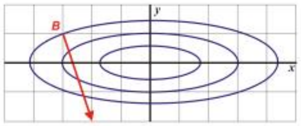
Zápočťák

Friday, December 6, 2024 19:18

## 1. Gradient

**Zadání:** Nadmořská výška libovolného bodu na povrchu kopce je dána formulí $h(x, y) = A \exp[-(x/l_0)^2 - 9(y/l_0)^2]$, kde $A = 500$ m, $l_0 = 100$ m. Nalezněte směr největšího stoupání do kopce (malé posunutí po povrchu kopce v tomto směru vyvolá největší přírůstek nadmořské výšky) v bodě $B = [-30, 10]$ m.




$$h(x,y) = A \exp\left[-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{l_0}\right)^2\right]$$

$A = 500\,m$, $l_0 = 100\,m$

$B = [-30, 10] \to$ tady nalézt stoupání

$$\vec{\nabla} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(A\left(-\frac{2x}{l_0^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{l_0}\right)^2\right]; A\left(-\frac{18y}{l_0^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{l_0}\right)^2\right]\right)$$

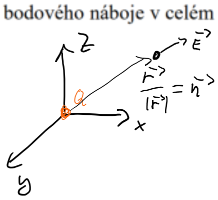
$$= A \exp\left[-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{l_0}\right)^2\right]\left(-\frac{2x}{l_0^2}; -\frac{18y}{l_0^2}\right) =$$

$$= \frac{-2A}{l_0^2}\exp\left[-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{l_0}\right)^2\right](x; 9y)$$

$$\approx (-x; -2y) = (30; -90) \sim (3; -9) \sim \underline{\underline{(1; -3)}}$$

## 2. Divergence

**Zadání:** Nalezněte divergenci elektrického pole bodového náboje v celém prostoru (pro bodový náboj je $r \to 0, \rho_Q \to \infty$).




$$[E] = \frac{V}{m}$$

$$F_Q = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{n}} = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}}_{k} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left| \vec{r} = (x, y, z); r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right| = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{(x, y, z)}{r}}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \underbrace{(E_x, E_y, E_z)}_{\vec{E}}$$

$$\vec{E}_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}x \qquad \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = k\frac{\cancel{r^3} + x^2 \cancel{r^3}}{\cancel{r^6}\, r^3} = k\frac{1+x^2}{r^3}$$

$$\vec{E}_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}y \qquad \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} = k\frac{1+y^2}{r^3}$$

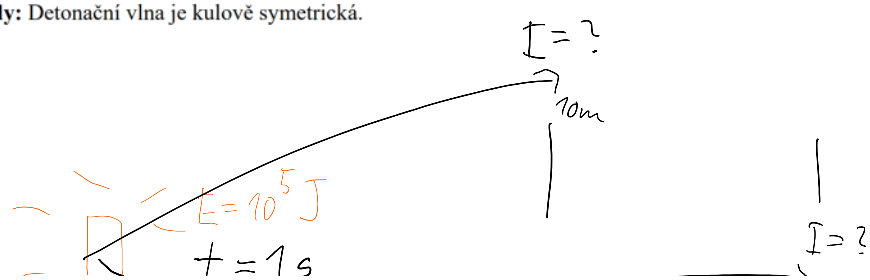
$$\vec{E}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}z \qquad \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = k\frac{1+y^2}{r^3}$$

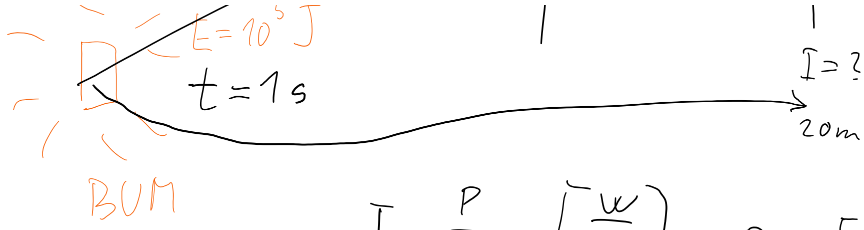
$$\operatorname{div}\vec{E} = k\frac{1+x^2+1+y^2+1+z^2}{r^3} = k\frac{3+r^2}{r^3}$$

$$=$$

**Zadání:** Při explozi nálože byla uvolněna energie $10^5$ J. Exploze trvala 1 s. Jaká bude maximální intenzita detonační vlny ve vzdálenosti 10 metrů od exploze a ve vzdálenosti 20 metrů od exploze?

