



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Ondřej Chwiedziuk

## **Barvicí invarianty uzlů**

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační  
technologie

Studijní obor: Matematika pro informační  
technologie

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Barvicí invarianty uzlů

Autor: Ondřej Chwiedziuk

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra Algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Coloring invariants of knots

Author: Ondřej Chwiedziuk

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Základní pojmy</b>	<b>3</b>
<b>2 Quandly</b>	<b>6</b>
2.1 Souvislost . . . . .	8
2.2 Reduktivita . . . . .	10
<b>3 Trivální barvení</b>	<b>12</b>
<b>4 Barvení jako Vassilievův invariant</b>	<b>15</b>
4.1 Copánky . . . . .	15
4.2 Vassilievův invariant . . . . .	16
4.3 Barvení uzlů . . . . .	17
4.4 Barvení linků . . . . .	18
<b>Závěr</b>	<b>19</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>20</b>

# Úvod

Teorie uzlů je oblast topologie, která se zabývá uzly, což jsou jednoduché uzavřené křivky v trojrozměrném prostoru. Uzly samotné se v historii vyskytují v různých kulturách již od pravěku, ale teorie uzlů jako matematická disciplína vznikla až v 18. století. Mezi slavné matematiky, kteří se zasloužili o vznik a rozvoj této disciplíny, patří například C. F. Gauss (1777-1855), J. W. Alexander (1888-1971) nebo H. Seifert (1907-1996). Velký rozvoj nastal po druhé světové válce ve Spojených státech a Japonsku.

Mezi základní otázky patří, zda jsou dva uzly ekvivalentní, tedy zda je jeden z druhého možné získat spojitou deformací, aniž by se v nějakém okamžiku křivka protínala. Dlouho nebylo známo, jestli vůbec existuje algoritmus, který by dokázal rozhodnout, zda dva zadané uzly jsou ekvivalentní. Existence algoritmu byla prokázána Hakenem v roce 1962. Hass a Lagarias následně v roce 1991 dokázali, že jenom rozhodnutí, zda je uzel triviální, patří do kategorie NP.

Základní technikou rozlišování uzlů je hledání invariantů. Mezi nejznámější invarianty patří takzvané barvení uzlů. Z počátku se jednalo např. o Foxovo barvení, kdy je každý oblouk uzlového diagramu obarven jednou ze tří barev a platí, že na každém křížení se vyskytují všechny tři barvy, nebo je monochromatické. Tato technika se následně zobecnila na barvení pomocí quandlů.

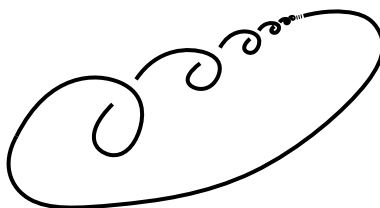
Quandle je algebraická struktura, která vznikla přesně pro účely rozlišování uzlů. Takzvaný fundamentální quandle dokonce jednoznačně určuje uzly až na orientaci a překlopení, což dokázal D. Joyce v roce 1982. Bohužel, výpočet fundamentálního quandle je příliš složitý pro praktické použití. Jako zjednodušení se počítá počet homomorfismů do konečného quandle. Tomu pak říkáme barvení pomocí quandle.

V této práci se zaměřím na charakterizaci quandleů, které dávají triviální obarvení pro všechny uzly. V první kapitole jsou definovány základní pojmy z teorie uzlů. Jedná se o víceméně neformální úvod do problematiky uzlů a sám o sobě neobsahuje žádné nové výsledky. Ve druhé kapitole se budu věnovat quandleům a jejich vlastnostem. Zaměřím se především na spojitost a dokážu pár základních tvrzení o rozkladu quandle na spojitě komponenty. Ve třetí kapitole zavedu pojem reduktivnosti quandle a ukážu, že barvení quandlem je pro všechny uzly triviální, právě tehdy když je quandle reduktivní. Na závěr ve čtvrté kapitole se zaměřím na koncept Vassilievových invariantů a dokážu, že barvení pomocí quandleů je Vassilievův invariant právě tehdy, když je quandle reduktivní. Také rozvinu výsledek z uzlů na linky a ukážu, že barvení pomocí quandleů je Vassilievův invariant pro linky, právě tehdy když je quandle triviální.

Ve své práci vycházím především ze tří článků: Eisermann (1999), Johnson (1980) a Bonatto a kol. (2020). Využívám podobné důkazové techniky, abych dosáhl svých výsledků.

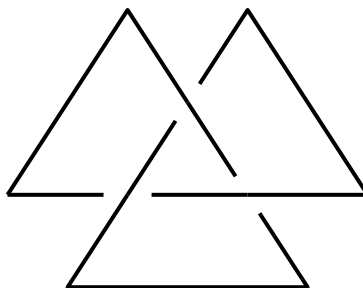
# 1. Základní pojmy

Základním matematickým objektem, o kterém tato práce pojednává, je *uzel*. Obvykle se tímto pojmem myslí vnoření uzavřené jednoduché křivky do trojrozměrného prostoru. Ovšem tahle definice skýtá drobná úskalí v podobě takzvaných *divokých uzlů* (v angličtině *wild knots*), které jde jen velmi obtížně studovat. Např. následující uzel má jako svoji součást nekonečnou posloupnost zatočení. A takový v reálném světě nikdy nepotkáme.



Obrázek 1.1: Divoký uzel

Abychom se těmito uzly vyhnuli, budeme používat definici (Murasugi, 1996, p. 6), využívající místo spojitých křivek pouze polygonální křivky. Tedy uzlem rozumíme jednoduchou uzavřenou lomenou čáru. Takovýto uzel se pak říká *krotký uzel* (v angličtině *tame knots*). Množinu všech takových uzlů značíme  $\mathcal{K}$ .



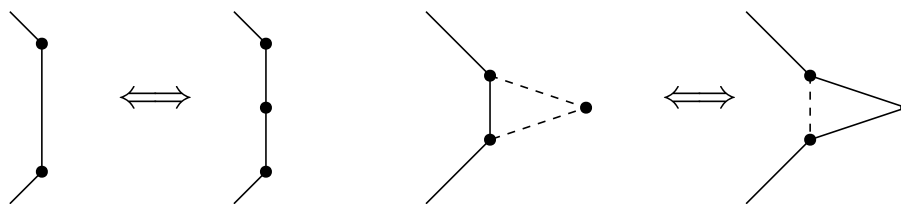
Obrázek 1.2: Trojlístek

Příbuzným pojmem je *link*, což je konečné disjunktní sjednocení uzlů. Množinu všech linků značíme  $\mathcal{L}$ . Linky sdílejí s uzly mnoho vlastností, ovšem v této práci se jim budeme věnovat pouze v poslední kapitole. Jiným zobecněním je *orientovaný uzel*, kdy si na uzlu zvolíme orientaci. Pokud jde o link, orientace je dána na každém uzlu zvlášť.

