Integrace integrálů podle parametrů - záměnnost integračního pořadí[1]

Věta 106
Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, X metrický prostor, α_0 hromadný bod X, $f(x,\,\alpha)$ komplexní funkce na $M \times X$ a platí:

1). Pro s.v. $x \in M$ existuje $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\,\alpha) = g(x)$

2). Pro každé $\alpha \in X - \{\alpha_0\}$ je $f(x,\,\alpha)$ měřitelná v M

3). $\exists \varphi(x) \in L(M)$ tak, že pro $\alpha \in X - \{\alpha_0\}$ je $|f(x,\,\alpha)| \le \varphi(x)$ s.v. v M

Potom

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_M f(x,\,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int\limits_M \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int\limits_M g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Pro $x > 0$ jest $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}$, a tedy

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Položme

$$K = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$$

Jde o to zda $I = K$. Jest $|\mathrm{e}^{-xy} \sin x| \le x\mathrm{e}^{-xy}$ pro $x > 0$; užitím Fubiniovy věty na tuto nezápornou funkci máme pro konečné $a > 0$

$$\iint\limits_{\substack{0<x<a \\ y>0}} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{a} \mathrm{d}x < +\infty.$$

Tedy pro konečné $a > 0$ jest

$$\int\limits_0^{a} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{a} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Položíme-li zde

$$F(a,\,y) = \int\limits_0^{a} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x,$$

je

$$\lim_{a \to +\infty} F(a,\,y) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x$$

[1] J-IP II, str. 360

a dále

$$F(a,\,y) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-ay}(y\sin x + \cos x)}{y^2+1}$$

Pro $a > 0$. Pro $a > 0,\ y > 0$ je však

$$|\mathrm{e}^{-ay}\cos a| < 1, \quad |\mathrm{e}^{-ay}\sin a| < \mathrm{e}^{ay}ay < C,$$

kde C je jistá konstanta (neboť funkce $u\mathrm{e}^{-u}$ je v $<0,\,+\infty)$ spojitá a má pro $u \to +\infty$ limitu 0; tedy je tato funkce omezená v $<0,\,+\infty),$ tj. $u\mathrm{e}^{-u} < C$ pro všechna $u \geq 0$). Tedy funkce $F(a,\,y)$ mají společnou integrabilní majorantu $\dfrac{2+C}{y^2+1}$. Podle věty 106 je tedy

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} F(a,\,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y;$$

tj. pravá strana v (1) má limitu $K = \frac{\pi}{2}$, a touž limitu má tedy i levá strana, tj. I konverguje a jest $I = \frac{\pi}{2}$.