Řešené příklady ze cvičení k předmětu Komplexní analýza (B0B01KAN + B0B01KANA)

Zdeněk Mihula
Katedra matematiky, FEL ČVUT

Květen 2023

Pár úvodních slov

Milé studentky, milí studenti, milí čtenáři,

tento dokumentu obsahuje má ručně (na grafickém tabletu) psaná řešení úloh ze cvičení k předmětu Komplexní analýza (B0B01KAN + B0B01KANA). Než se pustíte do jejich čtení a procházení, věnujte prosím pozornost následujícím pár větám. Tyto poznámky z velké části vznikly během „covidového" zimního semestru 2020/2021, jako má příprava na probíhající online výuku. Poznámky nikdy neměly být veřejně dostupné, měly sloužit pouze „mým studentům" na podporu výuky, a tak jsem je také používal v dalších letech. Jelikož ale vzbudily dobré ohlasy mezi studenty a pravidelně se objevil nemalý počet „cizích studentů", kteří mě o ně žádali, rozhodl jsem se jejich (mírně vylepšenou) verzi zpřístupnit veřejně, aby k poznámkám měl přístup každý, kdo o ně má zájem. Přestože můj rukopis nikdy nebyl vzhledný a psaní na grafickém tabletu mu rozhodně neprospělo, věřím, že jsou poznámky dostatečně čitelné. S mým rukopisem souvisí i počet stran, kterého se není třeba bát.

Když už jsem krátce vysvětlil původ poznámek, měl bych také vysvětlit, **co tyto poznámky nejsou**. Poznámky nejsou plnohodnotnou náhradou cvičení, mají sloužit pouze jako jejich doplněk. Cílem těchto poznámek není ukazovat „chytrá řešení" (a už vůbec ne „triková"). Úlohy jsou naopak řešeny přímočaře s cílem sloužit jako rutinní procvičování základních technik a postupů. Poznámky nejsou (a nemají být) náhradou obsáhlé sbírky příkladů, z nichž velká část je včetně řešení (či alespoň jeho náznaku), od doc. Bohaty a prof. Hamhaltera s názvem *Sbírka úloh z komplexní analýzy a integrálních transformací*. Sbírku lze nalézt na `https://math.fel.cvut.cz/en/people/bohatmar/kan/sbirka.pdf`. Nakonec, poznámky v žádném případě nejsou náhradou přednášky a ani nemají sloužit ke studiu a pochopení teorie. Ačkoli je na některých místech teorie připomenuta, jedná se pouze o jakási „praktická připomenutí", co bychom měli vědět a co budeme používat (alibisticky také dodávám, že tato připomenutí často obsahují jistá zjednodušení).

Doufám, že Vám mé poznámky budou užitečné a přeji Vám hodně štěstí (nejenom) při studiu (nejenom) Komplexní analýzy.

Zdeněk Mihula

Seznam kapitol/témat

1 Komplexní čísla **1**

2 Derivace a Cauchyovy-Riemannovy podmínky **7**

3 Exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus **19**

4 Křivkový integrál (bez reziduové věty) **30**

5 Mocninné řady **38**

6 Laurentovy řady **56**

7 Reziduová věta a její použití na výpočet jistých integrálů **73**

8 Fourierova transformace **81**

9 Laplaceova transformace **95**

10 Z-transformace **107**

1 Komplexní čísla

Komplexní čísla, reálná a imaginární část, velikost, argument komplexního čísla

úterý 22. září 2020 12:09

S komplexními čísly pracujeme jako s mnohočleny za využití identity $i^2 = -1$.

ÚLOHA: Naleznete reálnou a imaginární ČÁST ČÍSLA $z = (1+i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i}$

ŘEŠENÍ:

- $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$
- $\frac{1+i^{11}}{1+i} = \frac{1+i^3}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1+i^3)(1-i)}{2} = \frac{1-i+i^3-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

$\lceil z\overline{z} = |z|^2 \rfloor$

$$\Longrightarrow (1+i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i} = 2i - i = i$$

$\operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z = 1$

ÚLOHA: SEČTĚTE A CO NEJVÍCE ZJEDNODUŠTE VÝRAZ $\frac{2+3i}{1+2i} - \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$.

JAKÁ JE IMAGINÁRNÍ A REÁLNÁ ČÁST TOHOTO ČÍSLA? JAKÁ JE JEHO VELIKOST?

ŘEŠENÍ:

$$\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{(2-i)^2}{(1+2i)^2} = \frac{(2+3i)(1+2i) - (2-i)^2}{(1+2i)^2} = \frac{-4+7i-3+4i}{(1+2i)^2} = \frac{-7+11i}{-3+4i} \cdot \frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{65-5i}{25} = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re} z = \frac{13}{5},\ \operatorname{Im} z = -\frac{1}{5},\ |z| = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{5}}.$$

ÚLOHA: DOKAŽTE, ŽE PRO $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ PLATÍ, ŽE $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ a $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

ŘEŠENÍ:

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

- $z_1 \cdot z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1),$ (*)

$\overline{z_1} = x_1 - iy_1$

$\overline{z_2} = x_2 - iy_2$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \ldots = x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)$ (**)

$\xRightarrow{(*),\,(**)} \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$$\bullet\ |z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\cdot\overline{(z_1 z_2)}} = \sqrt{\underbrace{z_1\bar{z}_1}_{|z_1|^2}\underbrace{z_2\bar{z}_2}_{|z_2|^2\geq 0}} = \sqrt{z_1\bar{z}_1}\,\sqrt{z_2\bar{z}_2} = |z_1|\cdot|z_2|$$

$[\,|z| = \sqrt{z\bar{z}}\,]$

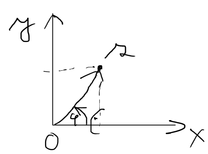
Je-li $z \neq 0$, pak existuje právě jedno $\varphi \in (-\pi,\pi]$ takové, že $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Toto φ značíme $\arg z$ (tzv. hlavní hodnota argumentu čísla z).
Množinu všech φ splňujících rovnici výše bez omezení na příslušnost do $(-\pi,\pi]$ značíme $\operatorname{Arg} z$ (tzv. množina argumentů čísla z).

ÚLOHA: DOKAŽTE ŽE PRO $z = x+iy \neq 0$ PLATÍ

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \dots\ \operatorname{Re} z > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \dots\ \operatorname{Re} z < 0\ \&\ \operatorname{Im} z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \dots\ \operatorname{Re} z < 0\ \&\ \operatorname{Im} z < 0 \\ \pi & \dots\ \operatorname{Re} z < 0\ \&\ \operatorname{Im} z = 0. \end{cases}$$

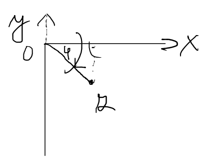
ŘEŠENÍ:

• 1. kvadrant:



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \overset{\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Longrightarrow} \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

• 4. kvadrant:

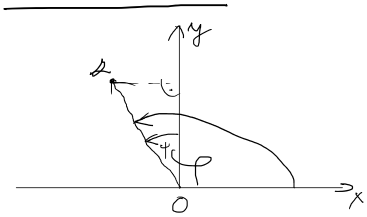


$$\operatorname{tg}|\varphi| = \frac{-y}{x} \qquad [\,|y| = -y\,]$$

$$\Longrightarrow |\varphi| = \operatorname{arctg}\frac{-y}{x}$$

$$\underset{\text{opačná orientace}}{\Longrightarrow} -\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-y}{x} = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

• 2. kvadrant:

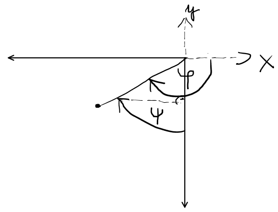


$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-x}{y} \Longrightarrow \psi = \operatorname{arctg}\frac{-x}{y} = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

• 3. kvadrant:



$$|\varphi| = \frac{\pi}{2} + |\psi|$$

$$\operatorname{tg}|\psi| = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

$$|\psi| = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

$\Longrightarrow$ opačná orientace $\quad -\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

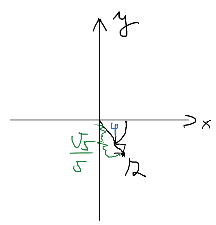
ÚLOHA: Určete goniometrický tvar komplexního čísla $z = \frac{i^{31}}{2-i}$

ŘEŠENÍ:

$|z| = ?\quad , \varphi \in \operatorname{Arg} z\ ?$

$$\frac{i^{31}}{2-i} = \frac{-i}{2-i} = \frac{-i(2+i)}{5} = \frac{1-2i}{5} \qquad \left[\operatorname{Re} z = \frac{1}{5},\ \operatorname{Im} z = -\frac{2}{5}\right]$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$$



$$\arg z = \operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2 =: \varphi$$

$$z = \frac{\sqrt5}{5}\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

ÚLOHA: Nechť z, w jsou nenulová komplexní čísla. Nechť $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $\psi \in \operatorname{Arg} w$.

Ukažte, že $z = w$ **tehdy a jen tehdy** když $|z| = |w|$ a $\varphi = \psi + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

ŘEŠENÍ: "$\Leftarrow$"

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|\left(\cos(\psi+2k\pi) + i\sin(\psi+2k\pi)\right) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$

"$\Rightarrow$"

• $z = w \Longrightarrow |z| = |w|$

• $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z = w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)$

$|z| \neq 0$

$\Longrightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\psi + i\sin\psi$

$\Longrightarrow \cos\varphi = \cos\psi \ \&\ \sin\varphi = \sin\psi$

$\Longrightarrow \cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\psi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \qquad [\cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y]$

$\Longrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \varphi = \psi + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

Pro každé $n\in\mathbb{Z}$ platí $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

ÚLOHA: Určete $\mathrm{Re}\, z^{12}$, $\mathrm{Im}\, z^{12}$, KDE $z = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{i\sqrt{3}-1}$.

ŘEŠENÍ:

$$z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{i\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(\sqrt{2}-i\sqrt{6})}{3+1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2}$$

- $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\mathrm{Im}\, z = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
- $|z| = \sqrt{\dfrac{2}{4}+\dfrac{6}{4}} = \sqrt{2}$
- $\arg z \overset{\text{4. kvadrant}}{=} \operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$
- $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
- $z^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{12} \overset{\text{Moivre}}{=} 2^6\left(\cos\left(-12\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-12\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^6\left(\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi)\right)$

$$= 2^6 = 64$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Re}\, z^{12} = 64, \quad \mathrm{Im}\, z^{12} = 0$$

Pomocí Moivreovy věty lze efektivně řešit (nejenom) tzv. binomické rovnice, tj. rovnice $z^n = w$, kde $n\in\mathbb{Z}$ a $0 \neq w\in\mathbb{C}$ jsou dána a $z\in\mathbb{C}$ hledáme.

Množina všech různých řešení je n bodová a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelník v rovině.

ÚLOHA: Nalezněte všechna řešení rovnice $z^3 = 1$.

ŘEŠENÍ:

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi\in\operatorname{Arg} z$ $\qquad 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

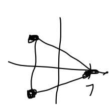
$z^3 = 1 \iff |z|^3 = 1$ & $3\varphi = 0 + 2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

$\iff$

$|z| = 1$, $\varphi = \dfrac{2k\pi}{3}$ pro $k\in\mathbb{Z}$

$$z_k = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2$$

$z_0 = 1$, $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$



ÚLOHA: Nalezněte všechna řešení rovnice $z^2 + 2 - 2\sqrt{3}\,i = 0$.

ŘEŠENÍ:

$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}$,

$|-2+2\sqrt{3}i| = 4$

$\arg(-2+2\sqrt{3}\,i) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

3. kvadrant

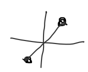
$|z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$|z| = 2 \quad , \quad 2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{pro } k\in\mathbb{Z}$

$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right) \quad , \; k = 0,1$

$z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$



ÚLOHA: Nalezněte všechna řešení rovnice $z^5 + 1 + i = 0$.

$z^5 = -1-i$

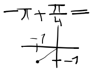
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^5 = |z|^5(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 \underset{\text{Moivre}}{=} |z|^5(\cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi))$

$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(-1-i) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$



$z^5 = -1-i \iff |z|^5(\cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$\iff |z|^5 = \sqrt{2} \;\&\; 5\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{pro } k\in\mathbb{Z}$

$\iff |z| = \sqrt[10]{2} \;\&\; \varphi = -\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{pro } k\in\mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \quad \text{pro } k = 0,1,2,3,4$

ÚLOHA: NALEZNĚTE VŠECHNA $z \in \mathbb{N}$ taková, že $z^n = \bar{z}$, kde $n\in\mathbb{N}$ je dáno

ŘEŠENÍ: Tohle sice není binomická rovnice ve smyslu, jak jsme si ji "definovali", ale také ji lze řešit pomocí Moivreovy věty.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

· $n = 1$: $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

· $n \geq 2$:
- zřejmě platí pro $z = 0$.
- Dále předpokládejme, že $z \neq 0$:

$z^n = \bar{z} \iff |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

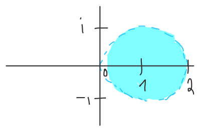
$\iff |z|^n = |z| \;\&\; n\varphi = -\varphi + 2k\pi \quad \text{pro } k\in\mathbb{Z} \iff |z| = 1 \;\&\; \frac{2k\pi}{n+1} \in \operatorname{Arg} z$

PRO $n \geq 2$ TEDY DOSTANEME MNOŽINU ŘEŠENÍ $\{0, z_0, z_1, \dots, z_n\}$, KDE $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$

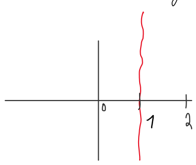
ÚLOHA: Popište GEOMETRICKY MNOŽINU VŠECH $z \in \mathbb{C}$ SPLŇUJÍCÍCH $|z-1|<1$ & $|z|=|z-2|$.

ŘEŠENÍ:

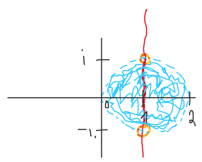
- $|z-1|<1$ je množina bodů, které mají od bodu 1 vzdálenost menší než 1, tj. otevřený kruh o středu 1 a poloměru 1



- $|z|=|z-2|$ je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od počátku jako od 2, tj. osa úsečky spojující bod 0 a 2



$\Longrightarrow$



VÝSLEDNÝ OBRAZEC JE TEDY OTEVŘENÁ ÚSEČKA SPOJUJÍCÍ BODY $1-i$ a $1+i$.

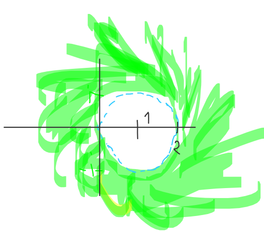
ÚLOHA: Popište GEOMETRICKY MNOŽINU VŠECH $z \in \mathbb{C}$ SPLŇUJÍCÍCH $|z|^2 > z+\bar{z}$

ŘEŠENÍ:

$$z\bar{z} - z - \bar{z} > 0$$
$$z(\bar{z}-1) - \bar{z} > 0$$
$$z(\bar{z}-1) - (\bar{z}-1) - 1 > 0$$
$$(z-1)(\bar{z}-1) > 1$$
$$(z-1)\overline{z-1} > 1$$
$$|z-1|^2 > 1$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$
$$\bar{z}-1 = \overline{z-1}$$

$|z-1|>1$, tedy KOMPLEMENT UZAVŘENÉHO KRUHU O STŘEDU V BODĚ 1 A POLOMĚRU 1.



2 Derivace a Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Reálná a imaginární část funkce

úterý 29. září 2020 15:37

ZADÁNÍ: NALEZNĚTE REÁLNOU A IMAGINÁRNÍ ČÁST FUNKCE $f(z)=\frac{2z^2+3}{z}$

a ROZHODNĚTE ZDA $i\in M=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}f(z)=0\ \&\ \operatorname{Im}f(z)>5\}$.

ŘEŠENÍ: Cíl: VYJÁDŘIT $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, kde $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$

$$f(z)=f(x,y)=\frac{2(x+iy)^2+3}{\overline{x+iy}}=\frac{2(x^2+2xyi-y^2)+3}{x-iy}=\frac{2(x^2+2xyi-y^2)+3}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy}=$$

$$=\frac{2x^3-2xy^2+3x-4xy^2+i(4x^2y+2x^2y-2y^3+3y)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{2x^3-6xy^2+3x}{x^2+y^2}+\frac{6x^2y-2y^3+3y}{x^2+y^2}\,i$$

• Tedy $\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=\frac{2x^3-6xy^2+3x}{x^2+y^2}$ $\quad \operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=\frac{6x^2y-2y^3+3y}{x^2+y^2}$

• $i\in M$?

$$\operatorname{Re}f(i)=u(0,1)=\frac{0}{1}=0$$

$$\operatorname{Im}f(i)=v(0,1)=\frac{0-2+3}{1}=1\leq 5$$

$$\Longrightarrow i\notin M$$

ZADÁNÍ: NALEZNĚTE REÁLNOU A IMAGINÁRNÍ ČÁST FUNKCE $f(z)=\frac{\operatorname{Re}z}{1+i\bar{z}}$

a ROZHOD. ZDA $1+i\in M=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}f(z)>\operatorname{Im}f(z)\}$.

ŘEŠENÍ: $z=x+iy$

$$f(z)=\frac{x}{1+i(x-iy)}=\frac{x}{1+y+ix}=\frac{x}{1+y+ix}\cdot\frac{1+y-ix}{1+y-ix}=\frac{x(1+y)-ix^2}{(1+y)^2+x^2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re}f=u(x,y)=\frac{x(1+y)}{(1+y)^2+x^2}\qquad \operatorname{Im}f=v(x,y)=-\frac{x^2}{(1+y)^2+x^2}$$

$1+i \in \Pi$?

$$\mathrm{Re} f(1+i) = u(1,1) = \frac{2}{4+1} > 0$$
$$\mathrm{Im} f(1+i) = v(1,1) = -\frac{1}{4+1} < 0$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Re} f(1+i) > \mathrm{Im} f(1+i)$$
$$\Longrightarrow \boxed{1+i \in \Pi}$$

ZADÁNÍ: NALEZNĚTE REÁLNOU A IMAGINÁRNÍ ČÁST FUNKCE $f(z) = |z| + \frac{z-i}{z+1}$ A ROZHODNĚTE ZDA $2i \in \Pi = \{ z \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Re} f(z) \geq 1, \mathrm{Im} f(z) < 0 \}$.

ŘEŠENÍ:

$$f(z) = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x+(y-1)i}{x+1+iy} \cdot \frac{x+1-iy}{x+1-iy} =$$
$$= \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x(x+1)+y(y-1) + i(y-x-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re} f(z) &= u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x(x+1)+y(y-1)}{(x+1)^2+y^2} \\ \mathrm{Im} f(z) &= v(x,y) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}}$$

$$\mathrm{Re} f(2i) = u(0,2) = \sqrt{4} + \frac{2}{1+4} = \frac{12}{5} \geq 1 \quad \checkmark$$
$$\mathrm{Im} f(2i) = v(0,2) = \frac{2-0-1}{1+4} = \frac{1}{5} \geq 0 \quad \times$$
$$\Longrightarrow \boxed{2i \notin \Pi.}$$

ZADÁNÍ: EXISTUJE LIMITA $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$?

ŘEŠENÍ: $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$ existuje tehdy a jen tehdy když existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{z}\right)$ a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{z}\right)$.

