Před započtakem 2

Sunday, November 17, 2024 14:39

1. Určete koeficienty u mocnin $(z-i)^{-10}$, $(z-i)^{-1}$, $(z-i)^{1}$ a $(z-i)^{2}$ v Laurentově řadě

$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}(z-i)^{3n+8}.$$

$a_n(z-i)^{-10} \to 3n+8=-10$

$3n=-18$

$n=-6$

$a_n = \frac{n+2}{2^n}\Big|_{n=-6} \neq \frac{-6+2}{2^{-6}} = \frac{-4}{2^{-6}} = -4\cdot 2^6 = -2^2\cdot 2^6 = -2^8 = \cancel{-256}$

$-1 \cdot 2^4 \cdot 2^4$, $16\cdot 16$, 256

$\Rightarrow$ řada začíná $n=-4$, $n=-6$ v řadě není čili $\boxed{a_n=0}$

$(z-i)^{-1} \to 3n+8=-1 \to n=-3$

$a_{-3} = \frac{-3+2}{2^{-3}} = -1\cdot 8 = -8$

$3n+8=1$; $\to$ tento člen v řadě není $\Rightarrow a_n=0$

$n=-\frac{7}{3}$ $\to$ $a_n=0 \Rightarrow n$ není celé číslo!

$3n+8=2$; $n=-2$ $\Big\}$ $a_n = \frac{-2+2}{2^{-2}} = \underline{\underline{0}}$

VERIFIED

1. Ať a_n je koeficient u $(z-i)^n$. Pak $a_{-10}=0$, $a_{-1}=-8$, $a_1=0$ a $a_2=0$.

---

2) 2. (a) Laurentova řada

$$\check{R} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+4)^n$$

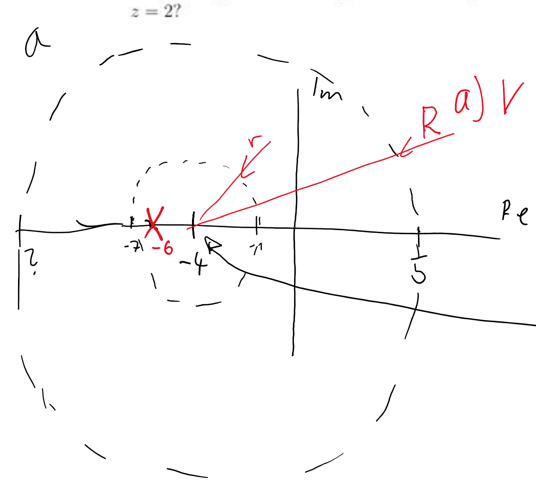
má vnitřní poloměr konvergence $r=3$ a vnější $R=9$. Konverguje v bodě $z=-6$?

(b) Laurentova řada

$$\check{R}_b = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-i)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r=1$ a vnější $R=4$. Konverguje v bodě $z=2$?

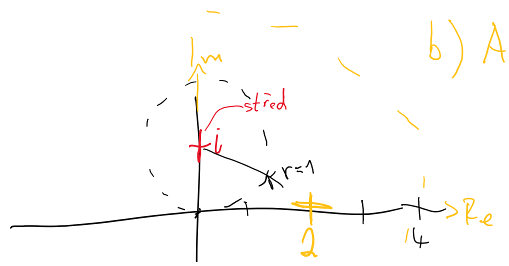
a



a) V bodě $z=-6$ řada $\check{R}$ nekonverguje = diverguje

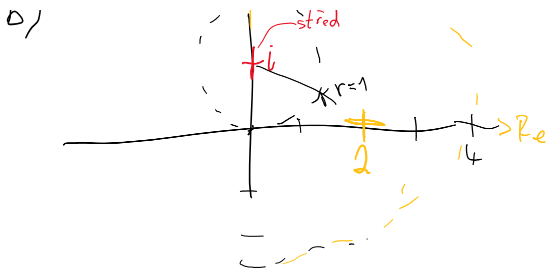
$(z+4)^n \Rightarrow$ střed v $\underline{\underline{-4}}$, protože $\left\{ (z+4)\Big|_{z=-4} = 0 \right\}$

b)



b) Ano v bodě $z=2$ řada $\check{R}_b$ konverguje

$\{ \check{R}$ je placeholder pro $\sum \ldots \}$ abych to nemusel opisovat b)



{ $\check{R}$ je placeholder pro $\sum$ ... } aby jsem to nemusel opisovat

VERIFIED

2. (a) Ne.
   (b) Ano.

---

3. Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

do Laurentovy řady na co největším prstencovém okolí bodu 1 a toto okolí určete.

→ exponenciála $(e^z)^2$

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2w+2}}{w^3} = \frac{e^2}{w^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2\cdot 2^n w^n}{n!\,(w)^{-3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2\cdot 2^n (z-1)^{n-3}}{n!} =$$

$w = z-1$

$z = w+1$

$$= \sum_{n=-3}^{\infty}\frac{e^2\, 2^{n+3}(z-1)^n}{(n+3)!} \qquad 0<|z-1|$$

Připomínka:

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

VERIFIED

3. $\sum_{n=-3}^{+\infty}\frac{2^{n+3}e^2}{(n+3)!}(z-1)^n$ pro $0<|z-1|$.

---

4. Rozviňte funkci

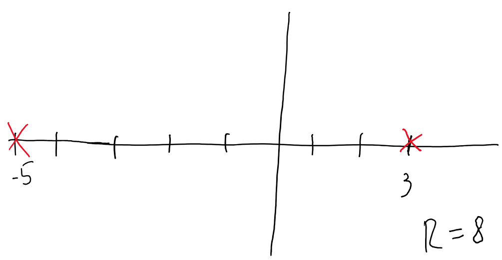
$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)^4(z^2+2z-15)^2}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 3$ a určete jeho parametry.

$$z^2+2z-15=0$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm\sqrt{4+4\cdot 15}}{2} = -1 \pm 4 \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$$

$$(z^2+2z-15)^2 = \left((z-3)^2(z+5)^2\right)$$



$R=8$

$$F(z) = \frac{1}{(z+5)^3\cdot(z-3)^6} =$$

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{z+5-8+8} = \frac{1}{(z-3)+8} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-3}{8}\right)} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{8}\right)^n = \check{R}$$

$$\left(\frac{1}{z+5}\right)'' = \left(\frac{-1}{(z+5)^2}\right)' = \left(\frac{2}{(z+5)^3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{z+5}\right)' = \left(\frac{-}{(z+5)^2}\right) = \left(\frac{}{(z+5)^3}\right)$$

$$\check{h}'' = \left(\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{8^n} \cdot n\,(z-3)^{n-1}\right)' = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{8^n} \cdot n(n-1)(z-3)^{n-3}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+3} \cdot \frac{1}{8^{n+4}}(n+3)(n+2)(z-3)^n$$