I Lorentzova transformace

Mějme v prostoru dva pravoúhlé, pravotočivé, navzájem rovnoběžné systémy souřadné, vázané na dva hmotné útvary, pohybující se proti sobě rychlostí u ve směru os $x, x^{'}$.
Pak platí tato **Lorentzova transformace**:

$x^{'} = \kappa(x - ut)$	$x = \kappa(x^{'} + ut^{'})$	$\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{u}{c^2}}}$
$y^{'} = y$	$y = y^{'}$	
$z^{'} = z$	$z = z^{'}$	
$t^{'} = \kappa(t^{'} + \dfrac{u}{c^2}x^{'})$	$t = \kappa(t^{'} + \dfrac{u}{c^2}x^{'})$	

Vyjádříme ještě vztahy částečných derivací podle jednotlivých proměnných:

$$\begin{array}{ll|l} z &= f(x^{'}, t^{'}) & = \\ x^{'} &= x^{'}(x,t) & x^{'} = \kappa(x - ut) \\ t^{'} &= t^{'}(x,t) & t^{'} = \kappa(t - \frac{u}{c^2}x) \\ z &= f(x^{'}(x,t), t^{'}(x,t)) & = \end{array}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial x^{'}}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial t^{'}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \kappa\frac{\partial z}{\partial x'} - \kappa\frac{\partial z}{\partial t'}\frac{u}{c^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \kappa\frac{\partial}{\partial x'} - \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial x^{'}}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial t^{'}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \kappa\frac{\partial z}{\partial x'}(-u) + \kappa\frac{\partial z}{\partial t'} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \kappa\frac{\partial}{\partial t'} - \kappa u\frac{\partial}{\partial x'}$$

Obdobně vyjádříme částečné derivace pro x a t.[1]

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial}{\partial x'} = \kappa\frac{\partial}{\partial x} + \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} = \kappa\frac{\partial}{\partial x'} - \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} = \kappa\frac{\partial}{\partial t}(t^{'} + \kappa u\frac{\partial}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial t} = \kappa\frac{\partial}{\partial t'} - \kappa u\frac{\partial}{\partial x'} \end{array}$$

Lorentzova transformace je charakteristická tím, že rychlost světla ve vakuu je pro oba systémy stejná (Druhý postulát STR). Plyne to z obecného vzorce pro rychlost:

$$v_x^{'} = \frac{\mathrm{d}x^{'}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\kappa(\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}t)}{\kappa(\mathrm{t} - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Pro $v_x = c$ dostáváme $v_x^{'} = c$.
Také Maxwellovy rovnice EMP musí být vůči této transformaci invariantní. Z tohoto požadavku vyplývají jednoduše výrazy pro jednotlivé transformované veličiny. Maxwellovy rovnice v soustavě (O, x, y, z) mají tento diferenciální tvar:

[1] Definice viz. Rektorys strana 385. (starší vydání r.68)

$$
\begin{aligned}
&(I) && \operatorname{rot}\vec{H} = \varrho\vec{v} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\
&(II) && \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
&(III) && \operatorname{div}\vec{D} = \varrho \\
&(IV) && \operatorname{div}\vec{B} = 0
\end{aligned}
$$

Napišme druhou z rovnic pro složku v ose x a jednotlivé derivace nahraďme derivacemmi čárkovaného systému:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} &= -\kappa\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \kappa u\frac{\partial B_x}{\partial x'}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Přitom platí (IV) Maxwellova rovnice:

$$
\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \kappa\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0
$$

čili

$$
\kappa\frac{\partial B_x}{\partial x'} = \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - \frac{\partial B_y}{\partial y'} - \frac{\partial B_z}{\partial z'}
\tag{2}
$$

dosazením (**??**) do (**??**) dostáváme:

$$
\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\kappa\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - u\frac{\partial B_y}{\partial y'} - u\frac{\partial B_z}{\partial z'} = -\frac{\kappa}{\kappa^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - u\frac{\partial B_y}{\partial y'} - u\frac{\partial B_z}{\partial z'}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial y'}\kappa(E_z + uB_y) - \frac{\partial}{\partial z'}\kappa(E_y - uB_z) = -\frac{\partial B_x}{\partial t'}
$$

Zavedeme tedy transformované složky vektorů, pro něž klademe

$$
\boxed{
\begin{aligned}
B_x^{'} &= B_x \\
E_y^{'} &= \kappa(E_y - uB_z) \\
E_z^{'} &= \kappa(E_z + uB_y)
\end{aligned}
}
$$

Pro složku v ose y (II) Maxwellovy rovnice platí obdobně

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \kappa\frac{\partial E_z}{\partial x'} + \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'} &= -\kappa\frac{\partial B_y}{\partial t'} + \kappa u\frac{\partial B_y}{\partial x'} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\kappa(E_z + uB_y) &= -\frac{\partial}{\partial t'}\kappa(B_y + \frac{u}{c^2}E_z)
\end{aligned}
$$

Další vztahy pro transformované složky vektorů tedy jsou

$$
\boxed{
\begin{aligned}
E_x^{'} &= E_x \\
B_y^{'} &= \kappa(B_y + \frac{u}{c^2}E_z) = \kappa(B_y + u\varepsilon_0\mu_0 E_z)
\end{aligned}
}
$$