- Máme $\frac{\operatorname{Im} z}{z} = \frac{y}{x+iy} = \frac{xy - iy^2}{x^2+y^2}$.
- Tedy $\operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{z}\right) = \frac{xy}{x^2+y^2} =: u(x,y)$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{z}\right) = -\frac{y^2}{x^2+y^2} =: v(x,y)$$

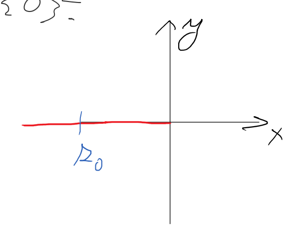
- Ovšem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$ neexistuje
- Např. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} -\frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$, zatímco $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} -\frac{y^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$.

Tedy $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$ neexistuje!

ZADÁNÍ: Je funkce $\arg z$ spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?

ŘEŠENÍ:

- Nechť z_0 je takové, že $\operatorname{Re} z_0 < 0$ a $\operatorname{Im} z_0 = 0$.
- Potom $\arg z_0 = \pi$.



- Ovšem $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Im} z<0}} \arg z = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} \arg z = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \neq \arg z_0$.

3. formule

$\lim\limits_{s\to\infty} \operatorname{arctg} s = \frac{\pi}{2}$

Fce $\arg z$ tedy není spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

[je ale spojitá na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$]

ZADÁNÍ: ROZHODNĚTE, V JAKÝCH BODECH JE $f(z)$ DIFERENCOVATELNÁ A V TĚCHTO BODECH SPOČTĚTE $f'(z)$.

a) $f(z) = x^2 + iy^2$

b) $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2)$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

ŘEŠENÍ:

$\boxed{a)}$ $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = y^2$

C-R podmínky: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ v bodech, kde je funkce diferencovatelná

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \quad \xRightarrow{C-R} \quad 2x = 2y \iff x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad 0 = -0 \ ✓$$

- f je tedy diferencovatelná v bodech z s $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z$ $[x=y]$
- V TĚCHTO BODECH PLATÍ

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z, \quad z = x+ix, x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{b)}$ $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$

- $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2) = (x^2 - y^2) - i(2xy)$

$u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = -2xy$

C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x \implies 2x = -2x \iff x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \implies -2y = 2y \iff y = 0$$

- fce f je tedy diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$ a platí $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 + 0 = 0$

c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ✓$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ ✓$$

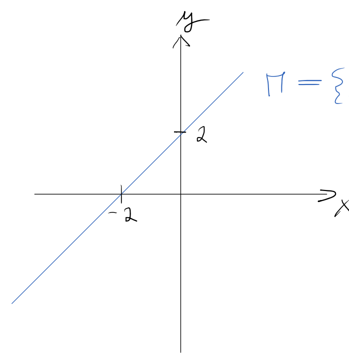
· $f(z)=\frac{1}{z}$ je HOLOMORFNÍ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ A PLATÍ, ŽE

$$f'(z)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,i=-\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2}=-\frac{1}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{z^2},\ z\neq 0$$

ZADÁNÍ: Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ je funkce $f(z)=x^2+\alpha x+\alpha y+i(y^2-5y+\beta x)$ diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+2$? Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(z)$ na této přímce.

ŘEŠENÍ:

$$f(z)=x^2+\alpha x+\alpha y+i(y^2-5y+\beta x)$$
$$\operatorname{Re} f=u(x,y)=x^2+\alpha x+\alpha y$$
$$\operatorname{Im} f=v(x,y)=y^2-5y+\beta x$$



$\Pi=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+2\}$

C-R PODMÍNKY:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad(1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(2)$$

$$(1):\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x+\alpha=2y-5=\frac{\partial v}{\partial y}\ \underset{z\in\Pi:\ y=x+2}{\Longleftrightarrow}\ 2x+\alpha=2x+4-5\iff\boxed{\alpha=-1}$$

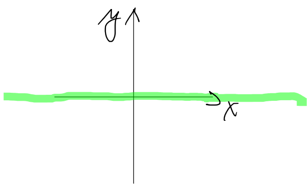
$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\alpha=-\beta=-\frac{\partial v}{\partial x}\iff\boxed{\beta=1}$$

Tedy $f(z)$ je diferencovatelná na $\Pi=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+2\}$ právě tehdy, když $\alpha=-1,\ \beta=1$.

· Pro $z\in\Pi$ a $\alpha=-1,\ \beta=1$ platí $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x-1+i=2\operatorname{Re} z-1+i$

ZADÁNÍ: Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce $f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2)$ diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z = 0$. Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(z)$ na této přímce.

ŘEŠENÍ:



Chceme diferencovatelnost na $\operatorname{Im} z = 0$

$$u(x,y) = x(x^2 - \alpha y^2) = x^3 - \alpha x y^2$$
$$v(x,y) = y(\beta x^2 - y^2) = \beta x^2 y - y^3$$

C-R:
(1) $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$
&
(2) $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - \alpha y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2\alpha x y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\beta x y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta x^2 - 3y^2$$

(1): $3x^2 - \alpha y^2 = \beta x^2 - 3y^2 \iff (3-\beta)x^2 = (\alpha - 3)y^2 \overset{y=0}{\iff} (3-\beta)x^2 = 0 \iff \boxed{\beta = 3} \vee x = 0$

(2): $2\alpha x y = 2\beta x y \overset{y=0}{\iff} 0 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\alpha \in \mathbb{R}, \ \beta = 3}$ Pro tyto hodnoty parametrů je funkce diferencovatelná na přímce $y=0$.

· Pro tyto hodnoty parametrů platí pro z na přímce $y=0$ platí $f'(z) = 3x^2 - \alpha y^2 + 6xyi \Big|_{y=0} = 3x^2 = 3z^2$
↑ protože jsme na přímce $y=0$

Připomenutí: Řekneme, že funkce f: ℂ → ℂ je **celistvá**, jestliže je diferencovatelná v každém bodě ℂ.

ZADÁNÍ NALEZNĚTE VŠECHNY HODNOTY PARAMETRŮ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ TAK, ABY $f(z) = \frac{3}{2}x^2 - i\alpha x y + \beta y^2$ BYLA CELISTVÁ FUNKCE

ŘEŠENÍ:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + \beta y^2$$
$$v(x,y) = -\alpha x y$$

Chceme $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$
&
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha x \qquad 3x = -\alpha x \iff (x = 0 \vee \alpha = -3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\beta y \qquad 2\beta y = \alpha y \iff (y = 0 \ \vee\ 2\beta - \alpha = 0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\alpha y$$

- VIDÍME, ŽE C–R PODMÍNKY JSOU SPLNĚNY $\forall z \in \mathbb{C} \iff (\alpha = -3 \ \&\ 2\beta - \alpha = 0)$
- Tedy $\alpha = -3$, $\beta = -\frac{3}{2}$.

- Pro $\alpha = -3$, $\beta = -\frac{3}{2}$ je f celistvá a platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 3x + 3y\,i = 3z$$

Připomenutí: Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast. Řekneme, že funkce $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je **harmonická** na Ω, jestliže má na Ω spojité druhé parciální derivace a platí, že $\Delta u = 0$ na Ω, tj. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ na Ω.

Je-li funkce f holomorfní na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, potom reálná i imaginární část f je harmonická na Ω.

Nechť u je harmonická funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je **harmonicky sdružená** k u na Ω, jestliže funkce u+iv je holomorfní na Ω.

Zadání: Nechť je dána funkce $u(x,y) = \sinh x \cdot \sin y$.

a) Ukažte, že fce u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.

b) NALEZNĚTE FUNKCI v, $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby fce $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ byla celistvá a $f(i\pi) = -i$.

ŘEŠENÍ:

a)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh x \cdot \sin y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sinh x \cdot \cos y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sinh x \cdot \sin y \qquad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\sinh x \cdot \sin y$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sinh x \cdot \sin y - \sinh x \cdot \sin y = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

u je tedy harmonická na $\mathbb{R}^2$

b) Hledáme v tak, aby $u + iv$ byla celistvá, tj. holomorfní na $\mathbb{C}$

C-R (I): $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cosh x \cdot \sin y \xRightarrow{\int dy} v(x,y) = -\cosh x \cdot \cos y + C(x)$

C-R (II): $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\sinh x \cdot \cos y$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sinh x \cos y + C'(x) \quad \Longrightarrow C'(x) = 0 \xRightarrow{\int dx} C(x) = K \in \mathbb{R}.$$

$\Longrightarrow v(x,y) = -\cosh x \cdot \cos y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

- Chceme určit $K \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(i\pi) = u(0,\pi) + i\,v(0,\pi) = -i$

$$i\,v(0,\pi) = -i$$
$$v(0,\pi) = -1$$
$$-\cosh(0)\cos\pi + K = -1$$
$$1 + K = -1$$
$$K = -2$$

$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$

HLEDANÁ FCE v JE TEDY $v(x,y) = -\cosh x \cdot \cos y - 2$

ZADÁNÍ: NALEZNĚTE VŠECHNY CELISTVÉ FUNKCE f TAKOVÉ, ŽE $\operatorname{Re} f = u$, kde $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

ŘEŠENÍ: · CHCEME NAJÍT VŠECHNY FUNKCE $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že $f = u + iv$ je CELISTVÁ FUNKCE.

· ABY f BYLA CELISTVÁ, MUSÍ NA $\mathbb{C}$ SPLŇOVAT C-R PODMÍNKY.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2$$

$$\xrightarrow{\left[\int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy\right]} v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C(x), \text{ kde } C(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

· POTŘEBUJEME URČIT, ČEMU SE MŮŽE ROVNAT $C(x)$

· K TOMU POUŽIJEME DRUHOU C-R PODMÍNKU:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + C'(x) \implies C'(x) = 0$$

· $C'(x) = 0 \implies C(x) = K \in \mathbb{R}$ (konstanta)

· Tedy $v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je libovolná KONSTANTA

· VŠECHNY CELISTVÉ FUNKCE f S $\operatorname{Re} f = u$ tedy jsou

$$f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3x^2y + y^3 + K),$$ KDE $K \in \mathbb{R}$ je libovolná KONSTANTA

[VŠIMNĚTE SI, ŽE $(x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

Tedy $f(z) = 2z - z^3 + iK$, $K \in \mathbb{R}$

ZADÁNÍ: Mějme funkci $u(x,y) = e^y \cos x - x$.

a) Nalezněte všechny funkce $v(x,y)$ tak, aby funkce $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ byla celistvá.

b) —||— a platilo $f(0) = 1$.

ŘEŠENÍ: Na $\mathbb{C}$ musí platit C-R podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad (1)$$
&
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad (2)$$

(1): $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x - 1$

$$\xrightarrow{\int dy} v(x,y) = \int -e^y \sin x - 1\,dy = -e^y \sin x - y + C(x) \quad (*)$$

$$(2):\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^y\cos x$$

$$(*):\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^y\cos x + C'(x)$$

$$\Longrightarrow -e^y\cos x = -e^y\cos x + C'(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$C'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow C(x) = K \in \mathbb{R}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} v(x,y) = -e^y\sin x - y + K$$

a) Všechny takové funkce $v(x,y)$ jsou tvaru $v(x,y) = -e^y\sin x - y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$

Jest $f(z) = e^y\cos x - x + i(-e^y\sin x - y + K)$.

b) Má platit navíc $f(0) = 1$, tedy

$$1 = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = 1 - 0 + i(0 - 0 + K) = 1 + iK$$

$$\Longleftrightarrow iK = 0 \Longleftrightarrow K = 0$$

Tedy $v(x,y) = -e^y\sin x - y$

ZADÁNÍ: NECHŤ JE DÁNA FUNKCE $u(x,y) = e^y\sin(\alpha x) + 3xy + x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ JE PARAMETR

b) PRO KLADNÉ HODNOTY PARAMETRU α ≥ 0 NALEZNĚTE VŠECHNY HARMONICKY SDRUŽENÉ FUNKCE v K FUNKCI u NA $\mathbb{R}^2$.

c) PRO KLADNÉ HODNOTY PARAMETRU α ≥ 0 NALEZNĚTE VŠECHNY HARMONICKY SDRUŽENÉ FUNKCE v K FUNKCI u NA $\mathbb{R}^2$ takové, že $f(-i+\frac{\pi}{2}) = e^{-1} - \pi + \frac{1}{2}i$, kde $f = u + iv$.

ŘEŠENÍ:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^y\cos(\alpha x) + 3y + 1$ $\qquad$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^y\sin(\alpha x) + 3x$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha^2 e^y\sin(\alpha x)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y\sin(\alpha x)$

$$\Delta u = -\alpha^2 e^y\sin(\alpha x) + e^y\sin(\alpha x) = 0 \Longleftrightarrow e^y\sin(\alpha x)\left[1-\alpha^2\right] = 0$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\ \exists k\in\mathbb{Z}: \alpha x = k\pi$ $\vee$ $1-\alpha^2=0$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha=0$ $\vee$ $\alpha=\pm 1$

[$k=\frac{\alpha x}{\pi}$ je celé číslo $\forall x\in\mathbb{R}$ právě když $\alpha=0$]

$\Longrightarrow$ u je harmonická na $\mathbb{R}^2$ pro $\alpha\in\{-1,0,1\}$

b) JEDINÁ KLADNÁ HODNOTA Z a) JE $\alpha=1$. NECHŤ TEDY $\alpha=1$.

$$u(x,y)=e^{y}\sin x+3xy+x$$

- HLEDÁME VŠECHNY FUNKCE v, ABY $f=u+iv$ BYLA HOLOMORFNÍ NA $\mathbb{C}$.

C-R (i): $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^{y}\cos x+3y+1 \xrightarrow{\int dy} v(x,y)=e^{y}\cos x+\frac{3}{2}y^2+y+C(x)$

C-R (ii): $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{y}\sin x-3x$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{y}\sin x+C'(x)$ $\Longrightarrow C'(x)=-3x \xrightarrow{\int dx} -\frac{3}{2}x^2+K$, kde $K\in\mathbb{R}$

- VŠECHNY HLEDANÉ FUNKCE v JSOU TEDY $v(x,y)=e^{y}\cos x+\frac{3}{2}y^2+y-\frac{3}{2}x^2+K$, kde $K\in\mathbb{R}$.

c) Z b) víme, že hledaná funkce v je tvaru $v(x,y)=e^{y}\cos x+\frac{3}{2}y^2+y-\frac{3}{2}x^2+K$ pro nějaké $K\in\mathbb{R}$.

$$e^{-1}-\pi+\frac{1}{2}i=f\left(-i+\frac{\pi}{2}\right)=u\left(\frac{\pi}{2},-1\right)+i\,v\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$$

$$v\left(\frac{\pi}{2},-1\right)=\frac{1}{2}$$

$$e^{y}\cos x+\frac{3}{2}y^2+y-\frac{3}{2}x^2+K\Big|_{x=\frac{\pi}{2},\ y=-1}=\frac{1}{2} \qquad 0+\frac{3}{2}-1-\frac{3}{2}\frac{\pi^2}{4}+K=\frac{1}{2}$$

$$K=\frac{3\pi^2}{8}$$

$\Longrightarrow$ HLEDANÁ FUNKCE v JE TEDY $v(x,y)=e^{y}\cos x+\frac{3}{2}y^2+y-\frac{3}{2}x^2+\frac{3\pi^2}{8}$.

ZADÁNÍ: Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$ tak, aby funkce $u(x,y)=x^n-y^n+e^{\alpha y}\sin(4x)-2y$ byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

ŘEŠENÍ:

$\underline{n \in \{0,1\}:}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^n) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^n) = 0$

Tedy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -16\, e^{\alpha y} \sin(4x) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha^2 e^{\alpha y} \sin(4x)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \ ?$$

$$e^{\alpha y} \sin(4x) \underbrace{\left[\alpha^2 - 16\right]}_{\substack{\alpha^2 = 16 \\ \alpha = \pm 4}} \equiv 0 \ ?$$

$\underline{n \geq 2:}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^n) = n(n-1)x^{n-2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^n) = n(n-1)y^{n-2}$$

Tedy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2} - 16\, e^{\alpha y} \sin(4x) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)y^{n-2} + \alpha^2 e^{\alpha y} \sin(4x)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \ ?$$

$n-2=0 \Leftrightarrow n=2$

$$n(n-1)\left[x^{n-2} - y^{n-2}\right] + e^{\alpha y} \sin(4x) \underbrace{\left[\alpha^2 - 16\right]}_{\alpha = \pm 4} \equiv 0 \ ?$$

Celkem tedy $n \in \{0,1,2\}$ a $\alpha = \pm 4$.

3 Exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus

Základní vlastnosti exponenciální funkce

úterý 6. října 2020 14:05

Připomenutí: Komplexní exponenciála e^z, $\exp(z)$ je definována jako $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x + iy$. Je to celistvá funkce a pro její derivaci platí stejný vztah, který známe z reálné analýzy.

a) $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $e^{z+w} = e^z e^w$

PIŠTE $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$

$z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Jedy $e^{z+w} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOUČTOVÉ VZORCE}}}{=} e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1))$

NA DRUHOU STRANU

$e^z e^w = \left[e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\right] \cdot \left[e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)\right]$

$= (e^{x_1} \cdot e^{x_2})(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) =$

VIZ VÝPOČET NAHOŘE

$e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) = e^{z+w}$ $\boxtimes$

b) $|e^z| = e^x \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$

$|e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = |e^x||\cos y + i\sin y| = |e^x| = e^x$

$\boxtimes$

c) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$e^z \neq 0 \iff |e^z| \neq 0 \overset{b)}{\iff} e^x \neq 0$

Ovšem $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxtimes$

d) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

CHCEME UKÁZAT ŽE $e^z \cdot e^{-z} = 1$.

$e^z e^{-z} \overset{a)}{=} e^{z-z} = e^0 = 1$ $\boxtimes$

e) $(e^z)^n = e^{nz}$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$!! Pozor, pro neceločíselné exponenty obecně neplatí !!

$$(e^z)^n = \left[e^x(\cos y + i\sin y)\right]^n = e^{nx}(\cos y + i\sin y)^n \underset{\text{Moivre}}{=} e^{nx}(\cos ny + i\sin ny) = e^{nz}$$

[$nz = nx + iny$]

$\boxtimes$

f) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$$

$$e^{\bar{z}} \underset{[\bar{z} = x - iy]}{=} e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos y - i\sin y)$$

$\boxtimes$

g) $e^z = e^w$ tehdy a jen tehdy když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

$z = x_1 + iy_1$ $\qquad w = x_2 + iy_2$

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$\underset{[\text{rovnost v gon. tvaru}]}{\Leftrightarrow} e^{x_1} = e^{x_2} \;\&\; y_1 = y_2 + 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \underset{[\text{exp. JE PROSTÁ NA } \mathbb{R}]}{=} x_2 \;\&\; y_1 = y_2 + 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = w + 2k\pi i \text{ PRO NĚJAKÉ } k \in \mathbb{Z} \quad \boxtimes$$

POZOR!

Všimněte si, že zatímco exponenciála v reálném oboru je prostá funkce, tak v komplexním oboru je to PERIODICKÁ funkce s periodou $2\pi i$ (speciálně tedy není prostá!).

Pomocí exponenciální funkce definujeme **další elementární funkce**.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

Všechny výše uvedené funkce jsou celistvé a pro jejich derivace platí vztahy, které známe z reálné analýzy.

