Propočítané příklady CV.3, DÚ3

Friday, December 27, 2024 11:51

Úloha 1. *Mějme funkci*

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 4xy + 3x - y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že:*

(a) funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá;*

(b) funkce $f(z)$ *jako výše je celistvá a navíc* $f(i) = -2 + 4i$.

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 4y + 3 \quad / \int dy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 4x + 1$

$$v = 2xy - 4\frac{y^2}{2} + 3y + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$$

$$2y + C'(x) = 2y + 4x + 1$$

$$C'(x) = 4x + 1$$

$$C(x) = 2x^2 + x + C$$

a) $v(x,y) = \underline{2xy - 2y^2 + 3y + 2x^2 + x + C}\ ; C \in \mathbb{R}$

$u(x,y) = x^2 - y^2 - 4xy + 3x - y$

$f(i) = -2 + 4i$

$x = 0$
$y = 1$ $\quad v(0;1) = -2 + 3 + C = 4$

$\underline{C = 3}$

b) $\underline{v = 2xy - 2y^2 + 3y + 2x^2 + x + 3}$

Úloha 1: (a) $v(x,y) = 2xy - 2y^2 + 3y + 2x^2 + x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = 3$

Úloha 2. *Mějme funkci*

$$u(x,y) = e^{2x}\cos(2y) + x^3 - 3xy^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

S
C
-S
-C

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že:*

(a) funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá;*

(b) funkce $f(z)$ *jako výše je celistvá a navíc* $f(1+i\pi) = 1 + e^2 - 3\pi^2 + 3\pi i$.

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \implies \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos(2y) + 3x^2 - 3y^2 \ / \int dy$

$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -(-2e^{2x}\sin(2y) - 6xy) = 2e^{2x}\sin(2y) + 6xy$

$v = e^{2x}\sin(2y) + 3x^2y - y^3 + C(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin(2y) + 6xy + C'(x)$

$C'(x) = 0$

$C(x) = K, \ K \in \mathbb{R}$

a) $v(x,y) = e^{2x}\sin(2y) + 3x^2y - y^3 + K, K \in \mathbb{R}$

b) $f(1+i\pi) = 1 + e^2 - 3\pi^2 + 3\pi i$

$v(1,\pi) = 3\pi = \underbrace{e^2\sin(2\pi)}_{0} + 3\pi - \pi^3 + K$

$K = \pi^3$

$v(x,y) = e^{2x}\sin(2y) + 3x^2y - y^3 + \pi^3$

Úloha 2: (a) $v(x,y) = e^{2x}\sin(2y) + 3x^2y - y^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = \pi^3$

Úloha 3. *Dokažte, že pro každé* $z, w \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{Z}$ *platí*

(a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$;

(b) $e^z \neq 0$;

(c) $e^z = e^w$ *právě tehdy, když* $z = w + 2k\pi i$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$;

(d) $(e^z)^n = e^{nz}$.

a) $|e^z| \stackrel{?}{=} e^{\operatorname{Re} z}$

$|e^{x+iy}| \stackrel{?}{=} e^x$

$|e^x \cdot e^{iy}| \stackrel{?}{=} e^x$

$$|e^x \cdot e^{iy}| \overset{?}{=} e^x$$

$$|e^x \cdot (\cos y + i \sin y)| \overset{?}{=} e^x$$

$$|e^x \cos y + i e^x \sin y| \overset{?}{=} e^x$$

$$\sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{(e^x)^2 \underbrace{(\cos^2 y + \sin^2 y)}_{1}} = \underline{e^x}, \text{ HOTOVO}$$

b) $e^z \neq 0$

$$\underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{\cos y}_{0} + i \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{\sin y}_{0}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ↯ \quad y = k\pi$$

$\Rightarrow$ Nikdy nebude $\cos y = \sin y = 0$

tudíž $e^z \neq 0$

c) $e^z = e^w$, právě tehdy když $z = w + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{w + 2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \underbrace{e^{2k\pi i}}_{=1} = e^w$$

