odstraní. Jednotkový prvek je copánek bez křížení. Inverzní prvek je symetrické překlopení copánku. Vlastně tak odpovídá Reidemeistrovu pohybu 2.



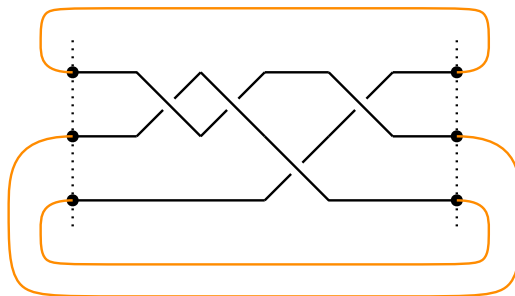
Obrázek 3.1: Příklad copánku

Pokud vezmeme nějaký copánek  $b \in B_n$ , pak můžeme udělat tzv. *uzávěr*, kdy dojde ke slepení horní a spodní desky tak, že se přilepí k sobě protilehlé prameny. Tímto obecně dostaneme link. Budeme ho značit  $K_b$ .

Jedna z nejznámějších vět z teorie uzlů je Alexanderova věta, která říká, že každý uzel lze získat jako závěr nějakého copánku.

**Tvrzení 14** (Alexanderova věta). *Pro každý uzel  $K$  existuje číslo  $n \in \mathbb{N}$  a copánek  $b \in B_n$ , že  $K$  je ekvivalentní uzávěru  $K_b$ .*

Předchozí větu lze použít k definici nového invariantu, a to copánkového indexu. Tento index nám říká, kolik pramenů potřebujeme, abychom mohli dostat daný uzel jako závěr copánku s daným počtem pramenů.



Obrázek 3.2: Lepení copánku

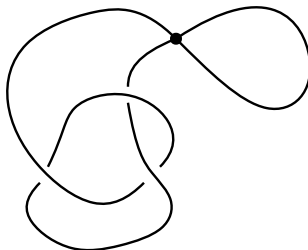
**Definice 17.** Pro daný uzel  $K$  rozumíme *copánkovým indexem*  $br(K)$  (anglicky *braid index*) nejmenší číslo  $n$  takové, že existuje  $b \in B_n$  tak, aby  $K$  byl ekvivalentní uzávěru  $K_b$ .

*Pozorování.* Copánkové číslo  $br(K)$  je invariant.

## 3.2 Vassilievovy invarianty

Myšlenka Vassilievových invariantů stojí na zobecnění uzlů na tzv. singulární uzly. Tyto uzly se vyznačují tím, že dovoluujeme křivce, aby se protínala samu sebe. V této kapitole vycházíme z knížky (Chmutov a kol., 2011).

**Definice 18.** *Singulárním bodem* rozumíme bod, kde se křivka protíná sama sebe právě 2 částmi křivky. *Singulárním uzlem*  $K^\bullet$  rozumíme uzel, který obsahuje alespoň jeden singulární bod.

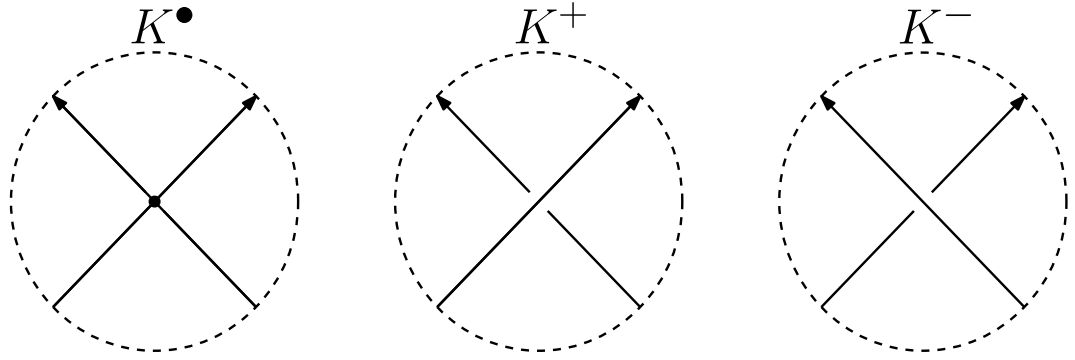


Obrázek 3.3: Singulární uzel s 1 singulárním bodem

Vassilievové invarianty se zavádí pomocí skein relace. Myšlenka je založena na tom, že invariant pro klasické uzly můžeme rozšířit na třídu singulárních uzlů. Dělá se to pomocí skein relace, kdy si zafixujeme singulární bod pro  $K^\bullet$  a lokálně ho nahradíme kladným ( $K^+$ ), resp. negativním ( $K^-$ ) křížením. Následně získáme hodnotu invariantu  $v$  pro  $K^\bullet$  pomocí hodnot invariantů pro  $K^+$  a  $K^-$ :

