



Katedra matematiky

Matematické modelování

Nestacionární vedení tepla

(Modelování pomocí Matlabu)

Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz

PLZEŇ 2006

Abstrakt

Tato práce se zabývá modelováním nestacionárního vedení tepla v tyčových útvarech. Simulace je provedena za pomoci programu Matlab, ve kterém jsou provedeny všechny výpočty. Součástí práce je též vizualizace modelovaného procesu také v programu Matlab.

Zákon tepelné bilance

Nechť v Ω probíhá proces vedení tepla pro $t \in (0, \infty)$, kde Ω je libovolná omezená oblast. Tento proces je charakterizován teplotou $u = u(\mathbf{x}, t)$, tepelným tokem $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ a hustotou rozložení tepelných zdrojů $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Formulujme **globální tvar tepelné bilance**.

Nechť $\forall \Omega_B \subset \Omega, \forall [t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ platí:

$$\int_{\Omega_B} c \varrho(\mathbf{x}) [u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1)] d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt, \quad (1)$$

kde ϱ je hustota, c je měrná tepelná kapacita, tzv. specifické teplo. Vztah (1) popisuje změnu tepla v oblasti Ω_B , která je rovna množství tepla vteklého hranicí $\partial\Omega_B$ do Ω_B a množství tepla vyprodukovaného zdroji v Ω_B . Tyto změny probíhají v době od t_1 do t_2 . Postupem uvedeným v [1] odvodíme z (1) **lokální tepelnou bilanci**:

$$c \varrho(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Omega_B, \forall t \in (0, +\infty) \quad (2)$$

Dále uvažujeme kontinuum v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a předpokládáme, že:

- (i) prostředí se nepohybuje, tj. $\mathbf{v} = 0$,
- (ii) hustota $\varrho = \varrho(\mathbf{x})$ nezávisí na čase, tj. $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$,
- (iii) vnitřní energie je funkcí teploty $u = u(\mathbf{x}, t)$ a nikoliv hustoty, tj. $e = e(u)$,
- (iv) vnější síly (např. gravitační) a vnitřní síly nemění vnitřní energii (teplo, teplotu), tj. $F = 0, T = 0$,
- (v) vektor toku energie (toku tepla) $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ závisí pouze na gradientu teploty podle konstitutivního Fourierova zákona

$$\mathbf{w} = -k \operatorname{grad} u, \quad (3)$$

kde $k = k(\mathbf{x})$ je koeficient vnitřní tepelné vodivosti.

Dosazením rovnice (3) do (2) dostáváme lokální podobu zákona tepelné bilance

$$c \varrho(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Omega_B, \forall t \in (0, +\infty). \quad (4)$$

Vztah (4) nazveme **rovnici vedení tepla** tehdy, máme-li stanovit teplotu u v oblasti Ω_B . Poznamenejme, že jde o parciální diferenciální rovnice parabolického typu.

Nestacionární vedení tepla v tyči, základní předpoklady

Uvažujme tyč (konečné délky) z tepelně vodivého materiálu, jehož koeficient vnitřní tepelné vodivosti označíme $k = k(x, y)$. Dále předpokládejme, že

- (i) délka tyče je $l > 0$ a tyč je geometricky popsána rovinnou oblastí Ω_B ,
- (ii) průřez tyče nezávisí na čase,
- (iii) teplota $u = u(x, y, t)$ je v každém místě řezu stejná,
- (iv) přenos tepla pláštěm tyče je nulový,
- (v) tepelný tok $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, t)$ je dán Fourierovým zákonem [2]

$$\mathbf{w} = -k(x, y) \text{grad } u(x, y, t), \quad \forall [x, y] \in \Omega_B, \forall t \in [0, T]$$

Tepelný tok \mathbf{w} představuje množství tepla v Joulech proteklého místem $[x, y]$ (tj. řezem tyče v místě x) v okamžiku t za jednotku času ve směru kladné osy x . Rovnici (2) lze poté psát ve tvaru

$$c\rho(x, y) \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} (k(x, y) \text{grad } u(x, y, t)) = f(x, y, t), \quad (5)$$

kde $c\rho(x, y)$, $k(x, y)$, $f(x, y, t)$ se považují za dané.

