ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Katedra matematiky

Speciální numerické metody 1

Semestrální práce

Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz

PLZEŇ 2007

Máme dánu soustavu čtyř nelineárních ODR.

$$\begin{aligned}
y_1' &= \cos(y_3) \\
y_2' &= \sin(y_3) \\
y_3' &= \big(\cos(y_3) - \sin(y_3)|\sin(y_3)|\big)/y_4 \\
y_4' &= \sin(y_3) - \cos(y_3)|\cos(y_3)|,
\end{aligned}$$

kde $y_1(t)$ a $y_2(t)$ jsou horizontální a vertikální souřadnice lana, $y_3(t)$ je úhel mezi tečnou lana a horizontální osou, $y_4(t)$ je napětí lana a proměnná $t, 0 \leq t \leq 1$ je oblouková délka. Dále jsou dány okrajové podmínky ve tvaru

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu budeme řešit metodou konečných diferencí. Pro úplnost dodejme odhad pro y_3, y_4 v počátečním a koncovém bodě

$$\begin{aligned}
y_3(0) &= 0 \qquad & y_3(1) &= 1 \\
y_4(0) &= 1 \qquad & y_4(1) &= 1
\end{aligned}$$

Pro jednoduchost označme

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = y(t), \quad y_3(t) = v(t), \quad y_4(t) = w(t),$$

a okrajové podmínky takto

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \ = 0 \qquad & y(0) &= y_0 \ = 0 \\
x(1) &= x_N = 0.85, \qquad & y(1) &= y_N = 0.50.
\end{aligned}$$

Příslušné derivace budou vypadat následovně

$$y_1' = x', \quad y_2' = y', \quad y_3' = v', \quad y_4' = w'.$$

Jednotlivé derivace budeme aproximovat dle vzorce

$$u' \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}),$$

kde $h = (b-a)/N$. Vidíme, že se v soustavě „nevyskytuje“ proměnná t, tedy pravou stranu aproximujeme vztahem

$$f(u_{n+1/2}) \approx \frac{f(u_{n+1}) + f(u_n)}{2}.$$

Takže vzorec bude ve tvaru

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{f(u_{n+1}) + f(u_n)}{2}$$

pro $n = 0, 1, 2 \ldots, N-1, N$. Přibližné řešení tedy určíme vektorem $\mathbf{U} = (U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{N-1}, U_N)$. Složky $U_n, n = 0, 1, 2 \ldots, N-1, N$, aproximují hodnoty $u_n = u(x_n)$ přesného řešení v uzlech sítě.

Tedy jednotlivé aproximace hodnot x_n, y_n, v_n, w_n jsou X_n, Y_n, V_n, W_n pro $n = 0, 1, 2 \ldots, N-1, N$. Z okrajových podmínek máme $X_0 = x_0, X_N = x_N, Y_0 = y_0, Y_N = y_N$. Jak vypadá vektor $\mathbf{U}$ uvidíme na straně 4 (podrobněji viz strana 6).

$$
\begin{array}{rcl}
X_{n+1} - X_n & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big) \\
\hline
X_1 - X_0 & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_1) + \cos(V_0)\big) \\
X_2 - X_1 & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_2) + \cos(V_1)\big) \\
X_3 - X_2 & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_3) + \cos(V_2)\big) \\
 & \vdots & \\
X_{N-2} - X_{N-3} & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_{N-2}) + \cos(V_{N-3})\big) \\
X_{N-1} - X_{N-2} & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_{N-1}) + \cos(V_{N-2})\big) \\
X_N - X_{N-1} & = & \frac{h}{2}\big(\cos(V_N) + \cos(V_{N-1})\big)
\end{array}
$$

$$X_0 = x_0 = 0$$

$$X_N = x_N = 0.85$$

$$
\begin{array}{rcl}
Y_{n+1} - Y_n & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big) \\
\hline
Y_1 - Y_0 & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_1) + \sin(V_0)\big) \\
Y_2 - Y_1 & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_2) + \sin(V_1)\big) \\
Y_3 - Y_2 & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_3) + \sin(V_2)\big) \\
 & \vdots & \\
Y_{N-2} - Y_{N-3} & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_{N-2}) + \sin(V_{N-3})\big) \\
Y_{N-1} - Y_{N-2} & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_{N-1}) + \sin(V_{N-2})\big) \\
Y_N - Y_{N-1} & = & \frac{h}{2}\big(\sin(V_N) + \sin(V_{N-1})\big)
\end{array}
$$

