110 b)

$$\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x,\; a>-1$$

Označme tento integral takto: $F(a)=\int\limits_0^\infty f(x,a)\,\mathrm{d}x$ kde $f(x,a)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x\mathrm{e}^{x^2}}$. Ověříme nyní předpoklady věty: derivace integrálu závislého na parametru. Tedy:

1). Zvolme $a=0 \Rightarrow F(a)=0$ tzn. integrál konverguje pro zvolené a

2). Funkce $f(x,a)$ je měřitelná, neboť je spojitá v M

3). $\forall a\in I$ a s.v. $x\in M$ existuje konečná $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}$, neboť $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=x\mathrm{e}^{-x^2(a+1)}$

4). $\exists\varphi(x)\in L(M)$ tak, že pro $\forall a\in I$ a s.v. $x\in M$ je $|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|\le\varphi(x)$ s.v. v M? Ano, existuje, neboť zvolíme-li pevné a_0 takové, že $-1<a\le a_0$ potom $\mathrm{e}^{-x^2(a+1)}\le\mathrm{e}^{-x^2(a_0+1)}=\varphi(x)$ Není těžké ukázat, že $\varphi\in L(M)$, kde $M=(0,\infty)$

Odtud vidíme, že integrál je konvergentní a můžeme si dovolit zaměnit parciální derivaci s integrálem. Přistupme již tedy k triviálnímu výpočtu.

$$F^{'}(a)=\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2(a+1)}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2(a+1)}\mathrm{e}^{-x^2(a+1)}\right]_0^\infty=\frac{1}{2(a+1)}$$

$$F(a)=\int\frac{1}{2(a+1)}\,\mathrm{d}a=\frac{1}{2}\ln|a+1|+C=\frac{1}{2}\ln(a+1)+C,\;(a>-1)$$

Z bodu 1). víme, že $F(0)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=\dfrac{1}{2}\ln(0+1)+C \quad\Rightarrow\quad 0=C.$
Tedy hledaná hodnota integrálu je

$$\underline{\underline{F(a)=\int_0^\infty\frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(a+1)}}$$

---

116 j)

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$$

Pro jaká p konverguje?

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=t\\ \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ (0,\,1)\to(\infty,\,1)\end{array}\right\}=-\int_\infty^1\frac{(\ln t)^p}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{l}t=e^u\\ \mathrm{d}t=e^u\,\mathrm{d}u\\ (1,\,\infty)\to(0,\,\infty)\end{array}\right\}=\int_0^\infty u^pe^{-2u}e^u\mathrm{d}u=\int_0^\infty u^pe^{-u}\mathrm{d}u=$$

$=\{p=v-1\}\Rightarrow\Gamma(p+1)$
Tedy integrál konverguje pro Re $p>-1$

---

115 d)

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = t;\ x = \sqrt[3]{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t \\ (0,\ \infty) \to (0,\ \infty) \end{array}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{t}{1+t}\frac{1}{t} t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} u = \dfrac{t}{1+t}; & \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} \\ t = \dfrac{u}{1-u}; & (0,\ \infty) \to (0,\ 1) \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} u \left(\frac{u}{1-u}\right)^{-\frac{5}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} u^{1-\frac{5}{3}}(1-u)^{\frac{5}{3}-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^{1} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u, \quad \text{odtud}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x} - 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{3} \\ \tilde{y} - 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \tilde{y} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}B(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})} = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3})}{\Gamma(1+1)} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}}$$

---

111 a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bx+c)}\,\mathrm{d}x,\ a > 0$$

1). Způsob výpočtu
Doplňme $-(ax^2+2bx+c)$ na úplný čtverec a označme tento integrál jako:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}})^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}\,\mathrm{d}x$$

Pro jednoduchost označme $K = \mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}$

$$I^2 = K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}y+\frac{b}{\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}y = K^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\left[(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}})^2+(\sqrt{a}y+\frac{b}{\sqrt{a}})^2\right]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{r}{\sqrt{a}}\cos\varphi - \frac{b}{\sqrt{a}}; & r \in <0,\infty); & \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \dfrac{r}{a} \\ y = \frac{r}{\sqrt{a}}\sin\varphi - \frac{b}{\sqrt{a}}; & \varphi \in <0,2\pi); & \end{array}\right\} = K^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\left|\frac{r}{a}\right|\,\mathrm{d}r =$$

$$= K^2\frac{2\pi}{a}\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = K^2\frac{2\pi}{a}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\infty} = K^2\frac{\pi}{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}}}$$

2). Způsob výpočtu - užitím Laplaceova integrálu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bx+c)}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}})^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}t \\ (0,\infty) \to (0,\infty) \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}}}$$