**Předpoklady:** Detonační vlna je kulově symetrická.






$$I = \frac{P}{S} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad P = 10^5 W$$

$r_1 = 10m$

$S = 4\pi r^2$

$S_1 = 120\ m^2$ $\qquad I_1 = \frac{10^{\cancel{5}\,4}}{12\cancel{0}} = 80\ \frac{W}{m^2}$

$S_2 = 3600\ m^2$ $\qquad I_2 = \frac{10^{\cancel{5}\,3}}{36\cancel{00}} = 20\ \frac{W}{m^2}$

$\log(4)$

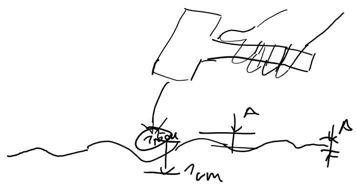
$\log 2^2$

$2 \log 2$

$0{,}6$ B

$\boxed{6 dB}$

**Zadání:** Tenkou pružnou homogenní membránu ve tvaru kruhu o poloměru 1,5 m ve středu prudkým úderem paličkou vychýlíme o 1 cm. Hlavice paličky má tvar válce o průměru 1,5 cm. Osa hlavice paličky při úderu byla kolmá na rovinu membrány. Rychlost úderu a tuhost membrány byly takové, že se při úderu protáhla membrána pouze v bezprostředním okolí hlavice paličky. Jaká bude amplituda vlny vzniklé na okraji membrány? Útlum a energii předanou zpět paličce zanedbejte.




$A \sim \sqrt{\frac{1}{r}}$

$A_1 = 1cm \,;\ r_1 = 0{,}75\ cm$

$A_2 = ?\ cm ;\ r_2 = 150\ cm$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_1}}}{\sqrt{\frac{1}{r_2}}}$$

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}}}$$

$$A_2 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$A_2 = 10 \cdot \sqrt{\frac{75}{7500}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = 1\ mm$$

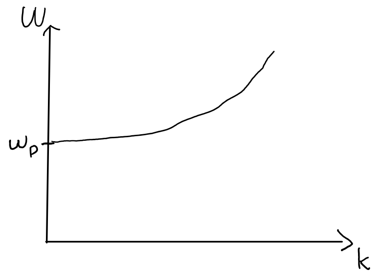
## 6. Elektromagnetická vlna v ionosféře

**Zadání:** Standardní disperzní relace rovinné elektromagnetické vlny $\omega^2 = c^2 k^2$ je při průchodu světla plazmatem modifikována na tvar $\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2.}$ Rychlost šíření světla ve vakuu je označena $c$. Veličina $\omega_p$ se nazývá plazmová frekvence (jde o frekvenci oscilací elektronů kolem iontů). Nalezněte závislost $\omega(k)$ a diskutujte její průběh. Určete fázovou a grupovou rychlost šíření této vlny.

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}$$

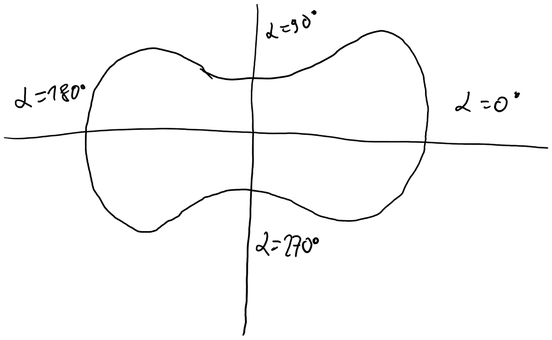
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2c^2 k \ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}{k} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + c^2} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}}$$




## 7. Směrový diagram

**Zadání:** Nalezněte tvar vlnoploch pro vlnu s disperzní relací $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \cos^2 \alpha$ .