Existuje nespočetně mnoho uzlů, a proto se nabízí otázka, jak je klasifikovat. Velmi přirozený způsob je zavést *ekvivalenci* uzlů. V reálném světě si můžeme uzly představit jako provázky, které mají spleené konce a jsou různě zamotány do prostoru. Tento provázek můžeme libovolně deformovat, ale nesmíme ho přetrhnout. Na základě toho pak můžeme dva uzly prohlásit za ekvivalentní, pokud dokážeme jeden získat z druhého pomocí takovýchto deformací. Tento způsob klasifikace je velmi intuitivní, tudíž by bylo vhodné ho reflektovat i v matematické teorii.

Pro uzel  $K$  si nejprve zavedeme *základní pohyby* následovně:

- 1) Mějme hranu křivky  $K$  danou vrcholy  $A$  a  $B$ . Pak můžeme umístit nový vrchol  $C$  na hranu  $AB$ . Naopak, pokud existuje vrchol  $C$  na hraně  $AB$ , která náleží do uzlu  $K$ , můžeme ho odstranit.



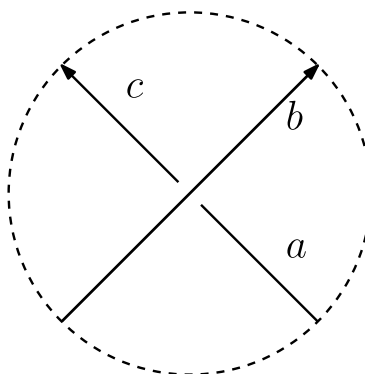
Obrázek 1.3: Základní pohyby

- 2) Mějme hranu  $AB$  v  $K$  a nějaký vrchol  $C$  ležící mimo  $K$ . Pak pokud platí, že  $ABC \cap K = AB$ , pak můžeme hranu  $AB$  nahradit hranami  $AC$  a  $CB$ . Inverzně můžeme za splnění obdobných podmínek nahradit hrany  $AC$  a  $CB$  za hranu  $AB$ .

Tyto dva pohyby reflektují intuitivní představu o tom, jak můžeme uzly deformovat. Následně můžeme definovat relaci ekvivalence tak, že uzly  $K$  a  $K'$  jsou ekvivalentní, pokud existuje konečná posloupnost základních pohybů, která transformuje jeden uzel v druhý. Tuto relaci značíme  $K \cong K'$ .

Jelikož je práce s objekty ve třech rozměrech velmi obtížná, zavedeme si *diagramy* uzlů. Jedná se o projekce uzlů do roviny, zatímco zachováváme informaci o kříženích tím, že spodní část křivky v místě křížení přerušíme. Zároveň zakážeme patologické případy, kdy dojde pouze k překryvu dvou částí křivky, který není křížením. Diagram uzlu  $K$  budeme značit  $D_K$ . Množinu všech diagramů uzlu  $K$  značíme  $D(K)$ .

Takto daný diagram se skládá z *oblouků*, jimiž rozumíme souvislé komponenty diagramu. Množinu všech oblouků diagramu  $D_K$  značíme  $O(D_K)$ . Dále místa, kde dochází k přerušení křivky, nazýváme *křížení*. Toto křížení budeme zapisovat jako uspořádanou trojici oblouků, které se v daném místě kříží ve tvaru  $(a, b, c)$  podle obrázku 1.4. Množinu všech křížení diagramu  $D_K$  značíme  $C(D_K)$ .

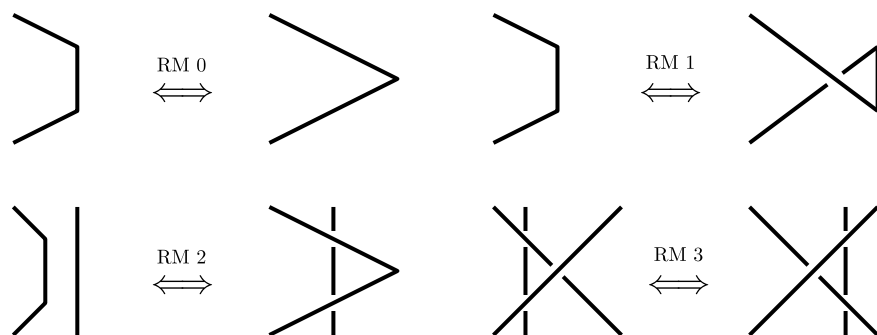


Obrázek 1.4: Křížení

Na diagramech můžeme definovat ekvivalenci. Dva diagramy  $D_K$  a  $D_{K'}$  jsou ekvivalentní, pokud platí, že  $K \cong K'$ . Ovšem, můžeme ekvivalenci zavést přímo na diagramech a to pomocí tzv. *Reidemeisterových pohybů*. Jsou obdobou základních pohybů pro diagramy a platí, že dva diagramy jsou ekvivalentní, pokud jeden získáme z druhého pomocí konečné posloupnosti Reidemeisterových pohybů. Reidemeisterovy pohyby jsou znázorněny na obrázku 1.5.

Na rozlišování uzlů budeme využívat *invarianty*. Invariantem  $I$  rozumíme takové zobrazení z množiny všech uzlů do nějaké množiny, které je konstantní na





Obrázek 1.5: Reidemeisterovy pohyby

ekvivalentních uzlech. Tedy pokud  $K_1 \cong K_2$ , pak  $I(K_1) = I(K_2)$ . Invariant se nazývá *úplný*, pokud platí, že  $I(K_1) = I(K_2)$  implikuje  $K_1 \cong K_2$ . Jelikož je ekvivalence uzlů daná pomocí Reidemeisterových pohybů, stačí ověřit, že se invariant zachovává na těchto pohybech.

Mezi základní invarianty patří třeba *crossing number*, což je nejmenší možný počet křížení přes všechny diagramy jednoho uzlu. Dalšími příklady jsou *unknotting number*, *bridge number* nebo *genus*. V této práci se budeme věnovat invariantům založeným na quandleovém barvení.

## 2. Quandly

Quandle vznikl jako algebraická struktura, která respektuje Reidemeisterovy pohyby, a je tak vhodná pro rozlišování uzlů. V této kapitole rozvinu základní teorii kolem těchto algebraických struktur.

