ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Katedra matematiky

Geometrické a počítačové modelování

Gaussova a střední křivost racionálních Bézierových ploch

(Překlad článku)

Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz

PLZEŇ 2005

Abstrakt

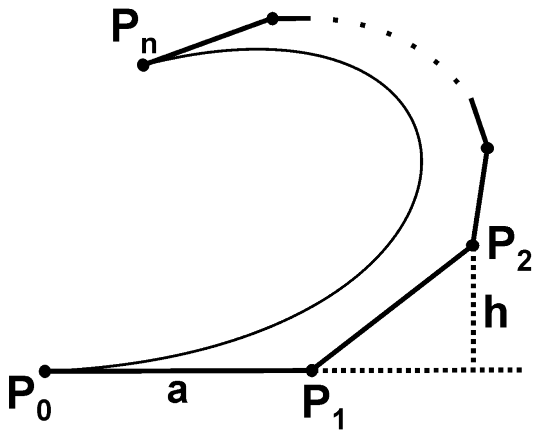
V této práci odvodíme vzorce pro Gaussovu a střední křivost racionálních Bézierových ploch. Vzorce jsou vyjádřeny v jednoduchých geometrických veličinách, jež jsou získány z řídící sítě. Tyto vzorce poskytují více geometrické intuice a jsou snazší na výpočet než obecné vzorce z diferenciální geometrie. Prezentujeme vzorce pro čtvercovou i triangulární síť.

Úvod

Křivost racionální Bézierovy křivky stupně n s řídícími body $\mathbf{P}_0,\ \mathbf{P}_1,\ \ldots,\ \mathbf{P}_n$ a váhami $\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,$ $\ldots,\ \omega_n$ v počátečním bodě $\mathbf{P}_0$ je dána výrazem [1]

$$k = \frac{n-1}{n}\frac{\omega_0\omega_1}{\omega_1^2}\frac{h}{a^2}$$

kde a je délka úsečky $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ a h je vzdálenost bodu $\mathbf{P}_2$ od polopřímky dané body $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_1$ (Obr. 1). Tento vzorec je názornější než vzorec odvozený v klasické diferenciální geometrii. Také je lehčí na výpočet, zvláště v racionálním případě. Odvodíme obdobné vzorce pro Gaussovu a střední křivost racionálních Bézierových ploch.

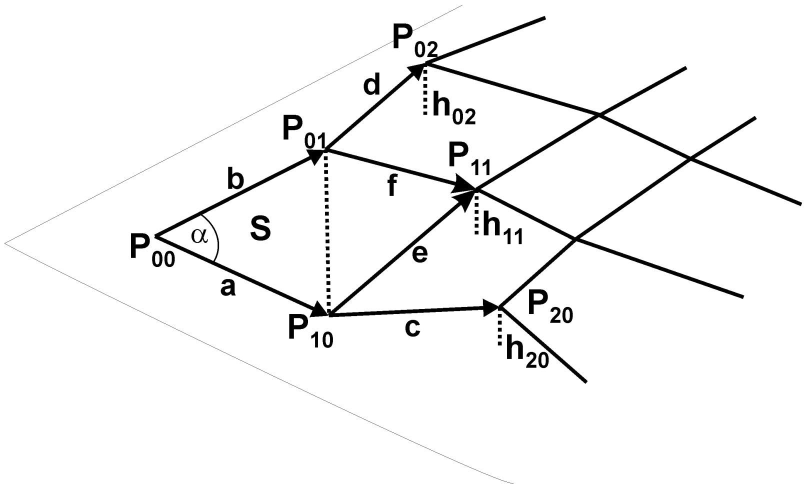


Obr. 1: Bézierova křivka

Gaussova a střední křivost racionálních Bézirových ploch

Racionální Bézierova plocha stupně $n \times m$ je definována takto:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega_{ij}\mathbf{P}_{ij}B_i^n(u)B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega_{ij}B_i^n(u)B_j^m(v)} \tag{1}$$



Obr. 2: Část čtvercové řídící sítě

Pro jednoduchost odvodíme obě základní formy plochy v bodě $(u,v) = (0,0)$.

V Diferenciální geometrii [2] je vypočtena Gaussova K_g a střední K_s křivost následovně:

$$K_g = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2}$$

$$K_s = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} \tag{3}$$

kde E, F, G jsou koeficienty první základní formy plochy, tj.

