



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Chwiedziuk

Barvicí invarianty uzlů

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační
technologie

Studijní obor: Matematika pro informační
technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji doc. RNDr. Davidu Stanovskému, Ph.D. za pomoc při řešení obtížných pasáží a cenné rady při psaní této práce.

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Uzly můžeme barvit různými konečnými quandy a zjišťovat, zda mají netriviální obarvení. Pokud ano, pak dokážeme říct, že daný uzel není unknot. V práci se však zaměříme na takové quandy, které vždy dávají triviální barvení. Proč by nás tedy měly zajímat? Mají totiž zajímavé algebraické vlastnosti. Dokážeme, že jsou to právě reduktivní quandy a také, že barvení uzlů pomocí reduktivních quandlů je Vassilievův invariant. A žádné jiné barvení není. Stejně tak budeme charakterizovat quandy, které dávají triviální barvení linků.

Klíčová slova: Reduktivní quandy Barvení uzlů Vassilievovy invarianty

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: We can color knots with different finite quandles and check if they have non-trivial coloring. If so, we can say that the knot is not an unknot. However, we will focus on quandles that always give trivial coloring. Why should we care about them? They have interesting algebraic properties. We will show that these are precisely the reductive quandles and that coloring knots using reductive quandles is a Vassiliev invariant. And no other coloring is. We will also characterize quandles that give trivial coloring of links.

Keywords: Reductive quandles Knot coloring Vassiliev invariants

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	3
2 Quandly	6
2.1 Souvislost	8
2.2 Reduktivita	10
3 Trivální barvení	12
4 Barvení jako Vassilievův invariant	15
4.1 Copánky	15
4.2 Vassilievův invariant	16
4.3 Barvení uzlů	18
4.4 Barvení linků	19
Seznam použité literatury	20

Úvod

Teorie uzlů je oblast topologie, která se zabývá uzly, což jsou jednoduché uzavřené křivky v trojrozměrném prostoru. Uzly samotné se v historii vyskytují v různých kulturách již od pravěku, ale teorie uzlů jako matematická disciplína vznikla až v 18. století. Mezi slavné matematiky, kteří se zasloužili o vznik a rozvoj této disciplíny, patří například C. F. Gauss (1777-1855), J. W. Alexander (1888-1971) nebo H. Seifert (1907-1996). Velký rozvoj nastal po druhé světové válce ve Spojených státech a Japonsku.

Mezi základní otázky patří, zda jsou dva uzly ekvivalentní, tedy zda je jeden z druhého možné získat spojitou deformací, aniž by se v nějakém okamžiku křivka protínala. Dlouho nebylo známo, jestli vůbec existuje algoritmus, který by dokázal rozhodnout, zda dva zadané uzly jsou ekvivalentní. Existence algoritmu byla prokázána Hakenem v roce 1962. Hass a Lagarias následně v roce 1991 dokázali, že jenom rozhodnutí, zda je uzel triviální, patří do kategorie NP.

Základní technikou rozlišování uzlů je hledání invariantů. Mezi nejznámější invarianty patří takzvané barvení uzlů. Z počátku se jednalo např. o Foxovo barvení, kdy je každý oblouk uzlového diagramu obarven jednou ze tří barev a platí, že na každém křížení se vyskytují všechny tři barvy, nebo je monochromatické. Tato technika se následně zobecnila na barvení pomocí quandlů.

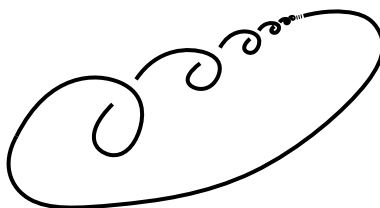
Quandle je algebraická struktura, která vznikla přesně pro účely rozlišování uzlů. Takzvaný fundamentální quandle dokonce jednoznačně určuje uzly až na orientaci a překlopení, což dokázal D. Joyce v roce 1982. Bohužel, výpočet fundamentálního quandle je příliš složitý pro praktické použití. Jako zjednodušení se počítá počet homomorfismů do konečného quandle. Tomu pak říkáme barvení pomocí quandle.

V této práci se zaměřím na charakterizaci quandleů, které dávají triviální obarvení pro všechny uzly. V první kapitole jsou definovány základní pojmy z teorie uzlů. Jedná se o víceméně neformální úvod do problematiky uzlů a sám o sobě neobsahuje žádné nové výsledky. Ve druhé kapitole se budu věnovat quandleům a jejich vlastnostem. Zaměřím se především na spojitost a dokážu pár základních tvrzení o rozkladu quandle na spojitě komponenty. Ve třetí kapitole zavedu pojem reduktivnosti quandle a ukážu, že barvení quandlem je pro všechny uzly triviální, právě tehdy když je quandle reduktivní. Na závěr ve čtvrté kapitole se zaměřím na koncept Vassilievových invariantů a dokážu, že barvení pomocí quandleů je Vassilievův invariant právě tehdy, když je quandle reduktivní. Také rozvinu výsledek z uzlů na linky a ukážu, že barvení pomocí quandleů je Vassilievův invariant pro linky, právě tehdy když je quandle triviální.

Ve své práci vycházím především ze tří článků: Eisermann (1999), Johnson (1980) a Bonatto a kol. (2020). Využívám podobné důkazové techniky, abych dosáhl svých výsledků.

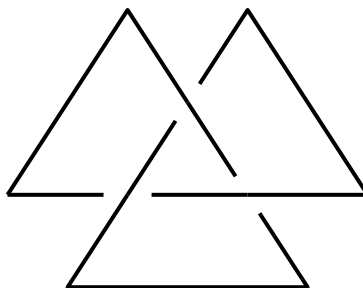
1. Základní pojmy

Základním matematickým objektem, o kterém tato práce pojednává, je *uzel*. Obvykle se tímto pojmem myslí vnoření uzavřené jednoduché křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.



Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmito uzly vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek pouze polygonální křivky. Tedy uzlem rozumíme jednoduchou uzavřenou lomenou čáru. Takovýto uzel se pak říká *krotký uzel* (v angličtině *tame knots*). Množinu všech takových uzlů značíme \mathcal{K} .



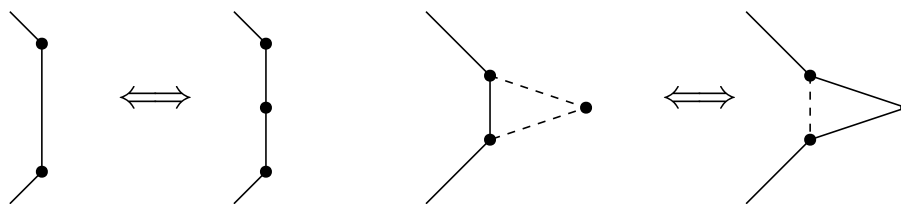
Obrázek 1.2: Trojlístek

Příbuzným pojmem je *link*, což je konečné disjunktní sjednocení uzlů. Množinu všech linků značíme \mathcal{L} . Linky sdílejí s uzly mnoho vlastností, ovšem v této práci se jim budeme věnovat pouze v poslední kapitole. Jiným zobecněním je *orientovaný uzel*, kdy si na uzlu zvolíme orientaci. Pokud jde o link, orientace je dána na každém uzlu zvlášť.