**Definice 1.** *Quandlem*  $Q = (C, *)$  rozumíme algebraickou strukturu nad množinou  $C$  s binární operací  $*$ , splňující následující podmínky pro všechna  $a, b, c \in C$ :

- 1)  $a * a = a$  (idempotence);
- 2)  $\exists! x \in C : a * x = b$  (jednoznačné levé dělení, značíme  $x = a *^{-1} b$ );
- 3)  $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$  (levá samodistributivita).

*Příklad.* Příkladem quandle je například *triviální jednoprvkový quandle*  $Q = (\{a\}, *)$ , kde  $a * a = a$ . Značme ho jako  $T_1$ . *Triviální quandle* nad  $A$  definujeme tak, že vezmeme množinu  $A$  a definujeme  $a * b = b$  pro všechna  $a, b \in A$ . Takový quandle značíme  $T_A$ .

*Příklad.* Dalším příkladem může být quandle daný konjugací v grupě  $G$ . Pro  $a, b \in G$  definujeme  $a * b = aba^{-1}$ . Tento quandle značíme  $\text{Conj}(G)$ .

Na quandlech bychom nyní zavedli základní pojmy běžné i pro jiné algebraické struktury, jako homomorfismy, podalgebry a faktoralgebry běžné v univerzální algebře. Pomocí nich si pak můžeme lépe porozumět vlastnostem quandlů.

**Definice 2.** Mějme quandly  $Q$  a  $W$ . Pak *quandlovým homomorfismem*  $\varphi : Q \rightarrow W$  rozumíme zobrazení, které zachovává quandlovou operaci, tedy  $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$  pro všechna  $a, b \in Q$ .

**Definice 3.** Mějme quandle  $(Q, *)$ . Pak *podquandlem*  $W$  rozumíme dvojici  $(W, *|_W)$ , kde  $W \subseteq Q$  a platí, že  $W$  je uzavřená na operaci  $*$  jakožto zúžení operace z  $Q$ . Vztah značíme  $W \preceq Q$ .

**Definice 4.** Buď  $Q$  quandle. Na něm zavedeme relaci ekvivalence  $\alpha$  takovou, že  $[a]_\alpha * [b]_\alpha = [a * b]_\alpha$  pro všechna  $a, b \in Q$ . Vzniklý quandle definovaný na blocích ekvivalence značíme  $Q / \alpha$  a nazýváme *faktorquandlem* quandle  $Q$  podle ekvivalence  $\alpha$ .

Víme, že  $a \mapsto [a]_\alpha$  je homomorfismus z  $Q$  na  $Q / \alpha$ . Také platí, že pokud máme homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ , pak jádro, tj množina  $\text{Ker } \varphi = \{(a, b) \in Q \times Q : \varphi(a) = \varphi(b)\}$ , tvoří kongruenci na  $Q$  a faktorquandle  $Q / \text{Ker } \varphi$  je izomorfní s obrazem  $\text{Im } \varphi(Q) \preceq W$ . Jedná se o klasický výsledek univerzální algebry.

Nyní tyto pojmy využijeme, abychom definovali fundamentální quandle. Ten je základním nástrojem pro studium barvení uzlů.

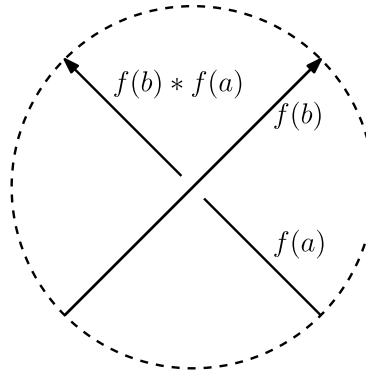
**Definice 5.** *Volným quandlem*  $Q_X$  nad neprázdnou množinou  $X$  rozumíme quandle takový, že pro zobrazení  $f : X \rightarrow Q$ , kde  $Q$  je libovolný quandle, existuje právě jeden homomorfismus  $\varphi : Q_X \rightarrow Q$  takový, že  $\varphi(x) = f(x)$  pro všechna  $x \in X$ .

**Definice 6.** Mějme  $K$  uzel,  $D_K$  jeho diagram, pak *fundamentální quandlem*  $Q_K$  rozumíme volný quandle nad množinou oblouků  $O(D_K)$  vyfaktorizovaný relacemi dané kříženími  $C(D_K)$  takové, že pro každé křížení  $(a, b, c) \in C(D_K)$  platí  $a * b = c$ .

**Tvrzení 1** ((Joyce, 1982)). *Fundamentální quandle  $Q_K$  je úplným invariantem až na orientaci.*

Fundamentální quandle dává sice velmi silný invariant, ale je těžké ho spočítat. Fundamentální quandle je nekonečný a určit, zda jsou dva takové quandle izomorfní, je velmi obtížné. Proto se spíše používá z něj odvozený invariant, kterému se říká *quandlové barvení*. Jedná se homomorfismus z fundamentálního quandle do námi zvoleného konečného quandle. Tento invariant je sice slabší, ale lze mnohem snadněji spočítat. Dále lze odvodit další invariant a to počet takových homomorfismů.

**Definice 7.** Mějme uzel  $K$ , jeho fundamentální quandle  $Q_K$  a libovolný quandle  $W$ . Pak *početem obarvení*  $\text{Col}_W(K)$  rozumíme počet homomorfismů  $\varphi : Q_K \rightarrow W$ . Tedy  $\text{Col}_W(K) = |\text{Hom}(Q_K, W)|$ .



Obrázek 2.1: Barvení pomocí quandle

Jak takový invariant funguje, si ukážeme na příkladu *Foxova quandle*. Začneme definicí tohoto quandle. Originálně je Foxovo barvení definováno jako barvení oblouků jednou ze tří barev tak, aby na každém křížení byly měly všechny tři oblouky buď stejnou barvu, nebo navzájem různou. Nyní si reformulujeme toto barvení jako homomorfismus z fundamentálního quandle do Foxova quandle. Foxův quandle  $F$  definujeme následující tabulkou:

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Nyní si zvolme uzel  $K$  a jeho fundamentální quandle  $Q_K$ . Pro každý oblouk  $a \in O(D_K)$  si zvolme jeden z prvků  $f(a) \in F$  tak, abychom dostali homomorfismus  $f : Q_K \rightarrow F$ . Jelikož je fundamentální quandle  $Q_K$  definovaný na obloucích diagramu, tak každý homomorfismus lze vyjádřit tímto způsobem. Naopak ne pro každé přiřazení prvků  $f(a)$  dostaneme homomorfismus. Pro náš případ si

všimneme, že pro křížení  $(a, b, c)$  platí, že když  $f(a) = f(b)$ , pak i  $f(c) = f(a)$ . Naopak, pokud  $f(a) \neq f(b)$ , tak  $f(c) \neq f(a), f(b)$ , což nám dává přesně pravidla Foxova barvení.

