Cvičení 12 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *(a) Jest*

$$f(t) = \operatorname{res}_{s=-4} \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2} e^{st} + \operatorname{res}_{s=2} \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2} e^{st}.$$

První reziduum můžu určit rychle „dosazovací metodou“. Jest

$$\operatorname{res}_{s=-4} \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2} e^{st} = \frac{16}{36} e^{-4t} = \frac{4}{9} e^{-4t}.$$

Druhé reziduum určíme pomocí limitního vzorečku (jedná se zřejmě o pól druhého řádu). Máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=2} \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2} e^{st} &= \lim_{s\to 2} \Big((s-2)^2 \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2} e^{st}\Big)' = \lim_{s\to 2} \Big(\frac{s^2 e^{st}}{s+4}\Big)' = \lim_{s\to 2} \frac{(2se^{st} + s^2 t e^{st})(s+4) - s^2 e^{st}}{(s+4)^2} \\ &= \frac{(4+4t)6 - 4}{36} e^{2t} = \frac{5+6t}{9} e^{2t}.\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$f(t) = \frac{4}{9} e^{-4t} + \frac{5+6t}{9} e^{2t}.$$

(b) Připomeňme si, že hledáme-li vzor k funkci ve tvaru $F(s) = G(s)e^{-as}$, kde $a > 0$, první nalezneme vzor $g(t)$ k funkci $G(s)$. Hledaný vzor $f(t)$ potom je $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$ díky pravidlu o posunu vzoru.

V našem případě jest $G(s) = \frac{s^2}{(s+4)(s-2)^2}$. Vzor k této funkci jsme ale již našli v (a). Máme $g(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} + \frac{5+6t}{9}e^{2t}$, takže hledaný vzor je

$$f(t) = g(t-3)\mathbb{1}(t-3) = \Big(\frac{4}{9} e^{-4(t-3)} + \frac{5+6(t-3)}{9} e^{2(t-3)}\Big)\mathbb{1}(t-3).$$

(c) Nejprve najdeme vzor k funkci $G(s) = \frac{5s}{s^2+4}$. Tento vzor bychom sice mohli určit metodou „sčítání reziduí“, ovšem snazší je ho „uhádnout“ za využití známého obrazu. Víme, že $\mathcal{L}[\cos(2t)](s) = \frac{s}{s^2+4}$, takže $g(t) = 5\cos(2t)$. Máme tedy

$$f(t) = g(t-2)\mathbb{1}(t-2) = 5\cos(2(t-2))\mathbb{1}(t-2) = 5\cos(2t-4)\mathbb{1}(t-2).$$

Úloha 2. *Za využití věty o Laplaceově obrazu T periodické funkce máme*

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-10s}} \mathcal{L}[f(t)\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-10)\big)](s).$$

Potřebujeme tedy najít obraz $\mathcal{L}[f(t)\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-10)\big)](s)$ „generující periody“. Z předpisu pro funkci $f(t)$ snadno nahlédneme, že

$$\mathcal{L}[f(t)\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-10)\big)](s) = \mathcal{L}[(t-3)^2\big(\mathbb{1}(t-3) - \mathbb{1}(t-6)\big)](s) + \mathcal{L}[\cos(\pi t)\big(\mathbb{1}(t-7) - \mathbb{1}(t-8)\big)](s).$$

Díky pravidlu o posunu vzoru a za využití známého obrazu máme

$$\mathcal{L}[(t-3)^2\mathbb{1}(t-3))(s) = e^{-3s}\mathcal{L}[t^2](s) = e^{-3s}\frac{2}{s^3}.$$

Podobně, tentokrát za využití pravidla o „oříznutí vzoru“, máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(t-3)^2\mathbb{1}(t-6))(s) &= e^{-6s}\mathcal{L}[(t+6-3)^2](s) = e^{-6s}\mathcal{L}[(t+3)^2](s) = e^{-6s}\Big(\mathcal{L}[t^2](s) + 6\mathcal{L}[t](s) + 9\mathcal{L}[1](s)\Big) \\ &= e^{-6s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\Big).\end{aligned}$$

Dohromady tedy

$$\mathcal{L}[(t-3)^2\big(\mathbb{1}(t-3) - \mathbb{1}(t-6)\big)](s) = \frac{2}{s^3}e^{-3s} - \Big(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\Big)e^{-6s}.$$

Dále máme díky pravidlu o „oříznutí vzoru“

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\pi t)\mathbb{1}(t-7)](s) &= e^{-7s}\mathcal{L}[\cos(\pi(t+7))](s) = e^{-7s}\mathcal{L}[\cos(\pi t + 7\pi)](s) = e^{-7s}\mathcal{L}[\cos(\pi t + \pi)](s) \\ &= -e^{-7s}\mathcal{L}[\cos(\pi t)](s) = -e^{-7s}\frac{s}{s^2+\pi^2}.\end{aligned}$$

Nakonec, opět za využití pravidla o „oříznutí vzoru“,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\pi t)\mathbb{1}(t-8)](s) &= e^{-8s}\mathcal{L}[\cos(\pi(t+8))](s) = e^{-8s}\mathcal{L}[\cos(\pi t+8\pi)](s)\\ &= e^{-8s}\mathcal{L}[\cos(\pi t)](s) = e^{-8s}\frac{s}{s^2+\pi^2}.\end{aligned}$$

Dohromady tedy

$$\mathcal{L}[\cos(\pi t)\big(\mathbb{1}(t-7)-\mathbb{1}(t-8)\big)](s) = -\frac{s}{s^2+\pi^2}e^{-7s} - \frac{s}{s^2+\pi^2}e^{-8s} = -\frac{s(e^{-7s}+e^{-8s})}{s^2+\pi^2}.$$

Celkově tedy

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-10s}}\left(\frac{2}{s^3}e^{-3s} - \Big(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\Big)e^{-6s} - \frac{s(e^{-7s}+e^{-8s})}{s^2+\pi^2}\right).$$