Jelikož exponenciální funkce v komplexním oboru není prostá funkce, je otázka logaritmu v komplexním oboru výrazně komplikovanější než v reálném oboru. **Hlavní hodnota logaritmu** je funkce definovaná jako

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hlavní hodnota logaritmu rozšiřuje logaritmus, který známe z reálné analýzy, a je to holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

ZADÁNÍ: Jaká je velikost a v jakém kvadrantu leží komplexní číslo $\frac{e^{(1+2i)^2 - \frac{199}{100}\pi i}}{e^{4i}}$?

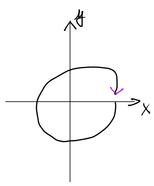
ŘEŠENÍ:

$$\frac{e^{(1+2i)^2 - \frac{199}{100}\pi i}}{e^{4i}} = e^{1+4i-4-\frac{199}{100}\pi i}\, e^{-4i} = e^{-3+4i-\frac{199}{100}\pi i-4i} = e^{-3-\frac{199}{100}\pi i}$$

$$\left|e^{-3-\frac{199}{100}\pi i}\right| = e^{-3}$$

[$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$]

Protože $-2\pi < -\frac{199}{100}\pi < -\frac{3\pi}{2}$, $e^{-3-\frac{199}{100}\pi i}$ leží v 1. kvadrantu.



$\left|-\frac{199}{100}\pi\right| = \frac{199}{100}\pi$ a záporný úhel

[alternativně: $-\frac{199}{100}\pi \xrightarrow{+2\pi} \frac{1}{100}\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$]

ZADÁNÍ: Určete reálnou a imaginární část čísla $\frac{(e^{-i\pi}+1+i)^{50}}{-1+2i}$.

ŘEŠENÍ:

$$\frac{(e^{-i\pi}+1+i)^{50}}{-1+2i} = \frac{i^{50}}{-1+2i} = \frac{i^2}{-1+2i} = -\frac{1}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

[$e^{-i\pi} = -1$]

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(e^{-i\pi}+1+i)^{50}}{-1+2i}\right) = \frac{1}{5}$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{(e^{-i\pi}+1+i)^{50}}{-1+2i}\right) = \frac{2}{5}$$

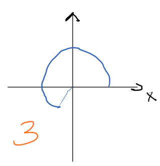
ZADÁNÍ: Jaká je velikost a v jakém kvadrantu leží komplexní číslo $\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i}$?
Dále určete jeho reálnou a imaginární část.

ŘEŠENÍ:

$$\Big[\; e^{z} \underset{z=x+iy}{=} \overset{|e^z|}{\boxed{e^{x}}}(\cos \underset{\mathrm{Arg}(e^z)}{y} + i\sin y) \;\Big]$$

$$\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i} = e^{1+8i}\, e^{4-8i-4+\frac{7\pi}{6}i} = e^{1+\frac{7\pi}{6}i}$$

- $\left|\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i}\right| = \left|e^{1+\frac{7\pi}{6}i}\right| = e^1 = e$
- $\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i} = e^{1+\frac{7\pi}{6}i}$ leží v 3. kvadrantu



$\frac{7\pi}{6} > \pi$

$\frac{7\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$

- $\mathrm{Re}\left(\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{1+\frac{7\pi}{6}i}\right) = e\cos\frac{7\pi}{6}$

  $\mathrm{Im}\left(\overline{e^{1-8i}}\; e^{(2-2i)^2+\frac{7\pi}{6}i}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{1+\frac{7\pi}{6}i}\right) = e\sin\frac{7\pi}{6}$

$$\Big[\; e^{1+\frac{7\pi}{6}i} = e^1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \Big]$$

ZADÁNÍ: Vyjádřete funkci $\sin(-2iz^2)$ pomocí exponenciální funkce.

ŘEŠENÍ: $\sin(-2iz^2) = \dfrac{e^{i(-2iz^2)} - e^{-i(-2iz^2)}}{2i} = \boxed{\dfrac{e^{2z^2} - e^{-2z^2}}{2i}}$.

ZADÁNÍ: Vyjádřete číslo $99\cos 45 + 99 i\sin 45$ pomocí exponenciální funkce.

ŘEŠENÍ: $e^{z} \underset{z=x+iy}{=} e^{x}(\cos y + i\sin y)$

$$99\cos 45 + 99i\sin 45 = 99(\cos 45 + i\sin 45) = e^{\ln 99}(\cos 45 + i\sin 45) = e^{\ln 99 + 45i}.$$

ZADÁNÍ: Určete reálnou a imaginární část čísla $e^{(2-3i)^2}$.

ŘEŠENÍ: $e^{(2-3i)^2} = e^{4-12i-9} = e^{-5-12i} = e^{-5}(\cos(-12) + i\sin(-12))$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x+iy$

$\operatorname{Re} e^{(2-3i)^2} = e^{-5}\cos(-12)$

$\operatorname{Im} e^{(2-3i)^2} = e^{-5}\sin(-12)$

ZADÁNÍ: Nalezněte algebraický tvar čísla:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)$

b) $\cos(2-4i)$

c) $\ln(1-i)$

d) $\ln(-1-\sqrt{3}i)$

e) $\ln(1-i) + \cos(2-4i)$

f) $\sin((1+i)^2) + \ln\left(-\frac{18}{3-3i}\right)$

ŘEŠENÍ:

a) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$z = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$

$iz = -\ln 2 + i\frac{\pi}{2}$

$e^{iz} = e^{-\ln 2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{i}{2}$

$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{2}{i} = \frac{-2i}{1} = -2i$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\log 2\right) = \frac{\frac{i}{2} + 2i}{2i} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

b) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$z = 2-4i$

$iz = 4+2i$

$e^{iz} = e^4(\cos 2 + i\sin 2)$

$e^{-iz} = \frac{1}{e^4(\cos 2 + i\sin 2)} = \frac{e^4(\cos 2 - i\sin 2)}{e^8} = e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)$

$$\cos(2-4i) = \frac{(e^4+e^{-4})\cos 2 + i(e^4-e^{-4})\sin 2}{2} = \cosh 4 \cdot \cos 2 + i \sinh 4 \sin 2$$

$$\left[\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}\right]$$

---

c) $\ln(1-i) = \ln(|1-i|) + i\arg(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} i$

---

d) $\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad z \neq 0$

$z = -1-\sqrt{3}\, i$

$|-1-\sqrt{3}\, i| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\arg(-1-\sqrt{3}\, i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. kvadrant}}}{=} -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \ln(-1-\sqrt{3}\, i) = \ln 2 - \frac{2\pi}{3} i$$

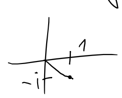
---

e)

- $\ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} i \qquad (*)$

  $|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

  $\arg(1-i) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$



- $$\cos(2-4i) = \frac{e^4(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)}{2} = \frac{e^4+e^{-4}}{2}\cos 2 + i\frac{e^4-e^{-4}}{2}\sin 2$$

  $\left[z = 2-4i\right.$

  $iz = 4+2i \qquad e^z \underset{x+iy}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$

  $e^{iz} = e^4(\cos 2 + i\sin 2)$

  $e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{e^4(\cos 2 + i\sin 2)} = \frac{e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)}{1} = e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2) \left.\right]$

  $$= (\cosh 4)(\cos 2) + i(\sinh 4)(\sin 2) \qquad (**)$$

$\xRightarrow{(*),\,(**)}$

$$\ln(1-i) + \cos(2-4i) = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} i + \frac{e^4+e^{-4}}{2}\cos 2 + i\frac{e^4-e^{-4}}{2}\sin 2 =$$

$$\ln\sqrt{2} + \frac{e^4+e^{-4}}{2}\cos 2 + i\left(\frac{e^4-e^{-4}}{2}\sin 2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left[= \ln\sqrt{2} + \cosh 4 \cos 2 + i\left(\sinh 4 \sin 2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

f) $\sin\left((1+i)^2\right) + \ln\left(-\frac{18}{3-3i}\right) = \dots = \frac{(e^2 - e^{-2})i}{2} + \ln(3\sqrt{2}) - \frac{3\pi}{4}i = \ln(3\sqrt{2}) + \left(\frac{(e^2 - e^{-2})}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)i$

$\left[\cdot \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]$

$\sin\left((1+i)^2\right) = \sin(2i) = \frac{e^{i2i} - e^{-i2i}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = \frac{-2(e^{-2} - e^{2})i}{4}$

$\left[(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i\right]$

$= \frac{(e^2 - e^{-2})i}{2}$

$\cdot \ln z = \ln|z| + i \arg z, \; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\ln\left(-\frac{18}{3-3i}\right) = \ln(-3-3i) = \ln(3\sqrt{2}) + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \ln(3\sqrt{2}) - \frac{3\pi}{4}i$

$\left[-\frac{18}{3-3i} = -\frac{18}{3-3i} \cdot \frac{3+3i}{3+3i} = -\frac{18(3+3i)}{9+9} = -3-3i\right]$

$\cdot \left|-3-3i\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\cdot \arg(-3-3i) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$\left[-\pi + \frac{\pi}{4}\right]$

ZADÁNÍ: V komplexním oboru řešte následující rovnice:

a) $e^{2iz}-5=0$

b) $e^{2z}+e^{z}+1=0$

c) $\cos z=4$

d) $\sin z=\cos z$

e) $\ln(z^2-1)=i\frac{\pi}{2}$

ŘEŠENÍ:

a) $e^{2iz}=5$ Exponenciála je v komplexním oboru $2\pi i$ periodická!

$e^{2iz}=e^{\ln 5} \Leftrightarrow 2iz=\ln 5+2k\pi i$ PRO $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z=\frac{\ln 5}{2i}+k\pi=-\frac{\ln 5}{2}i+k\pi$ PRO $k\in\mathbb{Z}$

ROVNICE MÁ TEDY NEKONEČNĚ MNOHO RŮZNÝCH ŘEŠENÍ $z\in\{-\frac{\ln 5}{2}i+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

b) $e^{2z}+e^{z}+1=0$

$(e^{z})^2+e^{z}+1=0$

SUBSTITUCE: $e^{z}=w$

$w^2+w+1=0$

$\left(w+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$

$\left(w+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow w+\frac{1}{2}=\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow w=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

DESUBSTITUCE:

$e^{z}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad e^{\ln\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$e^{\ln z}=z$ pro každé $z\neq 0$

Exponenciála je v komplexním oboru $2\pi i$ periodická!

$\Leftrightarrow$

$z=\ln\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi i$ pro nějaké $k\in\mathbb{Z}$

$\cdot\ \ln\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\frac{2\pi}{3}i$

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$

$\left|-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \qquad \ln 1=0$

$$\arg\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2. kvadrant}}}{=} \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\arg\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dots=-\frac{2\pi}{3}$$

$\Longrightarrow$ Všechna řešení rovnice jsou tvaru $z_k=\pm\frac{2\pi}{3}i+2k\pi i=i\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$ pro $k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos z=4$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=4$$

$$e^{iz}+e^{-iz}=8$$

$\left[e^{iz}\neq 0\ !\right]$

$\Longleftrightarrow$

$$e^{2iz}+1=8e^{iz}$$

$$\left(e^{iz}\right)^2-8e^{iz}+1=0$$

- SUBSTITUCE $w=e^{iz}$

$$w^2-8w+1=0$$

$\Longleftrightarrow$

$$w=4\pm\sqrt{15}$$

$\left[w^2-8w+1=0\right.$

$\left.(w-4)^2-16+1=0\right]$

- DESUBSTITUCE

$$e^{iz}=4\pm\sqrt{15}=e^{\ln(4\pm\sqrt{15})}$$

$e^{\ln z}=z$ pro každé $z\neq 0$

Exponenciála je v komplexním oboru $2\pi i$ periodická!

$\Longleftrightarrow$

$$iz=\ln(4\pm\sqrt{15})+2k\pi i \quad \text{PRO NĚJAKÉ } k\in\mathbb{Z}$$

$$z=\frac{\ln(4\pm\sqrt{15})}{i}+2k\pi$$

$$z=-i\ln(4\pm\sqrt{15})+2k\pi$$

ROVNICE MÁ TEDY NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ $z\in\left\{-i\ln(4+\sqrt{15})+2k\pi,\ -i\ln(4-\sqrt{15})+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $\sin z = \cos z$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = i e^{iz} + i e^{-iz}$$

$\left[e^{iz} \neq 0 \right]$

$\Longleftrightarrow$

$$e^{2iz} - 1 = i e^{2iz} + i$$

$$(1-i) e^{2iz} = 1 + i$$

$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{\ln i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$e^{\ln z} = z$ pro každé $z \neq 0$

$\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

Exponenciála je v komplexním oboru $2\pi i$ periodická!

$\Longleftrightarrow$

$2iz = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow$

$z = \frac{\pi}{4} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$

Takže rovnice $\cos z = \sin z$ má nekonečně mnoho řešení tvaru $z_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Rovnice $\cos z = \sin z$ má speciálně pouze reálná řešení.

e) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$

SUBSTITUCE: $w = z^2 - 1$

$$\ln w = i\frac{\pi}{2}$$

$$\ln(|w|) + i \arg w = i\frac{\pi}{2}$$

$\Longleftrightarrow$

$\ln(|w|) = 0$ & $\arg w = \frac{\pi}{2}$

$\Longleftrightarrow$ $|w| = 1$ & $\arg w = \frac{\pi}{2}$

$\Longleftrightarrow$ $w = i$

DESUBSTITUCE:

$\Longrightarrow$ $z^2 - 1 = i$ $\qquad z^2 = 1 + i$

$$|z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) \iff |z| = \sqrt[4]{2} \;\&\; 2\varphi = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ pro } k\in\mathbb{Z}$$

$$\varphi = \tfrac{\pi}{8} + k\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{8} + i\sin\tfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{9\pi}{8} + i\sin\tfrac{9\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{8}} \end{aligned}}$$

Jo lze ale KOMPAKTNĚ PSÁT JAKO $z = \pm\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$, neboť $\forall w\in\mathbb{C}: e^{w+\pi i} = -e^{w}$, COŽ SE SNADNO OVĚŘÍ Z DEFINICE exp A TAKÉ JE TO GEOMETRICKY JASNÉ, NEBOŤ PŘIČÍTÁME π DO IMAGINÁRNÍ SLOŽKY EXPONENTU

4 Křivkový integrál (bez reziduové věty)

Křivkový integrál (výpočet z definice)

úterý 13. října 2020 13:28

Pro křivku $C \subseteq \mathbb{C}$ a (nějakou) její parametrizaci $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ je $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Všimněte si, že na pravé straně se vyskytuje **integrace/derivace komplexní funkce reálné proměnné**. Formálně se definuje $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b Re(f(\varphi(t))\varphi'(t))\,dt + i\int_a^b Im(f(\varphi(t))\varphi'(t))\,dt$ a podobně derivace.

ZADÁNÍ: Je dána funkce $f(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(t)$ a $\int_0^\pi f(t)\,dt$.

ŘEŠENÍ: Očekáváme $f'(t) = ie^{it}$

Skutečně, neboť $\mathrm{Re}(e^{it}) = \cos t$ a $\mathrm{Im}(e^{it}) = \sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, tak

$$f'(t) = (\mathrm{Re} f)'(t) + i(\mathrm{Im} f)'(t) = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = ie^{it}$$

Dále $\int_0^\pi e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^\pi = \frac{e^{i\pi}}{i} - \frac{e^{i\cdot 0}}{i} = -\frac{1}{i} - \frac{1}{i} = -\frac{2}{i} = 2i$

ZADÁNÍ: Z definice spočtěte $\int_C 3\,\mathrm{Im}\,z - 2\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1+i$ a koncovým i

ŘEŠENÍ:

PARAMETRIZACE C:

TŘEBA $\varphi(t) = -t + 1 + i$, $t \in [0,1]$

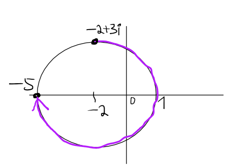
$\varphi'(t) = -1$

Obecně, **parametrizace úsečky z bodu z_0 do bodu z_1** je (například) $\varphi(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, kde $t \in [0,1]$, přičemž $\varphi'(t) = z_1 - z_0$.

$$\int_C 3\,\mathrm{Im}\,z - 2\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^1 [3\,\mathrm{Im}(\varphi(t)) - 2\,\mathrm{Re}(\varphi(t))]\varphi'(t)\,dt = -\int_0^1 [3 - 2(1-t)]\,dt = -\int_0^1 1 + 2t\,dt = -(1 + [t^2]_0^1) = -2$$

ZADÁNÍ: Z definice spočtěte $\int_C \frac{\overline{z+2}}{|z+2|}(z+2)^2\,dz$, kde C je záporně orientovaná část kružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| = 3\}$ s počátečním bodem $-2+3i$ a koncovým -5.

ŘEŠENÍ:



$|z+2| = 3$

$|z-(-2)| = 3$

$z_0 = -2$

$R = 3$

Kladně orientovaná parametrizace kružnice se středem v z_0 a poloměru $R > 0$ je (například) $\varphi(t) = z_0 + Re^{it}$, kde $t \in [0, 2\pi]$, přičemž $\varphi'(t) = iRe^{it}$.
Volbou vhodného rozpětí úhlů lze parametrizovat části kružnice.

$\varphi(t) = -2 + 3e^{it}$, $t \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$ Opačná orientace

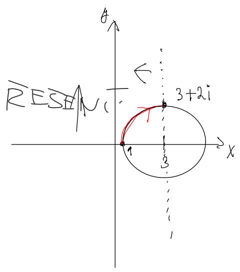
$\varphi'(t) = 3ie^{it}$

$$\int_C \frac{\overline{z+2}}{|z+2|}(z+2)^2\,dz = -\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{3e^{it}}}{3}(3e^{it})^2 \cdot 3i\,e^{it}\,dt = -i\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3e^{-it} \cdot 9e^{2it} \cdot e^{it}\,dt$$

$$= -27i \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{2is}\, ds = -27i \left[\frac{e^{2is}}{2i}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{27}{2}\Big(\underbrace{e^{\pi i}}_{-1} - \underbrace{e^{-2\pi i}}_{1}\Big) = \boxed{27}$$

ZADÁNÍ: Z definice spočtěte $\int_C |z-3|(z-3)\,dz$, kde C je čtvrtkružnice $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-3|=2,\ \mathrm{Re}\,z\le 3,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$ s počátečním bodem 1 a koncovým $3+2i$.

ŘEŠENÍ:



C

$\varphi(s) = 3+2e^{is}$, $s\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

opačná orientace!

$\varphi'(s) = 2ie^{is}$

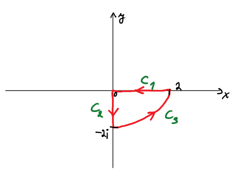
$$\int_C \underbrace{|z-3|}_{=2}(z-3)\,dz = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\left(3+2e^{is}-3\right)2ie^{is}\,ds = -4i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2e^{is}e^{is}\,ds = -8i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2is}\,ds$$

$$= -8i\left[\frac{e^{2is}}{2i}\right]_{s=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -4\left(e^{2i\pi} - e^{i\pi}\right) = -4(1-(-1)) = -8$$

ZADÁNÍ: Z definice spočtěte $\int_C \bar z\, \mathrm{Re}\,z\,dz$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny

$M=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,z\ge 0,\ \mathrm{Im}\,z\le 0,\ |z|\le 2\}$

ŘEŠENÍ



$C = C_1+C_2+C_3$ [**Orientace hranice** oblasti je **kladná**, jestliže máme oblast po naší levé ruce, když probíháme hranici ve směru dané orientace.]