Počáteční úloha: Chceme stanovit rozložení teploty $u = u(x, y, t)$ v tyči pro $t \in [0, T]$, je-li dáno počáteční rozložení teploty jež popisuje funkce $\varphi(x, y)$. Počáteční podmínka pro $t_0 = 0$ je tedy

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (6)$$

Počáteční-okrajová úloha: Chceme stanovit rozložení teploty $u = u(x, y, t)$ v tyči pro $[x, y] \in \Omega_B$ za těchto předpokladů:

- (i) fyzikální veličiny c , $\rho(x, y)$, $k(x, y)$, $f(x, y, t)$ jsou dány
- (ii) je dáno počáteční rozložení teploty
- (iii) je dán „teplotní režim“ na začátku a na koncích tyče, tzn. jsou dány Dirichletovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u_0(t) && \text{na nějaké části } \Gamma_i \subset \partial\Omega_B, y \in \Gamma_i, \\ u(l, y, t) &= u_l(t) && \text{na nějaké části } \Gamma_j \subset \partial\Omega_B, y \in \Gamma_j, \end{aligned} \quad (7)$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$. $\partial\Omega_B$ značí hranici oblasti Ω_B .

- (iv) jsou zadány Neumannovy okrajové podmínky na $\partial\Omega_B$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_n(t), \quad (8)$$

kde n je vektor vnější normály definovaný na $\partial\Omega_B$.

Dirichletova podmínka (resp. Neumannova) představuje známou teplotu (resp. hustotu tepelného toku) na hranici (povrchu tyče) oblasti Ω_B .

Příklady vedení tepla v tyči

Příklad 1: Stanovme průběh teploty v tyči o konečné délce v časovém intervalu $t \in [0, 0.3]$. Tuto tyč interpretujeme jako oblast Ω_B (Obr. 1) jenž je podmnožinou

$$\Omega = (-0.2, 1.2) \times (-0.2, 0.6),$$

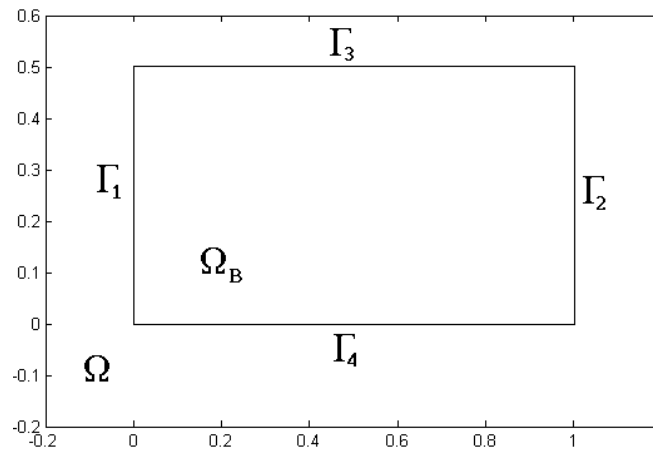
kde Ω je rovinná omezená souvislá oblast. Matematicky vyjádřeno: $\Omega_B \subset \Omega$ kde

$$\Omega_B = [0, 1] \times [0, 0.5],$$

hranici oblasti Ω_B tvoří

$$\partial\Omega_B = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i.$$

Na obrázku (Obr. 1) tvoří části hranice Γ_1 a Γ_2 průřez tyče, který je konstantní. Není těžké nahlédnout, že tato tyč má konečnou délku.



Obr. 1: Vyšetřovaná oblast

Zadejme fyzikální veličiny charakterizující vlastnosti tyče takto: $c = 1$, $\varrho(x, y) = 0.5$, $k(x, y) = 1$, $f(x, y, t) = 10$, pak rovnici (5) lze přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 10.$$

Zvolme okrajové podmínky (7) a (8) takto

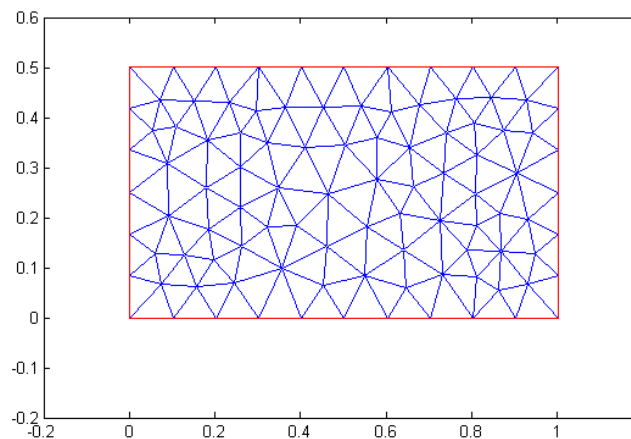
- Dirichletovy ... $u_0(t) = 30$ na Γ_1 a $u_l(t) = 0$ na Γ_2
- Neumannovy ... $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na Γ_3 a Γ_4

a počáteční podmínku $u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = 0$.