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-).$$

Tato hodnota je jednoznačně určená, tudíž nám to dává způsob, jak definovat invariant pro singulární uzly. Pokud má uzel  $K^\bullet$  singulární bodů více, tak se postupujeme induktivně, očíslovujeme jednotlivé singulární body a dostaneme tak *úplnou rezoluci*:



Obrázek 3.4: Vassilievova skein relace

$$v(K^\bullet) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{+, -\}} (-1)^{|\varepsilon|} v(K^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}),$$

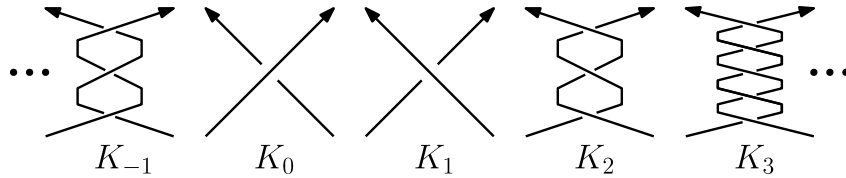
kde  $|\varepsilon|$  značí počet záporných znamének v  $n$ -tici  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  a  $K^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}$  značí uzly, které vzniknou nahrazením singulárních bodů křížením s orientací podle příslušného znaménka.

Myšlenka Vassilievových invariantů je, že tento vztah můžeme obrátit a říct, že definujeme invariant  $v$  tak, aby od určitého počtu singulárních bodů byl nulový.

**Definice 19.** Invariant  $v$  se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně  $\leq m$ , pokud platí, že pro každý singulární uzel  $K^\bullet$  s počtem protnutí  $> m$  platí  $v(K^\bullet) = 0$ . Řekneme, že je stupně  $m$ , pokud je stupně  $\leq m$ , ale není stupně  $\leq m - 1$ .

Spousta známých invariantů jsou Vassilievovy invarianty, nebo se dají na něj převést. Ovšem existují příklady invariantů, které nejsou Vassilievovy. Mezi ně, jak si ukážeme, nepatří třeba copánkový index. Důkaz provedeme pomocí sekvence tzv. *twistů* zmíněných v článcích (Trapp, 1994) a (Dean, 1994).

**Definice 20.** Buď  $K$  uzel, pro který zafixujeme jedno křížení, a  $z \in \mathbb{Z}$ . Pak *twist*  $K_z$  je uzel, který vznikne z  $K$  tak, že lokálně nahradíme zafixované křížení křížením s  $z$  závitů jako na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Twist uzlu

**Tvrzení 15** (Trapp, 1994). *Buď  $\{K_z : z \in \mathbb{Z}\}$  posloupnost twistů. Pokud je invariant  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$  Vassilievův stupně nejvýše  $m$ , tak platí, že  $v(K_z)$  tvoří polynom v  $z$  stupně nejvýše  $m$ .*

Nyní využijeme pár lemmat z článku (Eisermann, 1999), které nám pomohou ukázat, že copánkový index není Vassilievův invariant.

**Důsledek 16.** *Pokud je invariant  $v$  omezený na posloupnost twistů, tak je konstantní.*

*Důkaz.* Mějme invariant  $v$  Vassilievova stupně nejvýše  $m$ . Podle věty 15 platí, že  $v(K_z)$  tvoří polynom v  $z$  stupně nejvýše  $m$ . Jelikož je  $v$  také omezený, tak to znamená, že tento polynom je konstantní. Dále, jelikož je součástí posloupnosti twistů uzly  $K_0 = K$  i  $K_1$ , kde dochází ke změně orientace křížení, tak  $v(K) = v(K_0) = v(K_1) = v(K)$ . Jelikož jsme schopni změnou orientace křížení dostat unknot, tak  $v$  musí být nutně konstantní. □