C_1 ... Úsečka od 2 do 0

C_2 ... Úsečka od 0 do -2i

C_3 ... Část (přesněji čtvrtina) kružnice se středem v 0 a poloměru 2, která jde z bodu -2i do bodu 2.

$$\int_C \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_{C_1} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz + \int_{C_2} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz + \int_{C_3} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz \overset{\text{viz dole}}{=} -\frac{8}{3}+0+8i = -\frac{8}{3}+8i$$

$\int_{C_1} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$:

$\varphi_1(s) = 2-2s = 2(1-s)$, $s\in[0,1]$ souhlasně orientovaná

$\varphi_1'(s) = -2$

$$\int_{C_1} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^1 \overline{\varphi_1(s)}\ \mathrm{Re}\,\varphi_1(s)\cdot\varphi_1'(s)\,ds = -2\int_0^1 2(1-s)\,2(1-s)\,ds =$$

$$= -8\int_0^1 (1-s)^2\,ds = -8\left[\frac{(1-s)^3}{-3}\right]_0^1 = -8\left(0-\frac{1}{-3}\right) = -\frac{8}{3}$$

$\int_{C_2} \bar z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$:

$\varphi_2(s) = -2is$, $s\in[0,1]$

$\varphi_2'(s) = -2i$ souhlasně orientovaná

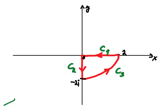
C_2 ... Úsečka od 0 do -2i

$$\int_{C_2} \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^1 \overline{\varphi_2(t)}\,\mathrm{Re}\,\varphi_2(t)\cdot\varphi_2'(t)\,dt = -2i\int_0^1 (+2it)\cdot 0\,dt = 0$$

$$\int_{C_3} \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z\,dz:$$

$$\varphi_3(t) = 2e^{it},\ t\in\left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

souhlasně orientovaná



C_3 -. Část (přesněji čtvrtina) kružnice se středem v 0 a poloměru 2, která jde z bodu -2i do bodu 2.

$$\varphi_3'(t) = 2e^{it}i = 2ie^{it}$$

$$\int_{C_3} \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \overline{\varphi_3(t)}\,\mathrm{Re}\,\varphi_3(t)\cdot\varphi_3'(t)\,dt = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(2e^{-it}\right)\left(2\cos t\right)\left(2ie^{it}\right)dt =$$

$$\left[\overline{\varphi_3(t)} = \overline{2e^{it}} = 2\overline{e^{it}} = 2e^{\overline{it}} = 2e^{-it}\right]$$

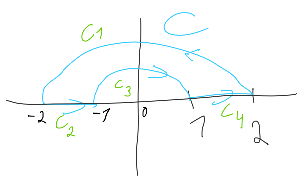
$$\left[\mathrm{Re}\,\varphi_3(t) = \mathrm{Re}(2e^{it}) = \mathrm{Re}(2(\cos t + i\sin t)) = 2\cos t\right]$$

$$= 8i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \underbrace{e^{-it+it}}_{e^0=1}\cos t\,dt = 8i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos t\,dt = 8i\left[\sin t\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= 8i\left(0-\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right) = 8i\left(0-(-1)\right) = 8i$$

ZADÁNÍ: Z definice spočtěte $\int_C \frac{z+1}{z}\,dz$, kde C je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2.

ŘEŠENÍ



$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, kde

C_1 -. polokružnice o středu v 0, poloměru 2, z bodu 2 do -2

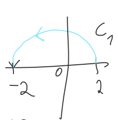
C_2 — úsečka od -2 do -1

C_3 -. polokružnice o středu v 0, poloměru 1 z bodu -1 do 1

C_4 -. úsečka od 1 do 2

$$\int_C \frac{z+1}{z}\,dz = \int_{C_1}\frac{z+1}{z}\,dz + \int_{C_2}\frac{z+1}{z}\,dz + \int_{C_3}\frac{z+1}{z}\,dz + \int_{C_4}\frac{z+1}{z}\,dz$$

$$\int_{C_1}\frac{z+1}{z}\,dz:$$

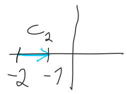


$\varphi_1(t) = 2e^{it},\ t\in[0,\pi]$

$\varphi_1'(t) = 2ie^{it}$

$$\int_{C_1}\frac{z+1}{z}\,dz = \int_0^{\pi}\frac{2e^{it}+1}{2e^{it}}\,2ie^{it} = i\int_0^{\pi} 2e^{it}+1\,dt = i\left[\frac{2e^{it}}{i}+t\right]_0^{\pi} = i\left[-\frac{2}{i}+\pi-\frac{2}{i}\right] = -4+\pi i$$

$\int_{C_2} \frac{z+1}{z}\, dz$:

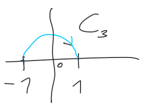


$\varphi_2(t) = t-2,\ t \in [0,1]$

$\varphi_2'(t) = 1$

$$\int_{C_2} \frac{z+1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{t-2+1}{t-2}\cdot 1\, dt = \int_0^1 1+\frac{1}{t-2}\, dt = 1 + \left[\ln(2-t)\right]_0^1 = 1-\ln 2$$

$\int_{C_3} \frac{z+1}{z}\, dz$:



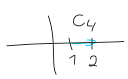
$\varphi_3(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi]$

$\varphi_3'(t) = ie^{it}$

OPAČNĚ ORIENTOVANÁ PARAMETRIZACE, NEŽ CHCEME, TAKŽE ZMĚNÍME ZNAMÉNKO INTEGRÁLU

$$\int_{C_3} \frac{z+1}{z}\, dz = \underbrace{-}_{\text{Opačná orientace}} \int_0^\pi \frac{e^{it}+1}{e^{it}}\, ie^{it}\, dt = -i \int_0^\pi e^{it}+1\, dt = -i\left(\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^\pi + \pi \right) = -i\left(-\frac{1}{i} - \frac{1}{i} + \pi\right) = 2-\pi i$$

$\int_{C_4} \frac{z+1}{z}\, dz$:



$\varphi_4(t) = t+1,\ t \in [0,1]$

$\varphi_4'(t) = 1$

$$\int_{C_4} \frac{z+1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{t+1+1}{t+1}\, dt = 1 + \int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt = 1 + \left[\ln(t+1)\right]_0^1 = 1+\ln 2$$

$\Longrightarrow$ Celkem tedy $\int_C \frac{z+1}{z}\, dz = (-4+\pi i) + (1-\ln 2) + (2-\pi i) + (1+\ln 2) = 0$

To, že je výsledek 0, není náhoda a **vlastně jsme to mohli říci, aniž bychom cokoliv počítali**. Plyne to z takzvané **Cauchy věty**, kterou brzy uvidíme.

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **jednoduše souvislá oblast** (tj. "souvislá oblast bez děr") a **f je holomorfní na Ω**. Potom $\int_C f(z)\, dz = 0$ pro každou uzavřenou křivku C ležící v Ω.

Křivka C leží uvnitř Ω! Předpoklady jednoduché souvislosti Ω a holomorfnosti f na Ω jsou podstatné a nelze je vynechat. Cauchyova věta neříká, že integrál libovolné funkce přes libovolnou uzavřenou křivku je nulový!

Předchozí příklad tedy díky Cauchyovo větě rovnou vycházel 0 a nemuseli jsme nic počítat.

$$\int_C \frac{z+1}{z}\, dz = 0$$

Jako Ω vezmeme např.

Potom Ω je jednoduše souvislá, $f(z) = \frac{z+1}{z}$ je holomorfní na Ω a C je uzavřená křivka v Ω,

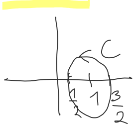
TAKŽE SKUTEČNĚ LZE POUŽÍT CAUCHYHO VĚTU.

Pozor: Jako Ω nelze brát $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i když f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ TOTIŽ NENÍ JEDNODUŠE SOUVISLÁ (OBSAHUJE DÍRU)!

ZADÁNÍ: Spočtěte $\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \operatorname{Re} z\, dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice $|z-1| = \frac{1}{2}$.

ŘEŠENÍ:



$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \operatorname{Re} z\, dz = \int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}}\, dz + \int_C \operatorname{Re} z\, dz$$

- Prvního integrálu se snadno zbavíme pomocí Cauchyovo věty. Uvědomme si, že spočítat ho z definice ani není prakticky možné.

- Vezmeme např. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; |z-1| < \frac{2}{3}\}$

Potom $\frac{\sin(z^2)}{z^{50}}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti Ω, C je uzavřená křivka v Ω, tedy dle Cauchyovy věty je $\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}}\, dz = 0$

- **Cauchyovu větu NELZE použít na druhý integrál**, protože Re z není holomorfní nikde (není dokonce diferencovatelná v žádném bodě)! Druhý integrál vyjde ve skutečnosti nenulový a musíme ho spočítat…

- $$\int_C \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{1}{2}e^{it}\right) \cdot \frac{i}{2} e^{it}\, dt = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right) e^{it}\, dt = \frac{i}{2}\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} + \frac{i}{4}\int_0^{2\pi} \cos t\, e^{it}\, dt = 0 + \frac{i}{4}\pi$$

$\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ souhlasně orientovaná

$\varphi'(t) = \frac{1}{2} i e^{it}$

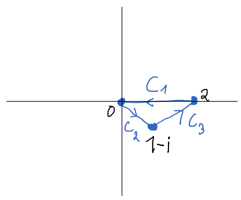
$1 + \frac{1}{2}e^{it} = 1 + \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t)$

- $\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i}\left(e^{2\pi i} - e^{0}\right) = \frac{1}{i}(1-1) = 0$
- $\int_0^{2\pi} \cos t\, e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\,(\cos t + i \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt + i \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \pi + 0i = \pi$

$$\longrightarrow \int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \operatorname{Re} z \, dz = 0 + \frac{\pi}{4} i = \frac{\pi}{4} i$$

ZADÁNÍ: Spočtěte $\int_C \operatorname{Im} z + \frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z} \, dz$, kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníku o vrcholech $0, 1-i, 2$.

ŘEŠENÍ:

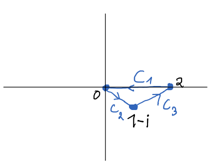


$$\int_C \operatorname{Im} z + \frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z} \, dz = \int_C \operatorname{Im} z \, dz + \int_C \frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z} \, dz = \dots = -1 + 0 = -1.$$

$\int_C \frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z} \, dz$:

Dle Cauchyho věty (protože funkce $\frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z}$ je celistvá, lze za Ω v Cauchyho větě brát $\Omega = \mathbb{C}$) je $\int_C \frac{\cos(z^3-5+z)}{e^z} \, dz = 0$.

$\int_C \operatorname{Im} z \, dz$:



$$\int_C \operatorname{Im} z \, dz = \underbrace{\int_{C_1} \operatorname{Im} z \, dz}_{=0} + \int_{C_2} \operatorname{Im} z \, dz + \int_{C_3} \operatorname{Im} z \, dz = \dots = 0 + \frac{i-1}{2} - \frac{1+i}{2} = -1$$

[Protože $\operatorname{Im} z = 0$ na C_1.]

- $\int_{C_2} \operatorname{Im} z \, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(\varphi_2(t)) \, \varphi_2'(t) \, dt = (1-i) \int_0^1 -t \, dt = (i-1) \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{i-1}{2}$

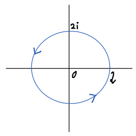
  [$\varphi_2(t) = (1-i)t, \ t \in [0,1]$
  $\varphi_2'(t) = 1-i$
  $\operatorname{Im} \varphi_2(t) = \operatorname{Im}(t - it) = -t$]

- $\int_{C_3} \operatorname{Im} z \, dz = \int_0^1 (-1+t)(1+i) \, dt = (1+i)\left(-1 + \int_0^1 t \, dt\right) = (1+i)\left(-1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1+i}{2}$

  [$\varphi_3(t) = 1-i + (1+i)t, \ t \in [0,1]$ $\quad 2-(1-i) = 1+i$
  $\varphi_3'(t) = 1+i$
  $\operatorname{Im} \varphi_3(t) = -1+t$]

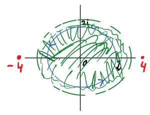
ZADÁNÍ: Spočtěte $\int_C \frac{3|z|}{z} + \frac{e^z}{z^2-16} - \overline{z}\, dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice $|z|=2$.

ŘEŠENÍ:



$$\int_C \frac{3|z|}{z}+\frac{e^z}{z^2-16}-\overline{z}\,dz = \int_C \frac{3|z|}{z}\,dz + \int_C\frac{e^z}{z^2-16}\,dz - \int_C \overline{z}\,dz = \dots = 12\pi i + 0 - 8\pi i = 4\pi i$$

• $\int_C \frac{e^z}{z^2-16}\,dz$: Dle Cauchyho věty (např. $\Omega=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<3\}$) je $\int_C \frac{e^z}{z^2-16}\,dz = 0$.



$z^2-16=(z-4)(z+4)$

• $\int_C \frac{3|z|}{z}\,dz$:

$$\int_C \frac{3|z|}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{3|\varphi(t)|}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{3\cdot 2}{2e^{it}}\, 2ie^{it}\,dt = 6i\cdot 2\pi = 12\pi i$$

[$\varphi(t)=2e^{it},\ t\in[0,2\pi]$
$\varphi'(t)=2ie^{it}$
$|\varphi(t)| = |2e^{it}| = 2|e^{it}| = 2$]

• $\int_C \overline{z}\,dz$:

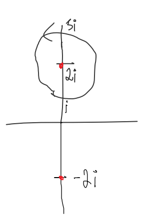
$$\int_C\overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi}\overline{\varphi(t)}\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\,2ie^{it}\,dt = 4i\int_0^{2\pi}1\,dt = 8\pi i$$

[$\overline{\varphi(t)} = \overline{2e^{it}} = 2\overline{e^{it}} = 2e^{\overline{it}} = 2e^{-it}$]

[$e^{-it}e^{it}=e^0=1$]

ZADÁNÍ: Spočtěte $\int_C \frac{1}{z^2+4}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice se středem $2i$ a poloměrem 1.

ŘEŠENÍ:



$a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

• $z^2+4=(z+2i)(z-2i)$, tedy $\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}$

Funkce $\frac{1}{z^2+4}$ má tedy singularity v bodech $\pm 2i$. Jedna z nich leží uvnitř křivky, přes kterou chceme integrovat, druhá vně. Za použití parciálních zlomků si singularity rozdělíme a členu odpovídajícímu singularitě vně se snadno zbavíme pomocí Cauchyovo věty.

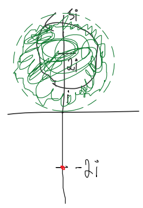
Jedná se o motivační příklad, později uvidíme tzv. reziduovou větu, pomocí které budeme schopni podobné integrály počítat velmi rychle a efektivně.

• $\int_C\frac{1}{z^2+4}\,dz = \frac{i}{4}\int_C\frac{1}{z+2i}\,dz - \frac{i}{4}\int_C \frac{1}{z-2i}\,dz$

$\frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{A}{z+2i}+\frac{B}{z-2i} = \frac{i}{4}\frac{1}{z+2i} - \frac{i}{4}\frac{1}{z-2i}$

[A: $A=\frac{1}{-2i-2i} = -\frac{1}{4i} = \frac{1}{4}i$
B: $B=\frac{1}{2i+2i}=\frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$]

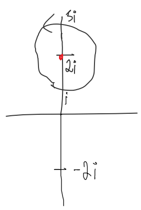
• $\int_C \frac{1}{z+2i}\,dz$:



$$\Longrightarrow \int_C \frac{1}{z+2i}\,dz \overset{\substack{\text{Cauchyho věta}\\ \downarrow}}{=} 0$$

Funkce $\frac{1}{z+2i}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti Ω, která má uvnitř uzavřenou křivku C, např. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 2\}$. Můžeme tedy použít Cauchyovu větu.

$$\int_C \frac{1}{z-2i}\,dz$$



$$\int_C \frac{1}{z-2i}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2i+e^{is}-2i}\, i e^{is}\,ds = i\int_0^{2\pi} 1\,ds = 2\pi i$$

$\varphi(s) = 2i + e^{is},\ s \in [0, 2\pi]$
$\varphi'(s) = i e^{is}$

souhlasná orientace

Na tento integrál NELZE Cauchyovu větu použít, protože funkce $\frac{1}{z-2i}$ není holomorfní na žádné jednoduše souvislé oblasti obsahující křivku C (museli bychom "vystřihnout" bod 2i, který leží uvnitř křivky C, čímž by vznikla díra, takže taková oblast už by nebyla jednoduše souvislá). Speciálně NELZE brát $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, což je sice souvislá množina, ale ne jednoduše souvislá.

$$\Longrightarrow \int_C \frac{1}{z^2+4}\,dz = \frac{i}{4}\int_C \frac{1}{z+2i}\,dz - \frac{i}{4}\int_C \frac{1}{z-2i}\,dz = 0 - \frac{i}{4}\,2\pi i = \frac{\pi}{2}$$

5 Mocninné řady

(Absolutní) konvergence číselných řad

úterý 20. října 2020 12:50

Řekneme, že **řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně**, jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje (tj. posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ má konečnou limitu).

Jestliže posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nemá vlastní limitu, řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Čísla a_n jsou obecně komplexní, ale $|a_n|$ už je nezáporné reálné číslo!

Pro naše potřeby se budou hodit zejména dvě kritéria pro konvergenci řad:

Odmocninové kritérium:

Nechť $\mathrm{L} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$ existuje.

A] Pokud $L < 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

B] Pokud $L > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

C] Pokud L=1, pak nelze nic říct.

Podílové kritérium:

Nechť $\mathrm{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0,\infty]$ existuje.

A] Pokud $L < 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

B] Pokud $L > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

C] Pokud L=1, pak nelze nic říct.

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují absolutně, nebo divergují.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3-4j)^n$

ŘEŠENÍ:

a) Použijeme podílové kritérium [zkuste si sami odmocninové]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{j^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{j^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Řada tedy konverguje absolutně dle podílového kritéria.

b) Použijeme odmocninové kritérium [zkuste si sami podílové]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(3-4j)^n|} = \lim_{n\to\infty} |3-4j| = \lim_{n\to\infty} 5 = 5 > 1,$$

řada $\sum_{n=0}^{\infty} (3-4j)^n$ dle odmocninového kritéria tedy diverguje.

Platí, že odmocninové kritérium je obecnější (tj. vždy, když lze použít podílové, musí jít použít i odmocninové), ale podílové může být někdy snazší na použití.
Podílové bývá často výhodné, pokud se v řadě vyskytují faktoriály.

ZADÁNÍ: Platí, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

ŘEŠENÍ:

Máme $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Dle Heineovy věty víme, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Očem $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{LH, \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$.

Další důležité limity, které se mohou hodit:

A) Pro každé pevné $c \epsilon (0, \infty)$ jest $\mathbf{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1}$.

B) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

C) Je-li $\{a_n\}$ posloupnost taková, že $0 < A \leq a_n \leq B < \infty$ pro každé (až na konečně mnoho) n, kde A, B jsou pevné konstanty, pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Řada tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, kde $\{a_n\}$ jsou (komplexní) čísla a $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ je dáno, se nazývá **mocninná řada se středem v z_0**.

