



# **Metoda konečných diferencí**

**Řešení elektromagnetických polí  
metodou konečných diferencí**

Ondřej Tuček  
ondrej\_tucek@seznam.cz

PLZEŇ 2006

# Obsah

1	Úvod . . . . .	1
2	Podstata metody konečných diferencí . . . . .	2
3	Odvození metody . . . . .	3
4	Diferenční aproximace hraničních podmínek . . . . .	5
4.1	V uzlech sítě ležících na hranici oblasti . . . . .	5
4.2	V uzlech sítě ležících mimo hranici oblasti . . . . .	6
5	Konstrukce diferenčních aproximací PDR . . . . .	8
5.1	PDR eliptického typu . . . . .	8
5.2	PDR parabolického typu . . . . .	9
5.3	PDR hyperbolického typu . . . . .	10
6	Maticový tvar diferenčních aproximací . . . . .	12
7	Příklad řešení elektrostatického pole . . . . .	13
8	Přehled užitých symbolů a veličin . . . . .	16
9	Literatura . . . . .	17

# 1 Úvod

Metoda konečných diferencí, která je známá též jako metoda sítí, je jednou z nejpoužívanějších metod numerického řešení dvojrozměrných okrajových úloh popsaných parciálními diferenciálními rovnicemi. Je založena na aproximaci derivací diferenčními podíly a její výhodou je jednoduchost a univerzálnost (tzn. dá se aplikovat na téměř libovolný typ úlohy i tvar vyšetřované oblasti).

Ve spojitých matematických modelech elektromagnetických polí (EMP) se setkáváme s lineární parciální diferenciální rovnicí (PDR) 2. řádu (nebo soustavou takových rovnic) záviselých na dvou nebo více nezávislých proměnných. Obecně můžeme tuto rovnici formulovat takto:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1.1)$$

kde  $u(x, y)$  je veličina charakterizující pole a nezávislé proměnné  $x, y$  jsou geometrické souřadnice, popř. čas a koeficienty  $A$  až  $G$  jsou spojitými funkcemi  $x$  a  $y$ . My budeme pracovat převážně s rovnicemi, kde za tyto koeficienty zvolíme konstanty. Podle hodnot koeficientů při druhých derivacích se používá tato terminologie: jestliže je všude v definiční oblasti rovnice (1.1)

$$\left. \begin{array}{l} B^2 - 4AC < 0 \\ B^2 - 4AC = 0 \\ B^2 - 4AC > 0 \end{array} \right\}, \text{ pak tuto rovnici nazýváme } \left\{ \begin{array}{l} \text{eliptickou,} \\ \text{parabolickou,} \\ \text{hyperbolickou.} \end{array} \right.$$

Ukazuje se, že stacionární a harmonicky proměnné EMP jsou popsány eliptickými rovnicemi, zatímco nestacionární EMP vedou na parabolické nebo hyperbolické rovnice. Základní zákony, na nichž je založena makroskopická teorie EMP, jsou vyjádřeny *Maxwellovými rovnicemi* v integrálním tvaru. Z těchto rovnic lze snadno odvodit Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru<sup>1</sup>, které jsou výchozími rovnicemi, z nichž získáváme rovnice pro potenciály EMP. V našich úvahách budou uvnitř každé ze sledovaných podoblastí  $\Omega_i, (i \in N)$  jen regulární body.

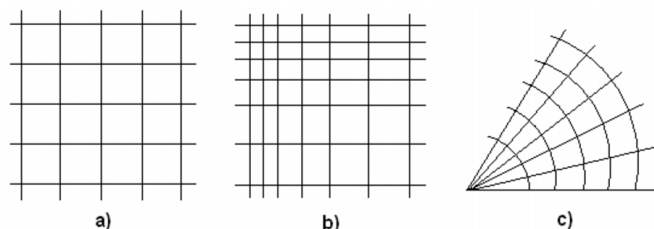
---

<sup>1</sup>Zdůrazněme ale, že tyto rovnice platí jen v *regulárních bodech* zkoumané oblasti. To jsou body v nichž vektorové veličiny jsou spojitými a spojitě diferencovatelnými funkcemi souřadnic. *Neregulárními body* budeme rozumět ta místa, kde dochází ke změně dvou prostředí (tzn. na jejich rozhraní) nebo tam kde jsou uloženy bodové náboje apod.

## 2 Podstata metody konečných diferencí

Řešení  $u(P)$  zkoumané okrajové úlohy hledáme v rovinné oblasti  $\Omega$ , omezené po částech hladkou křivkou  $\Gamma$  - hranicí oblasti, resp. v časoprostorové oblasti  $\Omega, t > 0, (P \in \Omega, t)$ . Oblast  $\Omega$  může být složena z několika fyzikálně odlišných podoblastí  $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ , oddělených rozhraním  $\Gamma_{ij}, (i, j = 1, 2 \dots)$ . Při použití metody sítí postupujeme takto:

1. Oblast  $\Omega$  s hranicí  $\Gamma$  pokryjeme sítí. Je-li okrajová úloha popsána v pravoúhlých souřadnicích, používáme pravoúhlou síť Obr. 1a), jež může být čtvercová nebo obdélníková. U okrajových úloh v polárních souřadnicích používáme polární síť Obr. 1b).



Obr. 1: Druhy sítí: a) rovnoměrná, b) nerovnoměrná, c) polární rovnoměrná)

Pomocí sítě rozdělíme sledovanou oblast na podoblasti, jejíž vrcholy nazveme *uzly*. Uzly uvnitř oblasti  $\Omega$  nazveme vnitřní, uzly na hranici  $\Gamma$ , na rozhraní  $\Gamma_{ij}$ , nebo na lomených čarách, jimiž lze v případě potřeby tyto křivky aproximovat, nazveme hraniční. Vzdálenost mezi sousedními uzly nazveme *krokem* sítě. Sítě, jejichž krok je konstantní, jsou rovnoměrné (vedou k jednodušším výpočtovým algoritmům), sítě s proměnným krokem jsou nerovnoměrné (umožňují přesněji aproximovat hranici  $\Gamma$  a rozhraní  $\Gamma_{ij}$  a vedou k přesnějšímu řešení v místě svého zhuštění).