## 2.1 Souvislost

V této sekci se budeme zabývat souvislými quandle. Tato třída je důležitá hned ze dvou důvodů. Prvním je, že všechny konečné quandle lze rozložit na souvislé podquandle. Druhým je, že fundamentální quandle uzlu je souvislý.

**Definice 8.** Mějme quandle  $Q$ . Pak  $L_q$  značí levou translaci o  $q \in Q$ , tedy  $L_q(x) = q * x$ . Grupa generovaná levými translacemi se značí  $\text{Inn}(Q)$  a nazývá se *grupa vnitřních automorfismů* quandle  $Q$ .

**Definice 9.** Mějme quandle  $Q$ . Pokud platí, že je působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  tranzitivní, pak říkáme, že  $Q$  je souvislý quandle.

**Lemma 2.** Mějme konečný quandle  $Q$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- 1)  $Q$  je souvislý;
- 2) pro každé dva prvky  $a, b \in Q$  platí, že existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

kde  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

*Důkaz.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2): Mějme  $a, b \in Q$ . Jelikož je  $Q$  konečný, tak platí, že  $|\text{Inn}(Q)| \leq |Q|!$ , tedy  $\text{Inn}(Q)$  je konečná grupa. Tudíž pro každý prvek  $\varphi \in \text{Inn}(Q)$  existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že  $\varphi = L_{x_1}^{\varepsilon_1} \circ L_{x_2}^{\varepsilon_2} \circ \dots \circ L_{x_n}^{\varepsilon_n}$ , kde  $L_x$  je levá translace o  $x$ .

Jelikož  $\text{Inn}(Q)$  je tranzitivní, tak existuje  $\varphi \in \text{Inn}(Q)$  taková, že  $\varphi(a) = b$ . Tedy existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

- (2)  $\Rightarrow$  (1): Jelikož každé dva prvky dokážeme spojit konečnou posloupností prvků, tak platí, že grupa  $G$  daná levými translacemi  $\text{Inn}(Q)$  působí tranzitivně na  $Q$ . Tudíž je  $Q$  souvislý.

□

**Lemma 3.** Mějme quandle  $Q$  a grupu vnitřních automorfismů  $\text{Inn}(Q)$ . Pak platí, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  rozkládá  $Q$  na orbity a každá orbita je podquandle.

*Důkaz.* Zafixujme si orbitu nějakou  $W$ . Tak platí, že  $W$  je uzavřená na operaci  $*$ , jelikož pokud  $a, b \in W$ , tak  $a * b = L_a(b) \in W$ . Zároveň je uzavřená na levé dělení, jelikož pokud  $a, b \in W$ , tak  $a *^{-1} b = L_a^{-1}(b) \in W$ . Tedy  $W$  je podquandle.  $\square$

*Příklad.* Mezi souvislé quandle patří např. foxův quandle  $F$ . Naopak, mezi nesouvislé patří triviální quandle  $T_n$ , kde  $n > 1$ . Tyto quandle se rozpadnou na  $n$  jednoprvkových podquandlů  $T_1$ , který je ale triviálně souvislý.

Obecně neplatí, že působením  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  dostaneme souvislé quandle. Je to z toho důvodu, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na jednu orbitu  $Q'$  může být tranzitivní, ale z pohledu té orbity se jedná o působení  $\text{Aut}(Q')$ . A tedy může nastat, že  $\text{Inn}(Q')$  není tranzitivní na  $Q'$ . Pro konečné quandle však platí, že se dají rekurzivně rozložit na souvislé podquandle.

**Tvrzení 4** ((Ehrman a kol., 2006)). *Mějme quandle  $Q$ . Pak platí, že se dá jednoznačně rozložit na maximální souvislé podquandle  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ .*

*Důkaz.* Mějme quandle  $Q$  a grupu vnitřních automorfismů  $\text{Inn}(Q)$ . Podle lemmatu 3 platí, že působení  $\text{Inn}(Q)$  na  $Q$  rozkládá  $Q$  na orbity a každá orbita je podquandle. Jelikož je  $Q$  konečný, tak má konečně mnoho orbit. Pokud je orbita souvislá, tak jsme skončili. Pokud ne, znovu aplikujeme lemma 3. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme rozklad na souvislé podquandle. Jelikož je  $Q$  konečný a velikost orbit se zmenšuje, tak se vždy dostaneme do souvislého podquandlu.

Rozklad je jednoznačný, jelikož pokud by existovaly dva různé rozklady, tak by existovaly dva různé souvislé podquandle  $W$  a  $W'$ , které se protínají, jenže by to znamenalo, že se dokážeme z každého prvku v  $W$  dostat do  $W'$  a naopak, což by znamenalo, že tvoří jeden souvislý quandle a jsou shodné, což je spor.  $\square$

**Definice 10.** Mějme quandle  $Q$ . Pak *rozkladem* quandle  $Q$  rozumíme rozklad na souvislé podquandle  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ . Subquandle  $Q_i$  nazýváme *komponenta*  $Q$ .

Nyní se podíváme, jak se chová souvislost při homomorfismech.

**Lemma 5** ((Bonatto a kol., 2018)). *Uvažujme quandle  $Q$  a  $W$ , rozklad  $Q$  jako  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  a homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ . Pak platí, že homomorfním obrazem  $Q_i$  je souvislý podquandle  $\varphi(Q_i) = W_i \preceq W$ .*

*Důkaz.* Mějme  $a, b \in Q$  ve stejné komponentě. Pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b.$$

Nyní, když máme homomorfismus  $\varphi : Q \rightarrow W$ , tak platí, že

$$\varphi(x_1) *^{\varepsilon_1} (\varphi(x_2) *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (\varphi(x_n) *^{\varepsilon_n} \varphi(a)) \dots) = \varphi(b).$$

Tedy platí, že  $\varphi(a)$  a  $\varphi(b)$  jsou ve stejné komponentě.  $\square$

Speciálně, pokud je  $Q$  souvislý quandle, tak jeho homomorfním obrazem je také souvislý quandle.

**Lemma 6** ((Joyce, 1982)). *Mějme uzel  $K$  a jeho fundamentální quandle  $Q_K$ . Pak platí, že  $Q_K$  je souvislý quandle.*

*Důkaz.* Mějme  $a, b \in Q_K$  generátory. Pak chceme ověřit, že existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q_K$  taková, že  $x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b$ . Jenže, jelikož jsou  $a, b$  generátory, tak odpovídají nějakým obloukům  $a', b' \in O(D_K)$ . Posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pak dostaneme tak, že začneme v  $a'$  a budeme ve směru k  $b'$ . Pokaždé, když narazíme na křížení, kde je  $x'_i$  most, tak si přidáme  $x_i$  do posloupnosti s příslušným znaménkem operace. Jelikož  $a, b$  leží na stejném uzlu, tak se tímto způsobem dostaneme z  $a$  do  $b$ .

