Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (DD.MM.RRRR)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 99

Body

Úloha	1	2	3	4	5	**Σ**
Body						

Před zahájením práce

- **Vyplňte** čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a **podepište se**.
- **Poznamenejte si Vaše identifikační číslo**. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít **na lavici pouze** zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. **Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište**.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Vzorec pro výpočet rezidua v pólech

- Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k funkce $f(z)$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.
- $\mathscr{F}\left[t f(t)\right](\omega) = i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$ a $\mathscr{L}\left[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.
- $\mathscr{L}\left[t f(t)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.
- $\mathscr{Z}\left[n a_n\right](z) = -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$.