ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Katedra matematiky

Software a algoritmy numerické matematiky

Užití Matlabu k numerické integraci použitím programů `quad8` a `quadl`

Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz

PLZEŇ 2007

Oba tyto programy, tj. `quad8` a `quadl` patří do skupiny tzv. adaptivních programů. Tyto programy používají složené kvadraturní vzorce založené na jednom či dvou základních vzorcích a automaticky si určují velikost podintervalů tak, aby získaný výsledek splňoval zadané požadavky na přesnost. Velikost a počet těchto podintervalů jednak závisí na intervalu přes který integrujeme a jednak na průběhu integrované funkce. Program se tedy snaží stanovit číslo Q tak, aby platilo

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q \right| \leq \varepsilon,$$

kde ε je aproximace chyby, $f(x)$ je integrovaná funkce přes interval $[a, b]$. Tyto parametry zadává uživatel a některé další, například trasování (program během výpočtu výpisuje mezivýsledky na monitor).

Bylo by chybné domnívati se, že aproximace chyby vždy zaručuje přesnost výsledku na k platných číslic, kde pro jednoduchost budeme volit $\varepsilon = 10^{-k}$. V celé této práci nám bude stačit pro naší potřebu hodnota $k = 9$. Z uvedené nerovnosti plyne, že přesný výsledek integrálu by měl být v intervalu $[-\varepsilon + Q, \varepsilon + Q]$, neboť je

$$-\varepsilon + Q \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon + Q.$$

Řekneme tedy, že aproximovaný výsledek je shodný s výsledkem teoretickým na k platných číslic, bude-li platit

$$\tilde{Q}_{-\varepsilon} \doteq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \tilde{Q}_{\varepsilon},$$

kde $\tilde{Q}_{-\varepsilon}$ je zaokrouhlená hodnota $-\varepsilon + Q$ a $\tilde{Q}_{\varepsilon}$ je zaokrouhlená hodnota $\varepsilon + Q$.

K tomu abychom mohli důvěřovat aproximovanému výsledku se musíme nejdřív zamyslet nad tím, zda integrál konverguje či nikoliv. To bude vyšetřováno zejména tam, kde se vyskytnou nějaké body nespojitosti. Dále se zamyslíme zda budou při výpočtu činit potíže singulární body integrované funkce, popř. jiné „nevhodné“ vlastnosti funkce $f(x)$. Posléze pak budeme sledovat jak se liší výsledky jednotlivých programů (v našem případě `quad8` a `quadl`). A na základě těchto poznatků o dané úloze a vypočtených hodnot pak budeme posuzovat důvěryhodnost.

quad8

Tento program se snaží numericky stanovit hodnotu integrálu použitím adaptivní Simpsonovy kvadratury. V nápovědě k tomuto programu zjistíme, že je tento program zastaralý a je doporučeno ho nahradit programem `quadl`. Použití:

`>> Q = quad8(fun,a,b)`
Aproximuje integrál z funkce `fun` od `a` do `b` s relativní chybou `1e-3`.

`>> Q = quad8(fun,a,b,tol)`
stejné jako předchozí s tím, že počítá s relativní chybou `tol`.

`>> Q = quad8(fun,a,b,tol,trace)`
stejné jako předchozí s tím, že je-li `trace = 1` pak se výpisují mezivýsledky během výpočtu na monitor ve tvaru `[fcnt a b-a Q]`, kde `fcnt` je počet provedených výpočtů.

Poznámka: toleranci lze použít i ve tvaru `tol = [rel_tol abs_tol]`, není-li uvedena tolerance je defaultně nastaveno `rel_tol = 1.e-3`. V našich výpočtech budeme pracovat pouze s absolutní tolerancí, tj. `tol = [0 abs_tol]`, kde položíme `abs_tol = 1.e-9`.

quadl

Tento program se snaží numericky stanovit hodnotu integrálu použitím adaptivní Gauss – Lobattovy kvadratury. Gaussovy kvadraturní vzorce mají důležitou vlastnost a to, že při zvyšování požadavku přesnosti konvergují k přesné hodnotě integrálu. Použití:

`>> Q = quadl(fun,a,b)`
Aproximuje integrál z funkce `fun` od `a` do `b` s absolutní chybou `1e-6`.