## 8. Okno

**Zadání:** Okno, jehož plocha je 2 m$^2$ , je otevřeno na ulici. Pouliční hluk má v rovině okna průměrnou hladinu intenzity 80 dB. Jak velký akustický výkon vstupuje zvukovými vlnami do pokoje?

$L = 80 dB \qquad L = 20 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$S = 2 m^2 \qquad \frac{I}{I_0} = 10^8$

$I = I_0 S \cdot 10^4 = 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^8$

$P = 2 \cdot 10^{-4} W$

**Zadání:** V prostředí, jehož hladina intenzity hlukového pozadí je 60 dB, byl změřen hluk stroje. Byla naměřena hodnota 64 dB. Jakou hodnotu hladiny intenzity hluku stroje bychom naměřili, kdybychom měřili v tiché místnosti?

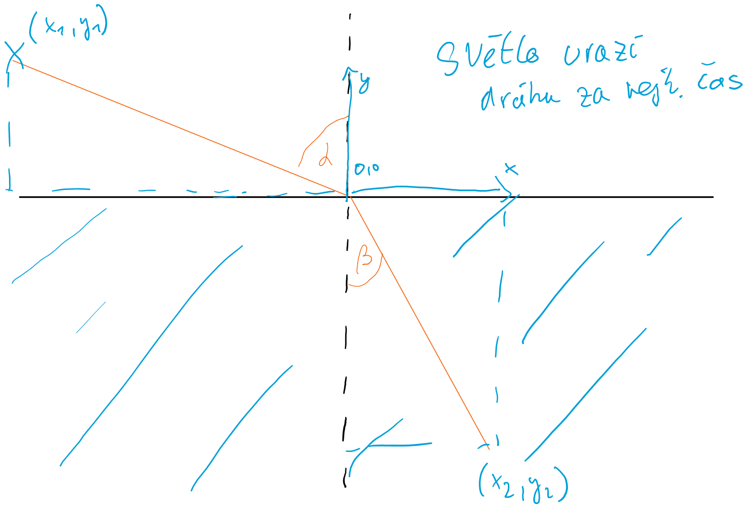
$L_s = 64 dB \Rightarrow 10^{6,4} = \frac{I_s}{I_0} = \frac{I_s}{10^{-12}} \Rightarrow I_s = 10^{-5,6} \frac{W}{m^2}$

$L_0 = 60 dB \Rightarrow 10^6 = \frac{I_n}{I_0} \Rightarrow I_n = 10^{-6} \frac{W}{m^2}$

$10^{\frac{L_s}{10}} = 10^6 - 10^{5,6}$

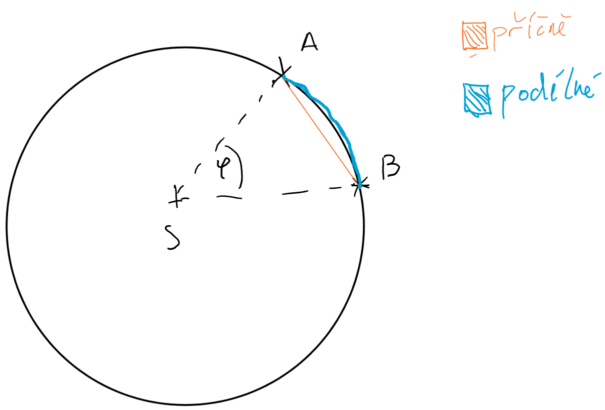
$L_S = 62\ \mathrm{dB}$

**Zadání:** Odvoďte z Fermatova principu zákon lomu světla na rozhraní dvou prostředí.




$t_1 = t_2$

**Zadání.** Vypočítejte úhlovou vzdálenost od hypocentra *A* do seismografické stanice *B*, je-li ze záznamu seismografu patrno, že podélné vlny přišly o $\Delta t$ = 80 s dříve než vlny příčné. Rychlost šíření podélných vln v zemské kůře předpokládejte $c_L = 6{,}5$ km/s, rychlost příčných vln v témže prostředí $c_T = 4{,}4$ km/s. Stanovte interval úhlových vzdáleností, pro něž je metoda použitelná, je-li tloušťka zemské kůry $d$ = 15 až 60 km. Poloměr Země je $R$ = 6 378 km.