Existuje nespočetně mnoho uzlů, a proto se nabízí otázka, jak je klasifikovat. Velmi přirozený způsob je zavést *ekvivalenci* uzlů. V reálném světě si můžeme uzly představit jako provázky, které mají spleené konce a jsou různě zamotány do prostoru. Tento provázek můžeme libovolně deformovat, ale nesmíme ho přetrhnout. Na základě toho pak můžeme dva uzly prohlásit za ekvivalentní, pokud dokážeme jeden získat z druhého pomocí takovýchto deformací. Tento způsob klasifikace je velmi intuitivní, tudíž by bylo vhodné ho reflektovat i v matematické teorii.

Pro uzel K si nejprve zavedeme *základní pohyby* následovně:

- 1) Mějme hranu křivky K danou vrcholy A a B . Pak můžeme umístit nový vrchol C na hranu AB . Naopak, pokud existuje vrchol C na hraně AB , která náleží do uzlu K , můžeme ho odstranit.



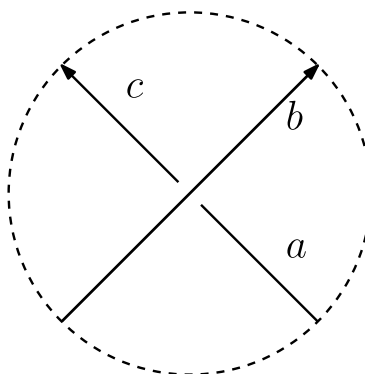
Obrázek 1.3: Základní pohyby

- 2) Mějme hranu AB v K a nějaký vrchol C ležící mimo K . Pak pokud platí, že $ABC \cap K = AB$, pak můžeme hranu AB nahradit hranami AC a CB . Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit hrany AC a CB za hranu AB .

Tyto dva pohyby reflektují intuitivní představu o tom, jak můžeme uzly deformovat. Následně můžeme definovat relaci ekvivalence tak, že uzly K a K' jsou ekvivalentní, pokud existuje konečná posloupnost základních pohybů, která transformuje jeden uzel v druhý. Tuto relaci značíme $K \cong K'$.

Jelikož je práce s objekty ve třech rozměrech velmi obtížná, zavedeme si *diagramy* uzlů. Jedná se o projekce uzlů do roviny, zatímco zachováváme informaci o kříženích tím, že spodní část křivky v místě křížení přerušíme. Zároveň zakážeme patologické případy, kdy dojde pouze k překryvu dvou částí křivky, který není křížením. Diagram uzlu K budeme značit D_K . Množinu všech diagramů uzlu K značíme $D(K)$.

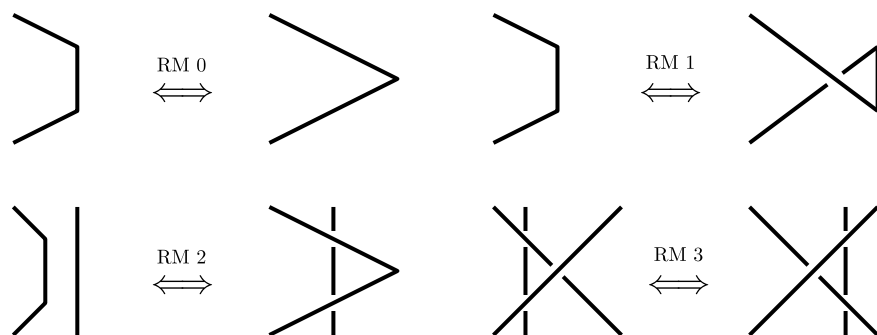
Takto daný diagram se skládá z *oblouků*, jimiž rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu všech oblouků diagramu D_K značíme $O(D_K)$. Dále místa, kde dochází k přerušení křivky, nazýváme *křížení*. Toto křížení budeme zapisovat jako uspořádanou trojici oblouků, které se v daném místě kříží ve tvaru (a, b, c) podle obrázku 1.4. Množinu všech křížení diagramu D_K značíme $C(D_K)$.



Obrázek 1.4: Křížení

Na diagramech můžeme definovat ekvivalenci. Dva diagramy D_K a $D_{K'}$ jsou ekvivalentní, pokud platí, že $K \cong K'$. Ovšem, můžeme ekvivalenci zavést přímo na diagramech a to pomocí tzv. *Reidemeisterových pohybů*. Jsou obdobou základních pohybů pro diagramy a platí, že dva diagramy jsou ekvivalentní, pokud jeden získáme z druhého pomocí konečné posloupnosti Reidemeisterových pohybů. Reidemeisterovy pohyby jsou znázorněny na obrázku 1.5.

Na rozlišování uzlů budeme využívat *invarianty*. Invariantem I rozumíme takové zobrazení z množiny všech uzlů do nějaké množiny, které je konstantní na



Obrázek 1.5: Reidemeisterovy pohyby

ekvivalentních uzlech. Tedy pokud $K_1 \cong K_2$, pak $I(K_1) = I(K_2)$. Invariant se nazývá *úplný*, pokud platí, že $I(K_1) = I(K_2)$ implikuje $K_1 \cong K_2$. Jelikož je ekvivalence uzlů daná pomocí Reidemeisterových pohybů, stačí ověřit, že se invariant zachovává na těchto pohybech.

Mezi základní invarianty patří třeba *crossing number*, což je nejmenší možný počet křížení přes všechny diagramy jednoho uzlu. Dalšími příklady jsou *unknotting number*, *bridge number* nebo *genus*. V této práci se budeme věnovat invariantům založeným na quandleovém barvení.

2. Quandly

Quandle vznikl jako algebraická struktura, která respektuje Reidemeisterovy pohyby, a je tak vhodná pro rozlišování uzlů. V této kapitole rozvinu základní teorii kolem těchto algebraických struktur.

Definice 1. *Quandlem* $Q = (C, *)$ rozumíme algebraickou strukturu nad množinou C s binární operací $*$, splňující následující podmínky pro všechna $a, b, c \in C$:

- 1) $a * a = a$ (idempotence);
- 2) $\exists! x \in C : a * x = b$ (jednoznačné levé dělení, značíme $x = a *^{-1} b$);
- 3) $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ (levá samodistributivita).

Příklad. Příkladem quandle je například *triviální jednoprvkový quandle* $Q = (\{a\}, *)$, kde $a * a = a$. Značme ho jako T_1 . *Triviální quandle* nad A definujeme tak, že vezmeme množinu A a definujeme $a * b = b$ pro všechna $a, b \in A$. Takový quandle značíme T_A .