`>> Q = quadl(fun,a,b,tol)`
stejné jako předchozí s tím, že počítá s absolutní chybou `tol`.

`>> Q = quadl(fun,a,b,tol,trace)`
stejné jako předchozí s tím, že je-li `trace = 1` pak se výpisují mezivýsledky během výpočtu na monitor ve tvaru `[fcnt a b-a Q]`, kde `fcnt` je počet provedených výpočtů.

Poznámka: Oba programy mají stejnou syntaxi zadávání funkce `fun`. Buď jako

- inline object
  `fun = inline('1./(x.^3-2*x-5)')`

nebo jako

- function handle
  `Q = quad8(@fun,0,2)`
  kde `fun.m` je m-file obsahující

```
function y = fun(x)
y = 1./(x.^3-2*x-5);
```

Jediný rozdíl je v tom, že zadáme-li `fun` s operátorem dělení `/` pak program `quadl` bude hlásit chybu, zatímco program `quad8` bude fungovat. To odstraníme tak, že místo operátoru `/` budeme používat operátor dělení `./`, u programu `quad8` lze použít oba tyto typy operátoru.

Jak jsme již uvedli, pro všechny výpočty použijme stejné tolerance `tol = 1.e-9`, tj. $\varepsilon = 10^{-9}$. Dále budou všechny funkce zadány pomocí inline object. U každého integrálu bude udělána menší analýza, zda se dá výsledkům věřit a pak dvě tabulky s vypočtenými hodnotami. Program `quad8` zde bude sloužit jenom k posouzení důvěryhodnosti výsledkům programu `quadl`, neboť ten dává přesnější hodnoty. V tabulce `quadl` budou zvýrazněna tučný fontem čísla $\widetilde{Q}_{-\varepsilon}$ a $\widetilde{Q}_{\varepsilon}$, tj. zaokrouhlení hodnot $-\varepsilon + Q$ a $\varepsilon + Q$.

Integrál č.1

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0, 1]$ spojitá. Tudíž se jedná o integrál ze spojité funkce na omezeném intervalu, který vždy konverguje. To plyne z fundamentální věty matematické analýzy, která tvrdí, že ke každé spojité funkci na intervalu $[a, b]$ existuje funkce k ní primitivní. Nelze tedy očekávát, že by nastaly nějaké komplikace při výpočtu a tedy vypočteným výsledkům můžeme z části důvěřovat. Může se stát, že oba programy budou dávat podstatně odlišné výsledky. Z níže uvedených tabulek vidíme, že se tomu tak neděje a proto lze výsledkům plně důvěřovat.

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
1.46265174490742	1.46265174590742	1.46265174690742

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
1.46265174490718	1.46265174590718	**1.46265174**690718

Závěr: $I_1 \doteq 1.46265174$. Tomuto výsledku se dá věřit. Program `quad8` dává přibližně stejné hodnoty jako program `quadl`. Navíc víme, že integrál konverguje. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.2

$$I_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^{-2}}\, \mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0, 1]$ spojitá, rostoucí a nezáporná. V bodě 0 má odstranitelnou nespojitost

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x^{-2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty \end{array} \right\} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = 0.$$

Tento integrál taktéž konverguje, důvod proč tomu tak je, je stejný jako u předchozího integrálu.

Vlivem singularity v bodě 0 lze očekávat, že během výpočtu nějaká chybová hlášení. To se ale nestalo. Vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tabulkách.

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.08907385488319	0.08907385588319	0.08907385688319

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.08907385489172	0.08907385589172	**0.08907385**689172

Přesto lze vypočteným výsledkům důvěřovat, neboť platí odhad chyby

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^{-2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^\delta \mathrm{e}^{-x^{-2}}\, \mathrm{d}x + \int_\delta^1 \mathrm{e}^{-x^{-2}}\, \mathrm{d}x \le (\delta - 0) \cdot \max_{x\in[0,\delta]} \mathrm{e}^{-x^{-2}} + \int_\delta^1 \mathrm{e}^{-x^{-2}}\, \mathrm{d}x,$$

kde $\delta > 0$ je libovolně malé číslo. Zvolme $\delta = 2.2 \cdot 10^{-16}$, pak v počítačové aritmetice s normou IEEE bude $\delta \cdot \mathrm{e}^{-\delta^{-2}} = 0$. Programy na takto zvolenou hodnotu δ dávaly shodné výsledky s předchozími.