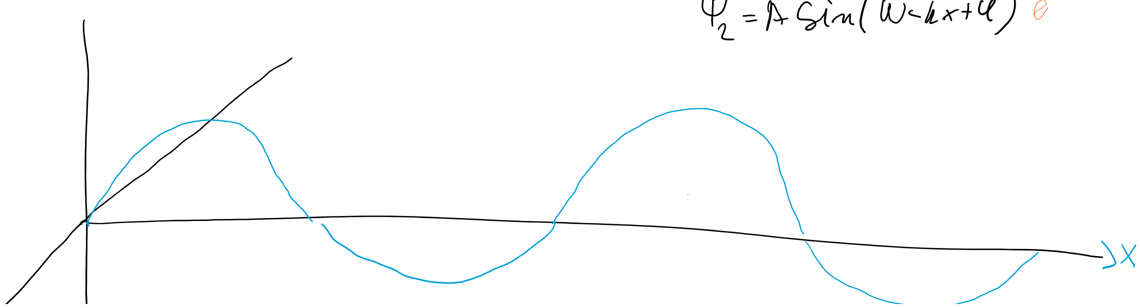


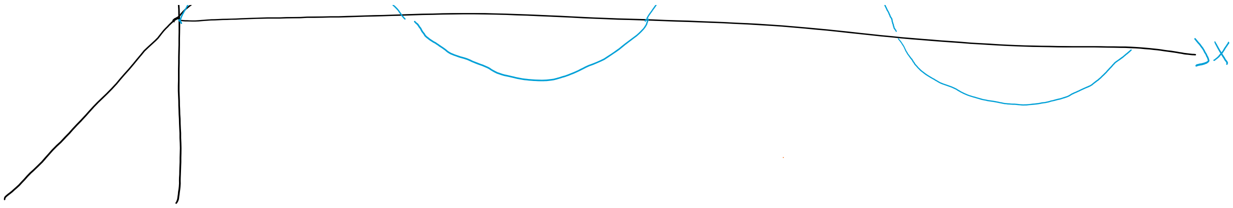

**Zadání.** Dvě rovinné harmonické vlny o stejné frekvenci a amplitudě, polarizované lineárně v navzájem kolmých směrech (os $y$ a $z$ ) se šíří stejnou rychlostí v kladném směru osy $x$. Popište výslednou vlnu vzniklou jejich složením, má-li fázový rozdíl obou vln hodnotu

a) $\varphi = 0$, b) $\varphi = \pi$, c) $\varphi = \pi/2$, d) $\varphi = 3\pi/2$,

a rozhodněte, o jakou polarizaci výsledné vlny se v uvedených případech jedná.

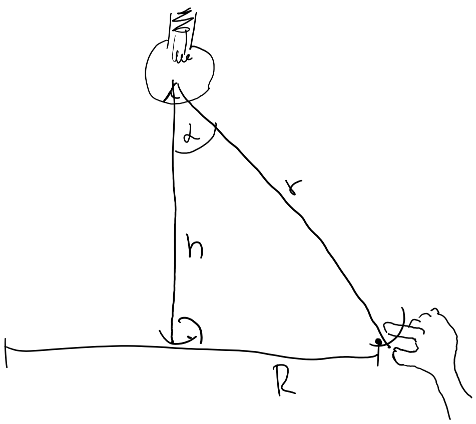
$\psi_1 = A\sin(\omega - kx)$ $e^{?}$
$\psi_2 = A\sin(\omega - kx + \varphi)$ $e^{?}$





**Zadání:** Lampa je umístěna nad kulatým stolem o poloměru R v jeho středu. Určete optimální výšku lampy nad stolem tak, aby osvětlení knihy ležící na okraji stolu bylo maximální.

