MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Chwiedziuk

Barvicí invarianty uzlů

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.
Studijní program: Matematika pro informační technologie
Studijní obor: Matematika pro informační technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

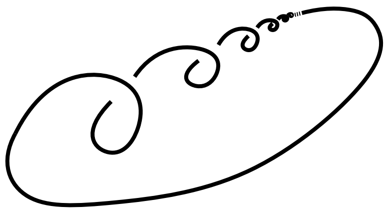
Obsah

Úvod

Tady bude historie teorie uzlů.
Tady bude nastíněn problém určování ekvivalence uzlů.
Tady bude řečeno, o co se v mé práci snažím.

1. Základní pojmy

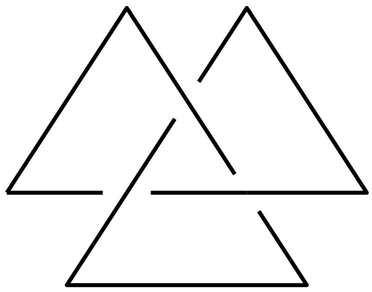
Intuitivně je poměrně jasné, co by uzel měl být. Tedy vnoření uzavřené křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.



Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmto uzlům vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek polygonální křivky. Takovýmto uzlům se pak říká *krotké uzly* (v angličtině *tame knots*).

Definice 1. *Uzlem* rozumíme lomenou uzavřenou jednoduchou křivku K vnořenou do prostoru $\mathbb{R}^3$. Množinu všech takových uzlů značíme $\mathcal{K}$.



Obrázek 1.2: Trojlístek

Nyní bychom na těchto křivkách zavedli, co znamená, že jsou uzly ekvivalentní. Intuitivně, jeden dokážeme "přemotat" v druhý. Formálně budeme působit konečnou posloupností deformací působících na jeden z nich, abychom dostali ten druhý.

Pro uzel K definujme *základní pohyby* následovně:

1) Mějme hranu křivky K danou vrcholy A a B. Pak můžeme umístit vrchol C na hranu AB. Inverzně můžeme tento vrchol C smazat.

2) Mějme hranu AB v K a nějaký vrchol C ležící mimo K. Pak pokud $ABC \cap K = AB$, pak můžeme hranu AB nahradit hranami AC a CB. Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit AC a CB za AB.

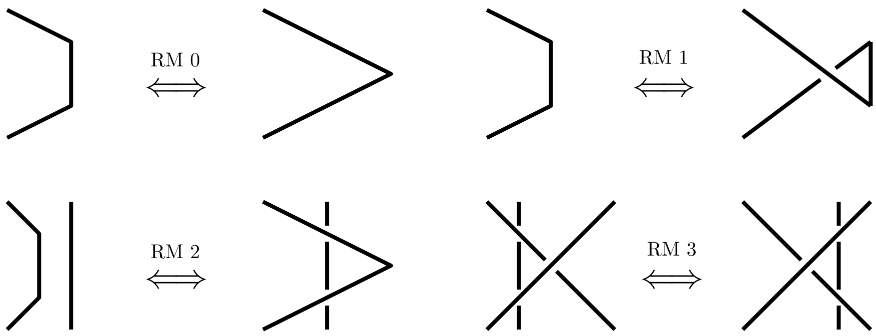
Pokud máme uzly K a K' takové, že existuje konečná posloupnost základních pohybů transformující jeden v druhý, pak říkáme, že jsou K a K' *ekvivalentní.* Značíme $K \cong K'$.

Abychom se nám s uzly lépe pracovalo, zavedeme projekci uzlu do roviny.

Pro uzel K definujeme *diagram* D_K, který je projekcí K do $\mathbb{R}^2$ takovou, že je prostá až na konečně mnoho bodů, nazýváme je *křížení*, pro které ovšem platí, že jsou obrazem právě dvou bodů z K a ty nejsou pouze body dotyku, ale křížení v intuitivním smyslu. Křížení jsou znázorněna tak, že spodní část křivky je v místě křížení přerušená. Množinu všech příslušných diagramů uzlu rozumíme $D(K)$. Obloukem rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu oblouků daného diagramu D_K budeme značit $O(D_K)$. Množinu všech křížení, reprezentovanou uspořádanou trojicí příslušných oblouků, budeme značit $C(D_K)$.