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$ je vlastně nekonečný polynom v proměnné z. Spousta operací s nimi skutečně funguje tak, jako by to byly polynomy (brzy uvidíme).

Je třeba vyšetřit konvergenci mocninné řady (určujeme její obor konvergence), tj. řešíme pro jaké hodnoty $z \epsilon \mathbb{C}$ daná mocninná řada absolutně konverguje.

ZADÁNÍ: Pro jaké hodnoty $z \in \mathbb{C}$ mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}$ absolutně konverguje a pro jaké diverguje.

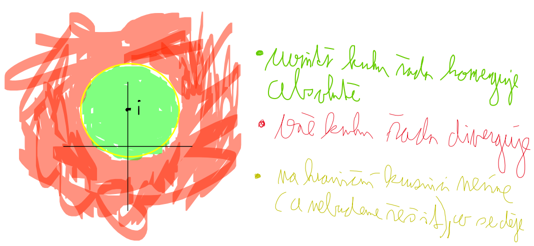
ŘEŠENÍ: Použijeme odmocninové kritérium (zkuste si sami podílové)

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n-1}\,|z-i|^2}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1\cdot 1\cdot |z-i|^2}{3} = \frac{|z-i|^2}{3}$$

Vyřešíme nerovnost $\frac{|z-i|^2}{3} < 1$. Tedy $|z-i| < \sqrt{3}$.

Z odmocninového kritéria tedy dostáváme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}$ absolutně konverguje když $|z-i| < \sqrt{3}$, tj. když z je v otevřeném kruhu o středu v i a poloměru $\sqrt{3}$.

Naopak diverguje, pokud $|z-i| > \sqrt{3}$.



To, že obor konvergence mocninné řady vyšel kruh, není náhoda. Obor konvergence mocninné řady o středu v z_0 je vždycky kruh o středu z_0 a nějakém poloměru R (poloměr R ale může být jak nula (pak je to jediný bod), tak nekonečno (pak je to celá komplexní rovina)).

ZADÁNÍ: Určete střed a poloměr konvergence následujících řad.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (z+2+i)^{2n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)} (-3z+2i)^{2n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$

ŘEŠENÍ:

a) $z+2+i = z-(-2-i)$, tedy střed je $z_0=-2-i$.

$$\sqrt[n]{|3^n (z+2i)^{2n+1}|} = 3\sqrt[n]{|z+2+i|^{2n}}\sqrt[n]{|z+2+i|} = 3|z+2+i|^2 \underbrace{\sqrt[n]{|z+2+i|}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1} \xrightarrow{n\to\infty} 3|z+2+i|^2$$

$$3|z+2+i|^2<1 \iff |z+2+i|<\frac{1}{\sqrt3}$$

· DLE ODMOCNINOVÉHO KRITÉRIA ŘADA KONVERGUJE ABSOLUTNĚ POKUD $|z+2+i|<\frac{1}{\sqrt3}$, A DIVERGUJE POKUD $|z+2+i|<\frac{1}{\sqrt3}$.

$z_0=-2-i$

$R=\frac{1}{\sqrt3}$

b) $z_0=0$

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+2)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{(n+1)!}\right|} = \frac{|z|(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{|z|(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} = \frac{|z|}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Dle podílového kritéria řada konverguje absolutně pro každé $z\in\mathbb{C}$. Poloměr konvergence je tedy $R=\infty$.

c) $(-3z+2i)=-3\left(z-\frac{2}{3}i\right)$ $\quad z_0=\frac{2}{3}i$

alternativně: $-3z+2i=0 \iff z=\frac{2}{3}i$

poloměr konvergence:

$|(-1)^n|=1$

odmocninové: $$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}(-3z+2i)^{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|-3z+2i|^{2n+1}}{2^n(n+1)}} = \frac{|-3z+2i|^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|-3z+2i|}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{|-3z+2i|^2}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{|-3z+2i|^2}{2}$$

$\frac{|-3z+2i|^2}{2}<1$

$|-3z+2i|^2<2$

$|-3z+2i|<\sqrt2$

$3|\underbrace{z-\frac{2}{3}i}_{z_0}|<\sqrt2$ $\qquad R=\frac{\sqrt2}{3}$

$|z-\frac{2}{3}i|<\frac{\sqrt2}{3}$

d) $z_0=0$

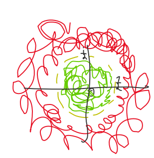
$|1+2ni|=\sqrt{1+4n^2}$

$|n+2i|=\sqrt{n^2+4}$

$\left|\frac{1+2ni}{n+2i}\right|=\frac{\sqrt{1+4n^2}}{\sqrt{n^2+4}}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 1$ neboť $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4n^2}{n^2+4}=4$, proto $3\le\frac{1+4n^2}{n^2+4}\le5$ pro všechny n dostatečně velké

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n\right|} = \sqrt[n]{\sqrt{\frac{1+4n^2}{n^2+4}}}\,|z| \xrightarrow{n\to\infty}|z|$$



$|z|<1$

Dle odmocninového kritéria řada tedy konverguje absolutně pro |z|<1, a diverguje pro |z|>1. Poloměr konvergence je tedy 1.

ZADÁNÍ: V mocninné řadě $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{n}{n-1}(z+i)^{3n-20}$ urči koeficient u

a) $(z+i)^{79}$

b) $(z+i)^{10}$

c) $(z+i)^{21}$

d) $(z+i)^{130}$

ŘEŠENÍ:

a) $3n-20=79 \Leftrightarrow n=33$

$33 \geq 20$

koeficient u $(z+i)^{79}$ je $\left.\frac{n}{n-1}\right|_{n=33} = \frac{33}{32}$

b) $3n-20=10 \Leftrightarrow n=10$

$10<20$

koeficient u $(z+i)^{10}$ je 0.

c) $3n-20=21 \Leftrightarrow n=\frac{41}{3}=13+\frac{2}{3}$

$\frac{41}{3} \notin \mathbb{Z}$

koeficient u $(z+i)^{21}$ je 0.

d) $3n-20=130 \Leftrightarrow n=50$

$50 \geq 20$

koeficient u $(z+i)^{130}$ je $\left.\frac{n}{n-1}\right|_{n=50} = \frac{50}{49}$

ZADÁNÍ: Urči střed mocninné řady $\sum_{n=50}^{\infty} 3^n(-2z+5-2i)^{2n}$

ŘEŠENÍ: $(z-z_0)$

$(-2z+5-2i) = -2(z-\frac{5}{2}+i) = -2(z-(\frac{5}{2}-i)) \implies \sum_{n=50}^{\infty} 3^n(-2z+5-2i)^{2n} = \sum_{n=50}^{\infty} 3^n(-2)^{2n}(z-\underline{(\frac{5}{2}-i)})^{2n}$

$z_0=\frac{5}{2}-i$

Alternativně: $-2z+5-2i=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{2}-i$

Součet mocninných řad

úterý 20. října 2020 14:34

Mocninné řady můžeme na jejich kruhu konvergence derivovat a integrovat člen po členu, jako by to byly polynomy. Výsledkem je zase mocninná řada, která má stejný kruh konvergence.

- $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)' = \left(a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots\right)' = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

- $$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz = \int a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \, dz$$
$$\overset{c}{=} a_0(z-z_0) + a_1\frac{(z-z_0)^2}{2} + a_2\frac{(z-z_0)^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

Derivování/integrování mocninných řad člen po členu nám často umožňuje určit součet mocninné řady.

Známé součty:

A] $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$ pro každé $|q| < 1, n_0 \in \mathbb{N}$. (**součet geometrické řady**)

B] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ pro každé $z \epsilon \mathbb{C}$. (**Taylorova řady exponenciály**)

ZADÁNÍ: Určete kruh konvergence a na něm sečtěte řadu

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{z^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} (z+i)^{n+4}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (z-2i)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+4}}{4^{n+1}(n+3)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} (z-i)^{2n}$

ŘEŠENÍ:

a) · Vidíme, že $z_0 = 0$.

· Poloměr určíme snadno na konci.

$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$

$R = \infty$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{2^{n+1} n!} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n n!} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^n}{n!} = -\frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^n}{n!}\right) = -\frac{1}{2}\left(-1 + e^{-\frac{z}{2}}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

b) · Vidíme, že $z_0 = 0$.
· Poloměr určíme zpětně na konci.

Označme $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n}$

Platí $\int f(z)\,dz = \int 1 + 3z^2 + \frac{5}{2}z^4 + \dots\, dz \overset{c}{=} z + \frac{3z^3}{3} + \frac{5}{2}\frac{z^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!} = z\exp(z^2)$$

Tedy $f(z) = (z\exp(z^2))' = e^{z^2} + 2z^2 e^{z^2} = e^{z^2}(1+2z^2)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, neboť rozvoj exp platí na $\mathbb{C}$ (tedy $R = \infty$)

---

c) · Vidíme, že $z_0 = 2i$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} (z+i)^{n+4} = (z+i)^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} (z+i)^{n+1} = \dots = (z+i)^3\, 4(z+i)^3 \frac{64+12(z+i)}{(64+16(z+i))^2} =$$

$$= 4(z+i)^6 \frac{64+12(z+i)}{(64+16(z+i))^2}$$

$|z+i| < 4$
$z_0 = -i$
$R = 4$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} (z+i)^{n+1}$:

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q|<1$

integrace $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z+i)^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z+i)^{n+2} \underset{\substack{k=n-2\\ n=k+2}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{4^{k+3}} (z+i)^{k+4} =$

$$\underset{\substack{(-1)^2=1\\ 4^3=64}}{=} \frac{(z+i)^4}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}(z+i)^k = \frac{(z+i)^4}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-(z+i)}{4}\right)^k = \frac{(z+i)^4}{64} \frac{1}{1+\frac{z+i}{4}} = \frac{(z+i)^4}{64+16(z+i)}$$

$\left|\frac{-(z+i)}{4}\right| < 1$
$|z+i| < 4$

derivace $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} (z+i)^{n+1} = \left(\frac{(z+i)^4}{64+16(z+i)}\right)' = \frac{4(z+i)^3(64+16(z+i)) - 16(z+i)^4}{(64+16(z+i))^2} =$

$$= 4(z+i)^3 \frac{64+16(z+i) - 4(z+i)}{(64+16(z+i))^2} = 4(z+i)^3 \frac{64+12(z+i)}{(64+16(z+i))^2}$$

---

d) · Vidíme, že $z_0 = 2i$.
· Poloměr určíme zpětně na konci.

· $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(z-2i)^n$

Potom $f'(z) = \left(\frac{1}{3}(z-2i) + \frac{1}{18}(z-2i)^2 + \dots\right)' = \frac{1}{3} + \frac{2}{18}(z-2i) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n}(z-2i)^{n-1} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(z-2i)^{n-1} \underset{\substack{\text{přeindexování} \\ n \to n+1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}(z-2i)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{3}\right)^n \overset{\text{geometrická řada}}{=} \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z-2i}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3-(z-2i)} = \frac{1}{3+2i-z}$$

- $\int \frac{1}{3+2i-z}\,dz \overset{c}{=} -\ln(3+2i-z)$

Jedy $f(z) = -\ln(3+2i-z) + C$, kde $C \in \mathbb{C}$

Zbývá určit C.

Dosadíme střed řady, tj. $f(2i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} 0^n = 0$

$$f(2i) = -\ln(3+2i-2i) + C$$

$$0 = -\ln(3) + C \iff C = \ln 3$$

Jedy $f(z) = -\ln(3+2i-z) + \ln 3$ pro $|z-2i|<3$

pro součet geometrické řady potřebujeme $\left|\frac{z-2i}{3}\right| < 1$, tj. $|z-2i|<3$

Jedy $R=3$

---

e) • Vidíme, že $z_0 = 0$.

• Poloměr určíme zjednodušeně na konci.

• Derivování/integrování můžeme samozřejmě iterovat

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$$

$$\int f(z)\,dz \overset{c}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n+1} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \qquad (*)$$

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$\int g(z)\,dz \overset{c}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \implies g(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\overset{(*)}{\implies} \int f(z)\,dz \overset{c}{=} z^2 g(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = \left(\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)' = \frac{2z}{(1-z)^3} \quad \text{pro } |z|<1$$

[pro součet geometrické řady potřebujeme $|z|<1$
tedy $R=1$]

---

f) · Vidíme, že $z_0 = 0$.

· Poloměr určíme zjevně na konci.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+4}}{4^{n+1}(n+3)}$$

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)} \qquad (*)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)z^{n+2}}{4^{n+1}(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{4^{n+1}} = \frac{z^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = \frac{z^2}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = \frac{z^2}{4-z}$$

$$\int \frac{z^2}{4-z}\,dz = \int -z-4+\frac{16}{4-z}\,dz \overset{c}{=} -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z)$$

$\left[\frac{z^2}{4-z} = -z + \frac{4z}{4-z} = -z-4+\frac{16}{4-z}\right]$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z) + C$$

Dosadíme nulu:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)} = -16\ln 4 + C \Longrightarrow C = 16\ln 4$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z) + 16\ln 4$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+4}}{4^{n+1}(n+3)} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)} = -\frac{z^3}{2} - 4z^2 - 16z\ln(4-z) + 16z\ln 4 \quad \text{pro } |z|<4$$

[pro součet geometrické řady potřebujeme
$\left|\frac{z}{4}\right|<1$, tj. $|z|<4$
tedy $R=4$]

g) · Vidíme, že $z_0 = i$.

· Poloměr určíme zjevně na konci.

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}$$ · $w = z-i$ [PRO UŠETŘENÍ PSANÍ]

$$\bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n} = w \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n-1}$$

$$\bullet \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n-1} \, dw \mathrel{\hat{=}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} \frac{w^{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{3^n} w^{2n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} w^{2n} = \frac{w^3}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} w^{2n-3} \quad (*)$$

$$\bullet \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} w^{2n-3} \, dw \mathrel{\hat{=}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} \frac{w^{2n-2}}{2n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^{2n-2}}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(w^2)^{n-1}}{3^n} \overset{\text{přeindexování}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w^2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w^2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{\frac{w^2}{3}}{1-\frac{w^2}{3}} = \frac{w^2}{9-3w^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} w^{2n-3} = \left(\frac{w^2}{9-3w^2}\right)' = \frac{2w}{(w^2-3)^2}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n-1} \, dw \mathrel{\hat{=}} \frac{w^3}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-2}{3^n} w^{2n-3} = \frac{2w^4}{4(w^2-3)^2} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n-1} = \left(\frac{2w^4}{4(w^2-3)^2}\right)' = -\frac{6w^3}{(w^2-3)^3}$$

$$\underset{w=z-i}{\Longrightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} (z-i)^{2n} = w \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} w^{2n-1} = -\frac{6w^4}{(w^2-3)^3} = -\frac{6(z-i)^4}{((z-i)^2-3)^3} = -\frac{6(z-i)^4}{(z^2-2zi-4)^3} \quad \text{pro } |z-i| < \sqrt{3}$$

pro součet geometrické řady potřebujeme $\left|\frac{w^2}{3}\right| < 1$ tj. $|z-i| < \sqrt{3}$

tedy $R = \sqrt{3}$

ZADÁNÍ: Funkci $f(z)$ rozviňte do mocninné řady se středem z_0 a určete kruh konvergence této řady

a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1+i$

b) $f(z) = \frac{z-1}{3z-2}$, $z_0 = 1$

c) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = i$

d) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 0$

e) $f(z) = \frac{1}{(1-3z)^3}$, $z_0 = 0$

f) $f(z) = \frac{z-1}{(3z-2)^2}$, $z_0 = 1$

g) $f(z) = \frac{z^2-z+2}{(z+1)(z-1)^2}$, $z_0 = 0$

h) $f(z) = \frac{(z-5)(z+1)^3}{z^2-5z+6}$, $z_0 = -1$

i) $f(z) = z^2$, $z_0 = 1$

j) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$, $z_0 = 1$

k) $f(z) = e^{z^2-2z+3}$, $z_0 = 1$

l) $f(z) = \sinh(2z-i)$, $z_0 = \frac{i}{2}$

m) $f(z) = \cos^2 z$, $z_0 = 0$

ŘEŠENÍ:

Obecná idea postupu, pokud $z_0 \neq 0$:

- Střed řady má být z_0, takže si můžeme zavést substituci $w = z - z_0$ a vzniklou funkci v proměnné w rozvineme do mocninné řady se středem v 0. Nakonec desubstituujeme zpět.
- Nebo si napíšeme $z = (z-z_0) + z_0$ a dále počítáme s $(z-z_0)$ jako „nedělitelnou jednotkou".

a) $w = z - 1 - i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w+1+i} = \frac{1}{1+i}\,\underbrace{\frac{1}{1-\left(-\frac{w}{1+i}\right)}}_{\text{geometrická řada}} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{1+i}\right)^n = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}\,w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1-i)^n$$

Poloměr konvergence je $R = |1+i-0| = \sqrt{2}$

Tedy $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1-i)^n$ pro $|z-1-i| < \sqrt{2}$.

b) $z_0 = 1$

$$\frac{z-1}{3z-2} = (z-1)\frac{1}{3z-2} = \dots = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n(z-1)^{n+1} \quad \text{pro } |z-1|<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3((z-1)+1)-2} = \frac{1}{3(z-1)+1} = \frac{1}{1-(-3(z-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-3(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n(z-1)^n$$

$|-3(z-1)|<1$

$|z-1|<\frac{1}{3}$

c)

$w = z - i$

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{(w+i)(w+1+i)}$$

Rozložíme na parc. zlomky, tj. najdeme $A, B \in \mathbb{C}$ tak, aby $\frac{1}{(w+i)(w+1+i)} = \frac{A}{w+i} + \frac{B}{w+1+i}$

A: $\frac{1}{-i+1+i} = 1$

B: $\frac{1}{-1-i+i} = -1$

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{(w+i)(w+1+i)} = \frac{1}{w+i} - \frac{1}{w+1+i} \quad (*)$$

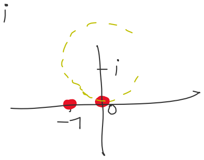
- $\frac{1}{w+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1-(-\frac{w}{i})} \overset{\text{geom.}}{=} \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}(z-i)^n$
- $\frac{1}{w+1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-(-\frac{w}{1+i})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$

$$(*) \Longrightarrow \frac{1}{z(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}(z-i)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{i^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-i)^n$$

Zbývá určit poloměr konvergence.

$\frac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = i$

$R = |i-0| = 1$



Tedy $\frac{1}{z(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{i^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-i)^n$ pro $|z-i|<1$

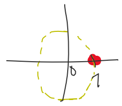
d)

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\int f(z)\,dz \overset{c}{=} \frac{1}{1-z}$$

$$f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

Poloměr konvergence je 1



Tedy $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ pro $|z|<1$.

