Cvičení 11 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Podle pravidla o obrazu konvoluce máme*

$$\mathcal{L}[(te^{3t}\sin(4t)) * \mathbb{1}(t-2)](s) = \mathcal{L}[te^{3t}\sin(4t)](s)\mathcal{L}[\mathbb{1}(t-2)](s).$$

Co se týče prvního obrazu, dle pravidla o derivaci obrazu máme

$$\mathcal{L}[te^{3t}\sin(4t)](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[e^{3t}\sin(4t)](s). \tag{1}$$

Díky pravidlu o posunu obrazu máme

$$\mathcal{L}[e^{3t}\sin(4t)](s) = \mathcal{L}[\sin(4t)](s-3) = \frac{4}{(s-3)^2+16},$$

takže dosazením zpět do (1) *dostaneme*

$$\mathcal{L}[te^{3t}\sin(4t)](s) = -\Big(\frac{4}{(s-3)^2+16}\Big)' = \frac{8(s-3)}{((s-3)^2+16)^2}.$$

Co se týče druhého obrazu, máme[1]

$$\mathcal{L}[\mathbb{1}(t-2)](s) = e^{-2s}\mathcal{L}[1](s) = \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Úloha 2. *Jest*

$$f(t) = (t-1)^2\big(\mathbb{1}(t-1)-\mathbb{1}(t-4)\big) + \cos(3t)\mathbb{1}\Big(t-\frac{7\pi}{3}\Big).$$

Takže

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[(t-1)^2\big(\mathbb{1}(t-1)-\mathbb{1}(t-4)\big)](s) + \mathcal{L}[\cos(3t)\mathbb{1}\Big(t-\frac{7\pi}{3}\Big)](s).$$

Co se týče prvního obrazu, díky pravidlu o posunu vzoru máme

$$\mathcal{L}[(t-1)^2\mathbb{1}(t-1)](s) = e^{-s}\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s^3}e^{-s}.$$

Díky pravidlu o „oříznutí“ vzoru dále

$$\mathcal{L}[(t-1)^2\mathbb{1}(t-4)](s) = e^{-4s}\mathcal{L}[(t+3)^2](s) = e^{-4s}\big(\mathcal{L}[t^2](s)+6\mathcal{L}[t](s)+9\mathcal{L}[1](s)\big) = e^{-4s}\Big(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\Big).$$

Takže

$$\mathcal{L}[(t-1)^2\big(\mathbb{1}(t-1)-\mathbb{1}(t-4)\big)](s) = \frac{2}{s^3}e^{-s} - e^{-4s}\Big(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\Big).$$

Co se týče druhého obrazu, díky pravidlu o „oříznutí“ vzoru máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(3t)\mathbb{1}\Big(t-\frac{7\pi}{3}\Big)](s) &= e^{-\frac{7\pi}{3}s}\mathcal{L}[\cos\Big(3\Big(t+\frac{7\pi}{3}\Big)\Big)](s) = e^{-\frac{7\pi}{3}s}\mathcal{L}[\cos(3t+7\pi)](s)\\ &= e^{-\frac{7\pi}{3}s}\mathcal{L}[\cos(3t+\pi)](s) = -e^{-\frac{7\pi}{3}s}\mathcal{L}[\cos(3t)](s) = -e^{-\frac{7\pi}{3}s}\frac{s}{s^2+9}.\end{aligned}$$

Úloha 3. *Za pomoci konvoluce lze rovnici ze zadání zapsat jako*

$$y'''(t) + y'(t) * e^{2t} = e^{-5t}.$$

Na rovnici aplikujeme Laplaceovu transformaci a díky pravidlům o obrazu derivace a o obrazu konvoluce dostaneme

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + \big(sY(s)-y(0)\big)\frac{1}{s-2} = \frac{1}{s+5}.$$

Po dosazení počátečních podmínek jest

$$\begin{aligned} s^3Y(s) + 2s - 3 + \frac{1}{s-2}sY(s) &= \frac{1}{s+5}\\ \Big(s^3+\frac{s}{s-2}\Big)Y(s) &= \frac{1}{s+5} - 2s + 3\\ Y(s) &= \frac{s-2}{(s+5)(s^4-2s^3+s)} + \frac{(3-2s)(s-2)}{s^4-2s^3+s}\end{aligned}$$

---

[1] Např. si lze představit $\mathbb{1}(t-2) = \mathbb{1}(t-2)\mathbb{1}(t-2)$ a aplikovat pravidlo o posunu obrazu.