Závěr: $I_2 \doteq 0.08907385$. Tomuto výsledku se dá věřit. Program `quad8` dává přibližně stejné hodnoty jako program `quadl`. Navíc víme, že integrál konverguje. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.3

$$I_3 = \int_0^2 \sin(10x)\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0, 2]$ spojitá a periodická. Neobsahuje tudíž žádnou singularitu a oba programy dávají skoro shodné výsledky. Proto lze vypočteným výsledkům důvěřovat.

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.05919179281870	0.05919179381870	0.05919179481870

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.05919179281866	0.05919179381866	**0.05919179**481866

Závěr: $I_3 \doteq 0.05919179$. Tomuto výsledku se dá věřit. Opět je vypočtený výsledek shodný s teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.4

$$I_4 = \int_0^2 \sin(100x)\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0, 2]$ spojitá a periodická. Neobsahuje žádnou singularitu, takže bychom mohli výsledkům z části věřit. Problém při výpočtu by mohl akorát nastat díky velkému argumentu ve funkci sinus. Tzn. na intervalu $[0, 2]$ bude velký počet maxim a minim.

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
−0.96581207375302	−0.96581207275302	−0.96581207175302

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.00512812224993	0.00512812324993	**0.00512812**424993

Jak je vidět z tabulek nelze těmto výsledkům vůbec důvěřovat. Trasováním zjistíme, že program `quad8` provedl pouze 33 výpočtů, zatímco program `quadl` 3828. Na vinně je, jak jsme se domnívali, velký argument funkce sinus. Tuto nepříjemnou vlastnost funkce obejdeme následujícím způsobem. Ze základního kurzu matematické analýzy víme, že integrujeme-li funkci sinus přes symetrický interval či svoji periodu je výsledek nula. Změnou intervalu bychom se zřejmě nikam nedostali.

Chťejme tedy najít takové číslo $c \in [0, 2]$ pro které bude platit $\int_0^c \sin(100x)\ \mathrm{d}x = 0$, neboť pak díky aditivnosti integrálu bude

$$I_4 = \int_c^2 \sin(100x)\ \mathrm{d}x.$$

Víme též, že funkce sinus je periodická funkce s periodou 2π, obecně $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Konkrétně tedy řešíme rovnici $\sin(100x) = \sin(2\pi k) = 0$, odtud $x = \frac{2\pi k}{100}$. Jenže jsme na intervalu $[0, 2]$ takže bude

$$x = \frac{2\pi k}{100} \leq 2 \Rightarrow k \leq \frac{100}{\pi} \Rightarrow k = \left\lfloor \frac{100}{\pi} \right\rfloor = 31 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{62\pi}{100}.$$

S takovým to číslem c už dostáváme výsledky kterým se dá plně důvěřovat, jak je vidno z tabulek. Navíc trasováním zjistíme, že se výpočet programem `quadl` značně urychlil; počet výpočtů je nyní 48. Program `quad8` provedl stejný počet výpočtů, tj. 33.

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.00512812224988	0.00512812324988	0.00512812424988

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.00512812224993	0.00512812324993	**0.00512812**424993

Závěr: $I_4 \doteq 0.00512812$. Tomuto výsledku se dá věřit. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.5

$$I_5 = \int_0^1 \sqrt{x} \ln x\ \mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $([0, 1]$ spojitá a záporná. V bodě 0 má odstranitelnou nespojitost, neboť použitím L'Hôpitalova pravidla máme

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}} = -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3}}{x} = -2 \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Vlivem singularity v bodě 0 lze očekávat během výpočtu nějaká chybová hlášení. A taky se tak stalo, Matlab nás informuje o `Warning: Log of zero`. Dále program `quad8` sehlal, výsledek jeho výpočtu je NaN. Je to tím, že Simpsonova metoda dosadí krajní bod itervalu do funkce a pak s ním nějak počítá. Matlab zcela správně vyhodnotí toto dosazení, tj. $0 \cdot \ln 0$ jako NaN. Ovšem program `quadl` neselhal a něco spočetl. Jak je toto možné když víme, že Gauss – Lobattova metoda dosazuje krajní body intervalu do funkce stejně tak jako metoda Simpsonova? Je to dáno tím, že program `quadl` je robustnější. V zdrojovém souboru programu `quadl` se dovíme čím to je. Je zde podmínka zda počáteční bod intervalu je NaN, jestliže je toto splňeno pak se dál počíta s hodnotou `a+eps*(b-a)`. Tedy místo 0 se počítá s hodnotou `eps = 2.220446049250313e-016`.

