MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Chwiedziuk

Barvicí invarianty uzlů

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.
Studijní program: Matematika pro informační technologie
Studijní obor: Matematika pro informační technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod

Tady bude historie teorie uzlů.
Tady bude nastíněn problém určování ekvivalence uzlů.
Tady bude řečeno, o co se v mé práci snažím.

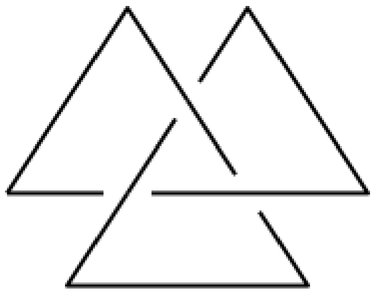
1. Základní pojmy

Intuitivně je poměrně jasné, co by uzel měl být. Tedy vnoření uzavřené křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.

Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmto uzlům vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek polygonální křivky. Takovýmto uzlům se pak říká *krotké uzly* (v angličtině *tame knots*).

Definice 1. *Uzlem* rozumíme lomenou uzavřenou jednoduchou křivku K vnořenou do prostoru $\mathbb{R}^3$. Množinu všech takových uzlů značíme $\mathbb{K}$.



Obrázek 1.2: Trojlístek

Nyní bychom na těchto křivkách zavedli, co znamená, že jsou uzly ekvivalentní. Intuitivně, jeden dokážeme "přemotat" v druhý. Formálně budeme působit konečnou posloupností deformací působících na jeden z nich, abychom dostali ten druhý.

Pro uzel K definujme *základní pohyby* následovně:

1) Mějme hranu křivky K danou vrcholy A a B. Pak můžeme umístit vrchol C na hranu AB. Inverzně můžeme tento vrchol C smazat.

2) Mějme hranu AB v K a nějaký vrchol C ležící mimo K. Pak pokud $ABC \cap K = AB$, pak můžeme hranu AB nahradit hranami AC a CB. Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit AC a CB za AB.

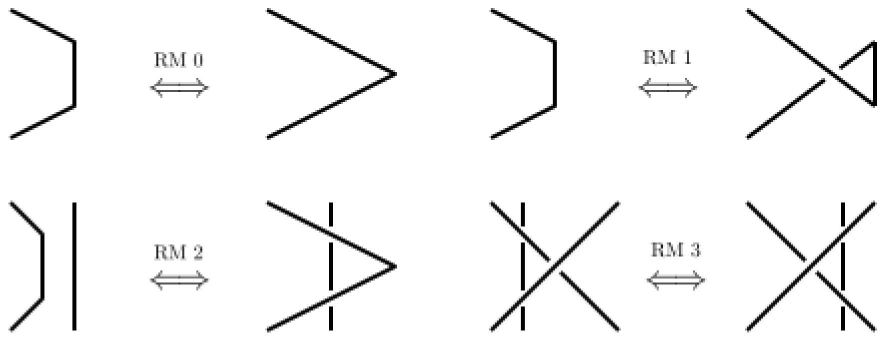
Pokud máme uzly K a K' takové, že existuje konečná posloupnost základních pohybů transformující jeden v druhý, pak říkáme, že jsou K a K' *ekvivalentní*. Značíme $K \cong K'$.

Abychom se nám s uzly lépe pracovalo, zavedeme projekci uzlu do roviny.

Pro uzel K definujeme *diagram* D_K, který je projekcí K do $\mathbb{R}^2$ takovou, že je prostá až na konečně mnoho bodů, nazýváme je *křížení*, pro které ovšem platí, že jsou obrazem právě dvou bodů z K a ty nejsou pouze body dotyku, ale křížení v intuitivním smyslu. Křížení jsou znázorněna tak, že spodní část křivky je v místě křížení přerušená. Množinu všech příslušných diagramů uzlu rozumíme $D(K)$. Obloukem rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu oblouků daného diagramu D_K budeme značit $O(D_K)$. Množinu všech křížení, reprezentovanou uspořádanou trojicí příslušných oblouků, budeme značit $C(D_K)$.

Diagram není určen jednoznačně ani pro konkrétní uzel K, natož pro jeho ekvivalenty. Avšak lze zavést obdobu základních pohybů pro diagramy.

Mějme uzel K a jeho diagram D_K. Pak pro ně definujeme Reidemeisterovy pohyby vyjádřené obrázkem 1.3:



Obrázek 1.3: Reidemeisterovy pohyby

Fakt 1. *Uzly K_1 a K_2 jsou ekvivalentní, právě tehdy když jsou jejich diagramy D_1 a D_2 ekvivalentní pomocí Reidemeisterových pohybů.*

Klasická výpočetní otázka zní, jestliže dostaneme dva zadané libovolné uzly, dokážeme o nich říct, zda jsou ekvivalentní? Metodou, jak ukázat, že uzly nejsou ekvivalentní, je pomocí invariantů.