**Předpoklady**: Zdroj je dostatečně malý, vlnoplochu považujte za kulovou.




$$I \sim \frac{\cos\alpha}{r^2} \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r}$$

$$r^2 = h^2 + R^2$$

$$I \sim \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}}{h^2+R^2} = \frac{h}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial h} = 0$$

$$\frac{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}} + h\cdot 2h\left(-\frac{3}{2}\right)(h^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{(h^2+R^2)^3}} = 0$$

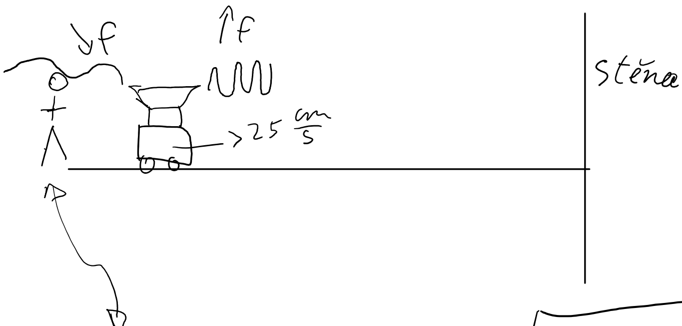
$$(h^2+R^2) - 3h^2 = 0$$

$$R^2 - 2h^2 = 0$$

$$R^2 = 2h^2$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

**Zadání:** Zdroj zvuku se pohybuje na vozíku rychlostí $v$ = 25 cm s$^{-1}$ směrem ke stěně. Na opačné straně slyší pozorovatel rázy na frekvenci $f_R$ = 3 Hz. Jaká byla frekvence zdroje zvuku, jestliže je rychlost zvuku $c_s$ = 340 m/s?




$$f_R = f_0\cdot\left(1 \pm \frac{v_z}{c_s}\right)$$

$$\boxed{f_{zv} = f_0\left(1 - \frac{v_z}{c_s}\right) \qquad f_{odr} = f_0\left(1 + \frac{v_z}{\;}\right)}$$

$$f_{ODR} - f_{z_{vozíku}} = 3\,Hz$$

$$\boxed{f_{ODR} = f_0\left(1 + \frac{v_z}{c_s}\right)}$$

$$f_r = f_0\left(1 + \frac{v_z}{c_s}\right) - f_0\left(1 - \frac{v_z}{c_s}\right) = f_0\left(2\frac{v_z}{c_s}\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{2}\frac{c_s}{v_z}\cdot f_r = \underline{\underline{2040\,Hz}}$$

**Zadání:** Lokomotiva jedoucí rychlostí 72 km/h píská 2 sekundy. Jak dlouho trvá zvuk, který vnímá v klidu stojící pozorovatel

a) přijíždí-li lokomotiva k němu

b) vzdaluje-li se lokomotiva od něho.

Rychlost zvuku je 340 $ms^{-1}$.

$v_L = 20\,ms^{-1}$ $\quad f_p = f_0\left(1 \pm \frac{v_L}{c_s}\right)$

$T_p = ?$ $\quad T_0 = 2s$

$F = \frac{1}{T}$

$$a)\ \frac{1}{T_p} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{v_0}{c_s}\right) = \frac{1}{T_p} = \cancel{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{20}{340}\right)} \Rightarrow T_p = 1{,}89\,s$$

$$b)\ T_p = \frac{T_0}{1 - \frac{v_0}{c_s}} = \cancel{\frac{2}{1 + \frac{20}{340}}} = \underline{\underline{2{,}125\,s}}$$

**Zadání:** V (malé ale konečné) části periody jisté jednorozměrné postupné příčné vlny bylo zjištěno konstantní zrychlení $a$ kmitajícího elementu. Stanovte, jak rychle se mění výchylka $h$ elementu během průchodu této části vlny konkrétním bodem prostoru ve směru šíření. Fázová rychlost šíření je známa.