Nyní bychom mohli udělat podobný odhad jako u integrálu č. 2 nebo se zamyslíme a zkusíme daný integrál nějak zjednodušit. Nabízí se metoda per partes.

$$I_5 = \int_0^1 \sqrt{x} \ln x \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u' = \sqrt{x} & v = \ln x \\ u = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$$

Kde člen v hranaté závorce se analuje po dosazení mezí díky logaritmu a použitím L'Hôpitalova pravidla (výpočet by byl obdobný jako výše).

S takto upraveným integrálem dostáváme tyto výsledky:

quad8		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
-0.44444442661345	-0.44444442561345	-0.44444442461345

quadl		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
$-\mathbf{0.44444444}476424$	-0.44444444376424	$-\mathbf{0.44444444}276424$

Funkce $\sqrt{x}$ je na daném intervalu $[0, 1]$ spojitá a neobsahuje žádný singularní bod. Přesto program `quad8` zobrazil dvě varovná hlášení:

```
Warning: Recursion level limit reached in QUAD8. Singularity likely.
Warning: Recursion level limit reached 2 times.
```

Závěr: $I_5 \doteq -0.44444444$. Tomuto výsledku se dá plně důvěřovat, neboť víme, že funkce $\sqrt{x}$ neobsahuje žádnou singularitu na $[0, 1]$. Dále pak program `quad8` dává přibližně stejné hodnoty jako program `quadl`. Vypočtený ýsledek je opět shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.6

$$I_6 = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|} \, \mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá a sudá. Nelze tedy očekávat nějaké problémy při výpočtu. Jenže program `quad8` nás jako v minulém případě informoval o možné singularitě. Ale i tak se dá věřit výsledkům, neboť integrál můžeme upravit na tento tvar

$$I_6 = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \sqrt{|x|} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$$

Opět vidíme, že funkce $\sqrt{x}$ neobsahuje žádnou singularitu na $[0, 1]$.

quad8		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
1.33333317254966	1.33333317354966	1.33333317454966

quadl		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
$\mathbf{1.33333333}172305$	1.33333333272305	$\mathbf{1.33333333}372305$

Závěr: $I_5 \doteq 1.33333333$. Tomuto výsledku se dá plně důvěřovat. Program `quad8` dává přibližně stejné hodnoty jako program `quadl`. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.7

$$I_7 = \int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0,2]$ spojitá, nezáporná a klesající. Opět víme, že daný integrál konverguje, neboť to plyne z fundamentální věty matematické analýzy. V bodě 0 má odstranitelnou nespojitost, neboť užitím L'Hôpitalova pravidla máme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1.$$

Vlivem singularity v bodě 0 lze očekávat během výpočtu nějaká chybová hlášení. A taky že ano, Matlab nás informuje o `Warning: Divide by zero`. Dále program `quad8` sehlal a výsledek jeho výpočtu je NaN. Program `quadl` něco spočetl, ale těmto výsledkům se nedá důvěřovat. Důvody proč tomu tak je jsou uvedeny u integrálu č. 5. Poznamenejme, že program `quadl` počítal s dolní mezí `2*eps`. Zde se nabízí použít tuto hodnotu místo 0. Pak nás musí zajímat k jak velké chybě muže dojít. To odhadneme podobně jako u integrálu č. 2. Tedy

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\delta \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\delta^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \le (\delta - 0)\cdot \max_{x\in[0,\delta]} \frac{\sin x}{x} + \int_\delta^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

kde δ =`2*eps = 4.440892098500626e-016`. Víme, že integrovaná funkce je na $[0,2]$ klesající a tedy i na $[0,\delta]$, tudíž maximum je rovno 1. Odtud vidíme, že se tato chyba neprojevý ve výsledku, neboť počítáme s tolerancí 10^{-9}.