---

e) $f(z) = \frac{1}{(1-3z)^3}$, $z_0 = 0$

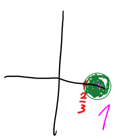
$$\left(\frac{1}{1-3z}\right)'' = \left(\frac{3}{(1-3z)^2}\right)' = \frac{18}{(1-3z)^3} \implies \frac{1}{(1-3z)^3} = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{1-3z}\right)'' = \frac{1}{18}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n\right)'' = \frac{1}{18}\sum_{n=2}^{\infty} 3^n n(n-1) z^{n-2} \quad \text{pro } |z|<\frac{1}{3}.$$

$|3z|<1$

$|z|<\frac{1}{3}$

---

f) $f(z) = \frac{z-1}{(3z-2)^2}$, $z_0 = 1$



$(3z-2) = 3\left(z-\frac{2}{3}\right)$

$R = \left|1-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$$\frac{z-1}{(3z-2)^2} = (z-1)\frac{1}{(3z-2)^2} = \dots \underset{(*)}{=} (z-1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{n-1}n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{n-1}n(z-1)^n \quad \text{pro } z: |z-1|<\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{(3z-2)^2}$: $w = z-1$

$$\frac{1}{(3z-2)^2} = \frac{1}{(3w+3-2)^2} = \frac{1}{(1+3w)^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3w}\right)' = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(-3w)}\right)' = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-3w)^n\right)' = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n w^n\right)' = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n n w^{n-1} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^{n-1} n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{n-1}n(z-1)^{n-1} \quad (*)$$

---

g) $f(z) = \frac{z^2-z+2}{(z+1)(z-1)^2}$, $z_0 = 0$

$$\frac{z^2-z+2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z-1)^2} = \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + n+1\right)z^n \quad \text{pro } |z|<1$$

$A = \left.\frac{z^2-z+2}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{4}{4} = 1$

$C = \left.\frac{z^2-z+2}{(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{2}{2} = 1$

B: $z^2-z+2 = (z-1)^2 + B(z+1)(z-1) + (z+1)$

absolutní člen: $2 = 1-B+1$

$\iff B = 0$

- $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

  $|-z|<1$

  $|z|<1$

- $\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$

  $\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\frac{1}{(z-1)^2}$

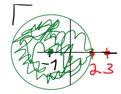
  $|z|<1$

h) $f(z)=\frac{(z-5)(z+1)^3}{z^2-5z+6}$, $z_0=-1$

$(z+1)$

$$\frac{(z-5)(z+1)^3}{z^2-5z+6}=(z+1)^3\,\frac{(z-5)}{z^2-5z+6}=\dots=(z+1)^3\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n+3}}{4^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n+3}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{4^{n+1}}-\frac{1}{3^n}\right)(z+1)^{n+3}$$

pro $|z+1|<3$



$|(-1)-2|=3$

- $$\frac{z-5}{z^2-5z+6}=\frac{z-5}{(z-3)(z-2)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z-2}=\frac{-2}{z-3}+\frac{3}{z-2}=(-2)\frac{1}{z-3}+3\frac{1}{z-2}\qquad (*)$$

$A=\left.\frac{z-5}{z-2}\right|_{z=3}=\frac{-2}{1}=-2$

$B=\left.\frac{z-5}{z-3}\right|_{z=2}=\frac{-3}{-1}=3$

$z^2-5z+6=0$

$\left(z-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=0$

$\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$z-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$ $\qquad z_0=3$ $\implies z^2-5z+6=(z-3)(z-2)$

$z=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$ $\qquad z_1=2$

- $$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{w-4}=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{w}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}$$

$w=z-(-1)=z+1$

$z=w-1$

$\left|\frac{w}{4}\right|<1$

$|w|<4$

$|z+1|<4$

- $$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1)-3}=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{(z+1)}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

$z=(z+1)-1$

$\left|\frac{z+1}{3}\right|<1$

$|z+1|<3$

$(*)\implies$
$$\frac{z-5}{z^2-5z+6}=-(-2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}$$

j) $f(z)=z^2$, $z_0=1$

POSTUP 1:

$w=z-1$

$$z^2=(w+1)^2=w^2+2w+1=(z-1)^2+2(z-1)+1\implies a_n=\begin{cases}1 - & n=0,2\\ 2 - & n=1\\ 0 - & n\geq 3\end{cases}$$

POSTUP 2:

použijeme vzorec pro Taylorovy koeficienty, tj. $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$a_0=f(1)=\left.z^2\right|_{z=1}=1$

$a_1=f'(1)=\left.2z\right|_{z=1}=2$ $\qquad\implies\quad f(z)=1+2(z-1)+(z-1)^2$

$a_2=\frac{f''(1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

pro $n\geq 3$: $a_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{0}{n!}=0$

j)

$$\frac{z^3-2z+1}{z+2} = z^2 + \frac{-2z^2-2z+1}{z+2} = z^2-2z+\frac{2z+1}{z+2} = z^2-2z+2+\frac{-3}{z+2}$$

$w = z-1$

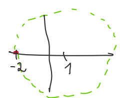
$$f(z) = (w+1)^2 - 2(w+1) + 2 - \frac{3}{w+3} = 1 + w^2 - \frac{3}{w+3} \quad (*)$$

$$\frac{1}{w+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{w}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} w^n \overset{(*)}{\Longrightarrow} f(z) = 1+w^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} w^n = (z-1)^2+1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}(z-1)^n = (z-1)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1+\frac{1}{9} & n=2 \\ \frac{(-1)^n}{3^n} & n\in\mathbb{N}\setminus\{2\} \end{cases}$$

Poloměr konvergence:

$$\frac{z^3-2z+1}{z+2} = z^2-2z+2+\frac{-3}{z+2}$$



$$R = |1-(-2)| = 3$$

k) $f(z) = e^{z^2-2z+3}$, $z_0 = 1$

$$e^{z^2-2z+3} = e^{(z-1)^2+2} = e^2\, e^{(z-1)^2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n!} \quad \text{pro } z\in\mathbb{C}$$

l) $f(z) = \sinh(2z-i) = \sinh(2w)$

$w = z - \frac{i}{2}$

Považujme Taylorův rozvoj fce sinh v 0.

Fce sinh je celistvá, tedy z věty o existenci Taylorova rozvoje víme, že $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0)}{n!} z^n \ \forall z\in\mathbb{C}$

Máme $\sinh' = \cosh$ a $\cosh' = \sinh$

Tedy pro n liché jest $\sinh^{(n)}(0) = \cosh 0 = 1$ a pro n sudé (včetně nuly) jest $\sinh^{(n)}(0) = \sinh 0 = 0$

Tedy $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall z\in\mathbb{C}$

$$f(z) = \sinh(2z-i) = \sinh(2w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} w^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(z-\frac{i}{2}\right)^{2n+1} \quad \forall z\in\mathbb{C} \qquad R=\infty$$

m) $f(z)=\cos^2 z$, $z_0=0$

Jelikož $f'(z) = -2\sin z\cos z = -\sin(2z) \overset{\text{Taylorova řada sin v 0}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \forall z\in\mathbb{C}$

$$\int f'(z)\,dz \overset{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{z^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}\,z^{2n+2} \Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}\,z^{2n+2} + C$$

$f(0)=\cos^2 0 = 1$

$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}\,0^{2n+2} + C = C \Longrightarrow C=1$

$$\Longrightarrow f(z) = 1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}\,z^{2n+2} \overset{\text{přeindexování}}{=} 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\,z^{2n} \quad \forall z\in\mathbb{C} \qquad R=\infty$$

ZADÁNÍ:

Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$(x-1)f'(x)+f(x)=0$ splňující $f(0)=1$.

ŘEŠENÍ:

Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na nějakém okolí bodu 0

$$(x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n n - a_{n+1}(n+1) + a_n\right)x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(a_n - a_{n+1})x^n = 0 \overset{\text{Princip neurčitých koeficientů}}{\Longleftrightarrow} \forall n\in\mathbb{N}_0:\ (n+1)(a_n-a_{n+1})=0$$

$$\Longleftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}_0:\ a_n = a_{n+1} \quad (*)$$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$1=f(0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 \Longrightarrow a_0 = 1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a_n = 1\ \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

$$\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro } |x|<1.$$

ZADÁNÍ: Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$(x^2+1)f''(x)-4xf'(x)+6f(x)=0$ splňující $f(0)=1,\ f'(0)=-1$.

ŘEŠENÍ:

Nechť $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ na nějakém okolí bodu 0

$$(z^2+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)'' - 4z\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$(z^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} - 4z\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) z^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n n(n-1) + a_{n+2}(n+2)(n+1) - 4a_n n + 6a_n\right) = 0$$

Princip neurčitých koeficientů

$$\iff (n(n-1) - 4n + 6)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\iff (n^2 - 5n + 6)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\iff (n-2)(n-3)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\iff a_{n+2} = -\frac{(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad (*)$$

Dosadíme počáteční podmínky:

$$1 = f(0) = a_0$$

$$-1 = f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n 0^{n-1} = a_1$$

$$\iff a_0 = 1,\ a_1 = -1$$

Použijeme $(*)$:

$$a_2 = -\frac{(-2)(-3)}{2\cdot 1} a_0 = -3$$

$$a_3 = -\frac{(-1)(-2)}{3\cdot 2} a_1 = \frac{1}{3}$$

$a_4 = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pro $n = 4, 6, 8, 10, \dots$

$a_5 = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pro $n = 5, 7, 9, 11, \dots$

Tedy $a_n = 0 \ \forall n \geq 4$.

Takže $f(z) = 1 - z - 3z^2 + \frac{1}{3}z^3 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

6 Laurentovy řady

Laurentovy řady - obor konvergence a součet

pátek 10. prosince 2021 14:38

Řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá **Laurentova řada se středem v $z_0 \epsilon \mathbb{C}$.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je její **regulární část** a $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ je její **hlavní část.**

ZADÁNÍ:

Určete obor konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} z^n$ a na jejím oboru konvergence nalezněte její součet.

ŘEŠENÍ:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{3}{2}z\right)^n = e^{\frac{3}{2}z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $(*)$

- $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n = z \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^{n-1} = \dots$

- $n-1 \leq -1-1 = -2$

$$\int \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^{n-1}\, dz \overset{c}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{-n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = -\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} = -\frac{1}{2z-1} \implies \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^{n-1} = \left(-\frac{1}{2z-1}\right)' = \frac{2}{(2z-1)^2}$$

$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

$|z| > \frac{1}{2}$

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n = z \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^{n-1} = \frac{2z}{(2z-1)^2} \quad (**)$$

$$\xRightarrow{(*) \text{ a } (**)} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} z^n = \frac{2z}{(2z-1)^2} + e^{\frac{3}{2}z} \quad \text{pro } |z| > \frac{1}{2}$$

- Kdybychom chtěli určit pouze obor konvergence a nezajímal nás součet:

- Obor konvergence regulární části, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} z^n$:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{2^n n!} z^n\right|} = \frac{3}{2\sqrt[n]{n!}} |z| \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3|z|}{\infty} = 0 < 1$$

Regulární část konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C}$.

Obor konvergence hlavní části, tj. $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n$:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n z^n}$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n z^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2|z|} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2|z|}$$

$\frac{1}{2|z|} < 1 \iff |z| > \frac{1}{2}$ Hlavní část konverguje absolutně pro $|z| > \frac{1}{2}$.

DOHROMADY:

Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-n}{2^{-n}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} z^n$ konverguje absolutně pro $|z| > \frac{1}{2}$, tj. na mezikruží $P(0; \frac{1}{2}; \infty)$.

ZADÁNÍ: Určete obor konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z+3)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z+3)^n$ a určete její součet.

RESENÍ:

Součet:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z+3)^{2n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(3(z+3)^2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3(z+3)^2}\right)^n = \frac{\frac{1}{3(z+3)^2}}{1-\frac{1}{3(z+3)^2}} = \frac{1}{3(z+3)^2-1}$$

$\left|\frac{1}{3(z+3)^2}\right| < 1 \iff |z+3|^2 > \frac{1}{3}$

$|z+3| > \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z+3)^n = \dots = \frac{4z+12}{(z-1)^2}$$

$\left|\frac{z+3}{4}\right| < 1$

$|z+3| < 4$

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z+3)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z+3)^n = \frac{1}{3(z+3)^2-1} + \frac{4z+12}{(z-1)^2} \quad \text{pro } \frac{\sqrt{3}}{3} < |z+3| < 4, \text{ tj. na } P\left(-3; \frac{\sqrt{3}}{3}; 4\right)$$

• Kdybychom chtěli určit pouze obor konvergence, nezajímal nás součet:

Regulární část:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{4^n}(z+3)^n\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{4}|z+3| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}|z+3|$$

$$\frac{1}{4}|z+3| < 1 \iff |z+3| < 4$$

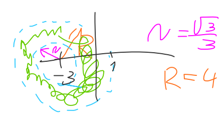
Hlavní část:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z+3)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(z+3)^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n (z+3)^{2n}}$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n (z+3)^{2n}}\right|} = \frac{1}{3|z+3|^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3|z+3|^2}$$

$$\frac{1}{3|z+3|^2} < 1 \iff |z+3| > \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Longrightarrow$



$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z+3)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z+3)^n$ konverguje absolutně pro $\frac{\sqrt{3}}{3} < |z+3| < 4$, tj. obor konvergence je mezikruží $P\left(-3; \frac{\sqrt{3}}{3}; 4\right)$

ZADÁNÍ: Určete koeficient u

a) $(z-5)^3$

b) $(z-5)^{-2}$

c) $(z-5)^{-7}$

d) $(z-5)^{21}$

v Laurentově řadě $\sum_{n=-\infty}^{10} 3^n (z-5)^{2n-1}$.

RESENÍ:

a) $2n-1=3$, $n=2 \leq 10$ — koeficient u $(z-5)^3$ je $3^n\big|_{n=2} = 9$

b) $2n-1=-2$, $n=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ — koeficient u $(z-5)^{-2}$ je 0

c) $2n-1=-7$, $n=-3 \leq 10$ — koeficient u $(z-5)^{-7}$ je $3^n\big|_{n=-3} = \frac{1}{27}$

d) $2n-1=21$, $n=11 > 10$ — koeficient u $(z-5)^{21}$ je 0

Rozvoj funkcí do Laurentových řad

středa 28. října 2020 14:59

ZADÁNÍ:

Rozložte fci $f(z)=\frac{1}{z^3-z^2}$ do Laurentovy řady na

a) maximálním prstencovém okolí bodu $z_0=1$ a toto okolí určete.
b) maximálním okolí ∞ a toto okolí určete.

ŘEŠENÍ:

a)

$$\frac{1}{z^3-z^2}, \quad z_0=1$$

$$\frac{1}{z^3-z^2}=\frac{1}{z^2(z-1)}$$

Maximální mezikruží je $P(1;0,1)$, tj. $0<|z-1|<1$, a na tom budeme tedy hledat rozvoj.

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z^2}$$

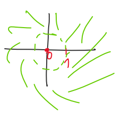
- $\frac{1}{z-1}$ už nepotřebuje žádnou práci (má správný střed)

- $\frac{1}{z^2} \underset{w=z-1}{=} \frac{1}{(w+1)^2} = -\left(\frac{1}{w+1}\right)' \underset{|w|<1}{=} -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n$

$$\Longrightarrow \frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n \quad \text{pro } 0<|z-1|<1$$

b)

$$\frac{1}{z^3-z^2}=\frac{1}{z^2(z-1)} \quad \text{na okolí } \infty$$



$P(0;1,\infty)$

- $\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{z-1}$

- $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \overset{|\frac{1}{z}|<1}{=} \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

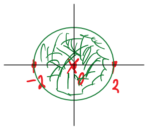
$$\Longrightarrow \frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{-3}z^n \quad \text{na } P(0;1,\infty), \text{ tj. pro } 1<|z|$$

ZADÁNÍ: Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)=\frac{1}{z^8-4z^6}$ na

a) maximálním prstencovém okolí bodu 0 a toto okolí určete.
b) maximálním okolí ∞ a toto okolí určete.

ŘEŠENÍ: $\frac{1}{z^8-4z^6}=\frac{1}{z^6(z^2-4)}$

a)



$P(0;0;2)$

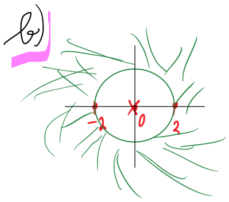
$$\frac{1}{z^8-4z^6} = \frac{1}{z^6(z^2-4)} = \frac{1}{z^6}\,\frac{1}{z^2-4} = \dots \overset{(*)}{=} -\frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-6}}{4^{n+1}} = -\frac{1}{4z^6}-\frac{1}{16z^4}-\frac{1}{64z^2}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^{2n-6}}{4^{n+1}} \quad \text{pro } 0<|z|<2$$

- $$\frac{1}{z^2-4} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^{n+1}} \quad (*)$$

$\left|\frac{z^2}{4}\right|<1$

$|z|<2$

b)



$P(0;2;\infty)$

$$\frac{1}{z^8-4z^6} = \frac{1}{z^6(z^2-4)} = \frac{1}{z^6}\,\frac{1}{z^2-4} = \dots \overset{(*)}{=} \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{2n+8}} \underset{[n\to -n]}{=} \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^{2n-8}}{4^n} \quad \text{pro } |z|>2.$$

- $$\frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{2n+2}} \quad (*)$$

$\left|\frac{4}{z^2}\right|<1$

$|z|>2$

ZADÁNÍ: Naleznete hlavní část Laurentovy řady fce $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^5}$ na maximálním prstencovém okolí bodu 0 a toto okolí určete.

ŘEŠENÍ:

f je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\Longrightarrow$ maximální prstencové okolí bodu 0, kde lze f rozvinout do Laurentovy řady, je $P(0;0;\infty)$.

$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{z-\sin z}{z^5} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^4} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^4}-\left(-\frac{1}{6z^2}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} = \frac{1}{6z^2}-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}$$

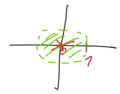
$\Longrightarrow$ Hlavní část Laurentova rozvoje fce f na $P(0;0;\infty)$ je $\frac{1}{6z^2}$.

ZADÁNÍ: Rozviňte fci $f(z)=\frac{z+1}{z(1-z)^2}$ do Laurentovy řady na

a) maximálním prstencovém okolí bodu 0 a toto okolí určete.

b) maximálním okolí ∞ a toto okolí určete.

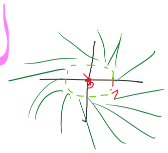
ŘEŠENÍ: $f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{z+1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{z(1-z)^2}$

a)  $P(0;0,1)$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow f(z) \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)z^n + \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)z^n \quad \text{pro } 0<|z|<1$$

b)  $P(0;1;\infty)$

· $\frac{1}{(1-w)^2} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n$ pro $|w|<1$ $\Longrightarrow$ $\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{z}\right)^n$ ($w=\frac{1}{z}$) pro $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

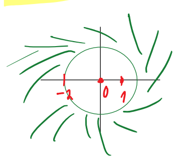
· Tedy $\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$ pro $\left|\frac{1}{z}\right|<1$
$|z|>1$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+3}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{z^n} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{z^n} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{z^n}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n-3}{z^n} \underset{n\to -n}{=} \frac{1}{z^2} - \sum_{n=-\infty}^{-3}(2n+3)z^n \quad \text{pro } |z|>1.$$

ZADÁNÍ: Rozviňte fci $f(z) = \frac{1}{z^8+z^7-2z^6}$ do Laurentovy řady na maximálním okolí ∞ a toto okolí určete.