(d) $(e^z)^n = e^{nz}.$

$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} \cdot e^{iy} \cdot \ldots = e^{iy + iy + iy \ldots} = e^{niy}$$

$$\left(e^{x+iy}\right)^n = \underbrace{\left(e^x\right)^n}_{e^{nx}} \cdot \left(e^{iy}\right)^n = e^{nx} \left(e^{iy}\right)^n = e^{nx} \cdot e^{iny} = e^{nx + iny} =$$

$$= e^{n(x+iy)} = \underline{e^{nz}}$$

Úloha 4. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo* $z = e^{4 - \frac{301}{200}\pi i}$.

$$|e^w| = e^{\operatorname{Re} w} = \underline{e^4}$$

$$z = e^4 \cos\left(-\frac{301}{200}\pi\right) - i e^4 \sin\left(-\frac{301}{200}\pi\right)$$

$\downarrow$ Leží v prvním kvadrantu

$(-) \quad \frac{301}{\pi}$

$$\arg(z) = -\frac{301}{200}\pi \;\ldots$$

Leží v prvním kvadrantu

$$\arg z = \frac{99}{200}\pi$$

Úloha 4: $|z| = e^4$, z leží v 1. kvadrantu

Úloha 5. *Vyjádřete funkci* $\sin(-5iz^3)$ *pomocí exponenciální funkce.*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sin(-5iz^3) = \underline{\underline{\frac{e^{5z^3} - e^{-5z^3}}{2i}}}$$

Úloha 5: $\sin(-5iz^3) = \frac{e^{5z^3} - 5^{-5z^3}}{2i}$

Úloha 6. *Určete reálnou a imaginární část čísla* z*, je-li*

(a) $z = e^{(2-3i)^2}$;

(b) $z = \ln(-2-2i)$;

(c) $z = \cos(\pi + i\ln 2)$.

a) $z = e^{4-12i-9} = e^{-5-12i}$

$\operatorname{Re} z = e^{-5}\cos(-12)$

$\operatorname{Im} z = -e^{-5}\sin(-12)$

b) $z = \ln(-2-2i) = \ln|-2-2i| + i\arg(-2-2i)$

$\operatorname{Re} z = \ln\sqrt{8} = \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{3}{2}\ln 2$

$\operatorname{Im} z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $z = \cos(\pi + i\ln 2)$

$$z = \frac{e^{i(\pi+i\ln 2)} + e^{-i(\pi+i\ln 2)}}{2} = \frac{-1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot 2}{2} = -\frac{5}{4}$$

$\operatorname{Re} z = -\frac{5}{4}$

$\operatorname{Im} z = 0$

Úloha 6: (a) $\operatorname{Re} z = e^{-5}\cos 12$, $\operatorname{Im} z = -e^{-5}\sin 12$

(b) $\operatorname{Re} z = \ln\sqrt{8}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3\pi}{4}$

(c) $\operatorname{Re} z = -\frac{5}{4}$, $\operatorname{Im} z = 0$

Uloha 7. *Nalezněte všechna řešení následujících rovnic.*

(a) $e^{6i+3iz} + 6 = 0$

(b) $\left(\overline{e^z}\right)^2 = i$

a) $e^{6i+3iz} + 6 = 0$

$e^{6i} e^{3iz} + 6 = 0$

$e^{3iz} = -6e^{-6i}$

$e^{3i(x+iy)} = -6e^{-6i}$

$e^{3xi-3y} = -6e^{(-6+2k\pi)i}$

$e^{-3y} = -6$

$-3y = i\pi + \ln(6)$

$y = -\frac{\pi}{3}i - \frac{\ln 6}{3}$

$3x = -6 + 2k\pi$

$x = -2 + \frac{2}{3}k\pi$

$z = -2 + \frac{2}{3}k\pi + i\left(-\frac{\pi}{3}i - \frac{\ln(6)}{3}\right)$

$z = -2 + \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{3} - i\frac{\ln(6)}{3}, \; k \in \mathbb{Z}$

b) $\left(\overline{e^z}\right)^2 = i$

$e^{2\overline{z}} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$

$e^{2x-2iy} = $ ~~~

$e^{2x} \cdot e^{-2yi} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$

$x = 0$

$2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$y = -\frac{\pi}{4} - k\pi$