Příklad. Dalším příkladem může být quandle daný konjugací v grupě G . Pro $a, b \in G$ definujeme $a * b = aba^{-1}$. Tento quandle značíme $\text{Conj}(G)$.

Na quandlech bychom nyní zavedli základní pojmy běžné i pro jiné algebraické struktury, jako homomorfismy, podalgebry a faktoralgebry běžné v univerzální algebře. Pomocí nich si pak můžeme lépe porozumět vlastnostem quandlů.

Definice 2. Mějme quandly Q a W . Pak *quandlovým homomorfismem* $\varphi : Q \rightarrow W$ rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in Q$.

Definice 3. Mějme quandle $(Q, *)$. Pak *podquandlem* $W \preceq Q$ rozumíme dvojici $(W, *_W)$, kde $W \subseteq Q$ a platí, že W je uzavřená na operaci $*$ jakožto zúžení operace z Q .

Definice 4. Buď Q quandle. Na něm zavedeme relaci ekvivalence α takovou, že $[a]_\alpha * [b]_\alpha = [a * b]_\alpha$ pro všechna $a, b \in Q$. Vzniklý quandle definovaný na blocích ekvivalence značíme Q / α a nazýváme *faktorquandlem* quandle Q podle ekvivalence α .

Víme, že $a \mapsto [a]_\alpha$ je homomorfismus z Q na Q / α . Také platí, že pokud máme homomorfismus $\varphi : Q \rightarrow W$, pak jádro, tj množina $\text{Ker } \varphi = \{(a, b) \in Q \times Q : \varphi(a) = \varphi(b)\}$, tvoří kongruenci na Q a faktorquandle $Q / \text{Ker } \varphi$ je izomorfní s obrazem $\text{Im } \varphi(Q) \preceq W$. Jedná se o klasický výsledek univerzální algebry, který můžeme nalézt např. v knize (Ježek, 2008).

Nyní tyto pojmy využijeme, abychom definovali fundamentální quandle. Ten je základním nástrojem pro studium barvení uzlů.

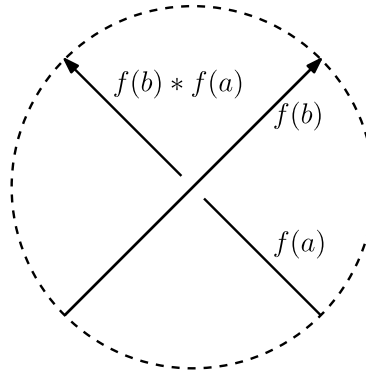
Definice 5. *Volným quandlem* Q_X nad neprázdnou množinou X rozumíme quandle takový, že pro zobrazení $f : X \rightarrow Q$, kde Q je libovolný quandle, existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : Q_X \rightarrow Q$ takový, že $\varphi(x) = f(x)$ pro všechna $x \in X$.

Definice 6. Mějme K uzel, D_K jeho diagram, pak *fundamentální quandlem* Q_K rozumíme volný quandle nad množinou oblouků $O(D_K)$ vyfaktorizovaný relacemi dané kříženími $C(D_K)$ takové, že pro každé křížení $(a, b, c) \in C(D_K)$ platí $a * b = c$.

Tvrzení 1 ((Joyce, 1982)). *Fundamentální quandle Q_K je úplným invariantem až na orientaci.*

Fundamentální quandle dává sice velmi silný invariant, ale je těžké ho spočítat. Fundamentální quandle je nekonečný a určit, zda jsou dva takové quandly izomorfní, je velmi obtížné. Proto se spíše používá z něj odvozený invariant, kterému se říká *quandlové barvení*. Jedná se homomorfismus z fundamentálního quandlu do námi zvoleného konečného quandlu. Tento invariant je sice slabší, ale lze mnohem snadněji spočítat. Dále lze odvodit další invariant a to počet takových homomorfismů.

Definice 7. Mějme uzel K , jeho fundamentální quandle Q_K a libovolný quandle W . Pak *počtem obarvení* $\text{Col}_W(K)$ rozumíme počet homomorfismů $\varphi : Q_K \rightarrow W$. Tedy $\text{Col}_W(K) = |\text{Hom}(Q_K, W)|$.



Obrázek 2.1: Barvení pomocí quandlu

Jak takový invariant funguje, si ukážeme na příkladu *Foxova quandle*. Začneme definicí tohoto quandlu. Originálně je Foxovo barvení definováno jako barvení oblouků jednou ze tří barev tak, aby na každém křížení byly měly všechny tři oblouky buď stejnou barvu, nebo navzájem různou. Nyní si reformulujeme toto barvení jako homomorfismus z fundamentálního quandlu do Foxova quandlu. Foxův quandle F definujeme následující tabulkou:

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Nyní si zvolme uzel K a jeho fundamentální quandle Q_K . Pro každý oblouk $a \in O(D_K)$ si zvolme jeden z prvků $f(a) \in F$ tak, abychom dostali homomorfismus $f : Q_K \rightarrow F$. Jelikož je fundamentální quandle Q_K definovaný na obloucích diagramu, tak každý homomorfismus lze vyjádřit tímto způsobem. Naopak ne pro každé přiřazení prvků $f(a)$ dostaneme homomorfismus. Pro náš případ si

všimneme, že pro křížení (a, b, c) platí, že když $f(a) = f(b)$, pak i $f(c) = f(a)$. Naopak, pokud $f(a) \neq f(b)$, tak $f(c) \neq f(a), f(b)$, což nám dává přesně pravidla Foxova barvení.

2.1 Souvislost

V této sekci se budeme zabývat souvislými quandly. Tato třída je důležitá hned ze dvou důvodů. Prvním je, že všechny konečné quandly lze rozložit na souvislé podquandly. Druhým je, že fundamentální quandle uzlu je souvislý.

Definice 8. Mějme quandle Q . Pak L_q značí levou translaci o $q \in Q$, tedy $L_q(x) = q * x$. Grupa generovaná levými translacemi se značí $\text{Inn}(Q)$ a nazývá se *grupa vnitřních automorfismů* quandle Q .

Definice 9. Mějme quandle Q . Pokud platí, že je působení $\text{Inn}(Q)$ na Q tranzitivní, pak říkáme, že Q je souvislý quandle.

Lemma 2. *Mějme konečný quandle Q . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- 1) Q je souvislý;
- 2) pro každé dva prvky $a, b \in Q$ platí, že existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

kde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Důkaz.

- (1) \Rightarrow (2): Mějme $a, b \in Q$. Jelikož je Q konečný, tak platí, že $|\text{Inn}(Q)| \leq |Q|!$, tedy $\text{Inn}(Q)$ je konečná grupa. Tudíž pro každý prvek $\varphi \in \text{Inn}(Q)$ existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že $\varphi = L_{x_1}^{\varepsilon_1} \circ L_{x_2}^{\varepsilon_2} \circ \dots \circ L_{x_n}^{\varepsilon_n}$, kde L_x je levá translace o x .