S takto změněnou dolní mezí dostaváme tyto výsledky

`quad8`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
1.60541297580269	1.60541297680269	1.60541297780269

`quadl`		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
1.60541297579358	1.60541297679358	**1.60541297**779358

Závěr: $I_7 \doteq 1.60541297$. Tomuto výsledku se dá důvěřovat, neboť oba programy dávají přibližně stejné hodnoty. Navíc víme, že tento integrál konverguje. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.8

$$I_8 = \int_0^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2]$ spojitá a rostoucí. V bodě 0 má odstranitelnou nespojitost, neboť užitím L'Hôpitalova pravidla máme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

V bodě $\frac{\pi}{2}$ má nespojitost druhého druhu, protože

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\mp} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\mp} \operatorname{tg} x = \pm\infty.$$

Ukážeme, že tento integrál z hlediska Lebesgueovy definice integrálu neexistuje. Z této definice plyne

$$I_8 = \int_0^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \left(-\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

K tomu abychom mohli použít srovnávací kritérium pro oba integrály dokažme tyto ostré nerovnosti.

$$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \text{platí} \quad 0 < -\frac{1}{10(x-\frac{\pi}{2})} < \frac{\operatorname{tg} x}{x},$$

$$\forall x \in (\frac{\pi}{2}, 2] \quad \text{platí} \quad 0 < \frac{1}{10(x-\frac{\pi}{2})} < -\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Zvolme u první nerovnosti $x = -\varepsilon + \frac{\pi}{2}$, kde ε je libovolné číslo pro které platí $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$. Dosazením dostáváme

$$0 < \frac{1}{10\varepsilon} < \frac{\operatorname{tg}\left(-\varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)}{-\varepsilon + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi - 2\varepsilon} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varepsilon}$$

A u druhé $x = \varepsilon + \frac{\pi}{2}$, kde ε je libovolné číslo pro které platí $2 - \frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$, potom

$$0 < \frac{1}{10\varepsilon} < -\frac{\operatorname{tg}\left(\varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)}{\varepsilon + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi + 2\varepsilon} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Vidíme, že tyto nerovnosti platí pro libovolná x z jednotlivých intervalů a poznamenejme, že jsme u obou nerovností využili vzorec pro funkci tangens

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos\beta\operatorname{tg}\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta}.$$

Tedy obě tyto nerovnosti platí a můžeme použít srovnávací kritérium, z kterého plyne

$$-\frac{1}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \ln\frac{4-\pi}{2}\right) = +\infty \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{diverguje},$$

$$\frac{1}{10}\int_{\frac{\pi}{2}}^2 \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left(\ln\frac{4-\pi}{2} - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = +\infty \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^2 -\frac{\operatorname{tg} x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{diverguje}.$$

Tedy

$$I_8 = \infty - \infty$$

což jsme chtěli dokázat.

Tím, že tento integrál neexistuje se nedá vůbec věřit vypočteným hodnotám. Kromě toho, že Matlab opět hlasí u obou programů `Warning: Divide by zero`, program `quad8` dává výsledek výpočtu NaN. Důvody jsou stejné jako u integrálu č. 5. Změnou dolní meze na hodnotu `eps` dostaneme tyto hodnoty (pro jednoduchost $-\varepsilon + Q, \varepsilon + Q$ neuvádíme)

	Q
`quad8`	24.24819671681866
`quadl`	-16.87178363492058

Závěr: Tento integrál neexistuje. Vypočteným hodnotám se nedá absolutně věřit.

Integrál č.9

$$I_9 = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $(0,\pi)$ spojitá a nezáporná. V bodě 0 a π má nespojitost druhého druhu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to \pi^-} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = +\infty.$$

Navíc nevíme zda uvedený integrál konverguje. Díky nespojitostem v krajních bodech, lze s nejvyšší pravděpodobností očekávat nějaké komplikace při výpočtu.

