

# 1 Úvod - řešení ODR

Máme dānu soustavu čtyř lineárních ODR.

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= A - (k + \lambda)a(t), \\ \frac{da_1}{dt} &= \lambda_1 a(t) - (k_1 + \lambda_1)a_1(t), \\ \frac{da_2}{dt} &= \lambda_2 a_1(t) - (k_2 + \lambda_2)a_2(t), \\ \frac{da_3}{dt} &= \lambda_3 a_2(t) - (k_3 + \lambda_3)a_3(t),\end{aligned}$$

kde

Značení	Veličina	Rozměr
$k, k_1, k_2, k_3$	koeficienty ventilace	$h^{-1}$
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	přeměnové konstanty	$h^{-1}$
$d, d_1, d_2, d_3$	detekční účinnost	bezrozměrná veličina
$t$	čas	$s$
$A$	přísun objemové aktivity radonu	$Bqm^{-3}h^{-1}$
$a(t)$	objemová aktivita radonu - $^{222}Rn$	$Bqm^{-3}$
$a_1(t)$	objemová aktivita polonia - $^{218}Po$	$Bqm^{-3}$
$a_2(t)$	objemová aktivita olova - $^{214}Pb$	$Bqm^{-3}$
$a_3(t)$	objemová aktivita bismutu - $^{214}Bi$	$Bqm^{-3}$

Pro jednoduchost polořme  $K = k + \lambda$ ,  $a(0) = 0$ , pak řešení první rovnice bude ve tvaru

$$a(t) = \frac{A}{K} (1 - e^{-tK}),$$

Obdobně poloříme

$$K_1 = k_1 + \lambda_1, \quad K_2 = k_2 + \lambda_2, \quad K_3 = k_3 + \lambda_3, \quad a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0.$$

Pak ostatní řešení budou vypadat takto

$$a_1(t) = \frac{\lambda_1 A}{K K_1} - \frac{\lambda_1 A}{K(K_1 - K)} e^{-Kt} + C_1 e^{-K_1 t},$$

kde

$$C_1 = -\frac{\lambda_1 A}{K K_1} + \frac{\lambda_1 A}{K(K_1 - K)}.$$

$$a_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 A}{K K_1 K_2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 A}{K(K_1 - K)(K_2 - K)} e^{-Kt} + \frac{\lambda_2 C_1}{K_2 - K_1} e^{-K_1 t} + C_2 e^{-K_2 t},$$

kde

$$C_2 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 A}{K K_1 K_2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 A}{K(K_1 - K)(K_2 - K)} - \frac{\lambda_2 C_1}{K_2 - K_1}.$$

$$a_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 A}{K K_1 K_2 K_3} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 A}{K(K_1 - K)(K_2 - K)(K_3 - K)} e^{-Kt} +$$

$$+ \frac{\lambda_2 \lambda_3 C_1}{(K_2 - K_1)(K_3 - K_1)} e^{-K_1 t} + \frac{\lambda_3 C_2}{K_3 - K_2} e^{-K_2 t} + C_3 e^{-K_3 t},$$

kde

$$C_3 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 A}{K K_1 K_2 K_3} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 A}{K(K_1 - K)(K_2 - K)(K_3 - K)} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 C_1}{(K_2 - K_1)(K_3 - K_1)} - \frac{\lambda_3 C_2}{K_3 - K_2}.$$

## 2 Výpočetní část

- Ze souboru `ERM4vypocty.xls`, první list, sloupec B vybírám naměřená data (OAR) k výpočtu. Ze sloupce D pak hodnoty pro ventilační koeficient.
- Naměřená data rozdělují do několika skupin podle toho o jaký průtok se jedná. Dále pro jednoduchost označuji tyto skupiny dat  $Q47, Q37, \dots$  apod. Takže první výpočet provádím pro skupinu dat  $Q47$ , která obsahuje naměřená data s hodnotou průtoku  $Q = 4.7$ . Druhý výpočet realizuji pro skupinu dat  $Q37$ , která obsahuje naměřená data s hodnotou průtoku  $Q = 3.7$  apod. Jelikož v sloupci D nacházím dvě stejné hodnoty průtoku  $Q = 0.7$ , ale s různými naměřenými hodnotami OAR, rozlišuji je proto jednou na skupinu dat  $Q07$ , podruhé na  $Q07a$ .
- Opět používám k výpočtům Matlab v.7 a funkci `lsqcurvefit`, která iterativně vypočte  $d_1, d_3, k, k_1, k_2, k_3$  z  $n$  nelineárních rovnic ( $n$  odpovídá počtu měření). Skript `lsqcurvefit` se snaží najít takové koeficienty  $x = (d_1, d_3, k, k_1, k_2, k_3)$ , které nejlépe vyhovují rovnici

$$\min_x \|F(x, t) - data\|_2^2 = \min_x \sum_{i=1}^n (F(x_i, t_i) - data_i)^2,$$

kde  $t = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n)$  je vektor jehož složky odpovídají jednotlivým měřením v minutách a  $data = (data_1, data_2, \dots, data_i, \dots, data_n)$  je vektor jehož složky jsou naměřené objemové aktivity, které přísluší jednotlivým měřením. Tj. pro skupinu dat  $Q47$  je  $data = Q47$ , pro  $Q37$  je  $data = Q37$ , apod. Funkce  $F(x, t)$  je tentokrát zvolena ve tvaru

$$F(x, t) = F(d_1, d_3, k, k_1, k_2, k_3, t) = a(k, t) + a_1(k, k_1, t)d_1 + a_3(k, k_1, k_2, k_3, t)d_3$$

což odpovídá součtu alfa. Tedy skript hledá  $x$  tak, aby křivka  $F(x, t)$  nejlépe prokládala naměřené hodnoty, viz níže přiložené obrázky.