2. V každém vnitřním uzlu nahradíme příslušnou parciální diferenciální rovnici, jež platí v oblasti  $\Omega$ , rovnicí algebraickou, tj. vytvoříme její diferenční aproximaci. Rovněž v každém hraničním uzlu, v němž platí okrajová podmínka (resp. podmínka přechodu) vyjádřena pomocí derivací, aproximujeme tuto podmínku rovnicí algebraickou. Je-li podmínka v hraničním uzlu vyjádřena algebraickým výrazem, její diferenční aproximaci neprovádíme.

3. Uplatněním těchto aproximací ve vnitřních a v hraničních uzlech sítě aproximujeme okrajový problém (vyjádřený spojeným matematickým modelem pro funkci  $u$ ) soustavou algebraických rovnic pro přibližné hodnoty  $u^*$  v uzlech sítě, tj. dospějeme k diskrétnímu modelu zkoumaného jevu.

4. Získanou soustavu algebraických rovnic přepíšeme do maticového tvaru a tu řešíme vhodnou numerickou metodou. Zde již snadno nahlédneme, že se jedná o řídkou matici (často jde o matici pásovou). Tyto matice jsou charakteristické tím, že obsahují velké množství nulových prvků. V praxi jde o velmi rozsáhlé soustavy (několik set až tisíc) algebraických rovnic, neboť má-li být řešení dostatečně přesné, je třeba zavést poměrně hustou síť.

### 3 Odvození metody

Odvození se provádí na základě Taylorova rozvoje funkce či jiných interpolačních metod např. Lagrangeova metoda aj. Pro jednoduchost se omezíme na funkci jedné reálné proměnné  $u(x)$ , jež je v oblasti  $\Omega$  spojitá a má spojitě derivace do řádu  $n+1$  v bodě  $x_0 \in \Omega$  (obecně v  $x_i \in \Omega$ ) a jeho okolí. Potom pro každé  $x$  z toho okolí platí Taylorova formule:

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x) \quad (3.1)$$

kde výraz pro zbytek  $R_{n+1}(x)$  lze uvést v Lagrangeově tvaru:

$$R_{n+1}(x) = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

a  $\xi$  je určité číslo mezi  $x$  a  $x_0$ . Předpokládáme-li že, derivace  $u^{(n+1)}(x)$  v okolí bodu  $x_0$  je omezená, pak pro  $h \rightarrow 0$  platí  $R_{n+1}(h) = O(h^{n+1})$ , tj.  $R_{n+1}(h)$  je řádu  $h^{n+1}$ . Pomocí  $R_{n+1}$  získáváme představu o velikosti chyby při zjemňování diferenční sítě a pak hovoříme o tom, že chyba je řádu  $O(h^{n+1})$ . Čím bude  $h$  menší, tím bude i menší chyba aproximace a získáme tak větší přesnost řešení.

Stanovme derivace prvního řádu ( $n = 1$ ). Dosadíme-li  $x = x_0 + h, x = x_0 - h$  do (3.1) dostaneme

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + \frac{u''(\xi_1)}{2}h^2, \quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h),$$

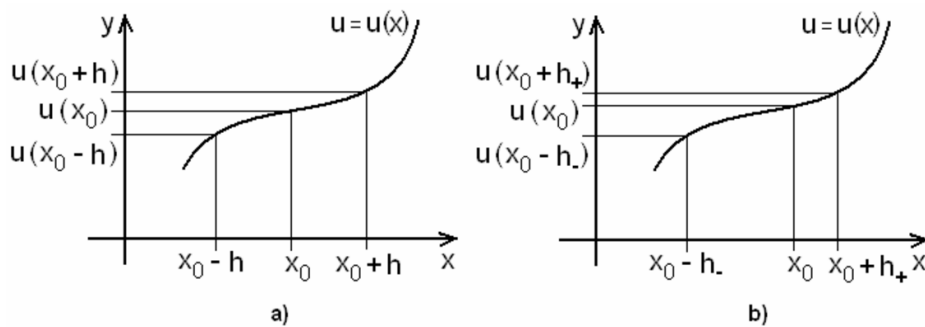
$$u(x_0 - h) = u(x_0) - u'(x_0)h + \frac{u''(\xi_2)}{2}h^2, \quad \xi_2 \in (x_0 - h, x_0).$$

Odtud po drobné úpravě plynou tzv. dvoubodové vzorce:

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + O(h) \quad (3.2)$$

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} + O(h) \quad (3.3)$$

kde  $O(h) = \frac{u''(\xi_i)}{2}h$ , ( $i = 1, 2$ ) je chyba řádu  $h$  jenž se dopouštíme při aproximaci.



Obr. 2: Diference: a) rovnoměrná b) nerovnoměrná

Pro  $n = 2$  dostáváme

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} + O(h^2) \quad (3.4)$$

Takto můžeme aproximovat derivaci druhého řádu, položíme-li  $n = 3$  v Taylorově rozvoji (3.1). Stejným způsobem jako v předchozím odvození dostáváme tzv. třibodový vzorec.

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_0 - h, x_0)$$

Po sečtení a menších úpravách dostáváme:

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2), \quad (3.5)$$

kde  $O(h^2) = -\frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2))$  značí chybu řádu  $h^2$ .

Zavedeme-li rovnoměrnou jednorozměrnou diferenční síť, jež je na Obr. 2a) a označíme-li obecně  $x_0$  za  $x_i$

$$\begin{aligned} u'_i &= u'(x_i), \quad u''_i = u''(x_i), \\ u_i &= u(ih) = u(x_i) \\ u_{i+1} &= u(x_{i+1}) = u[(i+1)h] \\ u_{i-1} &= u(x_{i-1}) = u[(i-1)h] \\ h &= x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

tak potom rovnice (3.2) aproximuje derivaci *dopřednou diferencí*

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \quad (3.6)$$

a z (3.3) získáme analogicky *zpětnou diferencí*

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \quad (3.7)$$

Takto můžeme upravit i aproximaci derivace *centrální difference*

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (3.8)$$

a obdobně aproximaci druhé derivace *centrální druhá difference*

$$u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad (3.9)$$

Obdobné vztahy můžeme zavést pro nerovnoměrné jednorozměrné diferenční síť Obr. 2b), kde do (3.6) dosadíme za  $h = h_+ = x_{i+1} - x_i$  a v (3.7)  $h = h_- = x_i - x_{i-1}$ .