Diagram není určen jednoznačně ani pro konkrétní uzel K, natož pro jeho ekvivalenty. Avšak lze zavést obdobu základních pohybů pro diagramy.

Mějme uzel K a jeho diagram D_K. Pak pro ně definujeme Reidemeisterovy pohyby vyjádřené obrázkem 1.3:



Obrázek 1.3: Reidemeisterovy pohyby

Fakt 1. *Uzly K_1 a K_2 jsou ekvivalentní, právě tehdy když jsou jejich diagramy D_1 a D_2 ekvivalentní pomocí Reidemeisterových pohybů.*

Klasická výpočetní otázka zní, jestliže dostaneme dva zadané libovolné uzly, dokážeme o nich říct, zda jsou ekvivalentní? Metodou, jak ukázat, že uzly nejsou ekvivalentní, je pomocí invariantů.

Definice 2. Mějme množinu všech uzlů $\mathcal{K}$ a libovolnou množinu A. Pak *invariantem* rozumíme takové zobrazení $I : \mathcal{K} \to A$, že pokud $K_1 \cong K_2$, pak $I(K_1) = I(K_2)$ pro všechny takové uzly $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$.

Z faktu 1 plyne, že nám stačí ověřit, zda se invariant zachovává na Reidemeistrovy pohyby.

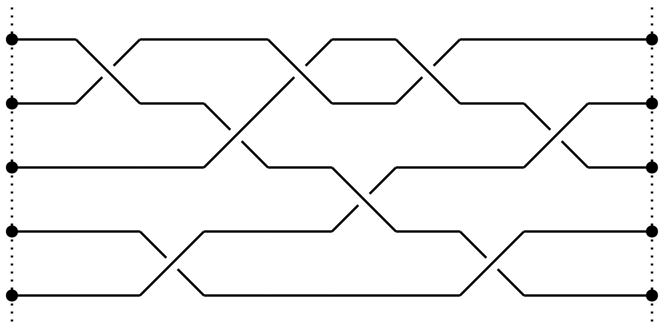
Nyní si uvedeme několik příkladů invariantů, které budeme využívat v následujících kapitolách.

1.1 Copánky

Jedním z užitečných pohledů na uzly je přes takzvané copánky. Něco o historii.

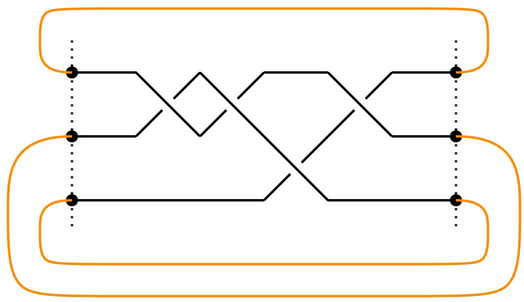
Definice 3. Buď zadané číslo n. Pak B_n značí grupu danou prezentací $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \rangle$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}; |i-j| \geq 2$.

Copánky si můžeme představit jako n šňůrek natažených mezi dvěma deskami, přičemž pro ně platí Reidemeisterovy pohyby 2 a 3. Skládání $a \cdot b$ funguje tak, že se vezme spodní deska z a a přilepí se k horní desce b tak, aby na sebe navazovaly provázky, a pak se ty desky odstraní, aby byly opět jenom horní a dolní. Prvky b tedy budeme ztotožňovat s příslušnou geometrickou konstrukcí.



Obrázek 1.4: Příklad copánku

Mějme copánkovou grupu B_n . Pak *uzávěrem* $b \in B_n$ rozumíme uzel K_b takový, který vznikne z b tak, že konce šňůrek přilepíme k sobě tak, že i-tá šňůrka zhora se přilepí k i-té šňůrce zdola. Tímto způsobem nevznikne vždy uzel podle naší definice, ale obecně vznikne něco, co se nazývá v angličtině *link*, tedy vnoření několika uzlů do stejného prostoru.



Obrázek 1.5: Lepení copánku

Věta 2 (Alexanderova věta)**.** *Pro každý uzel K existuje takový copánek $b \in B_n$ pro nějaké n takový, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.*

Definice 4. Pro daný uzel K rozumíme *copánkovým indexem* $s(K)$ (anglicky *braid index*) nejmenší číslo n takové, že existuje $b \in B_n$ tak, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.

Pozorování. Copánkové číslo $s(K)$ je invariant.