Definice 2. Mějme množinu všech uzlů $\mathbb{K}$ a libovolnou množinu A. Pak *invariantem* rozumíme takové zobrazení $I : \mathbb{K} \to A$, že pokud $K_1 \cong K_2$, pak $I(K_1) = I(K_2)$ pro všechny takové uzly $K_1, K_2 \in \mathbb{K}$.

Z faktu 1 plyne, že nám stačí ověřit, zda se invariant zachovává na Reidemeistrovy pohyby.

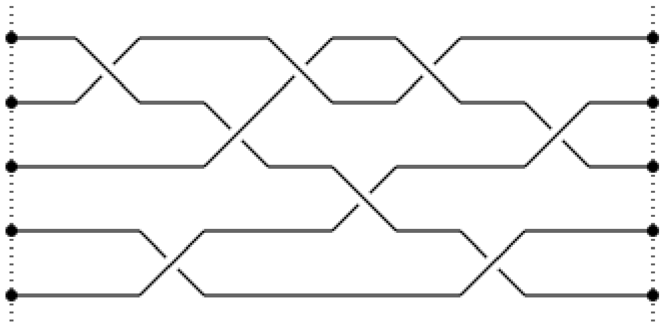
Nyní si uvedeme několik příkladů invariantů, které budeme využívat v následujících kapitolách.

1.1 Copánky

Jedním z užitečných pohledů na uzly je přes takzvané copánky. Něco o historii.

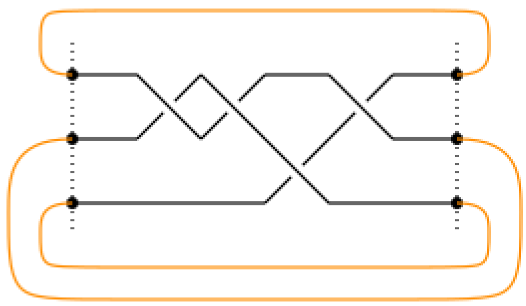
Definice 3. Buď zadané číslo n. Pak B_n značí grupu danou prezentací $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}; |i-j| \geq 2$.

Copánky si můžeme představit jako n šňůrek natažených mezi dvěma deskami, přičemž pro ně platí Reidemeisterovy pohyby 2 a 3. Skládání $a \cdot b$ funguje tak, že se vezme spodní deska z a a přilepí se k horní desce b tak, aby na sebe navazovaly provázky, a pak se ty desky odstraní, aby byly opět jenom horní a dolní. Prvky b tedy budeme ztotožňovat s příslušnou geometrickou konstrukcí.



Obrázek 1.4: Příklad copánku

Mějme copánkovou grupu B_n . Pak *uzávěrem* $b \in B_n$ rozumíme uzel K_b takový, který vznikne z b tak, že konce šňůrek přilepíme k sobě tak, že i-tá šňůrka zhora se přilepí k i-té šňůrce zdola. Tímto způsobem nevznikne vždy uzel podle naší definice, ale obecně vznikne něco, co se nazývá v angličtině *link*, tedy vnoření několika uzlů do stejného prostoru.



Obrázek 1.5: Lepení copánku

Věta 2 (Alexanderova věta)**.** *Pro každý uzel K existuje takový copánek $b \in B_n$ pro nějaké n takový, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.*

Definice 4. Pro daný uzel K rozumíme *copánkovým číslem* $s(K)$ (anglicky *braid index*) nejmenší číslo n takové, že existuje $b \in B_n$ tak, že K je ekvivalentní uzávěru K_b.

Pozorování. Copánkové číslo $s(K)$ je invariant.

1.2 Quandly

Mezi další invarianty může patřit počet barvení uzlu algebraickou strukturou Q pomocí pravidel odvozených ze zachovávání Reidemeisterových pohybů.

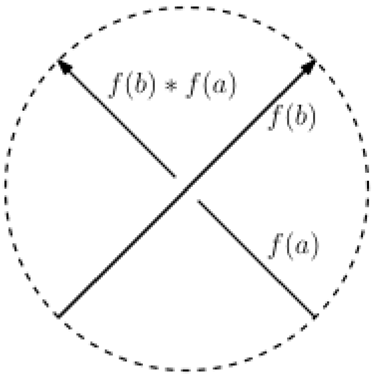
Definice 5. *Quandlem* $Q = (C, *)$ rozumíme algebraickou strukturu nad (konečnou) množinou A s binární operací $*$, splňující následující podmínky pro všechna $a, b, c \in C$:

1) $a * a = a$ (idempotence);

2) Existuje právě jedno $x \in C$ splňující $a * x = b$;(jednoznačné levé dělení), budeme značit $x = abackslashb$;

3) $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ (levá samodistributivita).

Barvení uzlu K funguje následujícím způsobem. Nejprve si zvolíme orientaci křivky K. Pak každému oblouku a diagramu D_K přiřadíme nějaký prvek $f(a) \in C$ tak, že když procházíme uzel v námi zvoleném směru, tak pokaždé, když narazíme na konec oblouku a, tak hodnota navazujícího oblouku c je rovna $f(c) = f(b) * f(a)$, kde b je most v daném křížení. Příslušnou funkci f nazýváme *obarvením* uzlu K quandlem Q. Velikost množiny všech takových obarvení pak značíme $\mathrm{Col}_Q(K)$ a jedná se o invariant.