**Lemma 17.** *Copánkové číslo  $br(K)$  je omezené na posloupnost twistů.*

*Důkaz.* Mějme uzel  $K$  a jeho copánkový index  $br(K)$ . Pak si vezmeme z věty 14 copánek  $b \in B_{br(K)}$  tak, že  $K$  je ekvivalentní uzávěru  $K_b$ . Nyní si zafixujeme jedno křížení a budeme provádět twisty. Twisty shora pak tedy dávají horní mez na copánkové číslo  $K_z$ . Zároveň platí, že  $br(K) > 0$ . Tedy  $br(K)$  je omezené na posloupnost twistů. □

**Tvrzení 18** (Eisermann, 1999). *Buď  $br(K)$  copánkový index uzlu  $K$ . Pak pokud invariant  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$  splňuje, že  $|v(K)| \leq f(br(K))$  pro nějakou funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a pro všechny uzly  $K \in \mathcal{K}$ , pak  $v$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

*Důkaz.* Jelikož je copánkový index omezený na posloupnost twistů dle lemmatu 17 a zároveň dokážeme omezit hodnotu invariantu pomocí funkce  $f$ , tak podle věty 16 je invariant  $v$  konstantní, nebo není Vassilievův invariant. □

### 3.3 Charakterizace Vassilievových barvení uzlů

Nyní využijeme znalosti z předchozí podkapitoly o copánkovém indexu. Zatímco v článku (Eisermann, 1999) se autor zabývá grupovými homomorfismy, my jeho výsledek zobecníme na quandleové barvení. Abychom ukázali, že se jedná o obecnější výsledek, tak si všimněme, že Foxovo barvení nelze dostat jako  $\text{Conj}(G)$  pro nějakou grupu  $G$ . Pokud ano, tak by grupa  $G$  byla velikosti 3, jenže jediná grupa velikosti 3 je cyklická grupa  $\mathbb{Z}_3$ , která je abelovská. Jenže  $\text{Conj}(\mathbb{Z}_3)$  je triviální quandle  $T_{\mathbb{Z}_3}$ , což není Foxovo barvení. Tedy jsme získali silnější výsledek, než který je v původním článku.

**Věta 19.** *Pro každý quandle  $Q$  platí, že počet obarvení  $\text{Col}_Q(K)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

*Důkaz.* Mějme fixně zadaný quandle  $Q$ . Uvažujme libovolný uzel  $K$  a copánek  $b \in B_{br(K)}$ , kde  $K_b \cong K$ . Pak platí, že máme-li konkrétní obarvení  $f \in \text{Hom}(Q_K, Q)$ , tak je jednoznačně určeno obarvením konců provázků v copánkové reprezentaci. Tedy platí, že  $\text{Col}_Q(K)$  dokážeme omezit tak, že každému konci přiřadíme nějaký prvek z  $Q$ . Tedy

$$|\text{Col}_Q(K)| \leq |Q|^{br(K)}.$$



Použitím věty 18 dostáváme, že  $\text{Col}_Q(K)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. □

Z toho už nám plyne důkaz ekvivalence druhého a třetího tvrzení z věty 1.

**Důsledek 20.** *Mějme quandle  $Q$ . Pak platí, že je Vassilievův invariant, právě tehdy když je redukativní.*

*Důkaz.* Z věty 13 plyne, že  $\text{Col}_Q(K)$  je konstantní, právě tehdy když  $Q$  je redukativní. Z věty 19 plyne, že  $\text{Col}_Q(K)$  je Vassilievův invariant, právě tehdy když je konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní. □

### 3.4 Charakterizace Vassilievových barvení linků

Obdobnou charakterizaci můžeme získat i pro linky. Ovšem, v tomto případě bude vše jednodušší. Ukáže se totiž, že aby bylo  $\text{Col}_Q(L)$  Vassilievův invariant, tak musí být  $Q$  triviální quandle. Nejprve je ovšem třeba dodefinovat  $\text{Col}_Q(L)$  pro linky. Zatímco u uzlů jsme odebírali pouze  $|Q|$  triviálních obarvení, tak u linků musíme zahrnout existenci více komponent. Jako obdobu unknotu budeme brát  $m$ -link jako na obrázku 2.2.

