Cvičení 5 – Dělitelnost v oborech

4. listopadu 2025

Příklad 1. Spočítejte v oborech $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$ ireducibilní rozklady následujících polynomů:

a) $x^3 - 2$,

b) $x^4 - x^2 - 2$.

Příklad 2. Ukažte, že všechny ireducibilní polynomy nad $\mathbb{R}[x]$ mají stupeň ≤ 2.

Příklad 3. Najděte všechny ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}_2$ stupně nejvýše 3.

Příklad 4. Ukažte, že pro každé $t \in \mathbb{Q}$ a $f \in \mathbb{Q}[x]$ platí, že $f(x)$ je ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$ právě když $f(x+t)$ je ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$.

Příklad 5. Spočítejte ireducibilní rozklady prvků 3, 5, 6, $10 - 6i$ v $\mathbb{Z}[i]$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda existuje více rozkladů čísla 6 v oborech $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ a pokud ano, zkuste je najít všechny.

Příklad 7. Spočítejte NSD pro následující dvojice:

a) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ a $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ v $\mathbb{Z}[x]$,

b) 5 a $7 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$,

c) 3 a $2 + \sqrt{-5}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,

d) $x^3 + x^2 + x + 1$ a $x^2 - 2x + 2$ v $\mathbb{Z}_3[x]$,

e) $6 - 3\sqrt{3}$ a $3 + \sqrt{3}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Příklad 8. Vysvětlete následující jev:

- V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ platí, že $2(-2) = (\sqrt{-3}+1)(\sqrt{-3}-1)$, a proto se jedná o obor s jednoznačným rozkladem.
- v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $2\sqrt{2} = (-4+3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$, ale jedná se o obor s jednoznačným rozkladem.

Příklad 9. Pro obor D budeme značit $\mathrm{U}(D)$ množinu všech invertibilních prvků. Určete $\mathrm{U}(Z)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}i)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ a $\mathrm{U}(\mathbb{C}[x])$.

Příklad 10. Určete $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\omega])$, kde $\omega = e^{\frac{3\pi i}{2}}$ je kořen polynomu $x^2 + x + 1$. Nakreslete prvky $\mathbb{Z}[\omega]$, v komplexní rovině a množinu $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\omega])$ vyznačte.

Domácí úkol. Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ taková, že nejsou druhou mocninou jiného čísla, množina invertibilních prvků $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{-n}])$ je rovna $\{1, -1\}$.