Stejným způsobem dostaneme pro třetí složku

$$\boxed{B_z^{'} = \kappa(B_z - u\varepsilon_0\mu_0 E_y)}$$

Pak platí i v čárkovaném systému souřadnic (II) Maxwellova rovnice $\quad \mathrm{rot}^{'}\,\vec{E}^{'} = -\frac{\partial \vec{B}^{'}}{\partial t^{'}}$

Nyní se obraťme k (I) Maxwellově rovnci. Její tavr pro složku v ose x je

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varrho v_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y^{'}} - \frac{\partial H_y}{\partial z^{'}} &= \varrho v_x + \kappa\frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} - \kappa u\frac{\partial D_x}{\partial x^{'}} \end{aligned} \tag{3}$$

Přitom zase platí (III) Maxwellova rovnice:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \varrho = \kappa\frac{\partial D_x}{\partial x^{'}} - \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} + \frac{\partial D_y}{\partial y^{'}} + \frac{\partial D_z}{\partial z^{'}}$$

čili

$$\kappa\frac{\partial D_x}{\partial x^{'}} = \varrho + \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} - \frac{\partial D_y}{\partial y^{'}} - \frac{\partial D_z}{\partial z^{'}} \tag{4}$$

a dosazením (**??**) do (**??**) dostáváme:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y^{'}} - \frac{\partial H_y}{\partial z^{'}} = \varrho v_x - \varrho u + \kappa\frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} - \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} + u\frac{\partial D_y}{\partial y^{'}} + u\frac{\partial D_z}{\partial z^{'}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^{'}}\kappa(H_z - uD_y) - \frac{\partial}{\partial z^{'}}\kappa(H_y + uD_z) = \kappa\varrho(v_x - u) + \frac{\partial D_x}{\partial t^{'}} = \kappa\varrho v_x^{'}(1 - \frac{uv_x}{c^2}) + \frac{\partial D_x}{\partial t^{'}}$$

Zde zavedeme další transformované složky vektorů, pro něž je

$$\boxed{\begin{aligned} D_x^{'} &= D_x \\ H_y^{'} &= \kappa(H_y + uD_z) \\ H_z^{'} &= \kappa(H_z - uD_y) \\ \varrho^{'} &= \kappa(1 - \frac{uv_x}{c^2})\varrho \end{aligned}}$$

Podobně pro složku v ose y bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varrho v_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z^{'}} - \kappa\frac{\partial H_z}{\partial x^{'}} + \kappa\frac{u}{c^2}\frac{\partial H_z}{\partial t^{'}} &= \varrho v_y + \kappa\frac{\partial D_y}{\partial t^{'}} - \kappa u\frac{\partial D_y}{\partial x^{'}} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z^{'}} - \frac{\partial}{\partial x^{'}}\kappa(H_z - uD_y) &= \varrho v_y + \frac{\partial}{\partial t^{'}}\kappa(D_y - \frac{u}{c^2}H_y) = \varrho^{'}v^{'} + \frac{\partial D_y^{'}}{\partial t^{'}} \end{aligned}$$

a pro transformované složky vektorů platí

$$\boxed{\begin{aligned} H_x^{'} &= H_x \\ D_y^{'} &= \kappa(D_y + u\varepsilon_0\mu_0 H_z) \end{aligned}}$$

Stejným způsobem dostaneme pro třetí složku

$$\boxed{D_z' = \kappa(D_z + u\varepsilon_0\mu_0 H_y)}$$

Po zavedení těchto transformovaných veličin platí zase i v čárkovaném systému souřadnic (I) Maxwellova rovnice ve tvaru $\quad \mathrm{rot}' \vec{H}' = \varrho' v' + \dfrac{\partial \vec{D}'}{\partial t'}$

Dalším dosazením již získaných veličin do (III) a (IV) Maxwellovy rovnice bychom se přesvědčili, že platí též $\quad \mathrm{div}' \vec{D}' = \varrho'$ a $\mathrm{div}' \vec{B}' = 0$.

Z této invariance Maxvellových rovnic plyne, že se elektromagnetické děje odehrávají ve všech pohyblivých systémech stejně (První postulát STR).

II Galileova transformace

Mějme opět v prostoru dva pravoúhlé, pravotočivé, navzájem rovnoběžné systémy souřadné, vázané na dva hmotné útvary, pohybující se proti sobě rychlostí u ve směru os x, x'.
Pak platí **Galileova transformace**:

$$\begin{array}{l|l}
x' = x - ut & x = x' + ut' \\
y' = y & y = y' \\
z' = z & z = z' \\
t' = t & t = t'
\end{array}$$

Vyjádříme zase vztahy částečných derivací podle jednotlivých proměnných:

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y'} = \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial z'} = \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - u\dfrac{\partial}{\partial x'}
\end{array}$$

Dostáváme pak transformaci klasické fyziky, ve které rychlosti vektorově sčítají. Platí

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}t}{\mathrm{t}} = v_x - u$$

Nyní můžeme postupovat stejně jako v předešlé kapitole.