Cvičení 12–13 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 13–14

Úloha 1. *Mějme posloupnost* $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

(a) *Určete* $\mathcal{Z}[a_n](z)$.
(b) *Určete* $\mathcal{Z}[3^n a_n](z)$.

Úloha 2. *Určete.*

(a) $\mathcal{Z}[n \sin(\frac{\pi}{2} n)](z)$
(b) $\mathcal{Z}[n^2](z)$
(c) $\mathcal{Z}[\cos(n+2)](z)$
(d) $\mathcal{Z}[(i^n n) * \frac{1}{n+2}](z)$ *[Využijte skutečnosti, že* $\mathcal{Z}[\frac{1}{n+1}](z) = -z \ln(1 - \frac{1}{z})$.*]*

Úloha 3. *Určete* Z*-transformaci* $Y(z)$ *řešení diferenční rovnice*

$$y_{n+3} + 3y_{n+2} + 13y_{n+1} - y_n = (-1)^n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = -1$, $y_1 = 3$, $y_2 = 4$.

Úloha 4. *Určete řešení* y_n *řešení diferenční rovnice, je-li* Z*-transformace řešení rovna*

(a) $Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$
(b) $Y(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-2i)}$

Úloha 5. *Určete vybrané koeficienty inverzní* Z*-transformace* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *funkce* $F(z)$*. Určete*

[Nápověda: Rozviňte funkci $F(z)$ *do Laurentovy řady na okolí* ∞*.]*

(a) a_0, a_2, a_5 *a* a_7, *je-li*

$$F(z) = \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{3n+2}}, \; z \in U(\infty);$$

(b) a_1, a_4, a_9 *a* a_{12}, *je-li*

$$F(z) = \frac{1}{3 + z^4};$$

(c) a_{10}, a_{14}, a_{15} *a* a_{25}, *je-li*

$$F(z) = \frac{1}{6z^{10} - 3z^{15}};$$

(d) a_0, a_1, a_{11} *a* a_{13}, *je-li*

$$F(z) = 5 + z^3 \ln\left(1 - \frac{1}{z^4}\right).$$

[Využijte známého rozvoje $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ *pro* $|z - 1| < 1$.*]*

Úloha 6. *Určete* Z*-transformaci* $Y(z)$ *řešení diferenční rovnice*

(a)

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = n \qquad \text{splňující počáteční podmínky } y_0 = y_1 = 0;$$

(b)

$$y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = \sum_{k=0}^{n} k(-2)^{n-k} \qquad \text{splňující počáteční podmínky } y_0 = 2,\ y_1 = 1.$$

Pro nudící se

Úloha 7. *Pomocí* $\mathcal{Z}$*-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice*

$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$$

s počáteční podmínkou $y_0 = 4$.

Úloha 8. *Určete členy* c_0, c_1, c_2 *a* c_3 *posloupnosti* $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (n+2)_{n=0}^{\infty} * (n^2)_{n=0}^{\infty}$.

Úloha 9. *Určete členy* a_0, a_1 *a* a_2 *posloupnosti* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, *která je inverzní* Z*-transformací funkce*

$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z - 2}, \; z \in U(\infty).$$

Z-transformace

Připomenutí.

- Z**-transformace** posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je funkce
$$\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$
která je holomorfní na jistém okolí nekonečna.

- *Koeficienty posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tedy kódují koeficienty u $(-n)$tých mocnin z. a_0 je absolutní člen, a_1 je koeficient u z^{-1}, a_2 je koeficient u z^{-2}, a_3 je koeficient u z^{-3} atd.*

- **Základní aritmetika Z-transformace***:*
  - ⋆ *Z-transformace je lineární.*
  - ⋆ *Pro $\alpha \neq 0$ platí $\mathcal{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathcal{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.* *[škálování vzoru]*

- **Pár známých obrazů***:*
  - ⋆ *Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\mathcal{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$, speciálně tedy $\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.*
  - ⋆ $\mathcal{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
  - ⋆ *Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathcal{Z}[\sin(\omega n)](z) = \frac{z \sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ a $\mathcal{Z}[\cos(\omega n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$.*

- **Pravidlo o derivaci obrazu***:*
$$\mathcal{Z}[na_n](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{Z}[a_n](z)$$