$\Psi = h$ $\qquad \frac{\partial h}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{v_F^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}}_{a} = 0$$

$$a = v_F^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = const. \qquad \Big/ \int dx$$

$$\int v_F^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx = ax + K$$

$$v_F^2 \frac{\partial h}{\partial x} + K_2 = ax + K_1$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a}{v_F^2}x}}$$

**Zadání:** Nalezněte disperzní relaci vlnové rovnice

Fourier

**Zadání:** Nalezněte disperzní relaci vlnové rovnice

$$\Delta \psi - \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \xrightarrow{\text{Fourier}} -k^2\psi + \frac{1}{v_f^2}\omega^2\psi = 0$$

$$\omega^2 = k^2 \cdot v_f^2$$

$$\omega^2 = k^2 \cdot c^2 \Rightarrow \underline{\underline{\omega = c \cdot k}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{kc}{k} = c$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c$$

**Zadání:** Ukažte, že z Maxwellových rovnic ve vakuu plyne vlnová rovnice pro elektrické i magnetické pole.

**Návod:** použijte vektorovou identitu rot rot **K** = grad div **K** −Δ**K**.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_Q$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Big/ \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ve vakuu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{H} = \mu_0 \vec{B}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$0 - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\frac{\vec{H}}{\mu_0}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

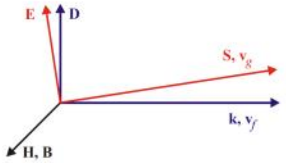
$$\underline{\underline{\Delta\vec{E} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}}$$

$$v_f^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = \underline{\underline{c}}$$

## 2. Vlny v anizotropním prostředí

**Zadání:** Řešte pomocí Fourierovy transformace Maxwellových rovnic konfiguraci polí v elektromagnetické vlně v elektricky anizotropním prostředí. V jakém směru míří fázová rychlost a v jakém směru míří grupová rychlost?

**Předpoklady:** V anizotropním prostředí nemusí vektory **E** a **D** mířit ve stejném směru. Připomeňme si, že **D** = $\varepsilon_0$**E** + **P**. Vektor elektrické polarizace **P** je objemová hustota dipólových momentů, které vyvolá pole **E**. Ty ale mohou sledovat například krystalografické roviny a ne pole **E**. Výsledkem je, že pole **E** a **D** mají různý směr. Stejně tak může u magneticky aktivních materiálů docházet k magnetizaci prostředí a vektor **H** = **B**/$\mu_0$ − **M** (kde **M** je tzv. magnetizace) nemusí mířit ve stejném směru jako **B**. Budeme předpokládat anizotropii elektrických vlastností, tj. elektrické vektory **D** a **E** nejsou rovnoběžné.




$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_Q$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\underbrace{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H}}_{0} - \Delta\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})$$

$$\vec{H} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \operatorname{rot}\vec{P}\right)$$

$$\underbrace{\text{grad div}\,\vec{H}}_{0} - \Delta\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}(\varepsilon_0\vec{E} + P)$$

$$-\Delta\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \text{rot}\,\vec{P}\right)$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$-\Delta\vec{H} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \ldots$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \text{rot}\,\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$$-k^2\vec{H} + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\vec{H} = \vec{k}\times\omega\vec{P}$$

$$(\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2)\vec{H} = \vec{k}\times\omega\vec{P}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\vec{H} =$$

---

**Zadání:** Sluneční záření má v okolí Země intenzitu $I$ = 1.4 kW/m$^2$. Nalezněte průměrnou hodnotu intenzity elektrického a indukce magnetického pole v slunečním záření v místě, kde se nachází Země.

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \qquad |S| = 1400\ \text{Wm}^{-2}$$

$$I = 1400\ \text{Wm}^{-2}$$

$$\frac{E}{B} = c\ ; \qquad I = E\cdot H \Rightarrow \mu_0 I = E\cdot B$$

$$E = c\cdot B$$

$$B^2 = \frac{\mu_0}{c}I$$

$$B = \sqrt{\frac{\mu_0}{c}I} = 2{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

$$E = c\cdot B = 3\cdot 10^8\cdot 2{,}4\cdot 10^{-6} = 720\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