$$Y_0 = y_0 = 0$$

$$Y_N = y_N = 0.50$$

Což můžeme přepsat do této podoby

$$\mathbf{A_1}\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-3} \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}\big(\cos(V_1)+\cos(V_0)\big)+X_0 \\ \frac{h}{2}\big(\cos(V_2)+\cos(V_1)\big) \\ \frac{h}{2}\big(\cos(V_3)+\cos(V_2)\big) \\ \vdots \\ \frac{h}{2}\big(\cos(V_{N-2})+\cos(V_{N-3})\big) \\ \frac{h}{2}\big(\cos(V_{N-1})+\cos(V_{N-2})\big) \\ \frac{h}{2}\big(\cos(V_N)+\cos(V_{N-1})\big)-X_N \end{pmatrix} = \mathbf{G_X}$$

$$\mathbf{A_1}\cdot\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{N-3} \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}\big(\sin(V_1)+\sin(V_0)\big)+Y_0 \\ \frac{h}{2}\big(\sin(V_2)+\sin(V_1)\big) \\ \frac{h}{2}\big(\sin(V_3)+\sin(V_2)\big) \\ \vdots \\ \frac{h}{2}\big(\sin(V_{N-2})+\sin(V_{N-3})\big) \\ \frac{h}{2}\big(\sin(V_{N-1})+\sin(V_{N-2})\big) \\ \frac{h}{2}\big(\sin(V_N)+\sin(V_{N-1})\big)-Y_N \end{pmatrix} = \mathbf{G_Y}$$

Každá matice je rozměru $N \times N-1$, tedy dohromady je to $2N$ rovnic pro $2N-2$ neznámých.

$$W_{n+1} - W_n = \frac{h}{2}\left\{\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n) - \big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big)\left|\frac{\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)}{2}\right|\right\}$$

$$\begin{aligned}
W_1 - W_0 &= \frac{h}{2}\left\{\sin(V_1) + \sin(V_0) - \big(\cos(V_1) + \cos(V_0)\big)\left|\frac{\cos(V_1) + \cos(V_0)}{2}\right|\right\}\\
W_2 - W_1 &= \frac{h}{2}\left\{\sin(V_2) + \sin(V_1) - \big(\cos(V_2) + \cos(V_1)\big)\left|\frac{\cos(V_2) + \cos(V_1)}{2}\right|\right\}\\
W_3 - W_2 &= \frac{h}{2}\left\{\sin(V_3) + \sin(V_2) - \big(\cos(V_3) + \cos(V_2)\big)\left|\frac{\cos(V_3) + \cos(V_2)}{2}\right|\right\}\\
&\vdots\\
W_{N-1} - W_{N-2} &= \frac{h}{2}\left\{\sin(V_{N-1}) + \sin(V_{N-2}) - \big(\cos(V_{N-1}) + \cos(V_{N-2})\big)\left|\frac{\cos(V_{N-1}) + \cos(V_{N-2})}{2}\right|\right\}\\
W_N - W_{N-1} &= \frac{h}{2}\left\{\sin(V_N) + \sin(V_{N-1}) - \big(\cos(V_N) + \cos(V_{N-1})\big)\left|\frac{\cos(V_N) + \cos(V_{N-1})}{2}\right|\right\}
\end{aligned}$$

Obdobně jako na předchozí stránce píšeme

$$\mathbf{A_2}\cdot\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} W_0\\ W_1\\ W_2\\ \vdots\\ W_{N-2}\\ W_{N-1}\\ W_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \dots\\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \mathbf{G_W},$$

kde $\mathbf{G_W}$ je vektor jehož složky tvoří pravá strana výše uvedených rovnic. Tato matice je rozměru $N \times N+1$, tedy je to N rovnic pro $N+1$ neznámých.
Kvůli značné délce zápisu diferenčních rovnic pro V_n je užita samostatná stránka 5.

Celkem tedy máme $4N$ rovnic pro $4N$ neznámých a matice je tedy rozměru $4N \times 4N$. Tuto matici označme $\mathbf{B}$ a vektor neznámých jako $\mathbf{U}$. Takže řešíme tuto nelineární soustavu

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_X}\\ \mathbf{G_Y}\\ \mathbf{G_V}\\ \mathbf{G_W} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$$

Pro lepší přehled je rozepsán součin $\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}$ na straně 6. Odtud vidíme, že matice $\mathbf{B}$ je singulární ($\det\mathbf{B} = 0$).