Dirichletovy podmínky nám říkají, že hranice Γ_1 tvoří „tepelný zdroj“ a hranice Γ_2 tvoří „noru“ (je to místo s nulovou či zápornou teplotou). Kdežto Neumannovy podmínky říkají, že pohyb (rychlost změny) teploty ve směru vnější normály je na hranici Γ_3 a Γ_4 nulový, tj. nedochází k přenosu tepla pláštěm tyče. Počáteční rozložení teploty v Ω_B je v čase $t_0 = 0$ rovné nule, jak můžeme vidět na obrázku (Obr. 3).

Nyní již můžeme přistoupit k modelování popsaného problému použitím programu Matlab. K simulaci průběhu tepelného toku využijeme nástroj na řešení PDR, tzv. PDE Toolbox.

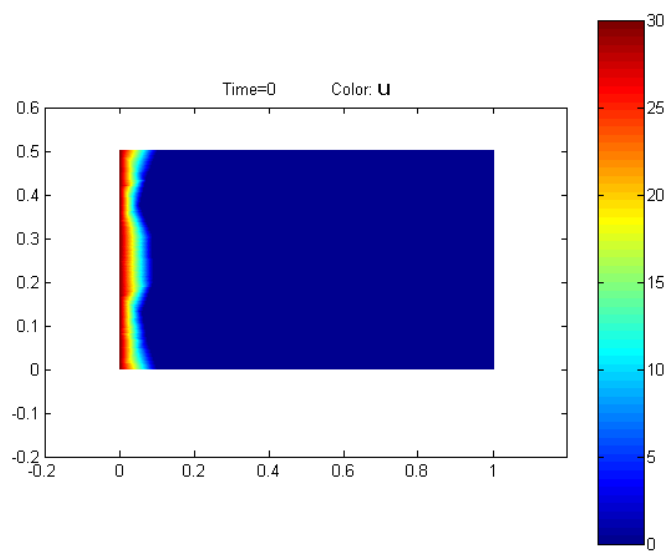
Na námi zadanou vyšetřovanou oblast (Obr. 1) aplikujeme diskretizační síť (Obr. 2) a nastavíme okrajové a počáteční podmínky v GUI¹ PDE Toolboxu. Poznamenejme, že geometrický tvar oblasti a diskretizační síť byly též vytvořeny v GUI PDE Toolbox. Rozložení teploty v čase $t_0 = 0$ vidíme na obrázku (Obr. 3). Obrázek (Obr. 4) popisuje k jaké změně došlo v časovém intervalu od 0 s do 0.3 s.



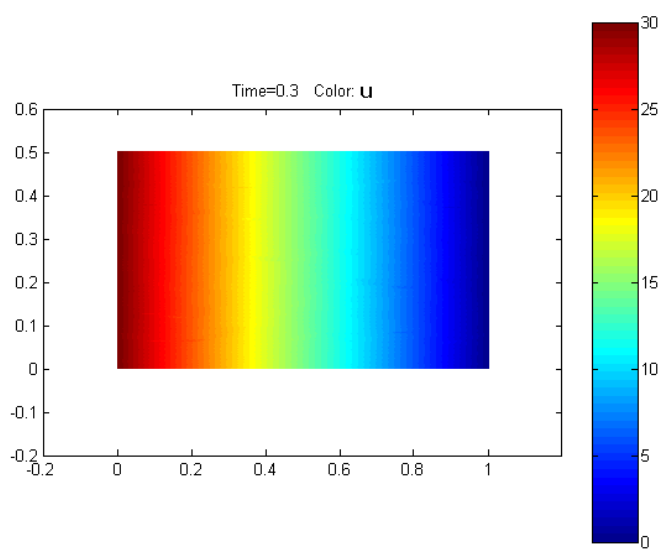
Obr. 2: Diskretizační síť

Poznámka: V animaci pr1.avi můžeme tento průběh změny teploty sledovat.