---

**Zadání:** Nalezněme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu.

**Řešení:** V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\text{div}\,\vec{D} = \varrho_Q$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \longrightarrow \text{rot}\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$-\Delta\vec{H} = \sigma\,\text{rot}\,\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\vec{E}$$

$$-\Delta\vec{H} = \sigma\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

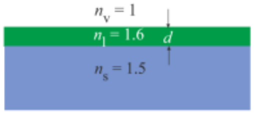
$$-\Delta\vec{H} = \sigma\left(-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}\right)$$

$$-\Delta H = \nu\left( \quad \partial t \right)$$

$$-\Delta \vec{H} = \sigma\left(-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{H}\right)$$

## 8. Antireflexní vrstva

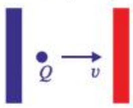
**Zadání:** Na skleněné podložce o indexu lomu $n_s = 1.5$ je napařena vrstva laku tloušťky 0.5 μm s indexem lomu $n_l = 1.6$. Určete, které vlnové délky z viditelného spektra budou chybět v kolmo odraženém světle.




$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

## 3. Elektron

**Zadání:** Elektron je urychlen napětím $U = 10^6$ V. Určete jeho rychlost z klasického i relativistického výrazu pro kinetickou energii a výsledky porovnejte.




klasická kin. en.

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$m_e = 10^{-31}\,\text{kg}$$

$$q = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}$$

$$W = Q\cdot U \qquad v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot Q\cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^6}{10^{-31}}} = \underline{\underline{1{,}7\cdot 10^{9}\,\text{ms}^{-1}}}$$

Relativistický:

$$W_K = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = 1 + \frac{W_K}{m_0 c^2} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(1 + \frac{W_K}{m_0 c^2}\right)^2$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{W_K}{m_0 c^2}\right)^2}$$

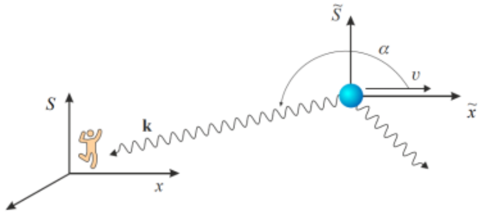
$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{W_K}{m_0 c^2}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{\left(1 + \frac{Q\cdot U}{m_0 c^2}\right)^2}}$$

$$v = \sqrt{9\cdot 10^{16} - \frac{9\cdot 10^{16}}{\left(1+\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^6}{10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}\right)^2}} = 2{,}99\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= \underline{\underline{99{,}8\,c}}$$

**Zadání:** Odvoďme nyní relativistický Dopplerův jev pomocí transformace vlnového čtyřvektoru ($\omega/c$, **k**). Pozorovatel je v soustavě $S$, zdroj periodického signálu je v soustavě označené vlnkou. Vlnění se šíří do všech směrů, nás zajímá jen vlnový vektor **k**, který míří právě k pozorovateli. Úhel mezi směrem pohybu zdroje vlnění a směrem k pozorovateli je označen $\alpha$ (musíme rozlišovat $\alpha^0$ v sosutavě zdroje a $\alpha$ v soustavě pozorovatele).




$$\omega_0 = kc$$

$$\tilde{S}: \quad \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_{\tilde{x}} \\ k_{\tilde{y}} \\ k_{\tilde{z}} \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k\cos\alpha \\ k\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ (\omega_0/c)\cos\alpha \\ (\omega_0/c)\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S: \quad \begin{pmatrix} \omega/c \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \left(\frac{\omega_0}{c}\right)\cos\alpha_0 \\ \left(\frac{\omega_0}{c}\right)\sin\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{c}\gamma + \frac{\omega_0}{c}\cos\alpha_0 \cdot \gamma\beta \\ \frac{\omega_0}{c}\gamma\beta + \gamma\frac{\omega_0}{c}\cos\alpha \\ \frac{\omega_0}{c}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega_0}{c}\begin{pmatrix} \gamma + \gamma\beta\cos\alpha_0 \\ \gamma\beta + \gamma\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c}\cdot\left(\gamma + \gamma\beta\cos\alpha_0\right) = \frac{\omega_0}{c}\gamma\left(1+\beta\cos\alpha_0\right)$$

$$\omega = \omega_0\gamma(1+\beta\cos\alpha_0)$$

$$\omega = \omega_0\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha_0\right)$$

$$f = f_0\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha_0\right)$$