1.2 Quandly

Mezi další invarianty může patřit počet barvení uzlu algebraickou strukturou Q pomocí pravidel odvozených ze zachovávání Reidemeisterových pohybů.

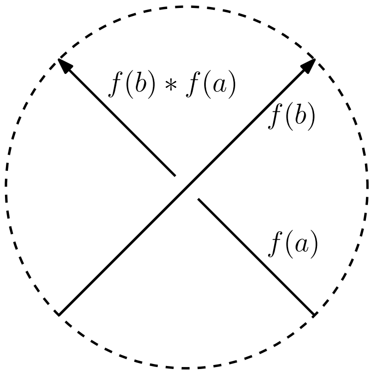
Definice 5. *Quandlem* $Q = (C, *)$ rozumíme algebraickou strukturu nad (konečnou) množinou A s binární operací $*$, splňující následující podmínky pro všechna $a, b, c \in C$:

1) $a * a = a$ (idempotence);

2) Existuje právě jedno $x \in C$ splňující $a * x = b$;(jednoznačné levé dělení), budeme značit $x = a *^{-1} b$;

3) $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ (levá samodistributivita).

Barvení uzlu K funguje následujícím způsobem. Nejprve si zvolíme orientaci křivky K. Pak každému oblouku a diagramu D_K přiřadíme nějaký prvek $f(a) \in C$ tak, že když procházíme uzel v námi zvoleném směru, tak pokaždé, když narazíme na konec oblouku a, tak hodnota navazujícího oblouku c je rovna $f(c) = f(b) * f(a)$, kde b je most v daném křížení. Příslušnou funkci f nazýváme *obarvením* uzlu K quandlem Q. Velikost množiny všech takových obarvení pak značíme $\mathrm{Col}_Q(K)$ a jedná se o invariant.



Obrázek 1.6: Barvení pomocí quandlu

Nejlepším invariantem by bylo zadefinovat nějakou ternární relaci na množině oblouků $O(D_K)$ svázaných pomocí množiny křížení $C(D_K)$, ovšem z podmínek daných Reidemeisterovými pohyby plyne, že taková relace je právě quandlem.

Nyní si vybudujeme terminologii tak, abychom mohli výše popsané barvení formálně popsat pomocí algebraické terminologie.

Definice 6. Mějme quandly Q a W. Pak *homomorfismem* $\varphi : Q \to W$ rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in Q$.

Definice 7. *Volným quandlem* Q_X nad neprázdnou množinou X rozumíme quandle takový, že pokud máme zobrazení $f : X \to Q$, kde Q je libovolný quandle, tak existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : Q_X \to Q$ takové, že $\varphi(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$.

Definice 8. Mějme K uzel, D_K jeho diagram, pak *fundamentálním quandlem* Q_K rozumíme volný quandle nad množinou oblouků $O(D_K)$ modulo relace dané kříženími $C(D_K)$ takové, že pro každé křížení $(a, b, c) \in C(D_K)$ platí $a * b = c$.

Tvrzení 3. *Fundamentální quandl* Q_K *je úplným invariantem.*

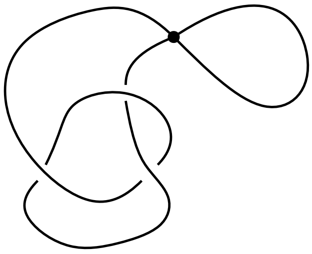
Definice 9. Mějme uzel K, jeho fundamentální quandle Q_K a libovolný quandle W. Pak *počtem obarvení* $\mathrm{Col}_W(K)$ rozumíme počet homomorfismů $\varphi : Q_K \to W$. Tedy $\mathrm{Col}_W(K) = |\mathrm{Hom}(Q_K, W)|$.

Pozorování. Počet obarvení $\mathrm{Col}_W(K)$ je invariant.

1.3 Invarianty konečného typu

Něco o Vassilievových invariantech. Tato kapitola je jen nástřel.

Definice 10. *Singulárním* uzlem $K^\bullet$ s n protnutími rozumíme uzel takový, že sám sebe protíná v n bodech právě dvěma úseky.