Vztahy (3.6) až (3.9) můžeme též použít k vyjádření diferenčních aproximací parciálních derivací funkcí dvou nebo více proměnných, neboť místo  $x$  lze psát i libovolnou jinou proměnou a při výpočtu parciální derivace podle určité proměnné jsou ostatní proměnné fixovány. Přitom se pro stručnost používá zkrácené označení funkčních hodnot funkce  $u = u(x, y)$  a jejích parciálních derivací:

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j); \quad \left( \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)_{i,j} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_j}}; \quad \left( \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right)_{i,j} = \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_j}}$$

kde  $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, n_y$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

Obdobné značení použijeme i při jiných proměnných.

## 4 Diferenční aproximace hraničních podmínek

Hraničními podmínkami budeme souhrně označovat okrajové podmínky, podmínky přechodu a počáteční podmínky. Matematicky jsou hraniční podmínky vyjádřeny buď ve tvaru algebraického výrazu, nebo diferenciálního tvaru. První případ je již vhodný pro numerickou realizaci, ve druhém případě je třeba zkonstruovat příslušnou diferenční aproximaci.

Jak již bylo uvedeno v odst. 2, síť zavádíme zpravidla tak, aby na hranici oblasti, v níž je zadána hraniční podmínka, ležely uzly. Toho lze snáze dosáhnout použitím nerovnoměrné sítě. Pokud nelze síť takto zavést, pak příslušnou hraniční podmínku „přeneseme“ do nejbližších uzlů interpolací.

### 4.1 V uzlech sítě ležících na hranici oblasti

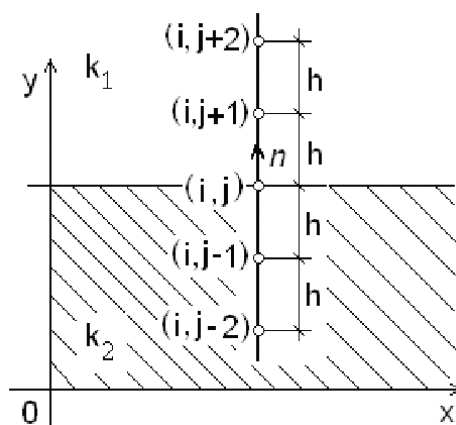
Diferenční aproximaci hraničních podmínek zkonstruujeme tak, že:

- a) zavedeme diferenční schéma a vybereme uzly, které budeme používat pro aproximaci;
- b) ve výrazu pro hraniční podmínku nahradíme derivace vhodnými vztahy (3.6) až (3.9);
- c) zanedbáme zbytkový člen, čímž přejdeme k algebraickému (aproximativnímu) vyjádření příslušné hraniční podmínky.

Tento postup si ukážeme na příkladu. Stanovme diferenční aproximaci hraniční podmínky

$$k_1 \frac{u_1}{\partial n} = k_2 \frac{u_2}{\partial n} \quad (4.1)$$

na rozhraní dvou prostředí, jež je rovnoběžné s osou  $x$  (Obr. 3)



Obr. 3:

Postupujeme takto:

1. V okolí rozhraní zavedeme rovnoměrnou pravoúhlou diferenční síť, jejíž uzly  $(i, j)$  mají souřadnice  $x_i$  a  $y_j$ .
2. Derivace v (4.1) nahradíme diferenčními aproximacemi (3.6) a (3.7)

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial n} \right)_{i,j} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} + O(h)$$

$$\left( \frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_{i,j} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} + O(h)$$

Dosazením těchto vztahů do podmínky (4.1) a po zanedbání chyby dostaneme

$$k_{1,i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} = k_{2,i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}$$

neboli

$$k_{1,i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - k_{2,i,j}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) = 0 \quad (4.2)$$

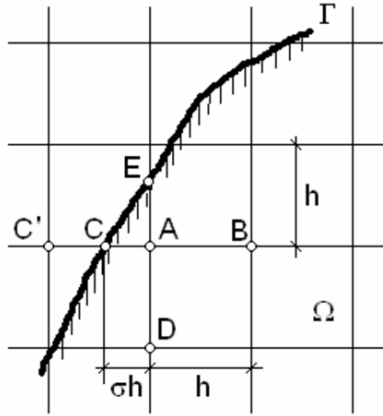
Speciálně, jsou-li  $k_1$  a  $k_2$  konstantní, pak v předchozích dvou vztazích je  $k_{1,i,j} = k_1$  a  $k_{2,i,j} = k_2$ .

## 4.2 V uzlech sítě ležících mimo hranici oblasti

Diferenční aproximaci hraniční podmínky zkonstruujeme tak, že „přeneseme“ hodnoty hraničních podmínek z hranice do nejbližších uzlů sítě. Toto „přenesení“ lze provést různými způsoby.

V nejjednodušším případě předpokládáme, že hraniční podmínka platná na hranici  $\Gamma$  platí i v nejbližších okolních uzlech sítě. To je ovšem přijatelné jen v některých speciálních případech, např. když příslušné uzly leží velmi blízko hranice  $\Gamma$ , popř. leží-li pouze některý z nich mimo tuto hranici.

Přesnější je *lineární Collatzova interpolace*. Tato metoda vede, za předpokladu dostatečné hladkosti, k rychlosti konvergence řádu  $O(h^2)$ . Tento postup si nyní popíšeme. Buď tedy  $A$  vnitřní uzel. Pak podle definice (odst. 2) hraničního uzlu existuje uzel  $C'$  sousední k uzlu  $A$  takový, že  $C' \notin \bar{\Omega}$  (takových uzlů může být i více), a tedy přímka sítě procházející uzly  $A$  a  $C'$  protíná hranici  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$  v nějakém bodě  $C$ , jehož vzdálenost  $\sigma h$  od uzlu  $A$  je menší než krok  $h$ . Buď dále  $h$  tak malé, že uzel  $B$ , který je sousední k uzlu  $A$  a leží na opačné straně než uzel  $C'$ , je vnitřním uzlem (Obr. 4).