**Definice 21.** Buď  $Q$  quandle a  $L$  link. Definujeme  $\text{Col}_Q(L) = |\text{Hom}((\cdot)_L, Q)| - |Q|^{c(L)}$ , kde  $c(L)$  značí počet komponent linku  $L$ .

**Věta 21.** *Uvažujme quandle  $Q$  a link  $L$  s alespoň 2 komponentami. Pak platí, že  $\text{Col}_Q(L)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. Navíc  $\text{Col}_Q(L)$  je konstantní, právě tehdy když  $Q$  je triviální quandle.*

*Důkaz.* První část je jen variací věty 19, kde místo uzlu uvažujeme link.

Dále, pokud je  $Q$  triviální quandle, tak jak platí, že  $\text{Col}_Q(L) = 0$  pro všechny linky  $L$ . Tedy  $\text{Col}_Q(L)$  je konstantní.

Naopak Uvažujme quandle  $Q$ , který není triviální. Pak jako  $L$  označíme 2-link a jako  $H$  hopf link.

Pro  $L$  platí, že  $\text{Col}_Q(L) = 0$  pro všechny quandly  $Q$ .

Jelikož  $Q$  není triviální, tak existuje dvojice prvků  $a, b \in Q$  taková, že  $a \neq b$  a  $a * b \neq b$ . Pokud obarvíme  $H$  tak, že první komponentu obarvíme prvkem  $a$  a druhou komponentu obarvíme prvkem  $b$ , tak ze vztahu výše plyne, že  $H$  nejde touto dvojicí prvků obarvit. Tedy  $\text{Col}_Q(L) < 0$  a  $\text{Col}_Q(L)$  není konstantní. □

# Seznam použité literatury

- BONATTO, M., CRANS, A., NASYBULLOV, T. a WHITNEY, G. (2021). Quandles with orbit series conditions. *Journal of Algebra*, **567**, 284–309. ISSN 0021-8693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.09.026>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869320304932>.
- BONATTO, M. a STANOVSKÝ, D. (2021). A universal algebraic approach to rack coverings.
- BONATTO, M., CRANS, A. S. a WHITNEY, G. (2019). On the structure of hom quandles. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **223**(11), 5017–5029. ISSN 0022-4049. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.03.006>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404919300696>.
- CHMUTOV, S., DUZHIN, S. a MOSTOVOY, J. (2011). *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press.
- DEAN, J. (1994). Many classical knot invariants are not Vassiliev invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, **3**(1), 7–10. ISSN 0218-2165, 1793-6527. doi: [10.1142/S0218216594000034](https://doi.org/10.1142/S0218216594000034). URL <https://doi.org/10.1142/S0218216594000034>.
- EHRMAN, G., GURPINAR, A., THIBAUT, M. a YETTER, D. (2006). Toward a classification of finite quandles. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **17**. doi: [10.1142/S0218216508006270](https://doi.org/10.1142/S0218216508006270).
- EISERMANN, M. (1999). The number of knot group representations is not a vassiliev invariant. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16945432>.
- JEDLIČKA, P., PILITOWSKA, A. a ZAMOJSKA-DZIENIO, A. (2020). Distributive biracks and solutions of the yang–baxter equation. *International Journal of Algebra and Computation*, **30**(03), 667–683. ISSN 1793-6500. doi: [10.1142/S0218196720500150](https://doi.org/10.1142/S0218196720500150). URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218196720500150>.
- JEŽEK, J. (2008). *Universal Algebra*. URL <https://ka.karlin.mff.cuni.cz/jezek/ua.pdf>.
- JOHNSON, D. (1980). Homomorphs of knot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **78**(1), 135–138. ISSN 00029939, 10886826. URL <http://www.jstor.org/stable/2043056>.
- JOYCE, D. (1982). A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23**, 37–65. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120011159>.
- MURASUGI, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: [10.1007/978-0-8176-4719-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2). URL [https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2).

TRAPP, R. (1994). Twist sequences and Vassiliev invariants. volume 3, pages 391–405. doi: 10.1142/S0218216594000289. URL <https://doi.org/10.1142/S0218216594000289>. Random knotting and linking (Vancouver, BC, 1993).