- **Pravidlo o obrazu posunu** *(vlevo):*
$$\mathcal{Z}[a_{n+k}](z) = z^k\mathcal{Z}[a_n](z) - a_0z^k - a_1z^{k-1} - \ldots - a_{k-1}z \qquad \text{kde } k \in \mathbb{N}$$
Speciálně:
$$\mathcal{Z}[a_{n+1}](z) = z\mathcal{Z}[a_n](z) - a_0z$$
$$\mathcal{Z}[a_{n+2}](z) = z^2\mathcal{Z}[a_n](z) - a_0z^2 - a_1z$$
$$\mathcal{Z}[a_{n+3}](z) = z^3\mathcal{Z}[a_n](z) - a_0z^3 - a_1z^2 - a_2z$$
  - ⋆ *Posloupnost $(a_{n+k})_{n=0}^{\infty}$, kde $k \in \mathbb{N}$, odpovídá posunu posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ doleva o k pozic: $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \overset{\text{posun doleva o } k}{\longrightarrow} (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots) = (a_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.*

- **Konvoluce posloupností** $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde*
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
Pro **obraz konvoluce** *platí:*
$$\mathcal{Z}[a_n * b_n](z) = \mathcal{Z}[a_n](z)\mathcal{Z}[b_n](z)$$

- **Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace.** *K dané funkci $F(z) \in H_\infty$ chceme najít posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, aby $\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z)$.*
  - ⋆ *Jedna možnost je najít rozvoj funkce $F(z)$ do Laurentovy řady $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konvergující na okolí nekonečna a z něj vyčíst koeficienty $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.*
  - ⋆ *Druhá možnost je využít integrálního vyjádření koeficientů v Laurentově rozvoji, což vede na křivkový integrál, který lze často spočítat pomocí reziduové věty. Speciálně pro racionální funkci $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P$, dostaneme*
$$a_n = \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1},$$
kde z_j jsou všechny póly funkce $\frac{P(z)}{Q(z)}z^{n-1}$.
    - *Rychlá metoda pro racionální funkce, kde jmenovatel nemá „příliš vysoký stupeň". Např. pro funkci $F(z) = \frac{z}{z^{58}-1}$ by to ale byla sebevražda (počítali bychom 58 reziduí). Na druhou stranu bychom rychle mohli najít rozvoj do Laurentovy řady na okolí nekonečna.*
  - ⋆ *Vždy platí $a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$.*

Výsledky

Úloha 1: (a) $\frac{z^2}{z^2-1}$

(b) $\frac{z^2}{z^2-9}$

Úloha 2: (a) $\frac{z(z^2-1)}{(z^2+1)^2}$

(b) $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

(c) $\frac{z^3(z-\cos 1)}{z^2-2z\cos 1+1} - z^2 - z\cos 1$

(d) $\frac{zi}{(z-i)^2}\left(-z^2\ln(1-\frac{1}{z}) - z\right)$

Úloha 3: $Y(z) = -\frac{z(z^3+z^2-1)}{(z^3+3z^2+13z-1)(z+1)}$

Úloha 4: (a) $y_n = \frac{1}{9} - \frac{3n-2}{9}(-2)^{n-1}$ pro $n \geq 0$

(b) $y_n = (2i)^{n-2}(\frac{3-2n}{8} - \frac{1}{8})i$ pro $n \geq 1$, $y_0 = 0$

Úloha 5: (a) $a_0 = 0$, $a_2 = 6$, $a_5 = 4$, $a_7 = 0$

(b) $a_1 = 0$, $a_4 = 1$, $a_9 = 0$, $a_{12} = 9$

(c) $a_{10} = 0$, $a_{14} = 0$, $a_{15} = -\frac{1}{3}$, $a_{25} = -\frac{4}{3}$

(d) $a_0 = 5$, $a_1 = -1$, $a_{11} = 0$, $a_{13} = -\frac{1}{4}$

Úloha 6: (a) $Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^4}$

(b) $Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)(z^2-z+2)} + \frac{2z^2-z}{z^2-z+2}$

Úloha 7: $y_n = -\frac{2}{21}(-4)^n - \frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} + 4(-4)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Úloha 8: $c_0 = 0$, $c_1 = 2$, $c_2 = 11$, $c_3 = 34$

Úloha 9: $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{34}{9}$