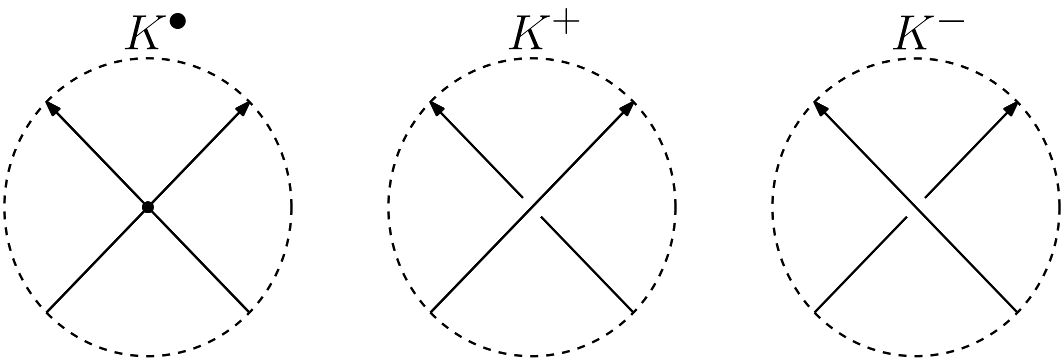
Obrázek 1.7: Singulární uzel s 1 křížením

Definice 11. Mějme singulární uzel $K^\bullet$ s $n \geq 1$ a invariant v, zvolíme si nějaké protnutí. Pak pro dané protnutí *Vassilievovou skein relací* nazýváme rovnici:

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-)$$

,

kde $K^\bullet$, K^+ a K^- odpovídají obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Vassilievova skein relace

Definice 12. Invariant v se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně $\leq m$, pokud platí, že pro každý singulární uzel $K^\bullet$ s počtem protnutí $> m$ platí $v(K^\bullet) = 0$. Řekneme, že je stupně m, pokud je stupně $\leq m$, ale není stupně $\leq m - 1$.

Tvrzení 4. *Vzorec pro Vassilievův invariant.*

2. Barvení jako Vassilievův invariant

2.1 Velikost barvení

Věta 5 (Eisermannova věta)**.** *Buď $s(K)$ copánkový index uzlu K. Pak pokud invariant $v : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ splňuje, že $|v(K)| \leq f(s(K))$ pro nějakou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a pro všechny uzly $K \in \mathcal{K}$, pak v není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Věta 6. *Pro každý quandle Q platí, že počet obarvení $Col_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Důkaz. Mějme fixně zadaný quandle Q a pro něj uvažujme libovolný uzel K a jeho minimální copánkovou reprezentaci odpovídající copánkovému indexu $s(K)$. Pak platí, že máme-li konkrétní obarvení $f \in \mathrm{Hom}(Q_K, Q)$, tak je jednoznačně určeno obarvením konců provázků v copánkové reprezentaci. Tedy platí, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ dokážeme omezit tak, že každému konci přiřadíme nějaký prvek z Q. Tedy

$$\mathrm{Col}_Q(K) \leq |Q|^{s(K)}.$$

Použitím věty 5 dostáváme, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.

□

2.2 Triviální barvení

Definice 13. Mějme quandle Q. Pokud platí, že je působení $\mathrm{Inn}(Q)$ na Q tranzitivní, pak říkáme, že Q je souvislý quandle.

Tvrzení 7. *Mějme uzel K a jeho fundamentální quandle Q_K. Pak platí, že Q_K je souvislý quandle.*

Lemma 8. *Mějme quandle Q a grupu vnitřních automorfismů $Inn(Q)$. Pak platí, že působení $Inn(Q)$ na Q rozkládá Q na orbity a každá orbita je maximální souvislý podquandle.*

Definice 14. Mějme quandle Q. Pokud platí, že pro všechny orbity působení $\mathrm{Inn}(Q)$ na Q platí, že jejich velikost je rovná 1, pak říkáme, že Q je totálně nesouvislý quandle.

Lemma 9. *Uvažujme quandly Q a W, na Q rozklad na orbity $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ působením $Inn(Q)$ na Q a homomorfismus $\varphi : Q \to W$. Pak platí, že homomorfním obrazem orbity Q_i je souvislý podquandle $\varphi(Q_i) = W_i \preccurlyeq W$.*

Speciálně, pokud je Q souvislý quandle, tak jeho homomorfním obrazem je také souvislý quandle.