Obrázek 1.6: Barvení pomocí quandlu

Nejlepším invariantem by bylo zadefinovat nějakou ternární relaci na množině oblouků $O(D_K)$ svázaných pomocí množiny křížení $C(D_K)$, ovšem z podmínek daných Reidemeisterovými pohyby plyne, že taková relace je právě quandlem.

Nyní si vybudujeme terminologii tak, abychom mohli výše popsané barvení formálně popsat pomocí algebraické terminologie.

Definice 6. Mějme quandly Q a W. Pak *homomorfismem* $\varphi : Q \to W$ rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in Q$.

Definice 7. *Volným quandlem* Q_X nad neprázdnou množinou X rozumíme quandle takový, že pokud máme zobrazení $f : X \to Q$, kde Q je libovolný quandle, tak existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : Q_X \to Q$ takové, že $\varphi(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$.

Definice 8. Mějme K uzel, D_K jeho diagram, pak *fundamentálním quandlem* Q_K rozumíme volný quandle nad množinou oblouků $O(D_K)$ modulo relace dané kříženími $C(D_K)$ takové, že pro každé křížení $(a, b, c) \in C(D_K)$ platí $a * b = c$.

Tvrzení 3. *Fundamentální quandl* Q_K *je úplným invariantem.*

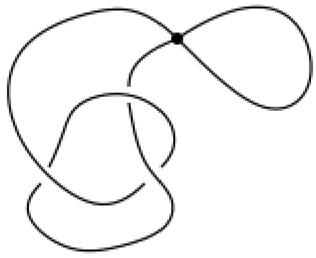
Definice 9. Mějme uzel K, jeho fundamentální quandle Q_K a libovolný quandle W. Pak *počtem obarvení* $\mathrm{Col}_W(K)$ rozumíme počet homomorfismů $\varphi : Q_K \to W$.

Pozorování. Počet obarvení $\mathrm{Col}_W(K)$ je invariant.

1.3 Invarianty konečného typu

Něco o Vassilievových invariantech.

Definice 10. *Singulárním* uzlem $K^\bullet$ s n protnutími rozumíme uzel takový, že sám sebe protíná v n bodech právě dvěma úseky.



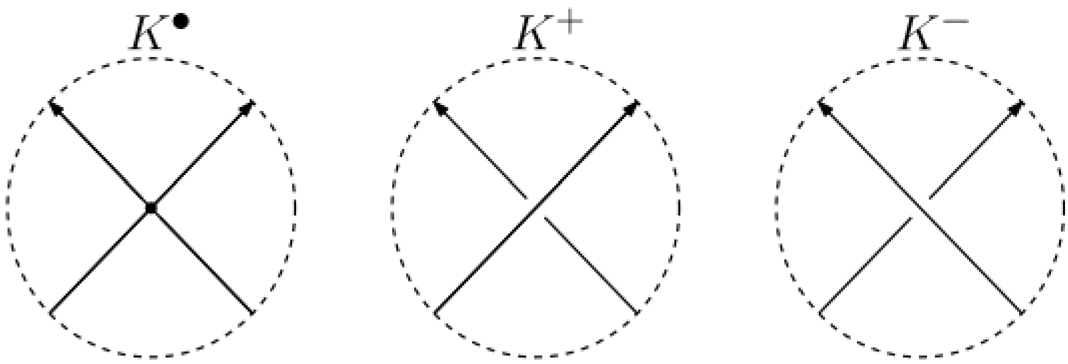
Obrázek 1.7: Singulární uzel s 1 křížením

Definice 11. Mějme singulární uzel $K^\bullet$ s $n \geq 1$ a invariant v, zvolíme si nějaké protnutí. Pak pro dané protnutí *Vassilievovou skein relací* nazýváme rovnici:

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-)$$

,

kde $K^\bullet$, K^+ a K^- odpovídají obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Vassilievova skein relace

Definice 12. Invariant v se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně $\leq m$, pokud platí, že pro každý singulární uzel $K^\bullet$ s počtem protnutí $> m$ platí $v(K^\bullet) = 0$. Řekneme, že je stupně m, pokud je stupně $\leq m$, ale není stupně $\leq m - 1$.

Tvrzení 4. *Vzorec pro Vassilievův invariant.*

2. Barvení jako Vassilievův invariant

2.1 Velikost barvení

Zde bude důkaz, že barvení quandly je buď triviální, nebo není konečného typu.

2.2 Triviální barvení

Zde budu hledat charakterizaci triviálních barvení.

Závěr

Toto je závěr mé práce.

Seznam použité literatury

MURASUGI, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: 10.1007/978-0-8176-4719-3_2. URL `https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2`.