Stabilita řešení

<u>Definice</u> : Řekneme, že **řešení** $x(t)$ Cauchyovy úlohy $\dot{x} = f(x,t),\ x(t_0) = x_0$ je **stabilní**, platí-li:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x_0 - y_0| < \delta \ \Rightarrow\ |x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

kde $y(t)$ vyhovuje vztahu $\dot{y} = f(y,t),\ y(t_0) = y_0$.
Platí-li navíc, že $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0$ řekneme, že **řešení** $x(t)$ je **asymptoticky stabilní**.

1.(a) $\underline{\dot{x} = x + t, x(0) = 1.}$ Vyšetřete stabilitu řešení počáteční úlohy (z definice).

i) Homogenní řešení

$$\begin{aligned} \dot{x} - x &= 0 \\ \ln|x| &= t + C \\ x_H(t) &= K\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

ii) Partikulární řešení

$$\begin{aligned} x_P(t) &= K(t)\mathrm{e}^t \\ \dot{x}_P &= \dot{K}\mathrm{e}^t + K\mathrm{e}^t \\ K &= -\mathrm{e}^{-t}(t+1) \\ x_P(t) &= -(t+1) \end{aligned}$$

iii) Obecné řešení + počáteční podmínky

$$\underline{\underline{x(t)}} = x_H(t) + x_P(t) = \underline{\underline{K\mathrm{e}^t - (t+1)}}$$

Zk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= K\mathrm{e}^t - 1 \\ K\mathrm{e}^t - 1 &= K\mathrm{e}^t - (t+1) + t \quad \checkmark \end{aligned}$$

Poč. pod.:

$$\begin{aligned} x(0) = K\mathrm{e}^0 - (0+1) &= 1 \\ K &= 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = 2\mathrm{e}^t - (t+1)}$$

iv) Ověření stability

Zvolme $\dot{y}(t) = y + t$, potom $y(t) = y_0\mathrm{e}^t - (t+1)$ a dle definice stability

$$|1 - y_0| < \delta \ \Rightarrow\ |K - y_0|\mathrm{e}^t < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 = 0$$

odtud vidíme, že **řešení** $x(t)$ **je nestabilní**, neboť funcki e^t nelze omezit na $[0,\infty)$.

1.(b) $\underline{\dot{x} = -x + t^2, x(1) = 1.}$ Vyšetřete stabilitu řešení počáteční úlohy (z definice).

i) Homogenní řešení

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= 0 \\ \ln|x| &= -t + C \\ x_H(t) &= K\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

ii) Partikulární řešení

$$
\begin{aligned}
x_P(t) &= K(t)\mathrm{e}^{-t} \\
\dot{x}_P &= \dot{K}\mathrm{e}^{-t} - K\mathrm{e}^{-t} \\
K &= \mathrm{e}^{t}(t^2 - 2t + 2) \\
x_P(t) &= t^2 - 2t + 2
\end{aligned}
$$

iii) Obecné řešení + počáteční podmínky

$$\underline{\underline{x(t)}} = x_H(t) + x_P(t) = \underline{\underline{K\mathrm{e}^{-t} + t^2 - 2t + 2}}$$

Zk:

$$\dot{x} = -K\mathrm{e}^{-t} + 2t - 2$$

$$-K\mathrm{e}^{-t} + 2t - 2 = -K\mathrm{e}^{-t} - t^2 + 2t - 2 + t^2 \quad \checkmark$$

Poč. pod.:

$$
\begin{aligned}
x(1) = K\mathrm{e}^{-1} + 1 - 2 + 2 &= 1 \\
K &= 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x(t) = t^2 - 2t + 2}$$

iv) Ověření stability

Zvolme $\dot{y}(t) = -y + t^2$, potom $y(t) = y_0\mathrm{e}^{-t} + t^2 - 2t + 2$ a dle definice stability

$$|1 - y_0| < \delta \;\Rightarrow\; |K - y_0|\mathrm{e}^{-t} < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 = 1$$

odtud vidíme, že **řešení** $x(t)$ **je stabilní a dokonce i asymptoticky stabilní**.

---

2. $\begin{aligned}\dot{x} &= -x - 3y \\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}$ Vyšetřete stabilitu počátku pro soustavu (z definice).

A) První způsob výpočtu - převedení na diferenciální rovnici vyššího řádu

Upravme si první rovnici $y = -\frac{1}{3}(\dot{x} + x)$

$$\ddot{x} = -\dot{x} - 3\dot{y} = -\dot{x} - 3(x - y) = -\dot{x} - 3x - \dot{x} - x$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0,\; x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

odtud

$$\underline{\underline{x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t + C_2\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t}}$$

Dosazením tohoto do námi upravené první rovnice, dostaneme

$$\underline{\underline{y(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(C_2\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t - C_1\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t\right)}}$$

B) Druhý způsob výpočtu - počítat to maticově, ale to nebudu dělat neb je to pracný

Soustava je **globálně asymptoticky stabilní v počátku, neboť bod** $(0,0)$ **je řešením naší soustavy**, podle Věty 3 z přednášek. Označíme-li $z(t) = [x(t), y(t)]^T$. Ukážeme např. pro $x(t)$, že platí $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, tedy (analogicky i pro $y(t)$)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C_1\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t + C_2\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t\right) = C_1\lim_{t\to\infty}\frac{\cos\sqrt{3}t}{\mathrm{e}^t} + C_2\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\sqrt{3}t}{\mathrm{e}^t} = 0$$