Jelikož $\text{Inn}(Q)$ je tranzitivní, tak existuje $\varphi \in \text{Inn}(Q)$ taková, že $\varphi(a) = b$. Tedy existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

- (2) \Rightarrow (1): Jelikož každé dva prvky dokážeme spojit konečnou posloupností prvků, tak platí, že grupa G daná levými translacemi $\text{Inn}(Q)$ působí tranzitivně na Q . Tudíž je Q souvislý.

□

Lemma 3. *Mějme quandle Q a grupu vnitřních automorfismů $\text{Inn}(Q)$. Pak platí, že působení $\text{Inn}(Q)$ na Q rozkládá Q na orbity a každá orbita je podquandle.*

Důkaz. Zafixujme si orbitu nějakou W . Tak platí, že W je uzavřená na operaci $*$, jelikož pokud $a, b \in W$, tak $a * b = L_a(b) \in W$. Zároveň je uzavřená na levé dělení, jelikož pokud $a, b \in W$, tak $a *^{-1} b = L_a^{-1}(b) \in W$. Tedy W je podquandle. \square

Příklad. Mezi souvislé quandle patří např. foxův quandle F . Naopak, mezi nesouvislé patří triviální quandle T_n , kde $n > 1$. Tyto quandle se rozpadnou na n jednoprvkových podquandlů T_1 , který je ale triviálně souvislý.

Obecně neplatí, že působením $\text{Inn}(Q)$ na Q dostaneme souvislé quandle. Je to z toho důvodu, že působení $\text{Inn}(Q)$ na jednu orbitu Q' může být tranzitivní, ale z pohledu té orbity se jedná o působení $\text{Aut}(Q')$. A tedy může nastat, že $\text{Inn}(Q')$ není tranzitivní na Q' . Pro konečné quandle však platí, že se dají rekurzivně rozložit na souvislé podquandle.

Tvrzení 4 ((Ehrman a kol., 2006)). *Mějme quandle Q . Pak platí, že se dá jednoznačně rozložit na maximální souvislé podquandle (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) .*

Důkaz. Mějme quandle Q a grupu vnitřních automorfismů $\text{Inn}(Q)$. Podle lemmatu 3 platí, že působení $\text{Inn}(Q)$ na Q rozkládá Q na orbity a každá orbita je podquandle. Jelikož je Q konečný, tak má konečně mnoho orbit. Pokud je orbita souvislá, tak jsme skončili. Pokud ne, znovu aplikujeme lemma 3. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme rozklad na souvislé podquandle. Jelikož je Q konečný a velikost orbit se zmenšuje, tak se vždy dostaneme do souvislého podquandlu.

Rozklad je jednoznačný, jelikož pokud by existovaly dva různé rozklady, tak by existovaly dva různé souvislé podquandle W a W' , které se protínají, jenže by to znamenalo, že se dokážeme z každého prvku v W dostat do W' a naopak, což by znamenalo, že tvoří jeden souvislý quandle a jsou shodné, což je spor. \square

Definice 10. Mějme quandle Q . Pak *rozkladem* quandle Q rozumíme rozklad na souvislé podquandle (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) . Subquandle Q_i nazýváme *komponenta* Q .

Nyní se podíváme, jak se chová souvislost při homomorfismech.

Lemma 5 ((Bonatto a kol., 2018)). *Uvažujme quandle Q a W , rozklad Q jako Q_1, Q_2, \dots, Q_n a homomorfismus $\varphi : Q \rightarrow W$. Pak platí, že homomorfním obrazem Q_i je souvislý podquandle $\varphi(Q_i) = W_i \preceq W$.*

Důkaz. Mějme $a, b \in Q$ ve stejné komponentě. Pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

Nyní, když máme homomorfismus $\varphi : Q \rightarrow W$, tak platí, že

$$\varphi(x_1) *^{\varepsilon_1} (\varphi(x_2) *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (\varphi(x_n) *^{\varepsilon_n} \varphi(a)) \dots) = \varphi(b).$$

Tedy platí, že $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ jsou ve stejné komponentě. \square

Speciálně, pokud je Q souvislý quandle, tak jeho homomorfním obrazem je také souvislý quandle.

Lemma 6 ((Joyce, 1982)). *Mějme uzel K a jeho fundamentální quandle Q_K . Pak platí, že Q_K je souvislý quandle.*

Důkaz. Mějme $a, b \in Q_K$ generátory. Pak chceme ověřit, že existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q_K$ taková, že $x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b$. Jenže, jelikož jsou a, b generátory, tak odpovídají nějakým obloukům $a', b' \in O(D_K)$. Posloupnost prvků x_1, x_2, \dots, x_n pak dostaneme tak, že začneme v a' a budeme ve směru k b' . Pokaždé, když narazíme na křížení, kde je x'_i most, tak si přidáme x_i do posloupnosti s příslušným znaménkem operace. Jelikož a, b leží na stejném uzlu, tak se tímto způsobem dostaneme z a do b .

Tohle platí pro všechny generátory, tedy i pro všechny prvky Q_K , jelikož každý prvek je generován posloupností generátorů. Tudíž je Q_K souvislý quandle. \square

Z lemat 5 a 6 plyne, že obraz fundamentálního quandlu je souvislý quandle. Jenže to znamená, že nám při výpočtu $\text{Col}_Q(K)$ stačí uvažovat pouze souvislé quandly. Speciálně je jedním z důsledků následující lemma:

Lemma 7. *Mějme quandle Q , který není souvislý, a uzel K . Pak platí, že*

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|,$$

kde Q_i jsou komponenty rozkladu Q .

Důkaz. Mějme homomorfismus $\varphi \in \text{Hom}(Q_K, Q)$. Jelikož je Q_K podle 6 souvislý, tak podle lematu 5 platí, že $\varphi(Q_K)$ je souvislý podquandle Q . Jelikož se Q rozkládá na komponenty, které jsou souvislé, tak platí, že φ náleží do $\text{Hom}(Q_K, Q_i)$ pro nějaké i . Zároveň patří nejvýše do jedné takové množiny, jelikož jsou orbity disjunktní. Jelikož je φ libovolný homomorfismus, tak platí, že

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|.$$

\square

2.2 Reduktivita

V této sekci se budeme zabývat reduktivními quandly. Tyto quandly jsou studovány v člancích (Bonatto a kol., 2020), (Bonatto a Stanovský, 2021) a (Jedlička a kol., 2020). Ovšem jejich motivace při definici reduktivity je čistě algebraická. My se budeme zabývat reduktivitou ve vztahu k uzlům a jejich barvením.

Definice 11. Buď $n \in \mathbb{N}$. Pak quandle Q nazýváme *n -reduktivní*, pokud platí, že všechny $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in Q$ splňují:

$$((\dots (a * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n = ((\dots (b * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n$$

Říkáme, že Q je *reduktivní*, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$, že je n -reduktivní.

Zde chci definovat rozklad na orbity rekursivním vztahem jako v (?).

Tvrzení 8. *Bud' Q quandle. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1) Q je reduktivní.