Obr. 4: Odvození Collatzovy lineární interpolace

Položíme-li počátek souřadnic do bodu  $C$  a osu  $x$  orientujeme kladně ve směru od bodu  $C$  k bodu  $B$ , je funkce

$$u(C) \frac{(x-h)}{(\sigma-1)h} + u(B) \frac{(x-\sigma h)}{(1-\sigma)h}$$

Lagrangeovým interpolačním polynomem prvního stupně pro funkci  $u$ , který ji tedy na úsečce  $\overline{CB}$  aproximuje s přesností  $O(h^2)$ . Protože hodnotu funkce  $u$  v bodě  $C$  známe (je rovna číslu  $u(C)$ ), platí speciálně v bodě  $A$  který má v naší soustavě souřadnic souřadnici  $\sigma h$  rovnice

$$u(A) = \frac{1}{\sigma-1}u(C) + \frac{\sigma}{\sigma-1}u(B) + O(h^2)$$

Odtud zanedbáme-li chybu, dostáváme v hraničním uzlu  $A$  rovnici

$$u_A - \frac{\sigma}{\sigma-1}u(B) = \frac{\sigma}{\sigma-1}u(C) \quad (4.3)$$

Označíme-li uzly  $u_A, u_B$  jako  $u_{i,j}$  a  $u_{i+1,j}$  dostáváme obecnější vyjádření vztahu (4.3)

$$u_{i,j} - \frac{\sigma}{\sigma-1}u_{i+1,j} = \frac{\sigma}{\sigma-1}u(C) \quad (4.4)$$

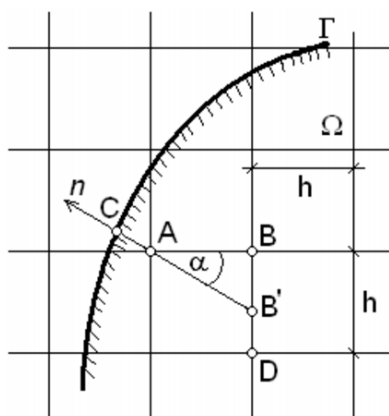


Tato metoda se v praxi velmi často používá u rovnoměrných sítí. Její nevýhodou je, že při sestavování těchto rovnic není jasné, ve kterém směru máme interpolovat. Nastává-li situace jako na Obr. 4, mohli bychom dostat stejně oprávněnou rovnici, která svazuje uzly  $A$  a  $D$ . Tuto nevýhodu odstraníme vhodnou lineární kombinací rovnic pro tyto body. Používáme-li nerovnoměrnou síť, není interpolace nutná a v uzlu  $A$  lze přímo použít diferenční aproximaci platnou uvnitř oblasti  $\Omega$ .

Bude-li zadána *Neumannova okrajová podmínka* (4.5) na hranici  $\Gamma$ , jejíž část bude rovnoběžná s osou  $x$  nebo s osou  $y$ , pak pro tyto části tuto podmínku diferenčně aproximujeme vztahem (3.6) a (3.7).

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.5)$$

kde  $n$  je vnější normála k hranici  $\Gamma$  v příslušném bodě a  $f$  je funkce spojitá na  $\Gamma$ . V případě, že část hranice  $\Gamma$  bude tvořit křivka, určíme její aproximační diferenci následovně. Buď  $A$  vnitřní uzel. Označme  $C$  průsečík normály ke křivce  $\Gamma$  vedené uzlem  $A$  s touto křivkou a  $B'$  ten průsečík této normály s některou přímkou sítě, který leží nejbližší uzlu  $A$  a zároveň leží uvnitř oblasti  $\Omega$  (viz. Obr. 5).



Obr. 5: K Neumannově okrajové podmínce

Buď dále  $\alpha \in (0, \pi/4)$  úhel, který svírá normála s osou  $x$  nebo  $y$ . Nahradíme derivaci v (4.5) diferenčním podílem, dostaneme místo této podmínky rovnici

$$\frac{u_A - u_{B'}}{\frac{h}{\cos \alpha}} = u(C) \quad (4.6)$$

kde hodnotu v bodě  $u(C)$  známe. Aproximujeme-li ještě hodnotu  $u_{B'}$  neznámé funkce v nepravidelném uzlu  $B'$  pomocí lineární interpolace užívající hodnoty  $u_B$  a  $u_D$ , dostaneme pro uzel  $A$  rovnici

$$u_A - (1 - \tan \alpha)u_B - (\tan \alpha)u_D = \frac{h}{\cos \alpha}u(C) \quad (4.7)$$

Obdobně jako v rovnici (4.4) můžeme obecně vyjádřit tuto rovnici (4.7)

$$u_{i,j} - (1 - \tan \alpha)u_{i+1,j} - (\tan \alpha)u_{i+1,j-1} = \frac{h}{\cos \alpha}u(C) \quad (4.8)$$

## 5 Konstrukce diferenčních aproximací PDR

### 5.1 PDR eliptického typu

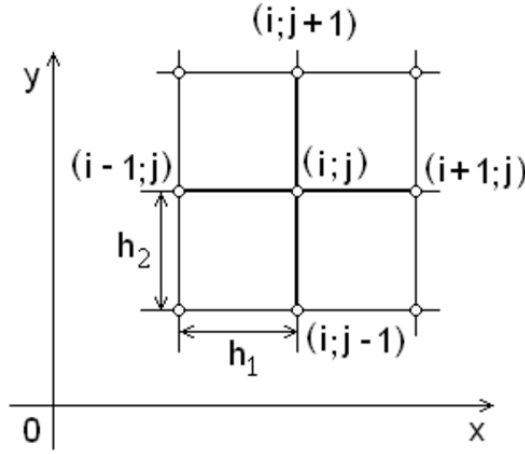
Postup konstrukce si ukažme na Poissonově rovnici<sup>2</sup>, která popisuje rozložení elektrického potenciálu  $\varphi(x, y)$  v homogenní rovinné oblasti při působení náboje o objemové hustotě  $\varrho$ .