$$V_{n+1} - V_n = h\left\{\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n) - \big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\left|\frac{\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)}{2}\right|\right\}/(W_{n+1} + W_n)$$

$$\begin{aligned}
V_1 - V_0 &= h\left\{\cos(V_1) + \cos(V_0) - \big(\sin(V_1) + \sin(V_0)\big)\left|\frac{\sin(V_1) + \sin(V_0)}{2}\right|\right\}/(W_1 + W_0)\\
V_2 - V_1 &= h\left\{\cos(V_2) + \cos(V_1) - \big(\sin(V_2) + \sin(V_1)\big)\left|\frac{\sin(V_2) + \sin(V_1)}{2}\right|\right\}/(W_2 + W_1)\\
V_3 - V_2 &= h\left\{\cos(V_3) + \cos(V_2) - \big(\sin(V_3) + \sin(V_2)\big)\left|\frac{\sin(V_3) + \sin(V_2)}{2}\right|\right\}/(W_3 + W_2)\\
&\vdots\\
V_{N-1} - V_{N-2} &= h\left\{\cos(V_{N-1}) + \cos(V_{N-2}) - \big(\sin(V_{N-1}) + \sin(V_{N-2})\big)\left|\frac{\sin(V_{N-1}) + \sin(V_{N-2})}{2}\right|\right\}/(W_{N-1} + W_{N-2})\\
V_N - V_{N-1} &= h\left\{\cos(V_N) + \cos(V_{N-1}) - \big(\sin(V_N) + \sin(V_{N-1})\big)\left|\frac{\sin(V_N) + \sin(V_{N-1})}{2}\right|\right\}/(W_N + W_{N-1})
\end{aligned}$$

A pro poslední soustavu diferenčních rovnic máme

$$\mathbf{A_2}\cdot\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_0\\ V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_{N-2}\\ V_{N-1}\\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \\ \\ \end{pmatrix} = \mathbf{G_V},$$

kde $\mathbf{G_V}$ je vektor jehož složky tvoří pravá strana výše uvedených rovnic. Tato matice je rozměru $N \times N+1$, tedy je to N rovnic pro $N+1$ neznámých.

Součin BU

$$
\left(\begin{array}{cccc}
\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{matrix}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{matrix}}
\end{array}\right)
\cdot
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-3} \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{N-3} \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-2} \\ V_{N-1} \\ V_N \\ W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N-2} \\ W_{N-1} \\ W_N \end{pmatrix}
$$

Nelineární soustavu

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$$

budeme řešit Newtonovou metodou. Upravíme ji nejprve na tvar

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

Iterace Newtonovy metody jsou pak dány předpisem

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} - [\mathbf{\Phi}'(\mathbf{U}^{(k)})]^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{U}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

přičemž $\mathbf{U}^{(0)}$ je zvolené počáteční přiblížení.

Na stránce 9 vidíme, jak vypadá Jacobiova matice $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{U})$. Jednotlivé $\times$ značí parciální derivaci podle jednotlivých proměnných v bodě ... . Například v prvním řádku první $\times$ je

$$-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_0}\big(\cos(v_1) + \cos(v_0)\big)\Big|_{\substack{v_0 = V_0 \\ v_1 = V_1}} = \frac{h}{2}\sin(V_0)$$

Obecně tedy pro maticový blok v prvním řádku a třetím sloupci, tj. $(1,3)$ vypadají prvky následovně

$$d^{(1,3)}_{n+1,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_n}\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\Big|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} = \frac{h}{2}\sin(V_n) \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$d^{(1,3)}_{n,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_{n+1}}\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\Big|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} = \frac{h}{2}\sin(V_{n+1}) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Pro maticový blok v druhém řádku a třetím sloupci, tj. $(2,3)$ máme

$$d^{(2,3)}_{n+1,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_n}\big(\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n)\big)\Big|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} = -\frac{h}{2}\cos(V_n) \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$d^{(2,3)}_{n,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_{n+1}}\big(\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n)\big)\Big|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} = -\frac{h}{2}\cos(V_{n+1}) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Pro délku zápisu budou prvky maticových bloků $(3,3), (3,4)$ a $(4,3)$ uvedeny na samostatné stránce 8. Pro jednoduchost přepíšeme díky vzorcům $|x| = x\,\mathrm{sign}(x)$ a $\mathrm{sign}(\frac{x}{2}) = \mathrm{sign}(x)$ pravou stranu u $w_{n+1} - w_n$, tj.

$$\frac{h}{2}\left\{\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n) - \big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\left|\frac{\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)}{2}\right|\right\}$$

na tvar

$$\frac{h}{2}\left\{\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n) - \mathrm{sign}\,\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\frac{\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)^2}{2}\right\}$$