Tohle platí pro všechny generátory, tedy i pro všechny prvky  $Q_K$ , jelikož každý prvek je generován posloupností generátorů. Tudíž je  $Q_K$  souvislý quandle.  $\square$

Z lemat 5 a 6 plyne, že obraz fundamentálního quandlu je souvislý quandle. Jenže to znamená, že nám při výpočtu  $\text{Col}_Q(K)$  stačí uvažovat pouze souvislé quandly. Speciálně je jedním z důsledků následující lemma:

**Lemma 7.** *Mějme quandle  $Q$ , který není souvislý, a uzel  $K$ . Pak platí, že*

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|,$$

kde  $Q_i$  jsou komponenty rozkladu  $Q$ .

*Důkaz.* Mějme homomorfismus  $\varphi \in \text{Hom}(Q_K, Q)$ . Jelikož je  $Q_K$  podle 6 souvislý, tak podle lematu 5 platí, že  $\varphi(Q_K)$  je souvislý podquandle  $Q$ . Jelikož se  $Q$  rozkládá na komponenty, které jsou souvislé, tak platí, že  $\varphi$  náleží do  $\text{Hom}(Q_K, Q_i)$  pro nějaké  $i$ . Zároveň patří nejvýše do jedné takové množiny, jelikož jsou orbity disjunktní. Jelikož je  $\varphi$  libovolný homomorfismus, tak platí, že

$$\text{Col}_Q(K) = \sum_{i=1}^n |\text{Col}_{Q_i}(K)|.$$

$\square$

## 2.2 Reduktivita

V této sekci se budeme zabývat reduktivními quandly. Tyto quandly jsou studovány v člancích (Bonatto a kol., 2020), (Bonatto a Stanovský, 2021) a (Jedlička a kol., 2020). Ovšem jejich motivace při definici reduktivity je čistě algebraická. My se budeme zabývat reduktivitou ve vztahu k uzlům a jejich barvením.

**Definice 11.** Buď  $n \in \mathbb{N}$ . Pak quandle  $Q$  nazýváme  *$n$ -reduktivní*, pokud platí, že všechny  $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in Q$  splňují:

$$((\dots (a * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n = ((\dots (b * c_1) \dots) * c_{n-1}) * c_n$$

Říkáme, že  $Q$  je *reduktivní*, pokud existuje  $n \in \mathbb{N}$ , že je  $n$ -reduktivní.

Zde chci definovat rozklad na orbity rekursivním vztahem jako v (?).

**Tvrzení 8.** *Bud'  $Q$  quandle. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

*1)  $Q$  je reduktivní.*

*2) Pro každou komponentu  $Q_i$  rozkladu  $Q$  platí, že  $|Q_i| = 1$ .*

*Důsledek.* Jediný souvislý reduktivní quandle je triviální quandle velikosti 1.

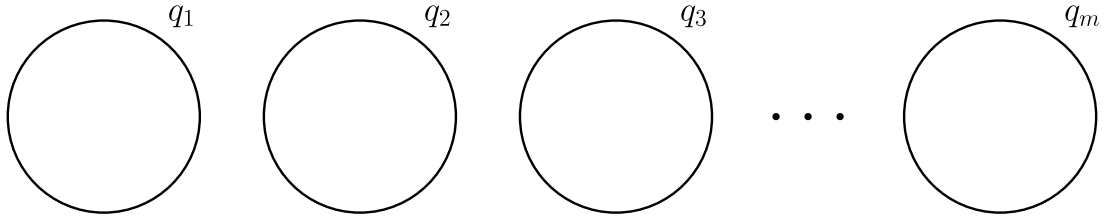
### 3. Trivální barvení

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že homomorfním obrazem fundamentálního quandle je souvislý quandle. Nyní naopak ukážeme, že pro každý netriviální souvislý quandle existuje takový uzel, který má netriviální obarvení. Na základě toho ukážeme, že quandle dává triviální obarvení pro všechny uzly, právě tehdy když je reduktivní.

**Věta 9.** *Pro každý souvislý quandle  $Q$ ,  $|Q| > 1$  existuje takový uzel  $K$ , že  $\text{Col}_Q(K) > |Q|$ .*

*Důkaz.* Pro důkaz této věty použijeme konstrukci, která se poprvé objevila v článku (Johnson, 1980), a kterou si upravíme tak, aby řešila náš problém. Konstrukce je následující:

Nejprve uvažujme orientovaný  $m$ -link,  $m = |Q|$ , takový, že každou komponentu obarvíme jiným prvkem z  $Q$ . Následně budeme postupně propojovat pomocí pásků tak dlouho, dokud nám nevznikne uzel. Na konci dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení, jelikož každá komponenta bude obarvena jiným prvkem z  $Q$  a toto obarvení se v průběhu konstrukce zachovává. Z toho pak bude plynout, že  $\text{Col}_Q(K) > |Q|$ .



Obrázek 3.1:  $m$ -link

Mějme zadaný souvislý quandle  $Q$ . Jelikož je  $Q$  souvislý, pak podle lemmatu 2 existuje konečná posloupnost prvků  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$  taková, že

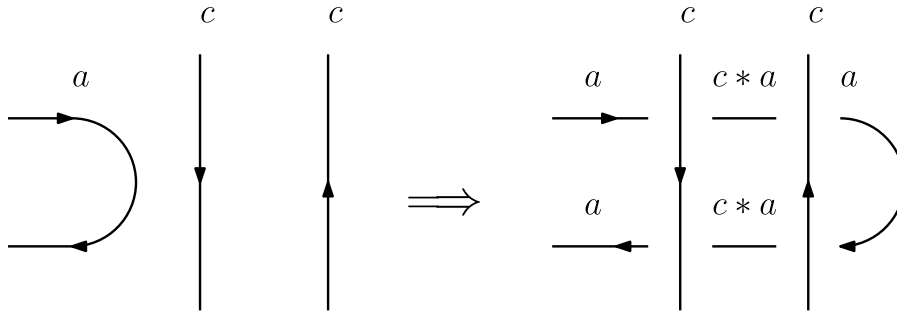
$$x_1 *^{\varepsilon_1} (x_2 *^{\varepsilon_2} (\dots *^{\varepsilon_{n-1}} (x_n *^{\varepsilon_n} a)) \dots) = b,$$

pro každé dva prvky  $a, b \in Q$ . Naším cílem bude postupně provádět levé stranslace  $L_{x_1}^{\varepsilon_1}, L_{x_2}^{\varepsilon_2}, \dots, L_{x_n}^{\varepsilon_n}$  tak, abychom na konci mohli propojit dvě komponenty uzlu a získat tak link o  $m - 1$  komponentách. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel.