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (5.1)$$

kde  $\varepsilon$  je permitivita, která udává vlastnost prostředí. V rovinné oblasti si zavedeme kartézskou souřadnicovou soustavu  $(x, y)$  na které budeme vyšetřovat stacionární elektrické pole.

Postupujeme takto:

1. Na vyšetřovanou oblast zavedeme síť. Definiční oblast rovnice (5.1) rovnoměrně diskretizujeme s krokem  $h$  (viz. Obr. 6).



Obr. 6: Diferenční schéma pro aproximaci Poissonovy rovnice

2. Sestrojíme diferenční aproximace Poissonovy rovnice užitím vztahu (3.9), který aplikujeme na (5.1), dostáváme

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_1^2} + O(h_1^2) \\ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_2^2) \end{aligned}$$

Dosazením těchto vztahů do (5.1) plyne

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_2^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

kde chybu  $O(h^2) = O(h_1^2) + O(h_2^2)$  jsme zanedbali.

U PDR parabolického a hyperbolického typu lze aproximovat tyto rovnice dvěma způsoby, tzv.:

a) *explicitní diferenční schéma*, kdy derivace podle geometrických proměnných aproximujeme v  $k$ -té časové hladině a do následující,  $(k+1)$ -ní časové hladiny přecházíme pomocí dopředné derivace podle času na  $k$ -té časové hladině;

<sup>2</sup>Tuto rovnici dostaneme tak, že v (1.1) položíme za  $u(x, y) = \varphi(x, y)$ ,  $u = \varrho$ ,  $A = C = \varepsilon$ ,  $F = 1$  a ostatní koeficienty položíme rovny nule.

b) *implicitní diferenční schéma*, kdy derivace podle geometrických proměnných aproximujeme v  $(k+1)$ -ní časové hladině, přičemž pro derivace podle času v  $(k+1)$ -ní časové hladině použijeme zpětnou aproximace derivace. Oba tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

## 5.2 PDR parabolického typu

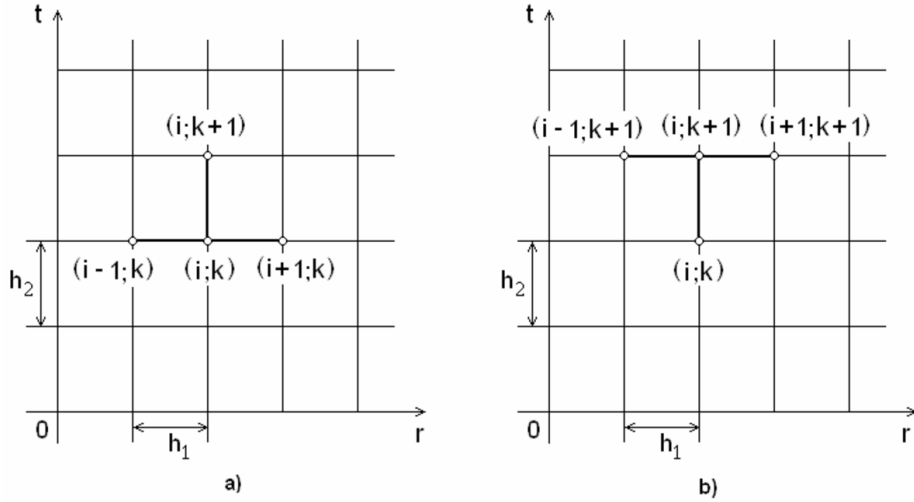
Mějme např. difuzní diferenciální rovnici ve válcových souřadnicích

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \gamma \mu \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (5.3)$$

kde  $A_z$  je složka v ose  $z$  vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  dlouhého válcového proudovodiče.

Postupujeme takto:

1. Zavedeme síť. Definiční časoprostorovou oblast  $\Omega(r, t)$  rovnice (5.3) rovnoměrně diskretizujeme ve směru osy  $r$  s krokem  $h_1$  a ve směru osy  $t$  s krokem  $h_2$  (Obr. 7).



Obr. 7: Aproximace parabolické rovnice: a) explicitní scéma b) implicitní schéma

2. V řešené rovnici (5.3) nahradíme derivace diferenčními aproximacemi.

*Explicitní formulace.* Diferenční aproximace derivací v rovnici (5.3) zapíšeme pro uzel  $(i, j)$  zavedené časoprostorové sítě, Obr. 7a). Pomocí výrazů (3.9), (3.8) a (3.6) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} &= \frac{A_{i+1,k} - 2A_{i,k} + A_{i-1,k}}{h_1^2} + O(h_1^2) \\ \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{A_{i+1,k} - A_{i-1,k}}{2h_1} + O(h_1^2) \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_2} + O(h_2) \end{aligned}$$

Dosazením těchto tří vztahů do rovnice (5.3) a po zanedbání chyby dostaneme

$$\frac{A_{i+1,k} - 2A_{i,k} + A_{i-1,k}}{h_1^2} + \frac{1}{r_i} \frac{A_{i+1,k} - A_{i-1,k}}{2h_1} = \gamma \mu \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_2} \quad (5.4)$$

Explicitní diferenční formule (5.4) umožňuje přímo vypočítat hodnoty  $A_{i,k+1}$  v jednom bodě  $(k+1)$ -ní časové hladiny z hodnot  $A_{i,k}, \dots$  určených v předcházející,  $k$ -té časové hladině.

*Implicitní formulace.* Diferenční aproximace derivací v rovnici (5.3) zapíšeme pro uzel  $(i, k + 1)$  zavedené sítě, Obr. 7b). Pomocí stejných vztahů jako v předchozím případě, přechází rovnice (5.3) na vztah

$$\frac{A_{i+1,k+1} - 2A_{i,k+1} + A_{i-1,k+1}}{h_1^2} + \frac{1}{r_i} \frac{A_{i+1,k+1} - A_{i-1,k+1}}{2h_1} = \gamma\mu \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_2} \quad (5.5)$$

kde chybu jsme zanedbali.

Implicitní diferenční aproximace (5.5) představuje jednu řádku soustavy lineárních rovnic. Řešením této soustavy získáme hodnoty  $A_{i,k+1}$  najednou, ve všech bodech  $(k + 1)$ -ní časové hladiny, z hodnot  $A_{i,k}, \dots$  určených v předcházející,  $k$ -té časové hladině.

