Ondřej Tuček
ondrej_tucek@seznam.cz
8. listopadu 2006

SOF

Úloha 3: *Stabilita algoritmů*

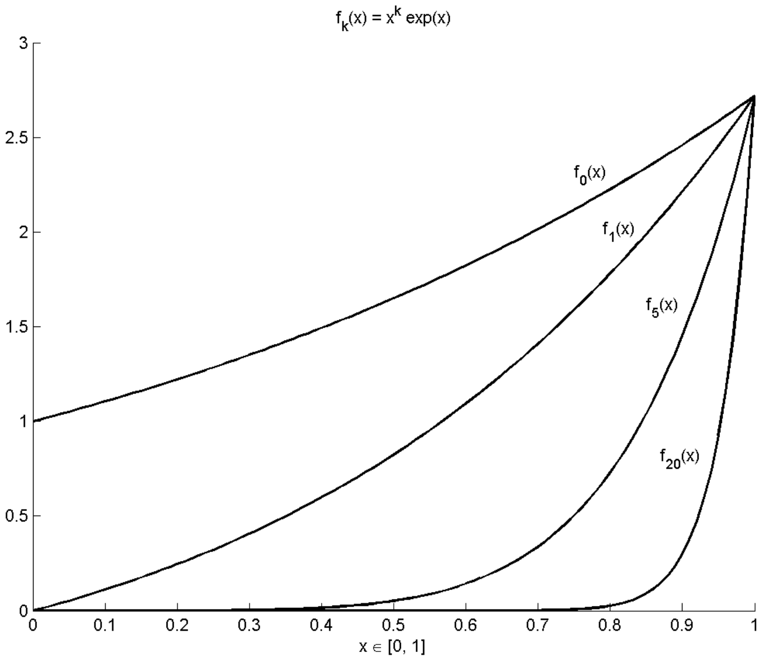
Vypočítejme hodnoty integrálů

$$I_k = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^k \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

pro $k = 0, 1, \ldots, 20$. Z matematické analýzy je známo, že ke každé funkci $f(x)$ spojité v $(0, 1)$ existuje v $(0, 1)$ primitivní funkce $F(x)$. Položíme-li integrační konstantu rovnu 0, pak existuje právě jedna $F(x)$. Pro $k = 0$ platí

$$I_0 = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e} - 1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

Označme $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$. Z obrázku vidíme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in [0, 1]$ jsou funkce $f_k(x)$ nezáporné a rostoucí.



Snadno lze též z obrázku nahlédnout, že pro rostoucí k je velikost obsahu obrazců čím dál menší.

Metodou per partes lze integrál snadno upravit na tvar

$$I_k = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^k \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} [x^k \mathrm{e}^x]_0^1 - \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 k x^{k-1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 1 - k I_{k-1}.$$

Nyní využijme této rekurentní formule ke stanovení I_k pro $k = 1, \ldots, 20$. K tomuto účelu použijeme program Matlab.

$$\begin{array}{ll}
I_0 = 6.321205588285577 \cdot 10^{-1} & I_{11} = 8.387707005829270 \cdot 10^{-2} \\
I_1 = 3.678794411714423 \cdot 10^{-1} & I_{12} = 7.735222935878028 \cdot 10^{-2} \\
\vdots & \vdots \\
I_8 = 1.009319674450921 \cdot 10^{-1} & I_{18} = -2.945367075153627 \cdot 10^{-2} \\
I_9 = 9.161229299417073 \cdot 10^{-2} & I_{19} = 1.559619744279189 \cdot 10^{0} \\
I_{10} = 8.387707005829270 \cdot 10^{-2} & I_{20} = -3.019239488558378 \cdot 10^{1}
\end{array}$$

Jak již bylo řečeno obsah obrazců by se měl zmenšovat. Ovšem vypočtené hodnoty tuto „tendenci" nemají. Dále si povšimněme hodnoty integrálu I_{18}. Odtud plyne, že tento rekurentní předpis dává zcela nesmyslné výsledky a tedy těmto výsledkům nelze důvěřovat.

Opět jako v předchozí úloze použijeme metodu experimentálních perturbací abychom posoudili citlivost na vstupní data. Výpočet bude obdobný a dojdme ke zjištění, že algoritmus je nestabilní. Při výpočtu I_0 jsme se dopustili určité chyby (zaokrouhlení) a každým krokem se tato chyba zvětšovala k-krát.

Výše uvedený rekurentní vztah se dá přepsat do tvaru

$$I_{k-1} = \frac{1 - I_k}{k}$$

Realizujme výpočet v Matlabu pro „dostatečně" velké $k = 1000$, $I_{1000} = 0$.

$$\begin{aligned}
&I_{1000} = 0 \\
&I_{999} = 1.001001001001001 \cdot 10^{-3} \\
&\quad\vdots \\
&I_2 \;\; = 3.678794411714423 \cdot 10^{-1} \\
&I_1 \;\; = 6.321205588285577 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

Zde naopak se bude chyba v každém kroku zmenšovat k-krát. Opět použitím metody experimentalních dat zjitíme, že algoritmus je málo citlivý na poruchu ve vstupních datech. Tedy algoritmus je stabilní.

Ovšem bylo by dobré vědět, jak se tento výsledek liší od výsledku teoretického, tj. čemu se rovná $\lim\limits_{k\to\infty} I_k$. Vyjdeme z odhadu

$$I_k = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^k \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 |x^k \mathrm{e}^x| \, \mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{k+1}.$$

Odtud plyne $\lim\limits_{k\to\infty} I_k = 0$.