2) Pro každou komponentu Q_i rozkladu Q platí, že $|Q_i| = 1$.

Důsledek. Jediný souvislý reduktivní quandle je triviální quandle velikosti 1.

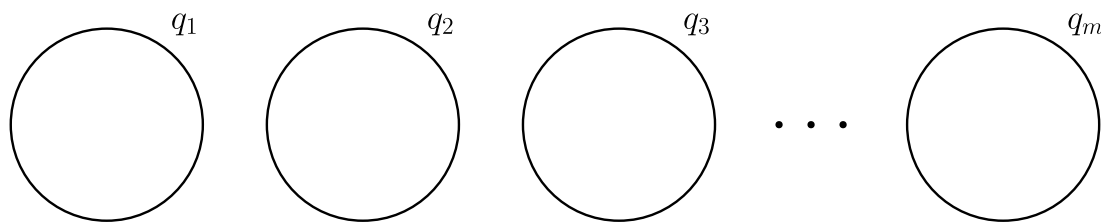
3. Trivální barvení

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že homomorfním obrazem fundamentálního quandle je souvislý quandle. Nyní naopak ukážeme, že pro každý netriviální souvislý quandle existuje takový uzel, který má netriviální obarvení. Na základě toho ukážeme, že quandle dává triviální obarvení pro všechny uzly, právě tehdy když je reduktivní.

Věta 9. *Pro každý souvislý quandle Q , $|Q| > 1$ existuje takový uzel K , že $\text{Col}_Q(K) > |Q|$.*

Důkaz. Pro důkaz této věty použijeme konstrukci, která se poprvé objevila v článku (Johnson, 1980), a kterou si upravíme tak, aby řešila náš problém. Konstrukce je následující:

Nejprve uvažujme orientovaný m -link, $m = |Q|$, takový, že každou komponentu obarvíme jiným prvkem z Q . Následně budeme postupně propojovat pomocí pásků tak dlouho, dokud nám nevznikne uzel. Na konci dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení, jelikož každá komponenta bude obarvena jiným prvkem z Q a toto obarvení se v průběhu konstrukce zachovává. Z toho pak bude plynout, že $\text{Col}_Q(K) > |Q|$.



Obrázek 3.1: m -link

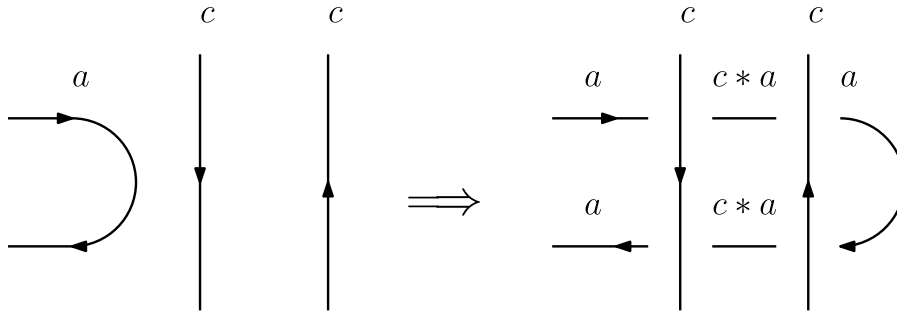
Mějme zadaný souvislý quandle Q . Jelikož je Q souvislý, pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

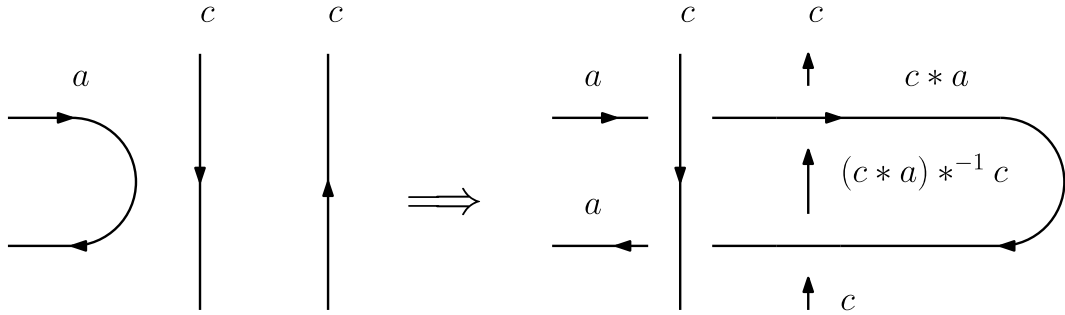
pro každé dva prvky $a, b \in Q$. Naším cílem bude postupně provádět levé stranslace $L_{x_1}^{\varepsilon_1}, L_{x_2}^{\varepsilon_2}, \dots, L_{x_n}^{\varepsilon_n}$ tak, abychom na konci mohli propojit dvě komponenty uzlu a získat tak link o $m - 1$ komponentách. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel.

Začneme s komponentou obarvenou prvkem a . Z ní povedeme pásek. Pokud pásek bude křížovat s nějakou jinou komponentou, tak budeme postupovat podle jedné z následujících situací:

- 1) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c \neq x_1$ pak pásek povedeme pod celou komponentou. Dojde tedy k situaci na obrázku 3.2. Tedy pásek povedeme pod celou komponentou, aniž bychom změnili obarvení konce pásku i komponenty.

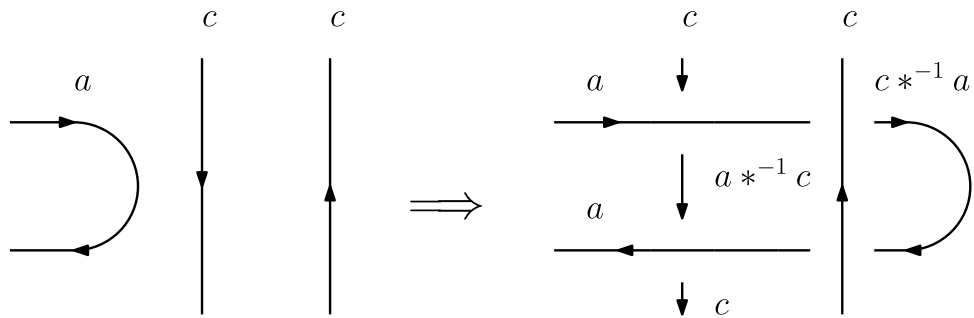


Obrázek 3.2: Pásek pod komponentou



Obrázek 3.3: $x_1 * a$

- 2) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = 1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.3. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 * a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.
- 3) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem $c = x_1$ a platí, že $\varepsilon_1 = -1$, pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.4. Konec pásku bude obarvený prvkem $x_1 *^{-1} a$, zatímco komponenta obarvená prvkem x_1 zůstane nezměněná.