Explicitní a implicitní diferenční aproximace lze též vhodně kombinovat. Kromě těchto aproximací parabolických rovnic existují další aproximace vhodné v určitých speciálních případech (požadujeme-li větší přesnost, úsporu počítačové paměti, při propočítávání dlouhých časových intervalů apod.).

### 5.3 PDR hyperbolického typu

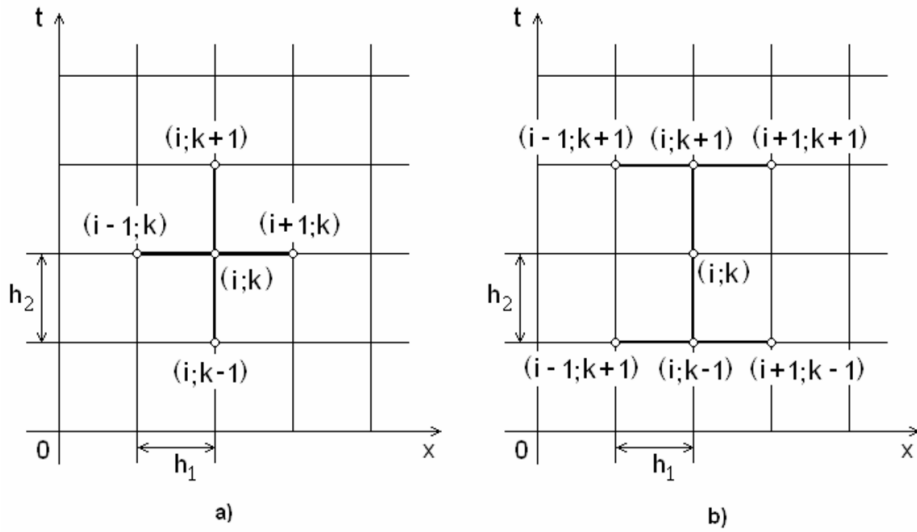
Způsob sestavení diferenční aproximace předvedeme na diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = k_1 \frac{\partial E}{\partial t} + k_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

popisující šíření elektromagnetické vlny ve vodivém prostředí, kde  $k_1 = \gamma\mu, k_2 = \varepsilon\mu$ .

Postupujeme takto:

1. Zavedeme síť. Časoprostorovou definiční oblast  $\Omega(x, t)$  rovnice (5.6) rovnoměrně diskretizujeme ve směru osy  $x$  s krokem  $h_1$  a ve směru osy  $t$  s krokem  $h_2$  (Obr. 8).



Obr. 8: Aproximace hyperbolické rovnice: a) explicitní schéma b) implicitní schéma

2. V řešené rovnici (5.6) nahradíme derivace diferenčními aproximacemi.

Lze použít, obdobně jako u parabolických rovnic, buď explicitní, nebo implicitní diferenční schéma, popř. obě vhodně kombinovat. Přitom derivace ve zkoumané diferenciální rovnici lze opět aproximovat vztahy (3.6) až (3.9).

*Explicitní formulace.* Diferenční aproximace derivací v rovnici (5.6) zapíšeme pro uzel  $(i, j)$  zavedené časoprostorové sítě, Obr. 8a). Pomocí výrazů (3.9) a (3.8) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{E_{i+1,k} - 2E_{i,k} + E_{i-1,k}}{h_1^2} + O(h_1^2) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{E_{i,k+1} - E_{i,k-1}}{2h_2} + O(h_2^2) \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{E_{i,k+1} - 2E_{i,k} + E_{i,k-1}}{h_2^2} + O(h_2)\end{aligned}$$

Dosazením těchto tří vztahů do rovnice (5.6) a po zanedbání chyby dostaneme

$$\frac{E_{i+1,k} - 2E_{i,k} + E_{i-1,k}}{h_1^2} = k_1 \frac{E_{i,k+1} - E_{i,k-1}}{2h_2} + k_2 \frac{E_{i,k+1} - 2E_{i,k} + E_{i,k-1}}{h_2^2} \quad (5.7)$$

*Implicitní formulace.* Diferenční aproximaci řešení diferenciální rovnice (5.6) vyjádříme opět v uzlu  $(i, k)$  zavedené časoprostorové sítě, Obr. 8b), a to tak, že za  $\frac{\partial E}{\partial t}$  a  $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$  dosadíme předchozí výrazy a za  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$  dosadíme

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{i+1,k+1} - 2E_{i,k+1} + E_{i-1,k+1}}{h_1^2} + \frac{E_{i+1,k-1} - 2E_{i,k-1} + E_{i-1,k-1}}{h_1^2} \right)$$

kde chybu druhého řádu jsme zanedbali a po dosazení do (5.6)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left( \frac{E_{i+1,k+1} - 2E_{i,k+1} + E_{i-1,k+1}}{h_1^2} + \frac{E_{i+1,k-1} - 2E_{i,k-1} + E_{i-1,k-1}}{h_1^2} \right) &= k_1 \frac{E_{i,k+1} - E_{i,k-1}}{2h_2} + \\ &+ k_2 \frac{E_{i,k+1} - 2E_{i,k} + E_{i,k-1}}{h_2^2}\end{aligned}$$

Kromě explicitní a implicitní aproximace existuje, obdobně jako u parabolických rovnic, další formule.

## 6 Maticový tvar diferenčních aproximací

Aplikujeme-li metodu sítí na daný spojitý matematický model, tj. přiřadíme-li ke každému uzlu zavedené sítě příslušnou algebraickou aproximaci, dostaneme diskrétní matematický model řešeného pole. Pro EMP má tento model tvar soustavy lineární algebraických rovnic.

Soustavu algebraických rovnic, jež jsme takto získali k dané okrajové úloze pro veličinu  $u$ , tj. diferenční aproximací dané parciální diferenciální rovnice pro  $u$  z okrajových, popř. hraničních podmínek, lze zapsat v maticovém tvaru (6.1), (6.2) a (6.3).