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \qquad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \qquad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \tag{4}$$

L, M, N jsou koeficienty druhé základní formy plochy, tj.

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} \qquad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} \qquad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \tag{5}$$

a

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

je jednotkový normálový vektor.

Pro racionální Bézierovu plochu (1) označme (Obr. 2):

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a} = \mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_{00} & \mathbf{b} = \mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00} & \mathbf{c} = \mathbf{P}_{20} - \mathbf{P}_{10} \\ \mathbf{d} = \mathbf{P}_{02} - \mathbf{P}_{01} & \mathbf{e} = \mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10} & \mathbf{f} = \mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{01} \end{array}$$

Dále nechť S značí plochu trojúhelníku $\mathbf{P}_{00}\mathbf{P}_{10}\mathbf{P}_{01}$, α je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a h_{ij} je znaménková vzdálenost od bodu $\mathbf{P}_{ij}$ k rovině obsahující body $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}$ a $\mathbf{P}_{01}$: $h_{ij} = (\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{P}_{00}) \cdot \mathbf{n}$.

V bodě $(u, v) = (0, 0)$ dostáváme $\mathbf{r}_u = n\frac{\omega_{10}}{\omega_{00}}\mathbf{a},\ \mathbf{r}_v = m\frac{\omega_{01}}{\omega_{00}}\mathbf{b}$ a

$$E = n^2 \left(\frac{\omega_{10}}{\omega_{00}}\right)^2 \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \qquad F = nm\left(\frac{\omega_{10}\omega_{01}}{\omega_{00}^2}\right)\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \qquad G = m^2\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{00}}\right)^2 \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \tag{6}$$

Povšimněte si, že pro racionální plochu $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{R}(u, v)/\omega(u, v)$ a pro její první a druhou parciální derivaci platí:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\mathbf{R}_u - \mathbf{r}\omega_u}{\omega}, \qquad \mathbf{r}_{uu} = \frac{\mathbf{R}_{uu} - \mathbf{r}\omega_{uu}}{\omega} - \frac{\mathbf{R}_u\omega_u - \mathbf{r}\omega_u^2}{\omega^2} - \mathbf{r}_u\frac{\omega_u}{\omega}.$$

Aplikováním tohoto na Bézierovu plochu (1) v bodě $(u, v) = (0, 0)$ dostaneme:

$$\mathbf{r}_{uu} = n(n-1)\frac{\omega_{20}}{\omega_{00}}\mathbf{c} + (\ldots)\mathbf{a},$$

kde $(\ldots)$ značí komplikovaný výraz, který se anuluje po skalárním součinu s vektorem $\mathbf{n}$. Obdobně získame

$$\mathbf{r}_{uv} = nm\frac{\omega_{11}}{\omega_{00}}\mathbf{f} + (\ldots)\mathbf{a} + (\ldots)\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r}_{vv} = m(m-1)\frac{\omega_{02}}{\omega_{00}}\mathbf{d} + (\ldots)\mathbf{b}.$$

Dosazením těchto vztahů do (5) obdržíme

$$L = n(n-1)\frac{\omega_{20}}{\omega_{00}}h_{20} \qquad M = nm\frac{\omega_{11}}{\omega_{00}}h_{11} \qquad N = m(m-1)\frac{\omega_{02}}{\omega_{00}}h_{02} \tag{7}$$