Prvky maticového bloku $(4,3)$ pak vypadají takto

$$d^{(4,3)}_{n+1,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_n}\left\{\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n) - \operatorname{sign}\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\frac{\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)^2}{2}\right\}\Bigg|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} =$$

$$= -\frac{h}{2}\Big(\cos(V_n) + \operatorname{sign}\big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big)\big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big)\sin(V_n)\Big) \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$d^{(4,3)}_{n,n+1} = -\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial v_{n+1}}\left\{\sin(v_{n+1}) + \sin(v_n) - \operatorname{sign}\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)\frac{\big(\cos(v_{n+1}) + \cos(v_n)\big)^2}{2}\right\}\Bigg|_{\substack{v_n = V_n \\ v_{n+1} = V_{n+1}}} =$$

$$= -\frac{h}{2}\Big(\cos(V_{n+1}) + \operatorname{sign}\big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big)\big(\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n)\big)\sin(V_{n+1})\Big) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Kde jsme u obou parciálních derivací položili

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ldots}}\operatorname{sign}\big(\cos(V_{\ldots}) + \cos(V_{\ldots})\big) = 0.$$

Obdobným postupem jako v předchozím případě dostaneme pro prvky maticového bloku $(3,3)$ toto

$$d^{(3,3)}_{n+1,n+1} = -1 - h\Big(-\sin(V_n) - \operatorname{sign}\big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\cos(V_n)\Big)/(W_{n+1} + W_n) \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$d^{(3,3)}_{n,n+1} = 1 - h\Big(-\sin(V_{n+1}) - \operatorname{sign}\big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\cos(V_{n+1})\Big)/(W_{n+1} + W_n) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

a pro maticový blok $(3,4)$

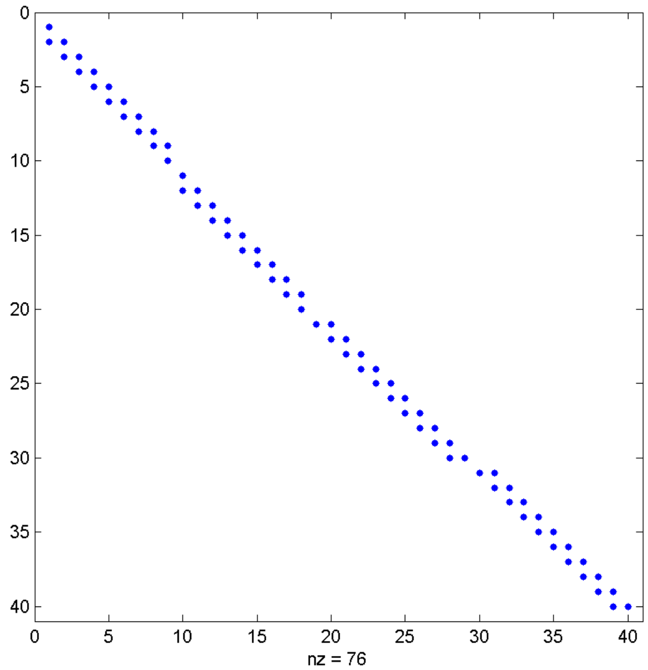
$$d^{(3,4)}_{n+1,n+1} = h\left\{\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n) - \big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\left|\frac{\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)}{2}\right|\right\}/(W_{n+1} + W_n)^2 \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$d^{(3,4)}_{n,n+1} = h\left\{\cos(V_{n+1}) + \cos(V_n) - \big(\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)\big)\left|\frac{\sin(V_{n+1}) + \sin(V_n)}{2}\right|\right\}/(W_{n+1} + W_n)^2 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

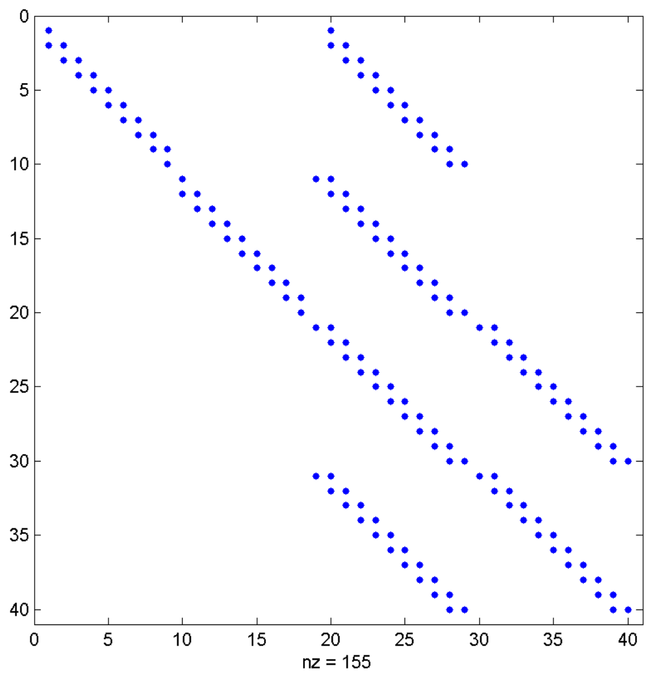
Jacobiova matice $\boldsymbol{\Phi}'(\mathbf{U})$