¹Graphical User Interface



Obr. 3: Rozložení teploty v čase $t = 0$



Obr. 4: Rozložení teploty v čase $t = 0.3$

Příklad 2: Stanovme průběh teploty v tyči v časovém intervalu $t \in [0, 1.5]$. Nechť má tato tyč konečnou délku a je geometricky interpretována, tak jak vidíme na obrázku (Obr. 5), resp. na (Obr. 6). Tyč je matematicky popsána takto:

$$\Omega_B = \Omega_1 \setminus (\Omega_2 \cup \Omega_3),$$

kde

$$\Omega_1 = [0, 1.5] \times [0, 0.5], \quad \Omega_2 = \{x^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.3\}, \quad \Omega_3 = [0.6, 1] \times [0.6, 0.35]$$

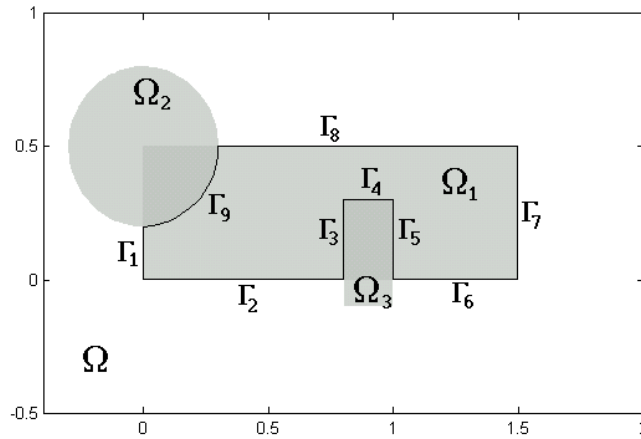
s hranicí

$$\partial\Omega_B = \bigcup_{i=1}^9 \Gamma_i.$$

Opět platí $\Omega_B \subset \Omega$, kde Ω je rovinná omezená souvislá oblast:

$$\Omega = (-0.4, 2) \times (-0.5, 1).$$

Na obrázku (Obr. 5) tvoří části hranice Γ_1 a Γ_7 průřez tyče, který je konstantní.



Obr. 5: Vyšetřovaná oblast

Zvolme fyzikální veličiny charakterizující vlastnosti tyče takto: $c = 2$, $\varrho(x, y) = x$, $k(x, y) = 1$, $f(x, y, t) = 150x$, pak rovnici (5) lze přepsat do tvaru

$$2x \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 150x.$$

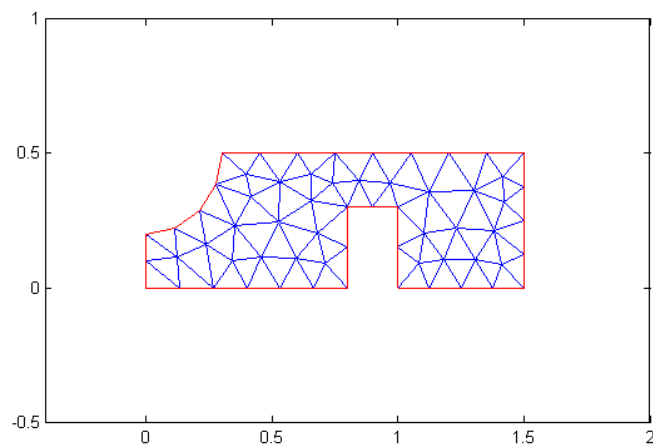
Zvolme okrajové podmínky (7) a (8) takto

- Dirichletovy ... $u_0(t) = 20$ na Γ_1 a $u_l(t) = -5$ na Γ_7
- Neumannovy ... $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na Γ_i , $i = 2, \dots, 6, 8, 9$

a počáteční podmínku $u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = 0$.