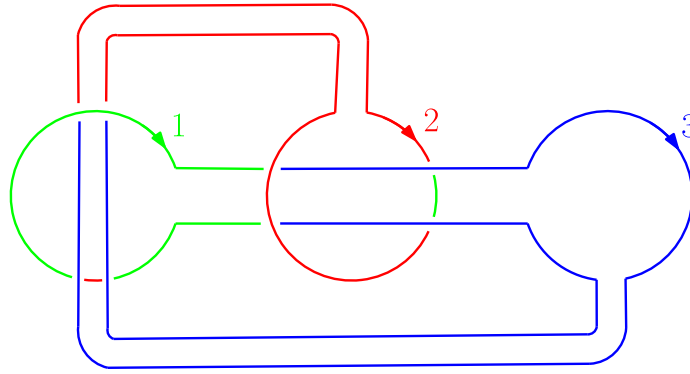
Obrázek 3.4: $x_1 *^{-1} a$

Tento způsob budeme opakovat pro konec pásku tak dlouho, dokud konec pásku nebude obarvený prvkem b . Jelikož je posloupnost x_1, x_2, \dots, x_n konečná, tak k němu opravdu dojdeme. Následně pásek připojíme na komponentu obarvenou prvkem b a tím získáme link o $m - 1$ komponentách.

Počet komponent je konečný a jednou iterací algoritmu jsme snížili počet komponent o jedna. Algoritmus budeme tedy opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel. Takový uzel nazývá *stuhový uzel* (anglicky *ribbon knot*). Jelikož jsme každou komponentu $|Q|$ -linku obarvili jiným prvkem z Q a algoritmus toto obarvení zachovává, dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení. Tedy $\text{Col}_Q(K) > |Q|$.

□

Příklad. Nyní provedeme konstrukci pro foxův quandle F . Víme, že $2 * 1 = 3$ a $1 * 2 = 3$. Nejprve propojíme komponenty 1 a 3, následně připojíme zbývající komponentu 2 a dostaneme stuhový uzel R_F jako na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Stuhový uzel pro foxův quandle

Věta 10. *Mějme konečný quandle Q . Pak platí jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- 1) $\text{Col}_Q(K)$ je konstantní,
- 2) Q je reduktivní.

Důkaz. Pokud je Q souvislý a netriviální, pak podle věty 9 zkonstruujeme příslušný stuhový uzel R tak, že bude mít netriviální obarvení $\text{Col}_Q(R) > |Q|$. Zároveň lze unknot U obarvit triviálně, tedy $\text{Col}_Q(U) = |Q|$. Tedy $\text{Col}_Q(K)$ není konstantní.

(1) \implies (2):

Tuto implikaci ukážeme obměnou. Předpokládáme, že Q není reduktivní. Q podle věty 4 rozkládá na komponenty (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) . Jelikož Q není reduktivní, pak z 8 víme, že existuje komponenta Q_i taková, že $|Q_i| > 1$. Označme si Q_i jako W . Pak podle 9 platí, že $\text{Col}_W(K) > |W|$. Jelikož $W \preceq Q$, tak podle lematu 7 platí, že $\text{Col}_Q(K) \geq \text{Col}_W(K) - |W| + |Q| > |Q|$. A tedy není konstantní.

(2) \implies (1):

Jestliže Q je reduktivní, pak z 8 platí, že všechny komponenty jsou triviální. Z 5 plyne, že $\text{Col}_Q(K) = |Q|$, a tudíž $\text{Col}_Q(K)$ je konstantní pro všechny uzly K .

□

4. Barvení jako Vassilievův invariant

V této kapitole ukážu další charakterizaci reduktivních quandlů a to pomocí Vassilievových invariantů. Nejprve je ovšem uvést několik základních výsledků z teorie copánkových grup, které následně budou aplikovány v příslušném důkazu.

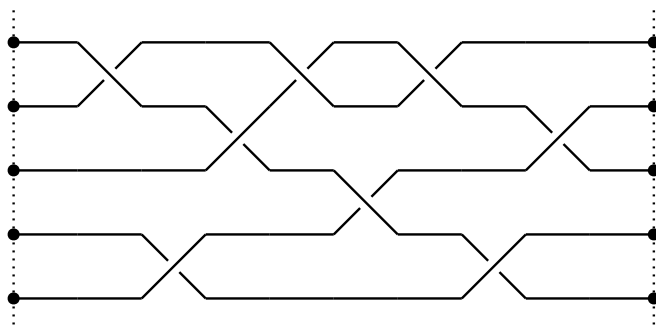
4.1 Copánky

Copánkovou grupu jako první zavedl Emil Artin v roce 1925. Copánky se skládají z n pramenů, které jsou upevněny k horní a dolní desce a mohou se mezi sebou křížit ve smyslu Reidemeistrových pohybů 2 a 3. My si zavedeme copánkovou grupu pomocí prezentace.

Definice 12. Buď zadané číslo n . Pak B_n značí grupu danou prezentací $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle$, kde v první sadě relací $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a ve druhé $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}; |i-j| \geq 2$.

První relace je ekvivalentem Reidemeistrova pohybu 3 a druhá relace říká, že pokud jsou příslušné prameny disjunktní, tak se mohou prohazovat.

Skládání $a \cdot b$ funguje geometricky tak, že se vezme spodní deska z a a přilepí se k horní desce b tak, aby na sebe navazovaly příslušné prameny, a pak se prostřední deska odstraní. Jednotkový prvek je copánek bez křížení. Inverzní prvek je symetrické překlopení copánku. Vlastně tak odpovídá Reidemeistrovu pohybu 2.



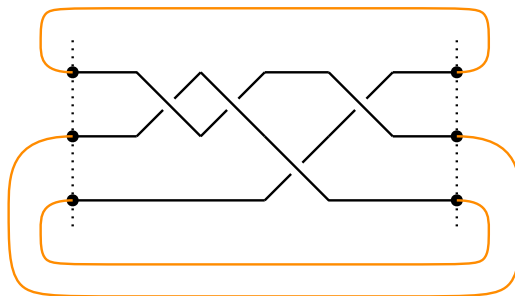
Obrázek 4.1: Příklad copánku

Pokud vezmeme nějaký copánek $b \in B_n$, pak můžeme udělat tzv. *uzávěr*, kdy dojde ke slepení horní a spodní desky tak, že se přilepí k sobě protilehlé prameny. Tímto obecně dostaneme link. Budeme ho značit K_b .

Jedna z nejznámějších vět z teorie uzlů je Alexanderova věta, která říká, že každý uzel lze získat jako závěr nějakého copánku.

Věta 11 (Alexanderova věta). *Pro každý uzel K existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ a copánek $b \in B_n$, že K je ekvivalentní závěru K_b .*

Předchozí větu lze použít k definici nového invariantu, a to copánkového indexu. Tento index nám říká, kolik pramenů potřebujeme, abychom mohli dostat daný uzel jako závěr copánku s daným počtem pramenů.