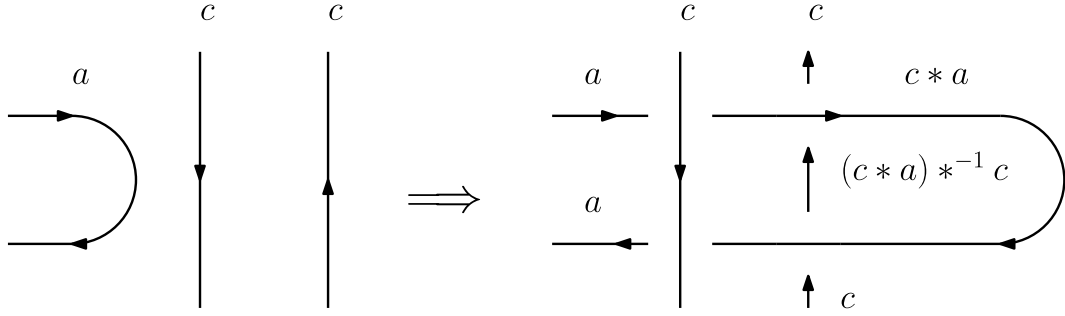
Začneme s komponentou obarvenou prvkem  $a$ . Z ní povedeme pásek. Pokud pásek bude křížovat s nějakou jinou komponentou, tak budeme postupovat podle jedné z následujících situací:

- 1) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c \neq x_1$  pak pásek povedeme pod celou komponentou. Dojde tedy k situaci na obrázku 3.2. Tedy pásek povedeme pod celou komponentou, aniž bychom změnili obarvení konce pásku i komponenty.



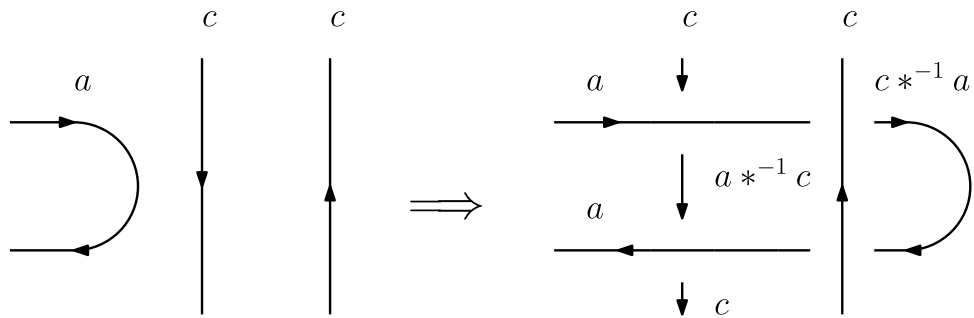


Obrázek 3.2: Pásek pod komponentou



Obrázek 3.3:  $x_1 * a$

- 2) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c = x_1$  a platí, že  $\varepsilon_1 = 1$ , pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.3. Konec pásku bude obarvený prvkem  $x_1 * a$ , zatímco komponenta obarvená prvkem  $x_1$  zůstane nezměněná.
- 3) Pokud se pásek kříží s komponentou obarvenou prvkem  $c = x_1$  a platí, že  $\varepsilon_1 = -1$ , pak pásek provlékneme skrz tuto komponentu způsobem jako na obrázku 3.4. Konec pásku bude obarvený prvkem  $x_1 *^{-1} a$ , zatímco komponenta obarvená prvkem  $x_1$  zůstane nezměněná.



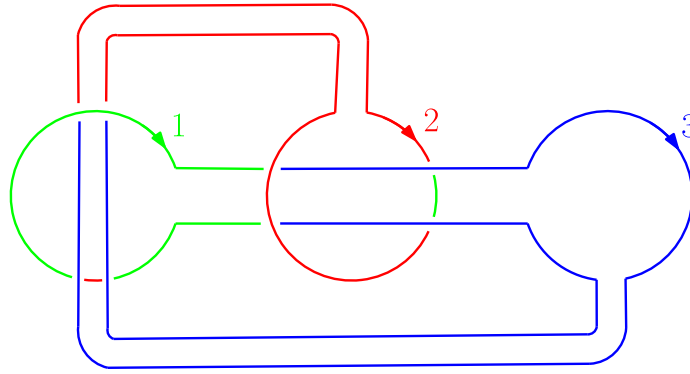
Obrázek 3.4:  $x_1 *^{-1} a$

Tento způsob budeme opakovat pro konec pásku tak dlouho, dokud konec pásku nebude obarvený prvkem  $b$ . Jelikož je posloupnost  $x_1, x_2, \dots, x_n$  konečná, tak k němu opravdu dojdeme. Následně pásek připojíme na komponentu obarvenou prvkem  $b$  a tím získáme link o  $m - 1$  komponentách.

Počet komponent je konečný a jednou iterací algoritmu jsme snížili počet komponent o jedna. Algoritmus budeme tedy opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme uzel. Takový uzel nazývá *stuhový uzel* (anglicky *ribbon knot*). Jelikož jsme každou komponentu  $|Q|$ -linku obarvili jiným prvkem z  $Q$  a algoritmus toto obarvení zachovává, dostaneme uzel, který bude mít netriviální obarvení. Tedy  $\text{Col}_Q(K) > |Q|$ .

□

*Příklad.* Nyní provedeme konstrukci pro foxův quandle  $F$ . Víme, že  $2 * 1 = 3$  a  $1 * 2 = 3$ . Nejprve propojíme komponenty 1 a 3, následně připojíme zbývající komponentu 2 a dostaneme stuhový uzel  $R_F$  jako na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Stuhový uzel pro foxův quandle

**Věta 10.** *Mějme konečný quandle  $Q$ . Pak platí jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- 1)  $\text{Col}_Q(K)$  je konstantní,
- 2)  $Q$  je reduktivní.

*Důkaz.* Pokud je  $Q$  souvislý a netriviální, pak podle věty 9 zkonstruujeme příslušný stuhový uzel  $R$  tak, že bude mít netriviální obarvení  $\text{Col}_Q(R) > |Q|$ . Zároveň lze unknot  $U$  obarvit triviálně, tedy  $\text{Col}_Q(U) = |Q|$ . Tedy  $\text{Col}_Q(K)$  není konstantní.

