Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz
7. listopadu 2006

SOF

Úloha 2: *Podmíněnost úloh*
Stanovme řešení této soustavy

$$0,780x + 0,563y = 0,217$$
$$0,457x + 0,330y = 0,127$$

na počítači v programu Matlab. Předchozí soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých můžeme ekvivalentně zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,457 & 0,330 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,127 \end{bmatrix}.$$

Než přistoupíme k výpočtu zamysleme se nad tím, zda existuje nějaké řešení této lineární soustavy a kolik jich je. Z lineární algebry se nám jistě vybaví Frobeniova věta o řešitelnosti lineárních soustav. Po chvilce počítání zjistíme, že hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, tj. $h(\mathbf{A}) = 2$. Odtud plyne, že soustava lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má řešení. Abychom řekli, že toto řešení je právě jediné, musíme ověřit zda matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. zda platí $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. K výpočtu determinantu matice $\mathbf{A}$ využijeme v Matlabu funkci `det` a zjistíme, že $\det(\mathbf{A}) = 0.000109$. Tedy daná lineární soustava má právě jedno řešení.

Je zřejmé, že přesné řešení této soutavy je $x = 1$ a $y = -1$, neboť platí

$$0,780 \cdot 1 + 0,563 \cdot (-1) = 0,217$$
$$0,457 \cdot 1 + 0,330 \cdot (-1) = 0,127$$

kdežto řešení dané Matlabem je $x = 0.99999999999986$ a $y = -0.99999999999980$. Metodou experimentálních perturbací ukážeme, že jde o špatně podmíněnou úlohu.

Změníme-li pravou stranu soustavy na $\tilde{\mathbf{b}} = [0.2173 \quad 0.1278]^T$, bude přesným řešením vektor $\tilde{\mathbf{x}} = [-2.22385321100877 \quad 3.46697247706366]^T$. Již odtud je patrné, že úloha řešit soustavu s uvedenou maticí bude špatně podmíněná (malá změna vstupních dat vyvolala velkou změnu řešení).

K odhadu čísla podmíněnosti využijeme vzorce

$$\frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} C_p = \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

kde $\|.\|$ značí sloupcovou normu, jenž je definována $\|y\| = \sum_i |y_i|, y = [y_1, \ldots, y_i]^T$. Tedy

$$\begin{array}{rlrl} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| & = 7.69082568807243 & \|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\| & = 0.00110000000000 \\ \|\mathbf{x}\| & = 2 & \|\mathbf{b}\| & = 0.34400000000000 \\ \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} & = 3.84541284403621 & \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} & = 0.00319767441860 \end{array}$$

Takže po dosazení dostáváme $C_p \approx 1.20256547122588 \cdot 10^3$. Naproti tomu nám Matlab dá s užitím funkce `cond`[1] výsledek $C_p \approx 1.524120183485382 \cdot 10^4$. Vidíme, že se tyto dvě aproximace liší o jeden řád. To může být způsobeno zaokrouhlovací chybou a různými metodami výpočtu C_p. Neboť když nahlédneme do zdrojového souboru `cond.m` zjistíme, že $C_p = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$.

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že špatná podmíněnost této úlohy je „zaviněna“ skutečností, že determinant matice je velmi malé číslo (10^{-4}). Hodnota $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$ má 15 platných číslic[2], kdežto $\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|$ má pouze 4 platné číslice. Odhadovaná ztráta platných číslic je tedy 4, tj. výsledkům se dá věřit na 11 platných míst.

[1] Nesmíme zapomenout nastavit příslušnou normu, tj. sloupcovou.
[2] Jsme před výpočtem nastavili v Matlabu pomocí `format long`