Ovšem jak za moment ukážeme, tento integrál opravdu konverguje. Integrovaná funkce je na intervalu $(0,\pi)$ sudá a tedy symetrická podle přímky $x-\frac{\pi}{2}=0$. Neboť platí $\sin(-\alpha+\frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$ pro libovolné číslo α takové, že $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$. Takže platí

$$I_9 = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x.$$

Použitím substituce $\sin x = u^2$ a posléze $u = t^{\frac{1}{4}}$ dostáváme

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} \sin x = u^2; & \cos x\,\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u \\ (0,\ \frac{\pi}{2}) \to (0,\ 1); & \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \\ & \mathrm{d}x = \frac{2u}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}u \end{array} \right\} = 2\int_0^1 \frac{1}{u}\cdot\frac{2u}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}u = \left\{ \begin{array}{l} u = t^{\frac{1}{4}} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\ (0,\ 1) \to (0,\ 1) \end{array} \right\} = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t.$$

Poslední integrál je již nám dobře známý, neboť jde o Eulerův integrál 1. druhu (tzv. beta funkce)

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

který konverguje pro hodnoty $\operatorname{Re} p > 0$ a $\operatorname{Re} q > 0$. V našem případě je $p = \frac{1}{4}$ a $q = \frac{1}{2}$ a tedy integrál I_9 konverguje.

Vraťme se zpět k výpočtům. Zadáme-li funkci původní, tj. ze zadání, Matlab nás informuje o `Warning: Divide by zero` u obou programů. Program `quad8` navíc sehlal a výsledek jeho výpočtu je Inf. Důvody jsou stejné jako u integrálu č. 5. Program `quadl` něco spočetl, jelikož v počátečním bodě místo 0 dosadil hodnotu `eps*`π a v koncovém bodě místo π hodnotu π `- eps*`π. Bohužel, výsledku z programu `quadl` se zatim nedá moc věřit. Proto provedeme několik výpočtu s malými změnami v mezích a s integrálem s funkcí proměnné u (zde máme díky substituci jenom jeden sigulární bod). Tyto výsledky jsou shrnuty na následující straně v tabulkách.

Závěr: $I_9 \doteq 5.244115$. V tabulkách vidíme, že se vypočtené výsledky shodují na sedm platných míst u programu `quadl`. Tedy vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na sedm platných číslic. Tomuto výsledku se dá důvěřovat, neboť víme dvě důležité věci. Za prvé, Gaussovy vzorce tvoří konvergentní kvadraturu a za druhé, daný integrál konverguje. Zde poznamenejme, že jsme chtěli původně stanovit nějaký horní odhad abychom užili srovnávácího kritéria. To že jsme nakonec zjistili přesnou hodnotu není na škodu, neboť jí můžeme použít jako již zmínění horní odhad.

Integrál č.10

$$I_{10} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $(-\infty, \infty)$ spojitá a sudá. Ukážeme, že tento integrál konverguje. Ze sudosti funkce plyne následující úprava

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

a použitím per partes máme

$$2\int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ u' = 1 & v = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{array} \right\} = 2\left[-x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde se člen v hranaté závorce analuje po dosazení mezí díky nule a použití L'Hôpitalova pravidla. Integrál na pravé straně je tzv. Laplaceův integrál, který je konvergentní. Otázkou zůstává jak tento integrál aproximovat. Neboli ptáme se na to, jakou hodnotu zvolit místo horní meze.

Zkusme tedy počítat s takto upraveným integrálem, kde horní mez aproximujeme hodnotou 200000. Ještě uveďme poznámku, že integrovaná funkce vypadá celkem rozumně a pro $x \to +\infty$ rychle klesá k nule (což by mohlo škodit). Nelze proto očekávat nějaké problémy při výpočtu. S takto zadanými vstupními parametry dostáváme tyto výsledky (pro jednoduchost $-\varepsilon + Q, \varepsilon + Q$ neuvádíme)

	Q
`quad8`	6.81354717813051
`quadl`	2.50662827463106

Z tabulky vidíme, že se těmto výsledkům nedá věřit. Na vinně nejspíš bude rychlý pokles integrované funkce a zvolená horní mez.

Integrovaná funkce $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$

	quad8	quadl		
Interval integrace	Q	$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
`a = 0,    b = pi - eps*pi`	Inf	5.24411504065998	5.24411504165998	5.24411510858424
`a = 0,    b = pi - eps`	Inf	5.24411508461408	5.24411508561408	5.24411508661408
`a = eps,  b = pi - eps*pi`	$5.2797\mathrm{e}+003$ $(*)$	5.24411501395738	5.24411501495738	5.24411501595738
`a = eps,  b = pi - eps`	$8.4321\mathrm{e}+003$ $(*)$	5.24411505791148	5.24411505891148	5.24411505991148