ŘEŠENÍ:

 $P(0,2,\infty)$

· $\frac{1}{z^8+z^7-2z^6} = \frac{1}{z^6(z^2+z-2)} = \frac{1}{z^6}\,\frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z^6}\,\frac{1}{(z+2)(z-1)}$

$\big[\, z^2+z-2 = (z+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (z+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$
$(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = 0$
$z+\frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$
$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$
$z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Viètovy vzorce:
$z^2+z-2 = (z+2)(z-1)$ $\big]$

· $\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{z+2} = \dots \overset{(*),(**)}{=} \dots$

$\big[\, A = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3} \qquad B = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \,\big]$

· $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$ $(*)$

· $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}$ $(**)$

$$\dots = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 2^n}{3}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 2^n}{3} z^{-(n+1)} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1-(-1)^{-(k+1)}2^{-(k+1)}}{3} z^k$$

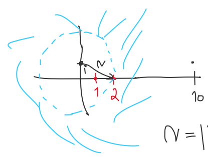
$$-(n+1)=k$$
$$-n-1=k$$
$$n=-k-1$$

$$\Longrightarrow \quad \cdot\ \frac{1}{z^8+z^7-2z^6} = \frac{1}{z^6}\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{z^6}\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1-(-1)^{-(k+1)}2^{-(k+1)}}{3} z^k = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1-(-1)^{-(k+1)}2^{-(k+1)}}{3} z^{k-6}$$ pro z: $|z|>2$

ZADÁNÍ: Rozviňte fci $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}+z^2+2z$ do Laurentovy řady se středem i na maximálním mezikruží, které obsahuje bod $10+i$.

ŘEŠENÍ:

Nejprve je třeba určit, o jaké mezikruží se vlastně jedná.



$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}+z^2+2z$$

$$r=|i-2|=\sqrt{5}$$

Maximální takové mezikruží je $P(i;\sqrt{5},\infty)$.

$w=z-i$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}+z^2+2z = \frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)}+(w+i)^2+2(w+i) = 2w+2i+w^2+2wi-1+\frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)} = w^2+(2+2i)w-1+2i+\frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)}$$

$$\cdot\ \frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)} = \frac{A}{w+i-1}+\frac{B}{w+i-2} = -\frac{1}{w+i-1}+\frac{1}{w+i-2}$$

$$A=\frac{1}{1-i+i-2}=-1$$
$$B=\frac{1}{2-i+i-1}=1$$

$$\cdot\ \frac{1}{w+i-1} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{1-i}{w}} \overset{\left|\frac{1-i}{w}\right|<1}{=} \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{w^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^{n-1}}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(1-i)^{-n-1}(z-i)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

$$\cdot\ \frac{1}{w+i-2} = \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^{n-1}}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)} = -\frac{1}{w+i-1}+\frac{1}{w+i-2} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)}+z^2+2z = w^2+(2+2i)w-1+2i+\frac{1}{(w+i-1)(w+i-2)} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n + 2i-1+(2+2i)(z-i)+(z-i)^2$$ na $P(i;\sqrt{5},\infty)$

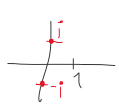
ZADÁNÍ: Určete maximální mezikruží se středem v 1 tak, aby Laurentův rozvoj fce $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ na tomto mezikruží:

a) měl pouze regulární část

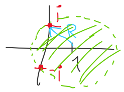
b) měl nenulovou hlavní část.

Řešení:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

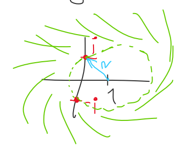


a) na okolí 1 jen regulární část



$P(1;0,|1-i|)=P(1;0,\sqrt{2})$

b) na mezik. nenulová hlavní část



$P(1;|1-i|,\infty)=P(1;\sqrt{2},\infty)$

ZADÁNÍ: Rozložte fci $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ do Laurentovy řady na mezikruží $P(0;1,3)$.

ŘEŠENÍ:

$P(0;1,3)=\{z\in\mathbb{C};1<|z|<3\}$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-3}=-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{z-3}$$

$B=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$

$C=\frac{1}{(3-1)^2}=\frac{1}{4}$

DOPOČET A: $1=A(z-1)(z-3)-\frac{1}{2}(z-3)+\frac{1}{4}(z-1)^2$

$\overset{\text{koeficient u } z^2}{\Longrightarrow} 0=A+\frac{1}{4}\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$

- $\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\overset{|\frac{z}{3}|<1}{=}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$
- $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\overset{|\frac{1}{z}|<1}{=}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}=\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n$
- $\frac{1}{(z-1)^2}=-\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n\right)'=-\sum_{n=-\infty}^{-1}nz^{n-1}=-\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)z^n$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(n+1)z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad\text{pro } 1<|z|<3$$

ZADÁNÍ: Klasifikujte izolovanou singularitu funkce $f(z)$ v bodě z_0 a určete $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.

a) $f(z)=\sum_{n=-20}^{\infty} 5^n (z+i)^{4n+7}$, $z\in P(-i)$, $z_0=-i$

b) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{100} \frac{(z-1)^{2n}}{(100-n)!}$, $z\in P(1)$, $z_0=1$

c) $f(z)=\sum_{n=-15}^{\infty} n\, z^{2n+30}$, $z\in P(0)$, $z_0=0$

ŘEŠENÍ:

a) nejmenší záporná mocnina $(z+i)$ obsažená v Laurentově řadě $\sum_{n=-20}^{\infty} 5^n (z+i)^{4n+7}$ je $4n+7\Big|_{n=-20}=-73$.

- Bod $z_0=-i$ je tedy pól řádu 73.
- koeficient u $(z+i)^{-1}$ je $5^n\Big|_{n=-2}=\frac{1}{25}$, neboť $4n+7=-1 \Leftrightarrow n=-2 \geq -20$.

Tedy $\operatorname{res}_{-i} f(z)=\frac{1}{25}$.

b) Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{100} \frac{(z-1)^{2n}}{(100-n)!}$ obsahuje nekonečně mnoho záporných mocnin $(z-1)$.

- Bod $z_0=1$ je tedy podstatná singularita.
- koeficient u $(z-1)^{-1}$ je 0, neboť $2n=-1 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

Tedy $\operatorname{res}_1 f(z)=0$.

c) Laurentova řada $f(z)=\sum_{n=-15}^{\infty} n\, z^{2n+30}$ obsahuje pouze nezáporné mocniny z, neboť nejmenší exponent, který se tam objevuje je $2n+30\Big|_{n=-15}=-30+30=0\geq 0$.

- Bod $z_0=0$ je tedy odstranitelná singularita, a tedy $\operatorname{res}_0 f(z)=0$.

ZADÁNÍ:

a) Nalezněte Laurentův rozvoj funkce $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^5}$ na maximálním prstencovém okolí bodu 0.

b) Klasifikujte izolované singularity funkce $f(z)$ a určete v nich reziduum.

ŘEŠENÍ:

a) již bylo. Platí $f(z)=\frac{1}{6z^2}-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}$ pro $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

b) IZ .. 0

0: Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí 0 obsahuje záporné mocniny z, a ta nejmenší je (-2). $\Longrightarrow$ 0 je pól řádu 2.

- (-1). mocnina z se v Laurentově rozvoji funkce f na prstencovém okolí 0 neobjevuje $\Longrightarrow$ koeficient u z^{-1} je $0 \Longrightarrow \operatorname{res}_0 f(z)=0$.

ZADÁNÍ: Je dána funkce $f(z)=\frac{1}{z^8-4z^6}$.

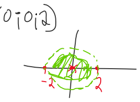
a) Nalezněte Laurentovu řadu fce f v maximálním prstencovém okolí 0 a toto okolí určete.

b) Vypočtěte všechny izolované singularity fce f.

c) Vypočtěte rezidua ve všech izolovaných singularitách.

ŘEŠENÍ:

a) Tuto úlohu jsme již řešili. Vyjde $\frac{1}{z^8-4z^6}=\frac{1}{z^6(z-2)(z+2)}=-\frac{1}{4z^6}-\frac{1}{16z^4}-\frac{1}{64z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^{n+4}}$ na $P(0;0;2)$



b+c) Izolované singularity jsou body $0, \pm 2$.

I nulou není třeba další práce, neboť máme Laurentův rozvoj fce f na prstencovém okolí 0.

Tedy rovnou vidíme, že 0 je pól řádu 6 a $\operatorname{res}_0 f=0$

± 2 jsou jednoduché póly

$$\operatorname{res}_2 f=\frac{1}{2^6(2+2)}\cdot\frac{1}{(z-2)'}\Big|_{z=2}=\frac{1}{4\cdot 2^6}\cdot 1=\frac{1}{2^8}$$

$$\operatorname{res}_{-2} f=\frac{1}{(-2)^6(-2-2)}\cdot\frac{1}{(z+2)'}\Big|_{z=-2}=\frac{1}{-4\cdot 2^6}\cdot 1=-\frac{1}{2^8}$$

Jsou-li f, g holomorfní funkce na okolí bodu $z_0\in\mathbb{C}$ a **z_0 je jednoduchý kořen funkce g**, potom $res_{z_0}\frac{f}{g}=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$ (pozor, že derivujeme skutečně jenom ve jmenovateli!).

ZADÁNÍ: Je dána funkce $f(z)=(z-1)^8-\frac{e}{(z-1)^3}-\frac{e}{4(z-1)}+\frac{e^z}{(z-1)^3}$

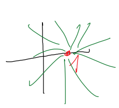
a) Nalezněte Laurentovu řadu fce f v maximálním prstencovém okolí 1 a toto okolí určete.

b) Určete hlavní a regulární část rozvoje z a).

c) Vypočtěte všechny izolované singularity fce f a určete v nich reziduum.

ŘEŠENÍ:

a) $(z-1)$, $z_0=1$



$P(1;0;\infty)$

$|z-1|>0$

$$f(z)=(z-1)^8-\frac{e}{(z-1)^3}-\frac{e}{4(z-1)}+\frac{e^z}{(z-1)^3}=\dots=(z-1)^8-\frac{e}{(z-1)^3}-\frac{e}{4(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^n}{n!}=(z-1)^8-\frac{e}{(z-1)^3}-\frac{e}{4(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^{n-3}}{n!}\text{ pro }|z-1|>0$$

• $e^z=e^{(z-1)+1}=e\,e^{(z-1)}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^n}{n!}$

$\left[\, e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\quad\forall w\in\mathbb{C}\,\right]$

b) $f(z)=(z-1)^8-\frac{e}{(z-1)^3}-\frac{e}{4(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^{n-3}}{n!}$ pro $|z-1|>0$

• hlavní část ... $\cdots - \frac{e}{(z-1)^3} - \frac{e}{4(z-1)} + \frac{e}{0!}(z-1)^{-3} + \frac{e}{1!}(z-1)^{-2} + \frac{e}{2!}(z-1)^{-1} = \frac{e}{(z-1)^2} + \left(\frac{e}{2} - \frac{e}{4}\right)\frac{1}{(z-1)} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{4(z-1)}$

• regulární část ... $(z-1)^8 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e(z-1)^{n-3}}{n!}$

c) IS.. 1

1: • z hlavní části Laurentova rozvoje funkce f na $P(1)$ vidíme, že 1 je pól 2-násobný pól funkce $f(z)$

• koeficient u $(z-1)^{-1}$ je $\frac{e}{4} \Rightarrow \operatorname{res}_1 f(z) = \frac{e}{4}$

ZADÁNÍ: Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$ a určete v nich reziduum.

ŘEŠENÍ: $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2} = \frac{z+1}{z^2(z^2+z-2)} = \frac{z+1}{z^2(z-1)(z+2)}$

$\left[z^2+z-2 = (z-1)(z+2) \right]$

IS: 0, 1, −2

0: 0 není nulový bod čitatele
0 2-násobný kořen jmenovatele

$0 < 2 \Rightarrow$ 0 je pól řádu $2-0=2$

$\cdot \operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0} \left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z+1}{(z^2+z-2)}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+z-2)-(2z+1)(z+1)}{(z^2+z-2)^2} = \frac{-2-1}{4} = -\frac{3}{4}$

Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ **k-násobný pól** funkce f, pak $res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$.

1: 1 není nulový bod čitatele
1 jednoduchý kořen jmenovatele

$0 < 1 \Rightarrow$ 1 je pól řádu $1-0=1$
jednoduchý pól

$\cdot \operatorname{res}_1 f(z) = \operatorname{res}_1 \frac{z+1}{z^2(z-1)(z+2)} = \frac{\left.\frac{z+1}{z^2(z+2)}\right|_{z=1}}{\left.(z-1)'\right|_{z=1}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$

−2:
−2 není nulový bod čitatele
−2 jednoduchý kořen jmenovatele

$0 < 1 \Rightarrow$ −2 je pól řádu $1-0=1$
jednoduchý pól

$\cdot \operatorname{res}_{-2} f(z) = \operatorname{res}_{-2} \frac{z+1}{z^2(z-1)(z+2)} = \frac{\left.\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right|_{z=-2}}{\left.(z+2)'\right|_{z=-2}} = \frac{\frac{-1}{-12}}{1} = \frac{1}{12}$

ZADÁNÍ: Vyšetřete všechny izolované singularity fce f, kde

a) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1}$

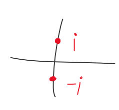
b) $\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{z})}$

c) $\frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$

ŘEŠENÍ:

a) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1} = \frac{z+i}{(z^2+1)^2} = \frac{z+i}{(z-i)^2(z+i)^2}$

Fce f má 2 izolované singularity, a to $\pm i$



i: • není nulový bod čitatele
• je dvojnásobný nulový bod jmenovatele

$\Rightarrow$ pól řádu $2-0=2$

−i: • je jednonásobný nulový bod čitatele
• je dvojnásobný nulový bod jmenovatele

$\Rightarrow$ pól řádu $2-1=1$

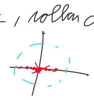
b) $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2(\frac{1}{z})}$

Nejprve je třeba si rozmyslet, co jsou izolované singularity fce f.

Pozor, 0 není izolovaná singularita fce f, neboť f není holomorfní na žádném prstencovém okolí 0.

Libovolné prstencové okolí 0 totiž obsahuje nulový bod funkce $\sin\frac{1}{z}$, takže "libovolně blízko 0 dělíme nulou", tedy funkce f není holomorfní na žádném prstencovém okolí 0.

- $\sin(\frac{1}{z})=0 \iff \frac{1}{z}=k\pi$ pro nějaké $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ [zřejmě $k\neq 0$, neboť levá strana]
- $z=\frac{1}{k\pi}$, volbou dostatečně velkého $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ se dostaneme do libovolného prstencového okolí 0



- Nulové body fce $\sin(\frac{1}{z})$ ale izolované singularity jsou [rozmyslete si, že tam problém s „hromaděním nulových bodů" jako v 0 nenastává.]

Fce f má tedy izolované singularity v bodech $z=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

- $z_0=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:
- není nulový bod čitatele
- $\sin(\frac{1}{z})\Big|_{z=\frac{1}{k\pi}}=0$

$$\left(\sin\left(\tfrac{1}{z}\right)\right)'\Big|_{z=\frac{1}{k\pi}}=-\frac{\cos(\frac{1}{z})}{z^2}\Big|_{z=\frac{1}{k\pi}}=-(k\pi)^2(-1)^k\underset{k\neq 0}{\neq} 0 \implies 1\text{-násobné kořeny } \sin(\tfrac{1}{z}) \implies 2\cdot 1=2\text{-násobné kořeny } \sin^2(\tfrac{1}{z})$$

- dvojnásobný nulový bod jmenovatele $\implies$ pól řádu $2-0=2$

c)

$f(z)=\dfrac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$

Jaké jsou izolované singularity?

- Zřejmě 0 a 3 jsou izolované singularity.
- Dále řešení rovnice $2-\cos z=0$.
- $\cos z=2$ klasicky vyřešíme a dostaneme, že rovnice má nekonečně mnoho řešení tvaru $z_k=2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$, $k\in\mathbb{Z}$
- Všechny izolované singularity fce $\frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$ jsou tedy body $\{0,3\}\cup\{2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3}) : k\in\mathbb{Z}\}$.

- Žádné nulové body čitatele.

0: Není kořen $(2-\cos z)$ ani $(z-3)$; 5-násobný kořen z^5 $\implies 5+0+0=5$-násobný kořen $z^5(2-\cos z)(z-3)$.

0 je tedy pól řádu 5

3: Není kořen $(2-\cos z)$ ani z^5, jednoduchý kořen $(z-3)$ $\Longrightarrow$ $0+0+1 = 1$-násobný kořen $z^5(2-\cos z)(z-3)$.

3 je tedy jednoduchý pól

$2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$:

- Označme $z_0 = 2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$, kde $k\in\mathbb{Z}$

Není kořen $(2-\cos z)$ ani $(z-3)$

$(2-\cos z)\Big|_{z=z_0} = 0$

$(2-\cos z)'\Big|_{z=z_0} = \sin z\Big|_{z=z_0} \neq 0 \Longrightarrow$ jednoduchý kořen $(2-\cos z)$

$\Longrightarrow 0+1+0 = 1$-násobný kořen $z^5(2-\cos z)(z-3)$.

$2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$, $k\in\mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly

---

ZADÁNÍ: Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + \cos z}$ a určete v nich reziduum.

ŘEŠENÍ:

$$\sin z + \cos z = 0$$
$$\sin z = -\cos z$$
$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$
$$e^{iz}-e^{-iz} = -i\,e^{iz} - i\,e^{-iz} \;/\, e^{iz}$$
$$e^{2iz} - 1 = -i\,e^{2iz} - i$$
$$(1+i)e^{2iz} = 1-i$$
$$e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i} \Longleftrightarrow e^{2iz} = e^{-\frac{\pi}{2}i} \Longleftrightarrow 2iz = -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$$
$$z = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ pro } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \text{IS: } \boxed{-\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ pro } k\in\mathbb{Z}}$$

- násobnost $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ jako kořene čitatele: není to kořen
- násobnost $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ jako kořene jmenovatele: $(\sin z + \cos z)\Big|_{z=-\frac{\pi}{4}+k\pi} = 0$

$$(\sin z + \cos z)'\Big|_{z=-\frac{\pi}{4}+k\pi} = \cos z - \sin z\Big|_{z=-\frac{\pi}{4}+k\pi} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(z+\pi) = -\cos z$

$\sin(z+\pi) = -\sin z$

$$= (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)^k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= (-1)^k\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= (-1)^k\sqrt{2} \neq 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ jsou jednonásobné kořeny jmenovatele}$$

$-\frac{\pi}{4}+k\pi$ jsou póly řádu $1-0=1$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{1}{\sin z+\cos z} = \frac{1}{(\sin z+\cos z)'\big|_{z=-\frac{\pi}{4}+k\pi}} = \frac{1}{(-1)^k\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(-1)^k 2} = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ZADÁNÍ: Vyšetřete všechny izolované singularity fce f a spočtěte v nich reziduum.

a) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$

b) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$

c) $f(z)=\dfrac{z+1}{1-e^{2\pi i z}}$

d) $f(z)=\dfrac{z}{2e^z-2\sin z-2-z^2}$, kde vyšetřujte pouze bod $z=0$

e) $f(z)=\dfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{2\cos z+2z-\pi}$, kde vyšetřujte pouze bod $z=\frac{\pi}{2}$

f) $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$

ŘEŠENÍ:

a) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$

Izolované singularity jsou pouze nulové body jmenovatele, tedy 0 a π.