$$
\left(\begin{array}{cccc}
\boxed{\begin{matrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1\\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1
\end{matrix}} & \mathbf{0} &
\boxed{\begin{matrix}
\times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times
\end{matrix}} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} &
\boxed{\begin{matrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1\\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1
\end{matrix}} &
\boxed{\begin{matrix}
\times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times
\end{matrix}} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} &
\boxed{\begin{matrix}
\times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times
\end{matrix}} &
\boxed{\begin{matrix}
\times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times
\end{matrix}}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} &
\boxed{\begin{matrix}
\times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \times & \times & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \times & \times
\end{matrix}} &
\boxed{\begin{matrix}
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1
\end{matrix}}
\end{array}\right)
$$

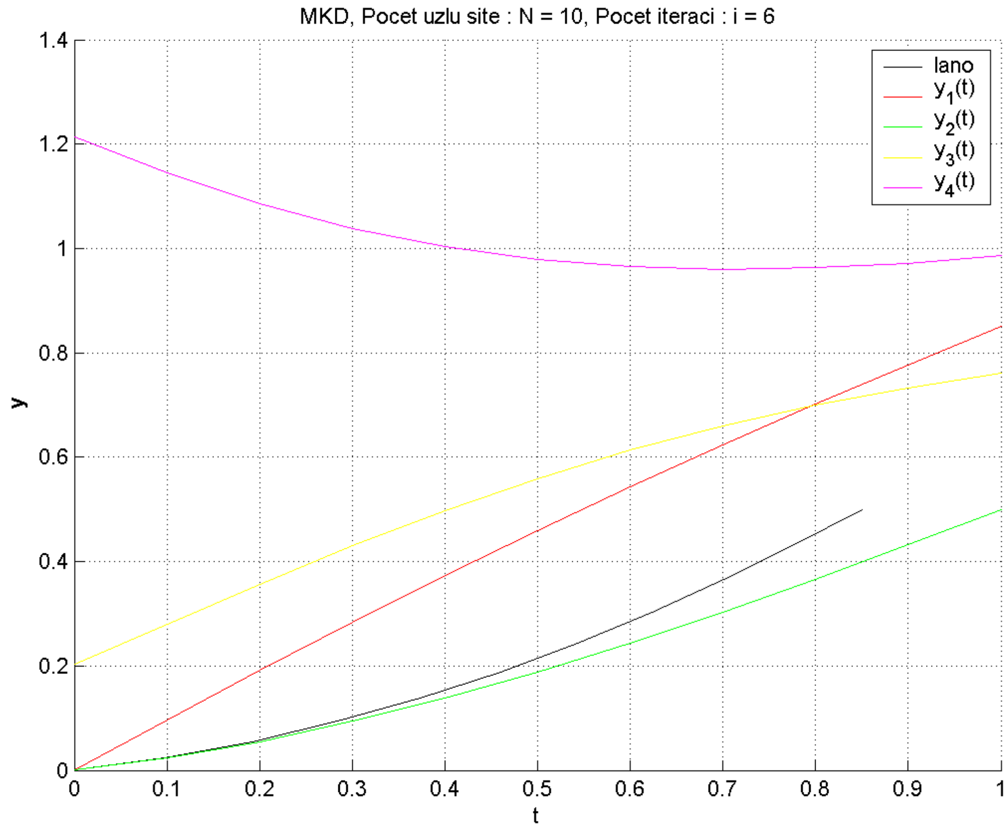
Konkrétně zvolíme-li počet uzlů sítě 10, tj. $N = 10$ pak máme



Matice $\mathbf{B}$



Jacobiova matice $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{U})$


MKD, Pocet uzlu site : N = 10, Pocet iteraci : i = 6
lano
y1(t)
y2(t)
y3(t)
y4(t)
y
t
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1