(1)  $\implies$  (2):

Tuto implikaci ukážeme obměnou. Předpokládáme, že  $Q$  není reduktivní.  $Q$  podle věty 4 rozkládá na komponenty  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ . Jelikož  $Q$  není reduktivní, pak z 8 víme, že existuje komponenta  $Q_i$  taková, že  $|Q_i| > 1$ . Označme si  $Q_i$  jako  $W$ . Pak podle 9 platí, že  $\text{Col}_W(K) > |W|$ . Jelikož  $W \preceq Q$ , tak podle lematu 7 platí, že  $\text{Col}_Q(K) \geq \text{Col}_W(K) - |W| + |Q| > |Q|$ . A tedy není konstantní.

(2)  $\implies$  (1):

Jestliže  $Q$  je reduktivní, pak z 8 platí, že všechny komponenty jsou triviální. Z 5 plyne, že  $\text{Col}_Q(K) = |Q|$ , a tudíž  $\text{Col}_Q(K)$  je konstantní pro všechny uzly  $K$ .

□

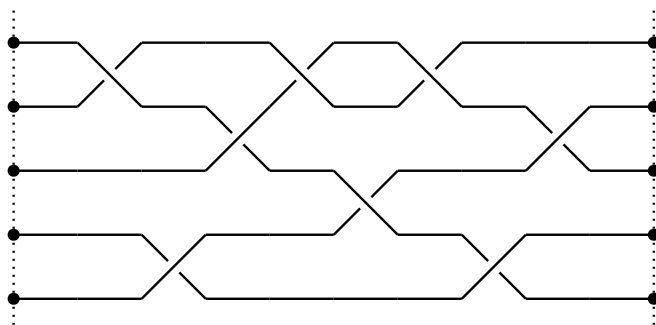
# 4. Barvení jako Vassilievův invariant

## 4.1 Copánky

Jedním z užitečných pohledů na uzly je přes takzvané copánky. Něco o historii.

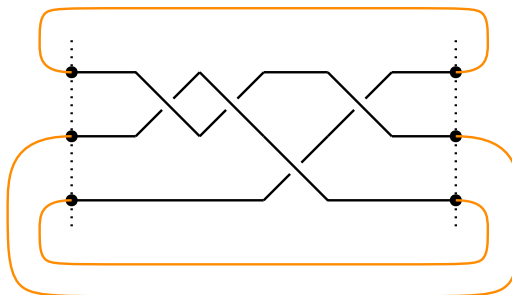
**Definice 12.** Buď zadané číslo  $n$ . Pak  $B_n$  značí grupu danou prezentací  $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle$ , kde  $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}; |i - j| \geq 2$ .

Copánky si můžeme představit jako  $n$  šňůrek natažených mezi dvěma deskami, přičemž pro ně platí Reidemeisterovy pohyby 2 a 3. Skládání  $a \cdot b$  funguje tak, že se vezme spodní deska z  $a$  a přilepí se k horní desce  $b$  tak, aby na sebe navazovaly provázky, a pak se ty desky odstraní, aby byly opět jenom horní a dolní. Prvky  $b$  tedy budeme ztotožňovat s příslušnou geometrickou konstrukcí.



Obrázek 4.1: Příklad copánku

Mějme copánkovou grupu  $B_n$ . Pak *uzávěrem*  $b \in B_n$  rozumíme uzel  $K_b$  takový, který vznikne z  $b$  tak, že konce šňůrek přilepíme k sobě tak, že  $i$ -tá šňůrka zhora se přilepí k  $i$ -té šňůrce zdola. Tímto způsobem nevznikne vždy uzel podle naší definice, ale obecně vznikne *link*, což je disjunktní sjednocení konečně mnoha uzlů.



Obrázek 4.2: Lepení copánku

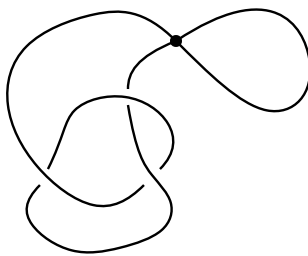
**Věta 11** (Alexanderova věta). *Pro každý uzel  $K$  existuje číslo  $n \in \mathbb{N}$  a  $b \in B_n$ , že  $K$  je ekvivalentní uzávěru  $K_b$ .*

**Definice 13.** Pro daný uzel  $K$  rozumíme *copánkovým indexem*  $s(K)$  (anglicky *braid index*) nejmenší číslo  $n$  takové, že existuje  $b \in B_n$  tak, že  $K$  je ekvivalentní uzavěru  $K_b$ .

*Pozorování.* Copánkové číslo  $s(K)$  je invariant.

## 4.2 Vassilievův invariant

**Definice 14.** *Singulárním uzlem*  $K^\bullet$  s  $n$  protnutími rozumíme uzel takový, že sám sebe protíná v  $n$  bodech právě dvěma úseky.



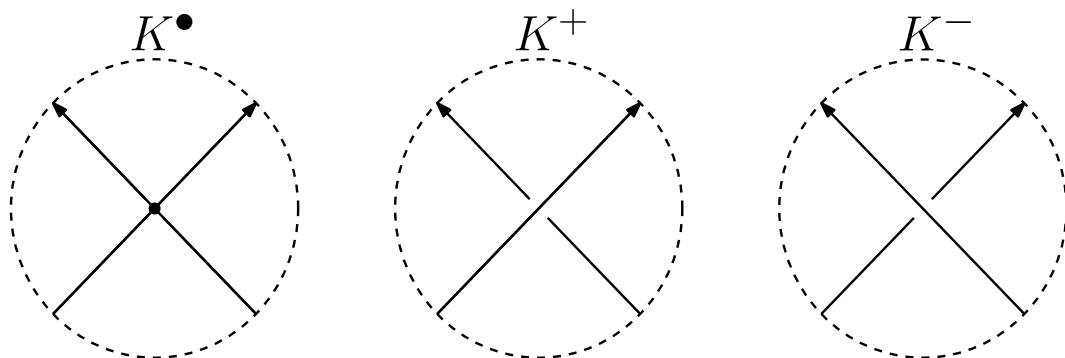
Obrázek 4.3: Singulární uzel s 1 křížením

**Definice 15.** Mějme singulární uzel  $K^\bullet$  s  $n \geq 1$  a invariant  $v$ , zvolíme si nějaké protnutí. Pak pro dané protnutí *Vassilievovou skein relací* nazýváme rovnici:

$$v(K^\bullet) = v(K^+) - v(K^-)$$

,

kde  $K^\bullet$ ,  $K^+$  a  $K^-$  odpovídají obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Vassilievova skein relace

**Definice 16.** Invariant  $v$  se nazývá *Vassilievův*, nebo také *konečného typu* stupně  $\leq m$ , pokud platí, že pro každý singulární uzel  $K^\bullet$  s počtem protnutí  $> m$  platí  $v(K^\bullet) = 0$ . Řekneme, že je stupně  $m$ , pokud je stupně  $\leq m$ , ale není stupně  $\leq m - 1$ .

