

## Cvičení 5 – Dělitelnost v oborech

4. listopadu 2025

**Příklad 1.** Spočítejte v oborech  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{Z}_3[x]$  a  $\mathbb{Z}_5[x]$  irreducibilní rozklady následujících polynomů:

- a)  $x^3 - 2$ ,
- b)  $x^4 - x^2 - 2$ .

**Příklad 2.** Ukažte, že všechny irreducibilní polynomy nad  $\mathbb{R}[x]$  mají stupeň  $\leq 2$ .

**Příklad 3.** Najděte všechny irreducibilní polynomy nad  $\mathbb{Z}_2$  stupně nejvýše 3.

**Příklad 4.** Ukažte, že pro každé  $t \in \mathbb{Q}$  a  $f \in \mathbb{Q}[x]$  platí, že  $f(x)$  je irreducibilní v  $\mathbb{Q}[x]$  právě když  $f(x + t)$  je irreducibilní v  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Příklad 5.** Spočítejte irreducibilní rozklady prvků 3, 5, 6,  $10 - 6i$  v  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Příklad 6.** Rozhodněte, zda existuje více rozkladů čísla 6 v oborech  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$  a pokud ano, zkuste je najít všechny.

**Příklad 7.** Spočítejte NSD pro následující dvojice:

- a)  $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$  a  $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$  v  $\mathbb{Z}[x]$ ,
- b) 5 a  $7 + i$  v  $\mathbb{Z}[i]$ ,
- c) 3 a  $2 + \sqrt{-5}$  v  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ,
- d)  $x^3 + x^2 + x + 1$  a  $x^2 - 2x + 2$  v  $\mathbb{Z}_3[x]$ ,
- e)  $6 - 3\sqrt{3}$  a  $3 + \sqrt{3}$  v  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .

**Příklad 8.** Vysvětlete následující jev:

- V oboru  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  platí, že  $2(-2) = (\sqrt{-3} + 1)(\sqrt{-3} - 1)$ , a proto se jedná o obor s nejednoznačným rozkladem.
- v oboru  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  platí  $2\sqrt{2} = (-4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$ , ale jedná se o obor s jednoznačným rozkladem.

**Příklad 9.** Pro obor  $D$  budeme značit  $U(D)$  množinu všech invertibilních prvků. Určete  $U(\mathbb{Z})$ ,  $U(\mathbb{Z}[i])$ ,  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  a  $U(\mathbb{C}[x])$ .

**Příklad 10.** Určete  $U(\mathbb{Z}[\omega])$ , kde  $\omega = e^{\frac{3\pi i}{2}}$  je kořen polynomu  $x^2 + x + 1$ . Nakreslete prvky  $\mathbb{Z}[\omega]$ , v komplexní rovině a množinu  $U(\mathbb{Z}[\omega])$  vyznačte.

**Domácí úkol.** Ukažte, že pro všechna přirozená čísla  $n \in \mathbb{N}$  taková, že nejsou druhou mocninou jiného čísla, množina invertibilních prvků  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-n}])$  je rovna  $\{1, -1\}$ .