Obrázek 4.2: Lepení copánku

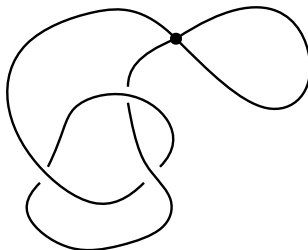
Definice 13. Pro daný uzel K rozumíme *copánkovým indexem* $s(K)$ (anglicky *braid index*) nejmenší číslo n takové, že existuje $b \in B_n$ tak, aby K byl ekvivalentní uzávěru K_b .

Pozorování. Copánkové číslo $s(K)$ je invariant.

4.2 Vassilievův invariant

Myšlenka Vassilievových invariantů stojí na zobecnění uzlů na tzv. singulární uzly. Tyto uzly se vyznačují tím, že dovolujeme křivce, aby se protínala samu sebe. V této kapitole vycházíme z knížky (Chmutov a kol., 2011).

Definice 14. *Singulárním bodem* rozumíme bod, kde se křivka protíná sama sebe právě 2 částmi křivky. *Singulárním uzlem* K^\bullet rozumíme uzel, který obsahuje alespoň jeden singulární bod.

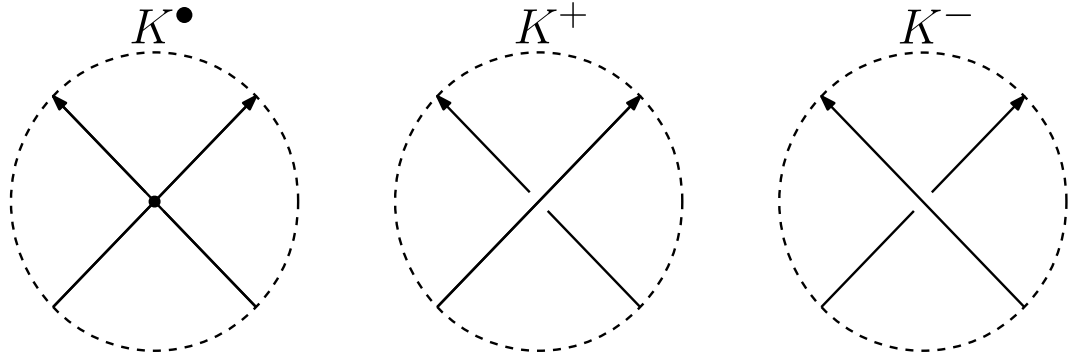


Obrázek 4.3: Singulární uzel s 1 singulárním bodem

Vassilievové invarianty se zavádí pomocí skein relace. Myšlenka je založena na tom, že invariant pro klasické uzly můžeme rozšířit na třídu singulárních uzlů. Dělá se to pomocí skein relace, kdy si zafixujeme singulární bod pro K^\bullet a lokálně ho nahradíme kladným (K^+), resp. negativním (K^-) křížením. Následně získáme hodnotu invariantu v pro K^\bullet pomocí hodnot invariantů pro K^+ a K^- :

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-).$$

Tato hodnota je jednoznačně určená, tudíž nám to dává způsob, jak definovat invariant pro singulární uzly. Pokud má uzel K^\bullet singulární bodů více, tak se postupujeme induktivně, očíslováme jednotlivé singulární body a dostaneme tak *úplnou rezoluci*:



Obrázek 4.4: Vassilievova skein relace

$$v(K^\bullet) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{+, -\}} (-1)^{|\varepsilon|} v(K^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}),$$

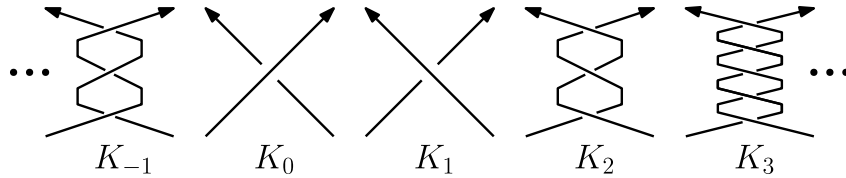
kde $|\varepsilon|$ značí počet záporných znamének v n -tici $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ a $K^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}$ značí uzly, které vzniknou nahrazením singulárních bodů křížením s orientací podle příslušného znaménka.

Myšlenka Vassilievových invariantů je, že tento vztah můžeme obrátit a říct, že definujeme invariant v tak, aby od určitého počtu singulárních bodů byl nulový.

Definice 15. Invariant v se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně $\leq m$, pokud platí, že pro každý singulární uzel K^\bullet s počtem protnutí $> m$ platí $v(K^\bullet) = 0$. Řekneme, že je stupně m , pokud je stupně $\leq m$, ale není stupně $\leq m - 1$.

Spousta známých invariantů jsou Vassilievovy invarianty, nebo se dají na něj převést. Ovšem existují příklady invariantů, které nejsou Vassilievovy. Mezi ně, jak si ukážeme, nepatří třeba copánkový index. Důkaz provedeme pomocí sekvence tzv. *twistů* zmíněných v článcích (Trapp, 1994) a (Dean, 1994).

Definice 16. Buď K uzel, pro který zafixujeme jedno křížení, a $z \in \mathbb{Z}$. Pak *twist* K_z je uzel, který vznikne z K tak, že lokálně nahradíme zafixované křížení křížením s z závitů jako na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Twist uzlu

Věta 12. Buď $\{K_z : z \in \mathbb{Z}\}$ posloupnost twistů. Pokud je invariant $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ Vassilievův stupně nejvýše m , tak platí, že $v(K_z)$ tvoří polynom v z stupně nejvýše m .

Nyní využijeme pár lemmat z článku (Eisermann, 1999), které nám pomohou ukázat, že copánkový index není Vassilievův invariant.

Důsledek. Pokud je invariant v omezený na posloupnost twistů, tak je konstantní.

Důkaz. Mějme invariant v Vassilievova stupně nejvýše m . Podle věty 12 platí, že $v(K_z)$ tvoří polynom v z stupně nejvýše m . Jelikož je v také omezený, tak to znamená, že tento polynom je konstantní. Dále, jelikož je součástí posloupnosti twistů uzly $K_0 = K$ i K_1 , kde dochází ke změně orientace křížení, tak $v(K) = v(K_0) = v(K_1) = v(K)$. Jelikož jsme schopni změnou orientace křížení dostat unknot, tak v musí být nutně konstantní. \square

Lemma 13. *Copánkové číslo $s(K)$ je omezené na posloupnost twistů.*

Důkaz. Mějme uzel K a jeho copánkový index $s(K)$. Pak si vezměme z věty 11 copánek $b \in B_{s(K)}$ tak, že K je ekvivalentní uzávěru K_b . Nyní si zafixujeme jedno křížení a budeme provádět twisty. Twisty zhora pak tedy dávají horní mez na copánkové číslo K_z . Zároveň platí, že $s(K) > 0$. Tedy $s(K)$ je omezené na posloupnost twistů. \square