Nyní dosaďme (6) a (7) do (2) a (3) a označíme-li

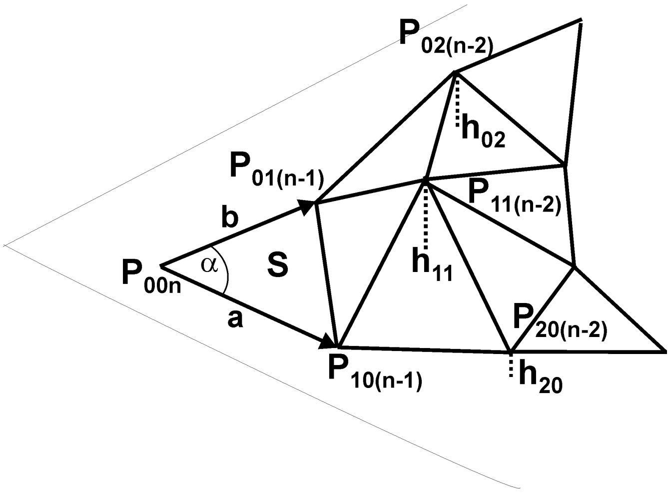
$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{\omega_{10}}{\omega_{00}}\|\mathbf{a}\|, & \tilde{b} &= \frac{\omega_{01}}{\omega_{00}}\|\mathbf{b}\|, & \tilde{S} &= \frac{1}{2}\left\|\frac{\omega_{10}}{\omega_{00}}\mathbf{a} \times \frac{\omega_{01}}{\omega_{00}}\mathbf{b}\right\| = S\frac{\omega_{10}\omega_{01}}{\omega_{00}^2}, \\ \tilde{h}_{11} &= \frac{\omega_{11}}{\omega_{00}}h_{11}, & \tilde{h}_{20} &= \frac{n-1}{n}\frac{\omega_{21}}{\omega_{00}}h_{20}, & \tilde{h}_{02} &= \frac{m-1}{m}\frac{\omega_{02}}{\omega_{00}}h_{02}, \end{aligned}$$

obdržíme Gaussovu a střední křivost ve tvaru

$$\begin{aligned} K_g &= \frac{\tilde{h}_{20}\tilde{h}_{02} - \tilde{h}_{11}^2}{4\tilde{S}^2}, \\ K_s &= \frac{\tilde{h}_{20}\tilde{b}^2 - 2\tilde{h}_{11}\tilde{a}\tilde{b}\cos\theta + \tilde{h}_{02}^2\tilde{a}^2}{8\tilde{S}^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Pro stanovení Gaussovy a střední křivosti trojúhelníkové racionální Bézierovy plochy stupně n (Obr. 3) platí stejné vzorce dané (8), jestliže použijeme následující označení:

$$\tilde{a} = \frac{\omega_{10(n-1)}}{\omega_{00n}}\|\mathbf{a}\|, \qquad \tilde{b} = \frac{\omega_{01(n-1)}}{\omega_{00n}}\|\mathbf{b}\|,$$
$$\tilde{S} = S\frac{\omega_{10(n-1)}\omega_{01(n-1)}}{\omega_{00n}^2}, \qquad \tilde{h}_{ij} = \frac{n-1}{n}\frac{\omega_{ij(n-i-j)}}{\omega_{00n}}h_{ij}.$$



Obr. 3: Část trojúhelníkové řídící sítě

Poznámky :

1. Vztahy (8) zahrnují jednoduché geometrické veličiny, což je dělá názornějšímí a také lehčími na výpočet.

2. Ačkoliv výše odvozené rovnice jsou platné v bodě $(u, v) = (0, 0)$, můžeme je aplikovat na všechny rohové body plochy. Navíc křivosti v libovolném bodě můžeme spočítat pomocí algoritmu de Casteljau.

3. Z diferenciální geometrie víme jak stanovit hlavní křivosti plochy. Hlavními křivostmi plochy v bodě rozumíme normálové křivosti v hlavních směrech. Označme je $k_{1,2} = k_{min,max}$. Potom platí
$$k_{1,2} = K_s \pm \sqrt{K_s^2 - K_g}$$
Nenulový vektor $(\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)$ plochy určuje hlavní směr křivosti, která může být určena tímto vztahem
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{M - k_{1,2}F}{L - k_{1,2}E} = -\frac{N - k_{1,2}G}{M - k_{1,2}F}$$

4. Kladná Gaussova křivost je nutnou podmínkou pro to, aby plocha byla konvexní. $K_g \geq 0$ je zajištěno jestliže $\tilde{h}_{20}\tilde{h}_{02} \geq \tilde{h}_{11}^2$. Tento fakt byl známý pro polynomialní plochy [3].

Literatura

[1] FARIN, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, 5th Edition.* Morgan Kaufmann, 2002.

[2] DO CARMO, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[3] SCHELSKE, J. *Lokale Glättung segmentierter Bézierkurven und Bézierflachen, Ph.D. Theses.* TH Darmstadt, Germany, 1984.

Přeloženo z článku:

[4] JIANMIN ZHENG, THOMAS W. SEDERBERG. *Gaussian and mean curvatures of rational Bézier patches.* CAGD, 2003.