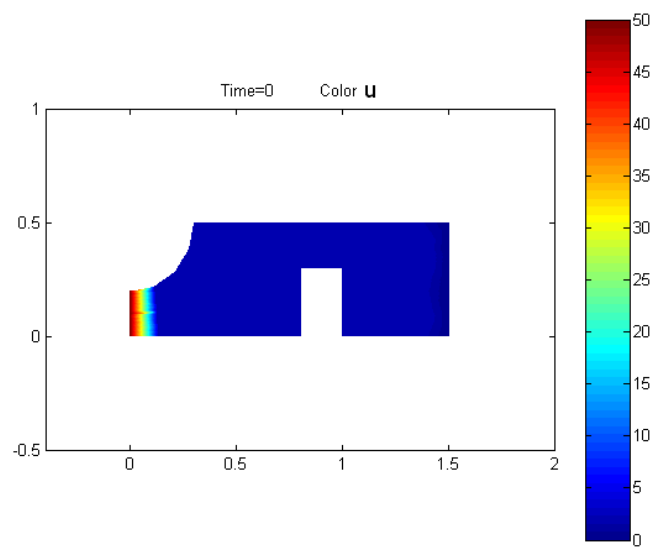
Význam těchto podmínek je stejný jako u předchozího příkladu.

Stejným postupem použijeme GUI v PDE Toolboxu. Na námi zadanou vyšetřovanou oblast (Obr. 5) aplikujeme diskretizační síť (Obr. 6) a nastavíme okrajové a počáteční podmínky v GUI PDE Toolboxu. Opět geometrický tvar oblasti a diskretizační síť byly též vytvořeny v GUI PDE Toolboxu. Rozložení teploty v čase $t_0 = 0$ vidíme na obrázku (Obr. 7). Obrázek (Obr. 8) popisuje k jaké změně došlo v časovém intervalu od 0 s do 1.5 s.

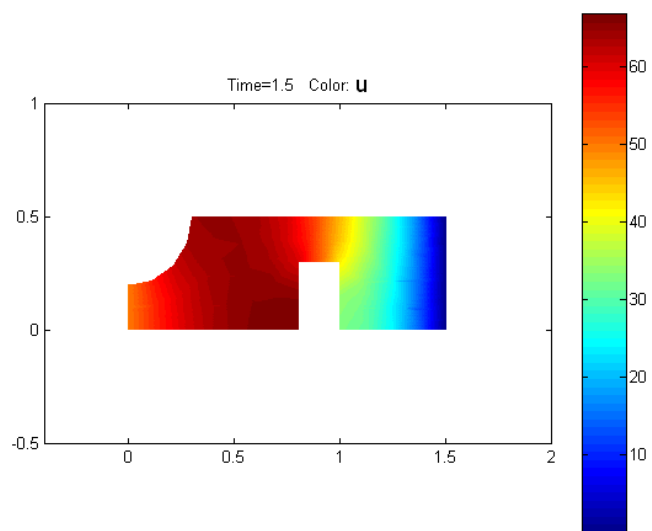


Obr. 6: Diskretizační síť

Poznámka: V animaci pr2.avi můžeme tento průběh změny teploty sledovat.



Obr. 7: Rozložení teploty v čase $t = 0$



Obr. 8: Rozložení teploty v čase $t = 1.5$

Přehled užitých symbolů a veličin

Značení	Veličina	Rozměr
t	čas	s
l	délka	m
u	teplota	$^{\circ}C, K$
\mathbf{w}	tepelný tok	$Jm^{-2}s^{-1}$
\mathbf{f}	hustota rozložení tepelných zdrojů	$Jm^{-3}s^{-1}$
k	koefficient tepelné vodivosti	$Wm^{-1}K^{-1}$
c	měrná tepelná kapacita	$Jkg^{-1}K^{-1}$
ϱ	plošná hustota	kgm^{-2}

Značení	Pojem
\mathbb{R}^3	reálný prostor
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
Ω	omezená oblast v \mathbb{R}^2 (tj. otevřená souvislá podmnožina v \mathbb{R}^2)
Ω_B	omezená podoblast oblasti Ω , tj. $\Omega_B \subset \Omega$
$\partial\Omega_B$	hranice množiny Ω_B
$\operatorname{div} \mathbf{w}$	divergence vektoru \mathbf{w}
$\operatorname{grad} u$	gradient u
$\mathbf{n}(\mathbf{x})$	vektor vnější normály

Literatura a jiné zdroje

[1] MÍKA, S. *Matematické modelování*. Učební text ZCU. Plzeň, 2005.

[2] KUNEŠ, J. *Modelování tepelných procesů*. SNTL, Praha, 1989.

Internet:

[3] www.mathworks.com