**Tvrzení 12.** *Vzorec pro Vassilievův invariant.*

V článku (Eisermann, 1999) se autor zabývá otázkou, zda je počet grupových homomorfismů z fundamentální grupy do zvolené grupy  $G$  Vassilievův invariant. Jeho výsledkem je charakterizace, že pokud je  $G$  nilponentní, tak je počet homomorfismů konstantní, jinak není Vassilievův invariant. V této kapitole se pokusíme zobecnit tento výsledek na quandle.

Motivací je, že fundamentální quandle je úplný invariant, tedy plně charakterizuje uzel. Zároveň platí, že grupové homomorfismy mají svojí reprezentaci i jako quandleové homomorfismy, ovšem ne každý quandleový homomorfismus má svojí reprezentaci jako grupový homomorfismus. Tedy pokud bychom dokázali obdobný výsledek pro quandleové homomorfismy, tak bychom mohli získat silnější výsledek, než který je v původním článku.

### 4.3 Barvení uzlů

**Věta 13** ((Eisermann, 1999)). *Buď  $s(K)$  copánkový index uzlu  $K$ . Pak pokud invariant  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$  splňuje, že  $|v(K)| \leq f(s(K))$  pro nějakou funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a pro všechny uzly  $K \in \mathcal{K}$ , pak  $v$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

**Věta 14.** *Pro každý quandle  $Q$  platí, že počet obarvení  $\text{Col}_Q(K)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní.*

*Důkaz.* Mějme fixně zadaný quandle  $Q$  a pro něj uvažujme libovolný uzel  $K$  a jeho minimální copánkovou reprezentaci odpovídající copánkovému indexu  $s(K)$ . Pak platí, že máme-li konkrétní obarvení  $f \in \text{Hom}(Q_K, Q)$ , tak je jednoznačně určeno obarvením konců provázků v copánkové reprezentaci. Tedy platí, že  $\text{Col}_Q(K)$  dokážeme omezit tak, že každému konci přiřadíme nějaký prvek z  $Q$ . Tedy

$$\text{Col}_Q(K) \leq |Q|^{s(K)}.$$

Použitím věty 13 dostáváme, že  $\text{Col}_Q(K)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. □

*Důsledek.* Mějme quandle  $Q$ . Pak platí, že není Vassilievův invariant, právě tehdy když není redukativní.

*Důkaz.* Z věty 10 plyne, že  $\text{Col}_Q(K)$  není konstantní, právě tehdy když  $Q$  není redukativní. Z věty 14 plyne, že  $\text{Col}_Q(K)$  není Vassilievův invariant, právě tehdy když není konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní. □

*Důsledek.* Mějme grupu  $G$ . Pak platí, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1)  $G$  je nilpotentní;
- 2) quandle  $\text{Conj}(G)$  je redukativní.

*Důkaz.* V článku (Eisermann, 1999) bylo obdobným způsobem dokázáno, že grupa  $G$  je nilpotentní, právě tehdy když počet homomorfismů z fundamentální grupy uzlu do  $G$  je konstantní. Naopak z věty 10 plyne, že quandle  $\text{Conj}(G)$  je redukativní, právě tehdy když počet obarvení uzlu quandlem  $\text{Conj}(G)$  je konstantní. Tedy obě tvrzení jsou ekvivalentní. □

## 4.4 Barvení linků

Obdobnou charakterizaci můžeme získat i pro linky. Ovšem, v tomto případě bude vše jednodušší.

**Věta 15.** *Uvažujme quandle  $Q$  a link  $L$  s alespoň 2 komponentami. Pak platí, že  $\text{Col}_Q(L)$  není Vassilievův invariant, nebo je konstantní. Navíc  $\text{Col}_Q(L)$  je konstantní, právě tehdy když  $Q$  je triviální quandle.*

*Důkaz.* První část je jen variací věty 14, kde místo uzlu uvažujeme link.

Dále, pokud je  $Q$  triviální quandle, tak jak platí, že  $\text{Col}_Q(L) = |Q|^l$ , kde  $l$  je počet komponent linku  $L$ . Tedy  $\text{Col}_Q(L)$  je konstantní pro všechny linky  $L$  s  $l$  komponentami.

Naopak Uvažujme quandle  $Q$ , který není triviální. Pak jako  $L$  označíme 2-link a jako  $H$  hopf link.

Pro  $L$  platí, že  $\text{Col}_Q(L) = |Q|^2$  pro všechny quandly  $Q$ .

Jelikož  $Q$  není triviální, tak existuje dvojice prvků  $a, b \in Q$  taková, že  $a \neq b$  a  $a * b \neq b$ . Pokud obarvíme  $H$  tak, že první komponentu obarvíme prvkem  $a$  a druhou komponentu obarvíme prvkem  $b$ , tak ze vztahu výše plyne, že  $H$  nejde touto dvojicí prvků obarvit. Tedy  $\text{Col}_Q(H) < |Q|^2$ . Tedy  $\text{Col}_Q$  není konstantní.  $\square$

# Závěr

Toto je závěr mé práce.

# Seznam použité literatury

- BONATTO, M. a STANOVSKÝ, D. (2021). A universal algebraic approach to rack coverings.
- BONATTO, M., CRANS, A. S. a WHITNEY, G. T. (2018). On the structure of hom quandles.
- BONATTO, M., CRANS, A. S., NASYBULLOV, T. a WHITNEY, G. T. (2020). Quandles with orbit series conditions.
- EHRMAN, G., GURPINAR, A., THIBAUT, M. a YETTER, D. (2006). Toward a classification of finite quandles. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **17**. doi: 10.1142/S0218216508006270.
- EISERMANN, M. (1999). The number of knot group representations is not a vassiliev invariant. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16945432>.
- JEDLIČKA, P., PILITOWSKA, A. a ZAMOJSKA-DZIENIO, A. (2020). Distributive biracks and solutions of the yang–baxter equation. *International Journal of Algebra and Computation*, **30**(03), 667–683. ISSN 1793-6500. doi: 10.1142/s0218196720500150. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218196720500150>.
- JOHNSON, D. (1980). Homomorphs of knot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **78**(1), 135–138. ISSN 00029939, 10886826. URL <http://www.jstor.org/stable/2043056>.
- JOYCE, D. (1982). A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23**, 37–65. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120011159>.
- MURASUGI, K. (1996). *Fundamental Concepts of Knot Theory*, pages 5–24. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-0-8176-4719-3. doi: 10.1007/978-0-8176-4719-3\_2. URL [https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3_2).