Lemma 10. *Mějme quandle Q, který není souvislý, a uzel K. Pak platí, že*

$$Col_Q(K) = \sum_{i=1}^{n} |Col_{Q_i}(K)|,$$

kde Q_i jsou orbity působení $Inn(Q)$ na Q.

Lemma 11. *Mějme konečný quandle Q. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) *Q je souvislý;*

2) *pro každé dva prvky $a, b \in Q$ platí, že existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že*

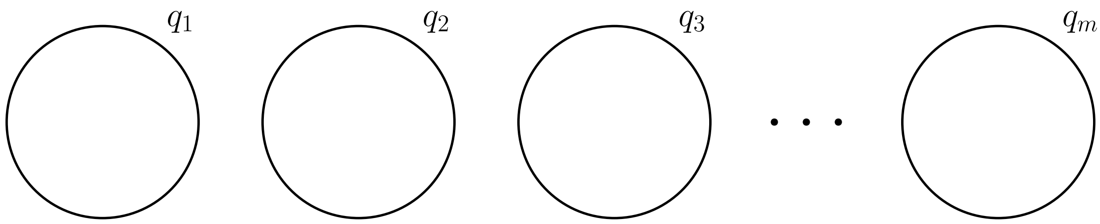
$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

kde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Věta 12. *Pro každý souvislý quandle Q, $|Q| > 1$ existuje takový uzel K, že $Col_Q(K) > |Q|$.*

Důkaz. Pro důkaz této věty použijeme konstrukci, která se poprvé objevila v článku (TODO citace).

Nejprve uvažujme orientovaný m-link, $m = |Q|$, takový, že každou komponentu obarvíme jiným prvkem z Q. Následně budeme postupně propojovat pomocí pásků tak dlouho, dokud nám nevznikne uzel. Na konci dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení, jelikož každá komponenta bude obarvena jiným prvkem z Q. Pak bude platit, že $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$.



Obrázek 2.1: m-link

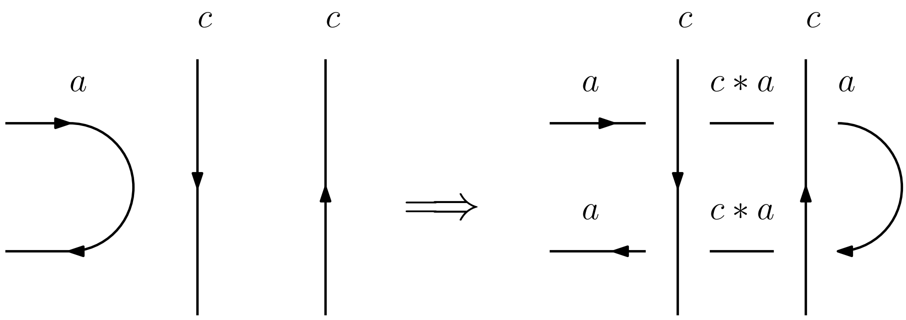
Mějme zadaný souvislý quandle Q. Jelikož je Q souvislý, pak podle lemmatu 11 existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\cdots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

pro každé dva prvky $a, b \in Q$.

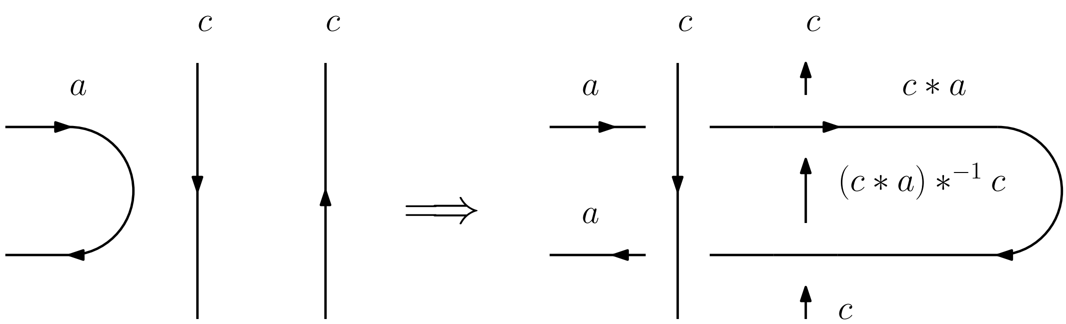
Začněme s komponentou obarvenou prvkem a. Z ní povedeme pásek. Pokud pásek bude křižovat s nějakou jinou komponentou, tak budeme postupovat podle jedné z následujících situací:

1) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c \neq x_1$ pak pásek povedeme pod celou komponentou. Dojde tedy k situaci na obrázku 2.2. Tedy pásek povedeme pod celou komponentou, aniž bychom změnili obarvení konec pásku.