Věta 14. *Bud' $s(K)$ copánkový index uzlu K . Pak pokud invariant $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje, že $|v(K)| \leq f(s(K))$ pro nějakou funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a pro všechny uzly $K \in \mathcal{K}$, pak v není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Důkaz. Jelikož je copánkový index omezený na posloupnost twistů dle lemmatu 13 a zároveň dokážeme omezit hodnotu invariantu pomocí funkce f , tak podle věty 4.2 je invariant v konstantní, nebo není Vassilievův invariant. \square

4.3 Barvení uzlů

Nyní využijeme znalosti z předchozí podkapitoly o copánkovém indexu. Zatímco v článku (Eisermann, 1999) se autor zabývá grupovými homomorfismy, my jeho výsledek zobecníme na quandleové barvení. Abychom ukázali, že se jedná o obecnější výsledek, tak si všimněme, že foxovo barvení nelze dostat jako $\text{Conj}(G)$ pro nějakou grupu G . Pokud ano, tak by grupa G byla velikosti 3, jenže jediná grupa velikosti 3 je cyklická grupa \mathbb{Z}_3 , která je abelovská. Jenže $\text{Conj}(\mathbb{Z}_3)$ je trivialní quandle $T_{\mathbb{Z}_3}$, což není foxovo barvení. Tedy jsme získali silnější výsledek, než který je v původním článku.

Věta 15. *Pro každý quandle Q platí, že počet obarvení $\text{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

Důkaz. Mějme fixně zadaný quandle Q . Uvažujme libovolný uzel K a copánek $b \in B_{s(K)}$, kde $K_b \cong K$. Pak platí, že máme-li konkrétní obarvení $f \in \text{Hom}(Q_K, Q)$, tak je jednoznačně určeno obarvením konců provázek v copánkové reprezentaci. Tedy platí, že $\text{Col}_Q(K)$ dokážeme omezit tak, že každému konci přiřadíme nějaký prvek z Q . Tedy

$$|\text{Col}_Q(K)| \leq |Q|^{s(K)}.$$

Použitím věty 14 dostáváme, že $\text{Col}_Q(K)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. \square

Důsledek. Mějme quandle Q . Pak platí, že není Vassilievův invariant, právě tehdy když není reduktivní.

Důkaz. Z věty 10 plyne, že $\text{Col}_Q(K)$ je konstantní, právě tehdy když Q je reduktivní. Z věty 15 plyne, že $\text{Col}_Q(K)$ je Vassilievův invariant, právě tehdy když je konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní. \square

Důsledek. Mějme grupu G . Pak platí, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1) G je nilpotentní;
- 2) quandle $\text{Conj}(G)$ je reduktivní.

Důkaz. V článku (Eisermann, 1999) bylo obdobným způsobem dokázáno, že grupa G je nilpotentní, právě tehdy když počet homomorfismů z fundamentální grupy uzlu do G je konstantní. Naopak z věty 10 plyne, že quandle $\text{Conj}(G)$ je reduktivní, právě tehdy když počet obarvení uzlu quandlem $\text{Conj}(G)$ je konstantní. Z toho plyne ekvivalence pro obě tvrzení. \square

4.4 Barvení linků

Obdobnou charakterizaci můžeme získat i pro linky. Ovšem, v tomto případě bude vše jednodušší. Nejprve se sluší říct, že musíme změnit definici barvení linku, jelikož pokud budeme uvažovat m -link, tak platí, že počet obarvení quandlem Q je rovno $|Q|^m$. Tedy $\text{Col}_Q(K)$ je konstantní pouze pro T_1 . To můžeme opravit tím, že nebudeme započítávat obarvení, která jsou triviální. Tedy $\text{Col}_Q^+(L) = \text{Col}_Q(L) - |Q|^l$, kde l je počet komponent linku L .

Věta 16. *Uvažujme quandle Q a link L s alespoň 2 komponentami. Pak platí, že $\text{Col}_Q^+(L)$ není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. Navíc $\text{Col}_Q^+(L)$ je konstantní, právě tehdy když Q je triviální quandle.*

Důkaz. První část je jen variací věty 15, kde místo uzlu uvažujeme link.

Dále, pokud je Q triviální quandle, tak jak platí, že $\text{Col}_Q^+(L) = 0$ pro všechny linky L . Tedy $\text{Col}_Q(L)$ je konstantní.

Naopak Uvažujme quandle Q , který není triviální. Pak jako L označíme 2-link a jako H hopf link.

Pro L platí, že $\text{Col}_Q^+(L) = 0$ pro všechny quandly Q .

Jelikož Q není triviální, tak existuje dvojice prvků $a, b \in Q$ taková, že $a \neq b$ a $a * b \neq b$. Pokud obarvíme H tak, že první komponentu obarvíme prvkem a a druhou komponentu obarvíme prvkem b , tak ze vztahu výše plyne, že H nejde touto dvojicí prvků obarvit. Tedy $\text{Col}_Q^+(L) < 0$ a $\text{Col}_Q(L)$ není konstantní. \square

Seznam použité literatury

- BONATTO, M. a STANOVSKÝ, D. (2021). A universal algebraic approach to rack coverings.
- BONATTO, M., CRANS, A. S. a WHITNEY, G. T. (2018). On the structure of hom quandles.
- BONATTO, M., CRANS, A. S., NASYBULLOV, T. a WHITNEY, G. T. (2020). Quandles with orbit series conditions.
- CHMUTOV, S., DUZHIN, S. a MOSTOVOY, J. (2011). Introduction to vassiliev knot invariants.
- DEAN, J. (1994). Many classical knot invariants are not Vassiliev invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, **3**(1), 7–10. ISSN 0218-2165,1793-6527. doi: 10.1142/S0218216594000034. URL <https://doi.org/10.1142/S0218216594000034>.
- EHRMAN, G., GURPINAR, A., THIBAUT, M. a YETTER, D. (2006). Toward a classification of finite quandles. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **17**. doi: 10.1142/S0218216508006270.
- EISERMANN, M. (1999). The number of knot group representations is not a vassiliev invariant. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16945432>.
- JEDLIČKA, P., PILITOWSKA, A. a ZAMOJSKA-DZIENIO, A. (2020). Distributive biracks and solutions of the yang–baxter equation. *International Journal of Algebra and Computation*, **30**(03), 667–683. ISSN 1793-6500. doi: 10.1142/s0218196720500150. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218196720500150>.
- JEŽEK, J. (2008). *Universal Algebra*. URL <https://ka.karlin.mff.cuni.cz/jezek/ua.pdf>.
- JOHNSON, D. (1980). Homomorphs of knot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **78**(1), 135–138. ISSN 00029939, 10886826. URL <http://www.jstor.org/stable/2043056>.
- JOYCE, D. (1982). A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23**, 37–65. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120011159>.
- MURASUGI, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: 10.1007/978-0-8176-4719-3_2. URL https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2.
- TRAPP, R. (1994). Twist sequences and Vassiliev invariants. volume 3, pages 391–405. doi: 10.1142/S0218216594000289. URL <https://doi.org/10.1142/S0218216594000289>. Random knotting and linking (Vancouver, BC, 1993).