$(*)$
```
Warning: Recursion level limit reached in QUAD8. Singularity likely.
Warning: Recursion level limit reached 12 times.
```


Integrovaná funkce $\dfrac{4}{\sqrt{1-u^4}}$

	quad8	quadl		
Interval integrace	Q	$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
`a = 0,  b = 1`	Inf	5.24411507166274	5.24411507266274	5.24411507366274
`a = 0,  b = 1 - eps`	$2.291472939646299\mathrm{e}+003$	5.24411504472044	5.24411504572044	5.24411504672044

Pokusme se proto odhadnout jaké zvolit číslo c, které by nejlépe aproximovalo hodnotu $+\infty$ tak, aby odhad chyby byl větší nebo roven toleranci. Konkrétně tedy

$$I_{10} = 2\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_\delta^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \lessapprox 2\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_\delta^{c} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq 2\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + 2(c-\delta)\max_{x\in[\delta,c]} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \lessapprox 2\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x + 2(c-\delta)\varepsilon$$

Víme, že funkce $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ je na intervalu $[0,+\infty)$ klesající a tedy platí $\forall x \in [\delta, c] \ \subset [0,+\infty)$

$$\max_x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta^2} \leq \varepsilon = 10^{-9}$$

Odtud plyne $\delta \doteq 7$. Takže máme $2(c-7)\mathrm{e}^{-24.5}$ a nyní zvolíme číslo c tak, aby rozdíl $c - 7$ byl co nejmenší. Tak například pro $c = 10$ je chyba přibližně $1.373840907387332\mathrm{e}-010$.

Tedy budeme počítat integrál

$$2\int_0^7 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

S takto zadanými hodnotami dostáváme tyto výsledky

quad8		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
2.50662827362470	2.50662827462470	2.50662827562470

quadl		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
2.50662827362571	2.50662827462571	**2.50662827**562571

Závěr: $I_{10} \doteq 2.50662827$. Tomuto výsledku se dá důvěřovat, neboť oba programy dávají přibližně stejné hodnoty. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.

Integrál č.11

$$I_{11} = \int_0^1 x\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $[0,1]$ spojitá. V bodě 0 lze spojitě dodefinovat, takže jde o odstranitelnou nespojitost. Tedy

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{x} = t & & x = \frac{1}{t} \\ x \to 0^+ & \Rightarrow & t \to +\infty \end{array} \right\} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t} = 0.$$

Tudíž se jedná o integrál ze spojité funkce na omezeném intervalu, který vždy konverguje. To plyne z fundamentální věty matematické analýzy, která tvrdí, že ke každé spojité funkci na intervalu $[a,b]$ existuje funkce k ní primitivní.

Z průběhu integrované funkce lze usuzovat na jisté potíže při výpočtu, jednak v bodě 0 a jednak tím, že funkce značně kmitá v okolí tohoto bodu. Vraťme se zpět k výpočtu. Matlab zobrazí `Warning: Divide by zero`, program `quad8` opět vrací hodnotu NaN díky singularitě a `quadl` něco spočetl. Vypočteným hodnotám se nedá důvěřovat.

Tak jako v předchozích případech nahradíme dolní mez hodnotou `eps` a pokusíme se stanovit odhad chyby. Jelikož integrovaná funkce značně kmitá v okolí nuly je těžké určit maximum této funkce. Proto vyjdeme z následující ostré nerovnosti $\sin\frac{1}{x} < 1$, která platí $\forall x \in (0, 1]$. Odtud plyne odhad chyby

$$x \sin \frac{1}{x} < x.$$

Takže

$$\int_0^1 x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\delta x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \int_0^\delta x\,\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\delta^2}{2} + \int_\delta^1 x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Teoreticky bychom mohli říct, že čím blíže půjdeme s δ k nule, tím přesnější by měl být výsledek. S $\delta =$ `eps` se odhad chyby neprojeví na vypočteném výsledku, protože počítáme s tolerancí 10^{-9}. Tedy s takovými to hodnotami dostáváme tyto tabulky

quad8		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.37852582360640	0.37852582460640	0.37852582560640

quadl		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
0.37853004097804	0.37853004197804	**0.37853004**297804

Program `quad8` nás navíc upozornil na

```
Warning: Recursion level limit reached in QUAD8. Singularity likely.
Warning: Recursion level limit reached 26 times.
```

Závěr: $I_{10} \doteq 0.37853004$. Tomuto výsledku se dá důvěřovat, neboť oba programy dávají přibližně stejné hodnoty. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst. Na základě odhadu chyby lze stanovit „hrubý“ odhad I_{10}, tj. $I_{10} < \frac{1}{2}$; jenž nám slouží ke kontrole výpočtu.

