Příklad 1. Najděte rovnici tečny a normály dané funkce bodě T, je-li

Rovnice tečny $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Rovnice normály $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}, T = [3, ?]$;

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos 2x, T = [0, ?]$;

Řešení: Ad (a)
Nejdříve si doplníme y-ovou souřadnici dotykového bodu. Pro $x_0 = 3$ je $f(x_0) = y_0 = 5$, tedy $T = [3, 5]$. Dále

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 16)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}.$$

Rovnice tečny $3x - 5y + 16 = 0$ a normály $5x + 3y - 30 = 0$.

Ad (b)
Opět stanovíme y-ovou souřadnici dotykového bodu. Pro $x_0 = 0$ je $f(x_0) = y_0 = 1$, tedy $T = [0, 1]$. Dále

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + 2 \sin 2x).$$

Rovnice tečny $x + y - 1 = 0$ a normály $x - y + 1 = 0$.

Příklad 2. Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Intervaly monotónnosti rozhodneme na základě tvrzení

Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci, tj. $f'(x) > 0$, je v tomto intervalu rostoucí.
Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) zápornou derivaci, tj. $f'(x) < 0$, je v tomto intervalu klesající.

Řešení: Derivace funkce je

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Nyní zjistíme intervaly, ve kterých je tato derivace kladná resp. záporná. Řešíme tedy dvě nerovnice
$\underline{1) f'(x) > 0}$
$f'(x) > 0 \iff x(x-2) > 0 \iff (x > 0 \wedge x - 2 > 0) \vee (x < 0 \wedge x - 2 < 0)$
Odtud dostaneme dva intervaly $(2, +\infty)$ a $(-\infty, 0)$. Užitím tvzení plyne, že funkce $f(x)$ je na těchto intervalech rostoucí.
$\underline{2) f'(x) < 0}$
$f'(x) < 0 \iff x(x-2) < 0 \iff (x < 0 \wedge x - 2 > 0) \vee (x > 0 \wedge x - 2 < 0)$
Vyřešením těchto nerovnic dostaneme jeden interval $(0, 2)$. Opětovným užitím tvzení plyne, že funkce $f(x)$ je na tomto intervalu klesající.

Pozn.: lze též postupovat tak, že zjistíme v kterých bodech (tzv. nulové body) je derivace funkce rovna nule, tj. $f'(x) = 0$.

Řešením rovnice $3x(x-2) = 0$ jsou dva nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Odtud dostaneme intervaly $(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.
Nyní stačí ověřit předpoklady tvrzení. Zvolme tedy konkrétní body z jednotlivých intervalu třeba takto

$$\begin{array}{llll} (-\infty,0) \ldots f'(-1) = & 9 > 0 \Rightarrow f(x) & \text{je rostoucí} \\ (0,2) \quad \ldots f'(1) & = -3 < 0 \Rightarrow f(x) & \text{je klesající} \\ (2,+\infty) \ldots f'(3) & = \quad 9 > 0 \Rightarrow f(x) & \text{je rostoucí} \end{array}$$

Příklad 3. Určete intervaly monotónnosti funkce

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Řešení: Stejným postupem jako v minulém příkladě zjistíme, že derivace funkce je

$$f'(x) = \frac{3x+1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\underline{1) f'(x) > 0}$$

$$f'(x) > 0 \iff \ldots \iff x > -\tfrac{1}{3} \qquad \longrightarrow \qquad (-\tfrac{1}{3}, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ roste.}$$

$$\underline{2) f'(x) < 0}$$

$$f'(x) < 0 \iff \ldots \iff x < -\tfrac{1}{3} \qquad \longrightarrow \qquad (-\infty, -\tfrac{1}{3}) \Rightarrow f(x) \text{ klesá.}$$

Příklad 4. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = 2x + \sqrt[3]{(2-x)^2}.$$

Lokální extrémy funkce se určují pomocí nutných a postačujících podmínek:
Nutná podmínka existence lokálního extrému

Má-li funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in (a, b)$ lokální extrém, potom buď $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Postačující podmínka existence lokálního extrému

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(a) Je-li $f(x)$ ostře rostoucí v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a ostře klesající v intervalu $(\delta, x_0 + \delta)$, potom $f(x_0)$ je ostré lokální maximum funkce $f(x)$.