Pro *stacionární pole* popsaná eliptickou rovnicí jde o jedinou soustavu typu

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

kde  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n$ , jejímiž prvky jsou koeficienty soustavy diferenčních rovnic. Řád matice je roven počtu uzlů  $(i, j)$ , ve kterých určujeme hodnoty  $u_{i,j}$ .  $\mathbf{u}$  je vektor neznámých, jehož prvky tvoří  $n$  neznámých  $u_{i,j}$  ve zvoleném pořadí. Vektor  $\mathbf{b}$  je sloupcový s  $n$  prvky, jež představují pravé strany diferenční soustavy, včetně Dirichletových okrajových podmínek. Pořadí neznámých  $u_{i,j}$  volíme podle polohy uzlů  $(i, j)$ , např. ve sloupcích sítě zdola nahoru, přičemž jednotlivé sloupce sítě se berou za sebou zleva doprava. Matici  $\mathbf{A}$  vytváříme po řádcích tak, že do řádků příslušného k rovnici pro uzel  $(i, j)$  zapisujeme postupně koeficienty vyskytující se u jednotlivých neznámých v použité diferenční aproximaci. Prvky vektoru  $\mathbf{b}$  vytváříme postupně tak, že od hodnoty pravé strany diferenciální rovnice v příslušném uzlu odečteme ty členy diferenční aproximace její levé strany, jež jsme dostali z Dirichletových okrajových podmínek.

Pro *nestacionární pole* jde o posloupnost soustav rovnic. Je-li pole popsáno parabolickou rovnicí, má tato posloupnost tvar

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^k + \mathbf{d} \quad (6.2)$$

Naproti tomu pro pole s hyperbolickou rovnicí jde o posloupnost typu

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^k + \mathbf{C}\mathbf{u}^{k-1} + \mathbf{d} \quad (6.3)$$

Prvky matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$  získáme (obdobně jako ve stacionárním případě) z příslušných diferenčních aproximací. Vektor  $\mathbf{d}$  obvykle obsahuje hodnoty zadané funkce na pravé straně aproximovaných diferenciálních rovnic, popř. hodnoty Dirichletovy okrajové podmínky. Prvky vektorů  $\mathbf{u}^{k+1}$ ,  $\mathbf{u}^k$  a  $\mathbf{u}^{k-1}$  jsou hodnotami hledaného řešení v časových hladinách  $(k+1)\Delta t$ ,  $k\Delta t$  a  $(k-1)\Delta t$ . Hodnoty hledaného řešení v jednotlivých časových hladinách  $k+1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) lze postupně určovat řešením posloupnosti soustav (6.2), resp. (6.3). Přitom se k určení jejich pravých stran využije znalosti hodnot hledaného řešení z předcházejících časových hladin. Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$  jsou nejčastěji pásové, přičemž šířka pásu závisí na použité síti. Při explicitních diferenčních aproximacích je matice  $\mathbf{A}$  diagonální. Toho využíváme při numerickém řešení těchto soustav.

## 7 Příklad řešení elektrostatického pole

**Příklad** Diferenční metodou stanovte průběh potenciálu elektrostatického pole v okolí kruhového vodiče uloženého ve vodivém kanálu podle obrázku. Napětí mezi nimi je  $U = 230 \text{ V}$ ,  $a, r \in R$ .

Oblast  $\Omega$  je dána takto:  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ , kde

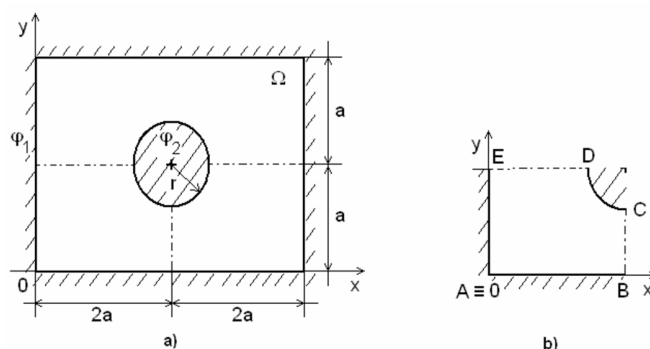
$$\begin{aligned}\Omega_1 : 4a^2 - x^2 &\geq 0, \\ \Omega_2 : a^2 - y^2 &\geq 0, \\ \Omega_3 : (x - 2a)^2 + (y - a)^2 &> r.\end{aligned}$$

**Řešení.** Pro potenciál  $\varphi$  v blasti mezi vodiči platí Laplaceova rovnice, která v kartézské soustavě souřadnic (Obr. 9a) má tvar

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1)$$

a na hranici oblasti jsou dány Dirichletovy okrajové podmínky. Se zřetelem k symetrii řešeného pole se omezíme na čtvrtinu této oblasti Obr. 9b), v níž budeme řešit okrajovou úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami:

- a) s Dirichletovými podmínkami  $\varphi = 0$  na úseku hranice EAB a  $\varphi = 230$  na úseku DC,
- b) s Neumannovou podmínkou  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$  na úseku hranice BC a  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  na úseku hranice DE,
- c) na uzly  $(3, 6)$ ,  $(4, 5)$  a  $(5, 4)$  použijeme Collatzovu lineární interpolaci (Obr. 10),
- d) podle odst. 4.2 „přeneseme“ hodnoty hraničních podmínek z hranice do nejbližších uzlů sítě, tedy do uzlů  $(3, 7)$  a  $(6, 4)$ .



Obr. 9:

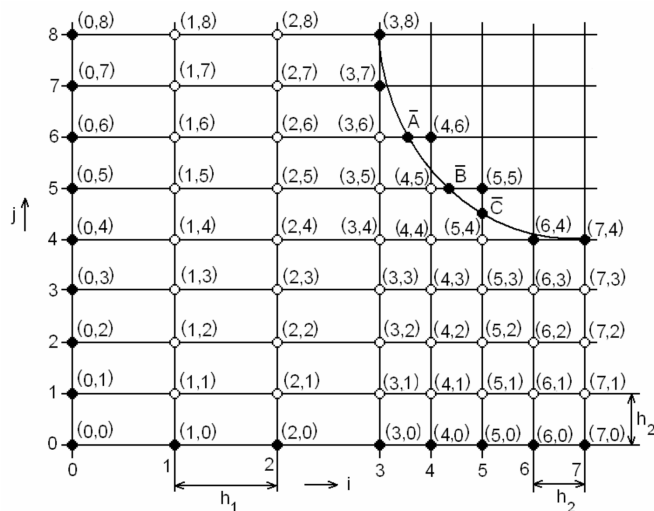
Zavedeme rovnoměrnou diferenční síť Obr. 10. V uzlech vyznačených prázdným kroužkem se hodnoty potenciálu  $\varphi_{i,j}$  hledají, v uzlech vyznačených plným kroužkem jsou dány Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Diferenční aproximace rovnice (7.1) pro vnitřní uzly sítě  $(i, j)$ , získáme ze vztahu (3.9) s chybou  $O(h^2) = O[\max(h_1^2, h_2^2)]$ :