Integrál č.12

$$I_{12} = \int_{-1}^1 x^x\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na svém definičním oboru $D = (0, +\infty)$ spojitá. Odtud plyne, že daný integrál nelze stanovit jako jedno reálné číslo. Tento integrál bychom mohli vypočítat v oboru komplexních čísel užitím komplexní analýzy, ale to již přesahuje rámec této práce.

Závěr: Daný integrál nelze stanovit v tělese reálných čísel.

Integrál č.13

$$I_{13} = \int_{-1}^{1} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$$

Integrovaná funkce je na intervalu $(-1, 1)$ spojitá, sudá a záporná. Díky sudosti se můžeme vyhnout jednomu singulárnímu bodu, neboť platí

$$I_{13} = \int_{-1}^{1} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

V bodě 1 jde o nespojitost druhého druhu, protože

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x)\ln(1-x) = \sqrt{2}\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty.$$

S takto upraveným integrálem, dostaneme tyto vypočtené výsledky (pro jednoduchost $-\varepsilon + Q, \varepsilon + Q$ neuvádíme)

	Q
`quad8`	$-\,\mathrm{Inf}$
`quadl`	-1.10155082825904

kterým se vůbec nedá věřit. Navíc ani nevíme zda tento integrál konverguje. To ukážeme nyní za pomoci Lebesgueovy definice integrálu a srovnávacího kritéria. Platí tedy

$$I_{13} = -\int_{0}^{1} \big(-2\ln(1+x)\ln(1-x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Vyjdeme z této nerovnosti $1 + x \geq \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, která platí $\forall x \in [0, 1)$. Přirozenou úpravou dostaneme

$$-2\ln(1+x)\ln(1-x) \leq -x\ln(1-x).$$

Odtud užitím kritéria máme

$$-\int_0^1 x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} 1-x=t \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \\ (0,\ 1) \to (1,\ 0) \end{array}\right\} = -\int_0^1 (1-t)\ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 - [t\ln t - t]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad I_{13} \quad \text{konverguje}$$

kde jsme využili metody per partes a L'Hôpitalova pravidla. Můžeme tedy pomocí tohoto odhadu kontrolovat správnost výpočtů.

Odhad chyby stanovíme stejně jako v předchozích případech, tj. máme

$$\begin{aligned} I_{13} &= 2\int_0^{1-\delta} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{1-\delta}^{1} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq 2\int_0^{1-\delta} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x + \big(1-(1-\delta)\big)\max_{x\in[1-\delta,1]} \ln(1+x)\ln(1-x) = \\ &= 2\int_0^{1-\delta} \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x + \delta\ln(2+\delta)\ln(\delta) \end{aligned}$$

(nezapomeňme, že integrovaná funkce je na intervalu $[0, 1)$ klesající). Pro $\delta = \texttt{eps}$ je chyba zanedbatelná, neboť $\delta\ln(2+\delta)\ln(\delta) = -5.547463982346395\mathrm{e} - 015$. S takto pozměněnou horní mezí dostáváme tyto výsledky

quad8		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
-1.10210748859081	-1.10210748759081	-1.10210748659081

quadl		
$-\varepsilon + Q$	Q	$\varepsilon + Q$
$-\mathbf{1.10155082}925903$	-1.10155082825903	$-\mathbf{1.10155082}725903$

Program `quad8` nás navíc upozornil na

```
Warning: Recursion level limit reached in QUAD8. Singularity likely.
Warning: Recursion level limit reached 4 times.
```

Závěr: $I_{13} \doteq -1.10155082$. Tomuto výsledku se dá důvěřovat, neboť oba programy dávají přibližně stejné hodnoty. Dále víme, že integrál konverguje a výpočet můžeme kontrolovat naším odhadem, jenž plyne ze srovnávacího kritéria. Vypočtený výsledek je shodný s výsledem teoretickým na devět platných míst.