Cvičení 8 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Označme jako I integrál ze zadání. Vidíme, že jmenovatel integrované racionální funkce má 4 různé kořeny, a to body $\pm 2i$ a $\pm 3i$. Sčítáme rezidua v nulových bodech jmenovatele s kladnou imaginární částí, a tedy*

$$I = 2\pi i\Big(\operatorname{res}_{2i} \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)} + \operatorname{res}_{3i} \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)} \Big).$$

V obou případech se zřejmě jedná o jednoduché kořeny příslušného kvadratického polynomu, a tak můžeme použít „dosazovací metodu“. Jest

$$\operatorname{res}_{2i} \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{-4}{2z\big|_{z=2i}(-4+9)} = -\frac{4}{20i} = -\frac{1}{5i}$$

a

$$\operatorname{res}_{3i} \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{-9}{(-9+4)2z\big|z=3i} = \frac{9}{30i} = \frac{3}{10i}.$$

Takže

$$I = 2\pi i\Big(-\frac{1}{5i} + \frac{3}{10i}\Big) = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

Úloha 2. *Označme jako I integrál ze zadání. Jest*

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 13 &= 0 \\ (z-2)^2 + 9 &= 0 \\ z - 2 &= \pm 3i \\ z &= 2 \pm 3i. \end{aligned}$$

„Parametr α“ v našem integrálu s osc. exp. je záporný ($\alpha = -2$), takže sčítáme rezidua v nulových bodech jmenovatele se zápornou imaginární částí a místo $2\pi i$ násobíme $-2\pi i$. Tedy

$$I = -2\pi i \operatorname{res}_{2-3i} \frac{z}{(z^2-4z+13)^2} e^{-2iz}.$$

Bod $2-3i$ je zřejmě jednoduchý kořen kvadratického polynomu ve jmenovateli, a tedy dvojnásobný kořen jmenovatele (a zřejmě to není kořen čitatele). Jedná se tedy o pól řádu 2, a tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{2-3i} \frac{z}{(z^2-4z+13)^2} e^{-2iz} &= \lim_{z\to 2-3i} \Big((z-2+3i)^2 \frac{ze^{-2iz}}{(z-2-3i)^2(z-2+3i)^2} \Big)' \\ &= \lim_{z\to 2-3i} \Big(\frac{ze^{-2iz}}{(z-2-3i)^2} \Big)' = \lim_{z\to 2-3i} \frac{(e^{-2iz} - 2ize^{-2iz})(z-2-3i)^2 - 2(z-2-3i)ze^{-2iz}}{(z-2-3i)^4} \\ &= e^{-2i(2-3i)} \frac{(1-2i(2-3i))(-6i) - 2(2-3i)}{(-6i)^3} = \frac{-28+36i}{6^3 i} e^{-6-4i} \\ &= \Big(\frac{1}{6} - \frac{7}{54i}\Big) e^{-6-4i}. \end{aligned}$$

Takže

$$I = -2\pi i \Big(\frac{1}{6} - \frac{7}{54i}\Big) e^{-6-4i} = \Big(\frac{7}{27} - \frac{i}{3}\Big) \pi e^{-6-4i}.$$

Úloha 3. *Označme jako I integrál ze zadání. Kořeny z^2+1 jsou zřejmě body $\pm i$. Dále*

$$\begin{aligned} z^2 - 4iz - 3 &= 0 \\ (z-2i)^2 + 4 - 3 &= 0 \\ (z-2i)^2 &= -1 \\ z - 2i &= \pm i \\ z &\in \{3i, i\} \end{aligned}$$

„Parametr α" v našem integrálu s osc. exp. je kladný ($\alpha = 1$), takže sčítáme rezidua v nulových bodech jmenovatele s kladnou imaginární částí. Takže

$$I = 2\pi i\Big(\operatorname{res}_{3i} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 4iz - 3)(z^2 + 1)} + \operatorname{res}_{i} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 4iz - 3)(z^2 + 1)}\Big).$$

Vidíme, že bod $3i$ je jednoduchý kořen jmenovatele a bod i dvojnásobný. První reziduum lze tedy určit „dosazovací metodou". Jest

$$\operatorname{res}_{3i} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 4iz - 3)(z^2 + 1)} = \frac{e^{-3}}{2z - 4i\big|_{z=3i}(-9+1)} = \frac{e^{-3}}{(2i)(-8)} = -\frac{e^{-3}}{16i}.$$

Druhé reziduum počítáme pomocí limitního vzorečku pro póly. Jest

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{i} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 4iz - 3)(z^2 + 1)} &= \lim_{z\to i} \Big((z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z-i)^2(z+i)}\Big)' = \lim_{z\to i} \Big((z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z-i)^2(z+i)}\Big)' \\ &= \lim_{z\to i} \Big(\frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+i)}\Big)' = \lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z-3i)(z+i) - (2z-2i)e^{iz}}{(z-3i)^2(z+i)^2} \\ &= e^{-1}\frac{4i - 0}{(-4)(-4)} = \frac{i}{4}e^{-1}.\end{aligned}$$

Takže

$$I = 2\pi i\Big(-\frac{e^{-3}}{16i} + \frac{ie^{-1}}{4}\Big) = -\Big(\frac{e^{-3}}{8} + \frac{e^{-1}}{2}\Big)\pi.$$