Cvičení 9 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Funkce f je rovná 1 na intervalu $[-9,-7)$ a jinde je nulová. Z definice Fourierovy transformace tedy je*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-9}^{-7} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Pro $\omega \neq 0$ tedy máme

$$\hat{f}(\omega) = \Big[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big]_{t=-9}^{-7} = \frac{1}{-i\omega}(e^{7i\omega} - e^{9i\omega}) = \frac{e^{7i\omega} - e^{9i\omega}}{\omega} i.$$

Pro $\omega = 0$ máme

$$\hat{f}(0) = \int_{-9}^{-7} \mathrm{d}t = 2.$$

Úloha 2. *Jest*

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(t+2) + te^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \mathcal{F}[\cos(4t)h''(t+2)](\omega) + \mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega).$$

Začneme prvním obrazem. Připomeňme si, že $\cos(4t) = \frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}$. Díky tomu

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(t+2)](\omega) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[e^{4it}h''(t+2)](\omega) + \mathcal{F}[e^{-4it}h''(t+2)](\omega)\right).$$

Za využití pravidla o posunu obrazu

$$\mathcal{F}[e^{4it}h''(t+2)](\omega) = \mathcal{F}[h''(t+2)](\omega - 4).$$

Dále využijeme pravidla o posunu vzoru

$$\mathcal{F}[h''(t+2)](\omega-4) = e^{2i(\omega-4)}\mathcal{F}[h''(t)](\omega-4).$$

Nakonec využijeme pravidlo o obrazu derivace

$$e^{2i(\omega-4)}\mathcal{F}[h''(t)](\omega-4) = e^{2i(\omega-4)}(i(\omega-4))^2\hat{h}(\omega-4) = -e^{2i(\omega-4)}(\omega-4)^2\hat{h}(\omega-4).$$

Tedy

$$\mathcal{F}[e^{4it}h''(t+2)](\omega) = -e^{2i(\omega-4)}(\omega-4)^2\hat{h}(\omega-4).$$

Analogicky máme

$$\mathcal{F}[e^{-4it}h''(t+2)](\omega) = \mathcal{F}[h''(t+2)](\omega+4) = e^{2i(\omega+4)}\mathcal{F}[h''(t)](\omega+4) = -e^{2i(\omega+4)}(\omega+4)^2\hat{h}(\omega+4).$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(t+2)](\omega) = -\frac{1}{2}\left(e^{2i(\omega-4)}(\omega-4)^2\hat{h}(\omega-4) + e^{2i(\omega+4)}(\omega+4)^2\hat{h}(\omega+4)\right).$$

Co se týče obrazu $\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega)$, první použijeme pravidlo o derivaci obrazu. Tedy

$$\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega). \tag{1}$$

Potřebujeme určit $\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega)$. Budeme chtít využít známého obrazu Gaussovy funkce. Nejprve použijeme pravidlo o škálování[1]

$$\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}]\Big(\frac{\omega}{3}\Big).$$

Dále použijeme pravidlo o posunu vzoru[2] *a známý obraz Gaussovy funkce*

$$\frac{1}{3}\mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}]\Big(\frac{\omega}{3}\Big) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}\mathcal{F}[e^{-6t^2}]\Big(\frac{\omega}{3}\Big) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{(\frac{\omega}{3})^2}{24}} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}.$$

[1] S pomocnou funkcí $f(t)$ rovnou $f(t) = e^{-6(t-1)^2}$. Při této volbě je $\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

[2] S pomocnou funkcí $f(t)$ rovnou $f(t) = e^{-6t^2}$. Při této volbě je $\mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}](\frac{\omega}{3}) = \mathcal{F}[f(t-1)](\frac{\omega}{3})$.

Dosazením zpět do (1) *tedy dostaneme*

$$\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}\right) = \frac{i}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{i}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}} - \frac{\omega}{108}e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}\right)$$
$$= -\frac{i}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{i}{3} + \frac{\omega}{108}\right)e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}.$$

Úloha 3. *Na rovnici aplikujeme Fourierovu transformaci a využijeme pravidla o obrazu derivace, čímž dostaneme*

$$(i\omega)^3\hat{y}(\omega) - 5i\omega\hat{y}(\omega) + 3\hat{y}(\omega) = \frac{1}{5+i\omega}$$
$$(-i\omega^3 - 5i\omega + 3)\hat{y}(\omega) = \frac{1}{5+i\omega}$$
$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(-i\omega^3 - 5i\omega + 3)(5+i\omega)}.$$