$\boxed{z = -\frac{\pi}{4}i - k\pi i}$ $k \in \mathbb{Z}$

(a) $z_k = -2 + \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} - \frac{\ln 6}{3}i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

(b) $z_k = -\frac{\pi}{4}i - k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

DDÚ:

Úloha 1. *Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je celistvá, kde funkce $u(x,y)$ je definována jako*

$$u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 3y, \; (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dále určete $v(x,y)$ tak, aby navíc platilo $f(2+i) = -4+5i$. Nakonec spočtěte $f'(1-i)$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 \quad / \int dy$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -4y^3 + 12x^2y - 3$

$v = 4x^3y - 4xy^3 + C(x)$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 + C'(x)$$

$$C'(x) = -3 \Rightarrow C(x) = -3x + K, \; K \in \mathbb{R}$$

$$\underline{v = 4x^3y - 4xy^3 - 3x + K, \; K \in \mathbb{R}}$$

$$f(2+i) = -4+5i$$

$$v(2,1) = 5 = 32 - 8 - 6 + K$$

$$K = -13 \Rightarrow \underline{v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - 3x - 13}$$

$\underline{f'(1-i)}$:

$$u = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 3y$$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 - 3x - 13$$

$$f'(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 + i(12x^2y - 4y^3 - 3)$$

$$f'(1,-1) = 4 - 12 + i(-12 + 4 - 3) = \underline{-8 - 11i} \checkmark$$

Úloha 2. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo*

$$z = -3ie^{-2+\frac{98}{45}\pi i}.$$

Nakonec určete také $\arg z$ *a* $\ln z$.

$$z = 3e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{-2+\frac{98}{45}\pi i} = 3e^{-2} e^{2i - \frac{\pi}{2}i + \frac{8}{45}i}$$

IV. KVADRANT

$$\arg z = \frac{8}{45}\pi - \frac{\pi}{2} \qquad |z| = 3e^{-2}$$

$$\ln z = \ln(3) - 2 + i\arg z = \ln(3) - 2 + i\left(\frac{98}{45}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cvičení 3 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení

Úloha 1. *Nalezněte všechny funkce* $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že funkce* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá, kde funkce* $u(x,y)$ *je definována jako*

$$u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 3y, \; (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dále určete $v(x,y)$ *tak, aby navíc platilo* $f(2+i) = -4+5i$. *Nakonec spočtěte* $f'(1-i)$.

Úloha 2. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo*

$$e^{2iz} = \frac{-i}{\;}$$

Úloha 1. *Nalezněte všechny funkce* $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že funkce* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá, kde funkce* $u(x,y)$ *je definována jako*

$$u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 3y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dále určete $v(x,y)$ *tak, aby navíc platilo* $f(2+i) = -4+5i$. *Nakonec spočtěte* $f'(1-i)$.

Úloha 2. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo*

$$z = -3ie^{-2+\text{[illegible]}\pi i}.$$

~~*Nakonec určete také* $\arg z$ *a* $\ln z$.~~

Úloha 3. *Nalezněte všechna řešení rovnice*

$$e^{2iz} = -\frac{i}{e^{iz+1}}.$$

$$e^{2iz} = \frac{-i}{e^{iz}e}$$

$$e^{2iz}e^{iz} = ie^{-1} = e^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{3iz} = e^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{3i(x+iy)} = e^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{3xi-3y} = e^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$-3y = -1$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$y = \frac{1}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi + \frac{i}{3}$$