(b) Je-li $f(x)$ ostře kleasjící v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a ostře rostoucí v intervalu $(\delta, x_0 + \delta)$, potom $f(x_0)$ je ostré lokální minimum funkce $f(x)$.

Nebo-li, mění-li se znaménko 1.derivace ve stacionárním bodě z plus na mínus, má funkce v tomto bodě lokální maximum, mění-li se z mínus na plus, má funkce v tomto bodě minimum.
V některých případech lze rozhodnout o existenci extrému ve stacionárním bodě x_0 pomocí 2.derivace (podmínkou je snadný výpočet 2.derivace a existence nenulové 2.derivace v tomto bodě).

Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum.
Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální minimum.
Je-li $f''(x_0) = 0$ nebo $('' x_0)$ neexistuje, nelze pomocí 2.derivace rozhodnout o existenci extrému.

Řešení: Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}, \quad x \neq 2.$$

1)Nutná podmínka

Nejdříve stanovíme stacionární body, nebo-li „body podezřelé z extrémů“. Tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$. Řešením

$$2 - \frac{2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

je bod $x_1 = 1$. Tedy máme dva stacionární body a to $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Tím dostáváme tři intervaly $(-\infty, 1); (1, 2); (2, +\infty)$.

2)Postačující podmínka

$$\left.\begin{array}{lll} (-\infty,1) \ldots f'(-6) = & 1 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ je rostoucí} \\ (1,2) \quad \ldots f'(\frac{15}{6}) & = -2 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ je klesající} \\ (2,+\infty) \ldots f'(3) \quad = & 4 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ je rostoucí} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

3)Závěr

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_1 = 1$ ostré lokální maximum $f(1) = 5$ a v bodě $x_2 = 2$ ostré lokální minimum $f(2) = 4$.
Pozn.: zkuste sami rozhodnout o maximu, minimu použitím druhé derivace.

Příklad 5. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Řešení: Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

1)Nutná podmínka

Řešením

$$\frac{1-x}{1+x^2} = 0.$$

je bod $x_1 = 1$. Tedy máme jeden stacionární bod a to $x_1 = 1$. Tím dostáváme dva intervaly $(-\infty, 1); (1, +\infty)$.

2)Postačující podmínka

$$\left.\begin{array}{l} (-\infty,1) \ldots f'(0) = \quad 1 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ je rostoucí} \\ (1,+\infty) \ldots f'(2) = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ je klesající} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

x	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

3)Závěr

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_1 = 1$ ostré lokální maximum $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.
Pozn.: opět se můžete pokusit sami rozhodnout o maximu, minimu použitím druhé derivace.

Příklad 6. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}.$$

Řešení: Derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = x - \frac{24}{x^4}, \quad x \neq 0.$$

1)Nutná podmínka

Řešením

$$x - \frac{24}{x^4} = 0.$$

je bod $x_1 = \sqrt[5]{24}$. Tedy máme dva stacionární body a to $x_1 = \sqrt[5]{24}$ a $x_2 = 0$. Tím dostáváme tři intervaly $(-\infty, 0)$; $(0, \sqrt[5]{24})$; $(\sqrt[5]{24}, +\infty)$.

2)Postačující podmínka

$$\left.\begin{array}{lll} (-\infty,0) & \ldots f'(-1) = -25 < 0 \Rightarrow f(x) & \text{je je klesající} \\ (0,\sqrt[5]{24}) & \ldots f'(1) \;\;= -23 < 0 \Rightarrow f(x) & \text{je klesající} \\ (\sqrt[5]{24},+\infty) & \ldots f'(2) \;\;= \;\;\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f(x) & \text{je rostoucí} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

x	$(-\infty, 1)$	$(0, \sqrt[5]{24})$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

3)Závěr

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_2 = \sqrt[5]{24}$ ostré lokální minimum $f(\sqrt[5]{24}) = \sqrt[5]{24^2} - \frac{8}{\sqrt[5]{24^3}}$.
Pozn.: opět se můžete pokusit sami rozhodnout o maximu, minimu použitím druhé derivace.