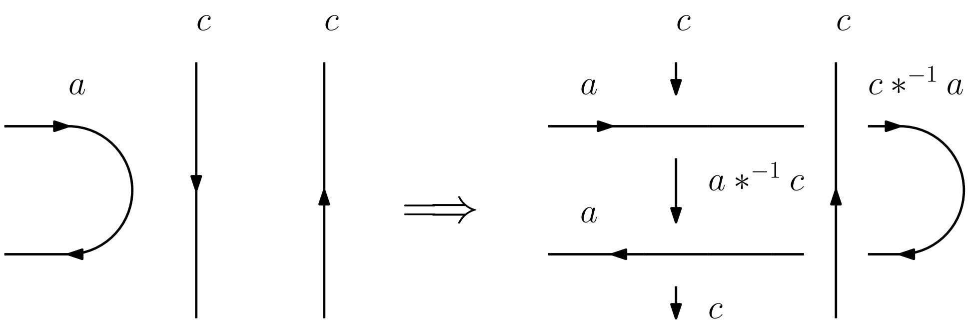
Obrázek 2.2: Pásek pod komponentou

2) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = 1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 2.3. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 * a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.



Obrázek 2.3: $x_1 * a$

3) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = -1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 2.4. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 *^{-1} a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.



Obrázek 2.4: $x_1 *^{-1} a$

Tento způsob budeme opakovat pro konec pásku tak dlouho, dokud konec pásku nebude obarvený prvkem b. Jelikož je posloupnost $x_1, x_2, \ldots x_n$ konečná, tak k němu opravdu dojdeme. Následně pásek připojíme na komponentu obarvenou prvkem b.

Počet komponent je konečný a jednou iterací algoritmu jsme snížili počet komponent o jedna. Algoritmus budeme tedy opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel. Takový uzel nazývá *stuhový uzel* (anglicky *ribbon knot*). Jelikož jsme každou komponentu $|Q|$-linku obarvili jiným prvkem z Q a algoritmus toto obarvení zachovává, dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení. Tedy $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$.

□

Věta 13. *Mějme konečný quandle Q. Pak platí, že $Col_Q(K)$ není Vassilievův invariant, právě tehdy když existuje souvislý podquandle $W \preccurlyeq Q$ takový, že $|W| > 1$ a W odpovídá nějaké orbitě působení $Inn(Q)$ na Q.*

Důkaz. Pokud je Q souvislý, pak podle věty 12 zkonstruujeme příslušný stuhový uzel K tak, že bude mít netriviální obarvení $\mathrm{Col}_Q(K) > |Q|$. Tedy není konstatní a dle věty 6 není Vassilievův invariant.

Naopak pokud Q není souvislý, pak se Q rozpadá na orbity pod působením $\mathrm{Inn}(Q)$. Podle lemmatu 8 platí, že každá orbita je maximální souvislý podquandle. My si zvolíme takový podquandle W, že $|W| > 1$. Pak podle 12 platí, že $\mathrm{Col}_W(K) > |W|$. Jelikož $W \preccurlyeq Q$, tak podle lemmatu 10 platí, že $\mathrm{Col}_Q(K) \geq \mathrm{Col}_W(K) - |W| + |Q| > |Q|$. Tedy z 6 plyne, že $\mathrm{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant.

Naopak, pokud platí, že Q je totálně nesouvislý, pak podle lemmatu 9 platí, že jedinými homomorfismy z Q_K do Q jsou takové, že jejich obraz je triviální. Tedy platí, že $\mathrm{Col}_Q(K) = |Q|$, a tudíž $\mathrm{Col}_Q(K)$ je konstantní pro všechny uzly K.

□

Důsledek. Mějme grupu G. Pak platí, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) G je nilpotentní;

2) quandle $\mathrm{Conj}(G)$ je totálně nesouvislý.

Závěr

Toto je závěr mé práce.

Seznam použité literatury

MURASUGI, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: 10.1007/978-0-8176-4719-3_2. URL `https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2`.