- Pro výpočty jsou vzata data od 5 minuty měření, neboť prvních pět minut zahrnutých ve výpočtu zkresluje výsledky.
- V níže uvedené tabulce se k příslušnému průtoku váží vždy dva řádky. První řádek obsahuje výsledky výpočtů s přísunem objemové aktivity  $A$  (na obrázcích značeno A vyp.), který byl spočten dle vzorce z `ERM4vypocty.xls`. Druhý řádek odpovídá výpočtům pro  $A$  (na obrázcích značeno A nam.), které je dáno první naměřenou hodnotu přísunu objemové aktivity OAR. Dále zápis  $4.605557e + 001$  značí  $4.605557 \cdot 10^1 = 46.05557$  apod.

### 3 Výsledky výpočtů

3	Průtok	$A$	$d_1$	$d_3$	$k$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
	Q47	$4.605557e + 001$ $1.333000e + 001$	$7.99156e - 013$ $6.12278e - 013$	$7.80888e - 001$ $7.66739e - 001$	$3.466665e + 000$ $1.000236e + 000$	$3.198831e - 013$ $5.556812e - 014$	$4.648596e - 002$ $4.673728e - 002$	$3.751893e - 002$ $3.781847e - 002$
	Q37	$5.850302e + 001$ $1.733000e + 001$	$4.18917e - 001$ $3.86874e - 001$	$6.36807e - 001$ $5.35141e - 001$	$3.361243e + 000$ $9.978047e - 001$	$2.328066e + 000$ $1.948081e + 000$	$2.059237e - 013$ $6.143681e - 012$	$6.947489e - 014$ $1.773962e - 012$
	Q27	$8.017081e + 001$ $1.905000e + 001$	$3.73231e - 001$ $5.73887e - 001$	$9.97736e - 001$ $4.37500e - 001$	$3.799964e + 000$ $1.046993e + 000$	$1.056190e + 000$ $3.075276e - 001$	$6.171980e - 014$ $1.595128e - 011$	$1.357215e - 002$ $1.146473e - 002$
	Q17	$1.273301e + 002$ $2.453000e + 001$	$5.30069e - 001$ $3.64335e - 001$	$2.53845e - 001$ $4.23104e - 001$	$4.859797e + 000$ $7.907226e - 001$	$1.464799e - 001$ $4.958141e - 001$	$2.338552e - 014$ $2.464432e - 010$	$2.337370e - 014$ $1.822761e - 011$
	Q07	$3.092303e + 002$ $3.841000e + 001$	$3.41719e - 001$ $7.96309e - 001$	$9.81498e - 001$ $3.70753e - 001$	$5.033701e + 000$ $9.835313e - 001$	$6.158098e - 001$ $6.678084e - 003$	$4.015162e - 008$ $3.199391e - 014$	$8.086321e - 011$ $3.639575e - 013$
	Q07a	$3.092303e + 002$ $1.085000e + 002$	$3.98622e - 001$ $9.99980e - 001$	$3.77852e - 001$ $8.62630e - 001$	$3.769022e + 000$ $1.420081e + 000$	$2.316060e + 000$ $1.799259e + 000$	$5.752098e + 000$ $1.045760e + 001$	$6.599747e + 000$ $6.627327e + 000$
	Q02	$1.082306e + 003$ $8.475000e + 001$	$3.96820e - 001$ $5.24218e - 001$	$3.46020e - 001$ $7.68662e - 001$	$9.733586e + 000$ $1.151202e + 000$	$8.780910e + 000$ $7.830566e - 002$	$8.740172e + 000$ $3.493879e - 002$	$8.740172e + 000$ $2.594891e - 002$
	Q16g11	$1.352882e + 002$ $8.813000e + 001$	$4.08739e - 001$ $5.00972e - 001$	$3.62556e - 001$ $9.93644e - 001$	$3.109156e + 000$ $2.033150e + 000$	$2.279433e + 000$ $2.545540e + 000$	$4.120381e + 000$ $9.848028e + 001$	$4.173003e + 000$ $9.909082e + 001$
	Q08g11	$2.705765e + 002$ $4.466000e + 001$	$6.53361e - 001$ $6.42754e - 001$	$3.14517e - 001$ $6.15135e - 001$	$6.235487e + 000$ $8.142656e - 001$	$4.118334e - 003$ $2.985148e - 001$	$4.147019e - 014$ $4.682292e - 006$	$1.582410e - 013$ $4.355703e - 008$
	Q06g11	$3.607687e + 002$ $1.473200e + 002$	$3.94233e - 001$ $9.99999e - 001$	$3.66984e - 001$ $8.62628e - 001$	$3.144275e + 000$ $1.386174e + 000$	$2.544766e + 000$ $1.756645e + 000$	$6.677153e + 000$ $2.478867e + 000$	$7.578769e + 000$ $2.285254e + 001$
	Q05g11	$4.329224e + 002$ $1.130200e + 002$	$4.20353e - 001$ $3.81231e - 001$	$1.00000e + 000$ $9.32293e - 001$	$5.022009e + 000$ $1.270791e + 000$	$2.575759e - 014$ $2.337312e - 014$	$5.380395e - 013$ $9.084714e - 012$	$1.534172e - 001$ $1.507983e - 001$
	Q04g11	$5.411530e + 002$ $8.462000e + 001$	$1.00000e + 000$ $1.00000e + 000$	$1.00000e + 000$ $1.00000e + 000$	$8.237138e + 000$ $1.278276e + 000$	$2.226183e - 014$ $2.363147e - 014$	$2.057920e - 002$ $2.269502e - 002$	$1.158116e - 002$ $1.374742e - 002$

## 4 Grafy