$$\frac{1}{h_1^2} \varphi_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} \varphi_{i,j-1} - 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) \varphi_{i,j} + \frac{1}{h_2^2} \varphi_{i,j+1} + \frac{1}{h_1^2} \varphi_{i+1,j} = 0 \quad (7.2)$$

Diferenční aproximace Neumannovy okrajové podmínky s chybou  $O(h^2)$  pro hraniční uzly  $(i, j)$  na DE a BC plyne ze vztahu (3.7)

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j} &= 0 \\ \varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j} &= 0\end{aligned} \quad (7.3)$$



Obr. 10: Rovnoměrná diferenční síť

Diferenční aproximace Collatzovy lineární interpolace pro uzly  $(3, 6)$ ,  $(4, 5)$  plyne ze vztahu (4.4)

$$\begin{aligned} u_{i,j} - \frac{\sigma}{\sigma-1} u_{i-1,j} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} u(\bar{A}) \\ u_{i,j} - \frac{\sigma}{\sigma-1} u_{i-1,j} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} u(\bar{B}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

a pro uzel  $(5, 4)$

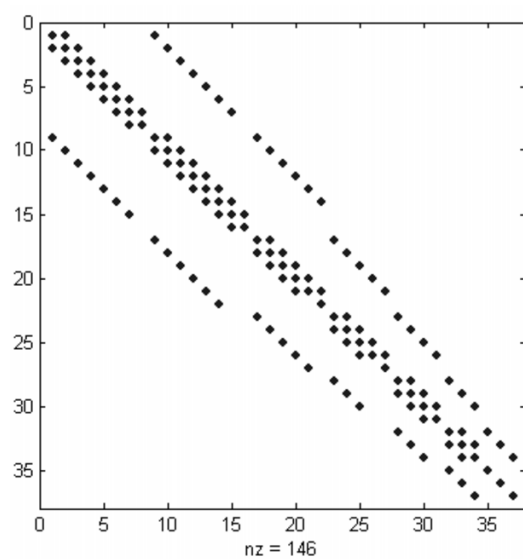
$$u_{i,j} - \frac{\sigma}{\sigma-1} u_{i,j-1} = \frac{\sigma}{\sigma-1} u(\bar{C}) \quad (7.5)$$

Hodnoty potenciálu v ostatních hraničních uzlech  $(i, j)$  jsou dány. Aplikací rovnic (7.2), (7.3), (7.4) a (7.5) na uzly, jež jsou na Obr. 10 vyznačeny prázdnými kroužky, dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic pro potenciály  $\varphi_{i,j}$  v těchto uzlech. Tato soustava má tvar (6.1) a matice soustavy vypadá na Obr. 11. Dosazením  $h_1 = 0,2$  a  $h_2 = 0,5$ . Numerickým řešením této soustavy rovnic dostáváme výsledky uvedené v tabulce.

$(i, j)$	$\varphi_{i,j}$ [V]	$(i, j)$	$\varphi_{i,j}$ [V]	$(i, j)$	$\varphi_{i,j}$ [V]	$(i, j)$	$\varphi_{i,j}$ [V]
(1, 1)	0,93	(2, 3)	7,91	(3, 4)	20,75	(5, 2)	75,92
(1, 2)	2,13	(2, 4)	16,30	(3, 5)	50,73	(5, 3)	133,58
(1, 3)	4,17	(2, 5)	42,83	(3, 6)	225,69	(5, 4)	225,41
(1, 4)	8,95	(2, 6)	139,56	(4, 1)	20,83	(6, 1)	41,31
(1, 5)	23,70	(2, 7)	151,61	(4, 2)	46,16	(6, 2)	89,41
(1, 6)	66,97	(2, 8)	151,61	(4, 3)	82,02	(6, 3)	151,00
(1, 7)	75,15	(3, 1)	2,63	(4, 4)	137,41	(7, 1)	41,31
(1, 8)	75,15	(3, 2)	5,90	(4, 5)	221,46	(7, 2)	89,41
(2, 1)	1,82	(3, 3)	10,90	(5, 1)	34,51	(7, 3)	151,00
(2, 2)	4,13						

Tabulka výsledků





Obr. 11: Matice soustavy  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$

## 8 Přehled užitých symbolů a veličin

$R$	... množina reálných čísel
$N$	... množina přirozených čísel, $n, i, j, k \in N$
$\sigma, h$	... konstanty $\sigma, h_i \in R, i = 1, 2$
$\Omega$	... oblast v $R^2$ (tj. otevřená souvislá množina v $R^2$ )
$\Gamma$	... hranice množiny ( $\Gamma = \partial\Omega$ )
$\overline{\Omega}$	... uzáver oblasti $\Omega$
$\Delta$	... Laplaceuv operátor

$\mathbf{A}$	... vektorový potenciál	$Wb / m$
$E$	... intenzita elektrického pole	$V / m$
$\varphi$	... skalární elektrický potenciál	$V$
$\gamma$	... měrná vodivost	$S / m$
$\varepsilon$	... permitivita prostředí	$F / m$
$\mu$	... permeabilita prostředí	$H / m$
$\varrho$	... objemová hustota náboje	$C / m^3$

## 9 Literatura

- D. MAYER, J. POLÁK: *Metody řešení elektrických a magnetických polí*, SNTL, Praha 1983  
D. MAYER, B. ULRYCH: *Základy numerického řešení elektrických a magnetických polí*, SNTL, Praha 1988  
E. VITÁSEK: *Numerické metody*, SNTL, Praha 1987