0: není kořen čitatele, 2-násobný kořen jmenovatele $\Longrightarrow$ 0 je pól řádu $2-0=2$

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{z-\pi}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-(z-\pi)\sin z-\cos z}{(z-\pi)^2} = -\frac{0+1}{(-\pi)^2} = -\frac{1}{\pi^2}$$

Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ **k-násobný pól** funkce f, pak $res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}$.

π: není kořen čitatele, 1-násobný kořen jmenovatele $\Longrightarrow$ π je pól řádu $1-0=1$

Tedy $\operatorname{res}_\pi \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)} = \dfrac{\cos(\pi)}{\pi^2}\,\dfrac{1}{(z-\pi)'\big|_{z=\pi}} = \dfrac{-1}{\pi^2}\,\dfrac{1}{1} = -\dfrac{1}{\pi^2}$

b) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+z^3-2z^2} = \dfrac{z+1}{z^2(z^2+z-2)} = \dfrac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)}$ IS... $0, -2, 1$

$z^2+z-2=0$

$(z+2)(z-1)=0$

0: není kořen čitatele
2-násobný kořen jmenovatele $\Longrightarrow$ 0 je pól řádu $2-0=2$

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z+1}{z^2+z-2}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+z-2-(2z+1)(z+1)}{(z^2+z-2)^2} = \frac{-2-1}{4} = -\frac{3}{4}$$

1: není kořen čitatele
1-násobný kořen jmenovatele $\Longrightarrow$ 1 je pól řádu $1-0=1$

1 je jednonásobný kořen $(z-1)$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{res}_1 \frac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)} = \frac{2}{1\cdot 3\cdot 1} = \frac{2}{3}$

$(z-1)'\Big|_{z=1} = 1$

-2: není kořen čitatele
1-násobný kořen jmenovatele $\Longrightarrow$ -2 je pól řádu $1-0=1$

-2 je jednonásobný kořen $(z+2)$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{res}_1 \frac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)} = \frac{-3}{4\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{1}{4}$

$(z+2)'\Big|_{z=1} = 1$

c) $f(z) = \dfrac{z+1}{1-e^{2\pi i z}}$

$1-e^{2\pi i z} = 0 \iff e^{2\pi i z} = 1 = e^0 \iff 2\pi i z = 2k\pi i \iff z = k$, kde $k\in\mathbb{Z}$

IS ... $z=k$, kde $k\in\mathbb{Z}$

• $k=-1$ je 1-násobný kořen čitatele

$1-e^{2\pi i z}\Big|_{z=-1} = 0$

$(1-e^{2\pi i z})'\Big|_{z=-1} = -2\pi i\, e^{2\pi i} = -2\pi i \neq 0$

$\Longrightarrow$ -1 je 1-násobný kořen jmenovatele

násobnost kořene v čitateli $= 1 \geq 1 =$ násobnost kořene ve jmenovateli $\Longrightarrow$ 1 je odstranitelná singularita

$\Longrightarrow \operatorname{res}_1 f(z) = 0$

• $k\neq -1$ není kořen čitatele

$1-e^{2\pi i z}\Big|_{z=k} = 0$

$(1-e^{2\pi i z})'\Big|_{z=k} = -2\pi i \neq 0$

$\Longrightarrow$ $k\neq -1$ je 1-násobný kořen jmenovatele

- $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ je pól řádu $1-0=1$

- $\operatorname{res}_k \dfrac{z+1}{1-e^{2\pi i z}} = \dfrac{k+1}{(1-e^{2\pi i z})'\big|_{z=k}} = \dfrac{k+1}{-2\pi i} = \dfrac{k+1}{2\pi} i$

d) $f(z) = \dfrac{z}{2e^z - 2\sin z - 2 - z^2}$ | vyšetřujeme pouze $z=0$

- 0 je 1-násobný kořen čitatele

- $(2e^z - 2\sin z - 2 - z^2)\big|_{z=0} = 0$

$(2e^z - 2\sin z - 2 - z^2)'\big|_{z=0} = 2e^z - 2\cos z - 2z\big|_{z=0} = 2-2-0=0$

$(2e^z - 2\sin z - 2 - z^2)''\big|_{z=0} = (2e^z - 2\cos z - 2z)'\big|_{z=0} = 2e^z + 2\sin z - 2\big|_{z=0} = 2+0-2=0$

$(2e^z - 2\sin z - 2 - z^2)'''\big|_{z=0} = (2e^z + 2\sin z - 2)'\big|_{z=0} = 2e^z + 2\cos z\big|_{z=0} = 2+2 \neq 0$

$\Longrightarrow$ 0 je 3-násobný kořen jmenovatele

$\Longrightarrow$ 0 je pól řádu $3-1=2$

$$\operatorname{res}_0 \frac{z}{2e^z - 2\sin z - 2 - z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{2e^z - 2\sin z - 2 - z^2} \overset{\text{LH } \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{3z^2}{2e^z - 2\cos z - 2z} \overset{\text{LH } \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{6z}{2e^z + 2\sin z - 2}$$

$$\overset{\text{LH } \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{6}{2e^z + 2\cos z} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

e) $f(z) = \dfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{2\cos z + 2z - \pi}$ | vyšetřujeme pouze $z=\frac{\pi}{2}$

- $\frac{\pi}{2}$ je 2-násobný kořen čitatele

- $2\cos z + 2z - \pi\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0 + \pi - \pi = 0$

$(2\cos z + 2z - \pi)'\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -2\sin z + 2\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -2+2=0$

$(2\cos z + 2z - \pi)''\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = (-2\sin z + 2)'\big|_{\frac{\pi}{2}} = -2\cos z\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

$(2\cos z + 2z - \pi)'''\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = (-2\cos z)'\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\sin z\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2 \neq 0$

$\Longrightarrow \frac{\pi}{2}$ je 3-násobný kořen jmenovatele

$\Longrightarrow \frac{\pi}{2}$ je pól řádu $3-2=1$

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{2\cos z+2z-\pi} \overset{\text{pól řádu 1}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} (z-\tfrac{\pi}{2}) f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{2\cos z+2z-\pi} \overset{\text{LH, "}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{3(z-\frac{\pi}{2})^2}{-2\sin z+2} \overset{\text{LH, "}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{6(z-\frac{\pi}{2})}{-2\cos z} \overset{\text{LH, "}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{6}{2\sin z} = \frac{6}{2} = 3$$

f) $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$

$\sin z = 0 \iff z = k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$ IS ... $k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$

- nejsou to kořeny čitatele

$z\sin z\big|_{z=k\pi} = 0$

$(z\sin z)'\big|_{z=k\pi} = \sin z + z\cos z\big|_{z=k\pi} = 0+(k\pi)(-1)^k$

$k\neq 0$:

$(z\sin z)'\big|_{z=k\pi} \neq 0$ body $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, jsou 1-násobné kořeny jmenovatele

$k\pi$, $k\neq 0$, jsou jednoduché póly

$$\operatorname{res}_{k\pi} \frac{1}{z\sin z} = \frac{1}{(z\sin z)'\big|_{z=k\pi}} = \frac{1}{(-1)^k k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi} \text{ pro } k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

- $k=0$ [tedy $z=0$]:

$(z\sin z)'\big|_{z=0} = \sin z + z\cos z\big|_{z=0} = 0+0=0$

$(z\sin z)''\big|_{z=0} = (\sin z + z\cos z)'\big|_{z=0} = \cos z+\cos z - z\sin z\big|_{z=0} = 1+1-0\neq 0$

0 je 2-násobný kořen jmenovatele

0 je pól řádu $2-0=2$

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{z\sin z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{z\sin z}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} \overset{\text{LH, "}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - \cos z - z\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{-z}{2\cos z} = 0$$

ZADÁNÍ: Je dána fce $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

a) Stanovte izolované singularity fce f a určete jejich typ.

b) Stanovte hlavní část Laurentova rozvoje fce f v bodě $z_0=\frac{1}{\pi}$.

ŘEŠENÍ:

a) Zjistíme, že izolované singularity jsou body $\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. A jsou to jednoduché póly. [Viz cvičení, kde jsme vyšetřovali izolované singularity fce $\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{z})}$.]

b) Jak tedy určíme hlavní část Laurentova rozvoje fce f v bodě $\frac{1}{\pi}$?

Z a) víme, že f má v $\frac{1}{\pi}$ jednoduchý pól a tedy víme, že Laurentův rozvoj f v $\frac{1}{\pi}$ je $f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} a_n\left(z-\frac{1}{\pi}\right)^n$ pro vhodné $\{a_n\}_{n=-1}^{\infty}$, kde $a_{-1}\neq 0$.

- Hlavní část má tedy jen jeden člen, a to $\frac{a_{-1}}{z-\frac{1}{\pi}}$.
- Pro určení hlavní části tedy potřebujeme znát pouze a_{-1}, což ale není nic jiného než $\operatorname{res}_{\frac{1}{\pi}} f$.
- $\operatorname{res}_{\frac{1}{\pi}} f=\operatorname{res}_{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})'\big|_{z=\frac{1}{\pi}}}=\frac{1}{-\frac{\cos(\pi)}{(\frac{1}{\pi})^2}}=-\frac{1}{\pi^2(-1)}=\frac{1}{\pi^2}$.

$\Longrightarrow$ Hlavní část Laurentova rozvoje fce f v bodě $\frac{1}{\pi}$ je $\frac{1}{\pi^2(z-\frac{1}{\pi})}$.

7 Reziduová věta a její použití na výpočet jistých integrálů

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **jednoduše souvislá oblast** a C je **kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v Ω**. Nechť $S \subseteq Int\, C$ je **konečná množina**.
Nechť **f je holomorfní funkce na $\Omega \setminus S$**. Potom $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} res_{z_0} f$.

ZADÁNÍ: Spočtěte následující křivkové integrály.

a) $\int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z|=3$.

b) $\int_C \frac{1}{z\sin z}\,dz$, kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $1+\pi+i,\ \pi-1+i,\ 1+\pi-2i,\ \pi-1-2i$.

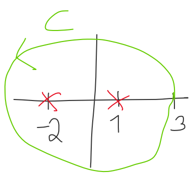
c) $\int_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\,dz$, kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2},\ 2-\frac{i}{2},\ -\frac{1}{2}+i,\ 2+i$.

d) $\int_C \frac{z}{1-e^z} + \frac{\sin z}{(z-10)^8}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-\pi i|=4$.

e) $\int_C e^{\frac{4}{z-2}}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

ŘEŠENÍ:

a) $\int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z|=3$.

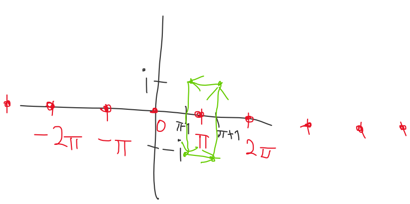


[$\Omega=\mathbb{C}$, $S=\{1,2\}$, $S \subseteq Int\,C$, f je holomorfní na $\Omega\setminus S = \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$.]

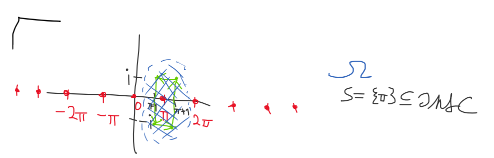
$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz \overset{\text{reziduová věta}}{=} 2\pi i\left(res_1\left(\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\right) + res_{-2}\left(\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\right)\right) = 2\pi i\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right) = 2\pi i.$$

[1 je pól řádu 2, -2 je jednoduchý pól, snadný výpočet]

b) $\int_C \frac{1}{z\sin z}\,dz$, kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $1+\pi+i,\ \pi-1+i,\ 1+\pi-2i,\ \pi-1-2i$.



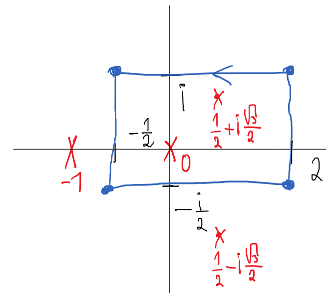
[$\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$]



$$\int_C \frac{1}{z\sin z}\,dz \overset{\text{reziduová věta}}{=} 2\pi i\, res_\pi\left(\frac{1}{z\sin z}\right) \overset{\text{počítali jsme}}{=} 2\pi i\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -2i.$$

c) $$\int_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}_0 \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} + \operatorname{res}_{\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}} \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\right) = \dots = 2\pi i\left(2-\frac12-\frac{\sqrt3}{6}i\right) = \pi\left(\frac{\sqrt3}{3}+3i\right)$$

IS: $0,\ -1,\ \frac12+i\frac{\sqrt3}{2},\ \frac12-i\frac{\sqrt3}{2}$



$0<\frac{\sqrt3}{2}<\frac{\sqrt4}{2}=1$

$-\frac{\sqrt3}{2}<-\frac12 \quad \left(\frac{\sqrt3}{2}>\frac{\sqrt1}{2}=\frac12\right)$

$z^3+1=0$

$z^3=-1$

$|z|^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)=1(\cos\pi+i\sin\pi)$

$|z|=1,\quad 3\varphi=\pi+2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

$\varphi=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$

$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}$

$z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z_2=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}$

$$\cdot\ \operatorname{res}_0\frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} \underset{\uparrow\ \text{pól řádu 2}}{=} \frac{1}{1!}\lim_{z\to0}\left(z^2\frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\right)' = \lim_{z\to0}\left(\frac{2z-1}{z^3+1}\right)' = \lim_{z\to0}\frac{2(z^3+1)-3z^2(2z-1)}{(z^3+1)^2}=\frac{2-0}{1}=2$$

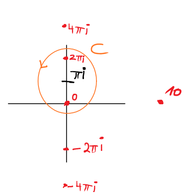
$$\cdot\ \operatorname{res}_{\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}\frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} = \operatorname{res}_{\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}\frac{\frac{2z-1}{z^2}}{z^3+1} = \frac{g\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)}{h'\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)} = \frac{\frac{1+i\sqrt3-1}{\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}}{3z^2\big|_{z=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}} = \frac{\frac{i\sqrt3}{-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}}{3\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)} = i\frac{\sqrt3}{3\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)^2} =$$

$$= i\frac{\sqrt3}{3\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)} = i\frac{2\sqrt3}{3(-1-\sqrt3 i)} = i\frac{2\sqrt3(-1+\sqrt3 i)}{3(1+3)} = i\frac{\sqrt3}{6}(-1+\sqrt3 i) = -\frac12-\frac{\sqrt3}{6}i$$

$\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=\frac14+\frac{\sqrt3}{2}i-\frac34=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$

$\left(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=\frac14-\frac{\sqrt3}{2}i-\frac34=-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i$

d) $\int_C \frac{z}{1-e^z}+\frac{\sin z}{(z-10)^8}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-\pi i|=4$



$\cdot$ 10 $\quad \int_C \frac{\sin z}{(z-10)^8}\,dz=0$ ... Cauchyova věta

Residuová věta

$$\cdot \int_C \frac{z}{1-e^z} + \frac{\sin z}{(z-10)^8}\,dz = \int_C \frac{z}{1-e^z}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}_0 \frac{z}{1-e^z} + \operatorname{res}_{2\pi i} \frac{z}{1-e^z}\right) = 2\pi i\,(0 - 2\pi i) = \underline{4\pi^2}$$

[$1-e^z=0$
$e^z = 1 = e^0$
$z = 0 + 2k\pi i$ pro $k \in \mathbb{Z}$]

$\cdot\ \underline{\operatorname{res}_0 \frac{z}{1-e^z}:}$

- 0 je jednonásobný kořen čitatele
- $1-e^z\big|_{z=0} = 0$

$(1-e^z)'\big|_{z=0} = -e^z\big|_{z=0} = -1 \neq 0 \implies$ jednonásobný kořen jmenovatele

$1 \geq 1 \implies$ 0 je odstranitelná singularita $\implies$ $\operatorname{res}_0 \frac{z}{1-e^z} = 0$

$\cdot\ \underline{\operatorname{res}_{2\pi i} \frac{z}{1-e^z}:}$

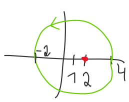
- $2\pi i$ není kořen čitatele

$1-e^z\big|_{z=2\pi i} = 0$

$(1-e^z)'\big|_{z=2\pi i} = -e^z\big|_{z=2\pi i} = -1 \neq 0 \implies 2\pi i$ je jednonásobný kořen jmenovatele

$$\cdot\ \operatorname{res}_{2\pi i} \frac{z}{1-e^z} = \frac{2\pi i}{(1-e^z)'\big|_{z=2\pi i}} = \frac{2\pi i}{-1} = -2\pi i$$

e) $\int_C e^{\frac{4}{z-2}}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice v rovině $|z-1|=3$.



C

Potřebujeme určit $\operatorname{res}_2\left(e^{\frac{4}{z-2}}\right)$.

$$\cdot\ e^{\frac{4}{z-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{4}{z-2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(z-2)^n\, n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(z-2)^n}{4^n\,(-n)!}$$

na prstencovém okolí $P(2;0,\infty)$ bodu 2. [mimochodem, bod 2 je tedy podstatná singularita]

$$\implies \operatorname{res}_2\left(e^{\frac{4}{z-2}}\right) = \frac{1}{4^n\,(-n)!}\Bigg|_{n=-1} = \frac{4}{1!} = 4 \implies \int_C e^{\frac{4}{z-2}}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{residuová věta}}}{=} 2\pi i \operatorname{res}_2\left(e^{\frac{4}{z-2}}\right) = 2\pi i \cdot 4 = \underline{8\pi i}$$

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy a označme $S_+ = \{z\epsilon\mathbb{C}; Q(z) = 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Předpokládejme, že Q nemá žádný reálný kořen a st Q > st P + 1 (tzn. Q má alespoň o 2 vyšší stupeň než P).
Potom $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{z_0\epsilon S_+} res_{z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

ZADÁNÍ: Spočtěte:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

ŘEŠENÍ:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$

- $P \equiv 1$, $Q(z) = (z^2+1)^3$
- st $Q = 6 >$ st $P + 1 = 1$
- Q má kořeny $\pm i$, tedy $S_+ = \{i\}$.

TEDY $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = 2\pi i \, res_i \left(\frac{1}{(z^2+1)^3}\right) = 2\pi i \left(-\frac{6}{2^5} i\right) = \frac{6}{2^4}\pi = \frac{3\pi}{8}$

$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$ i je tedy pól řádu 3

$$res_i \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \dots = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} =$$
$$= \frac{6}{(2i)^5} = \frac{6}{2^5 i} = -\frac{6}{2^5} i$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}dx$

- $P \equiv 1$, $Q(z) = z^2-6z+25$
- st $Q = 2 >$ st $P + 1 = 1$
- Řešením rovnice $z^2-6z+25=0$ dostaneme, že Q má kořeny $3\pm 4i$, tedy $S_+ = \{3+4i\}$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}dx = 2\pi i \, res_{3+4i}\left(\frac{1}{z^2-6z+25}\right) = 2\pi i \left(-\frac{i}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{1}{z^2-6z+25} = \frac{1}{(z-3+4i)(z-3-4i)}$

$$res_{3+4i}\left(\frac{1}{z^2-6z+25}\right) = \frac{1}{3+4i-3+4i} \quad \frac{1}{(z-3-4i)'}\Big|_{z=3+4i} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} + \operatorname{res}_{-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} \right) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt2}{4} i - \frac{\sqrt2}{4} i\right) = 2\pi \frac{\sqrt2}{2} = \sqrt2\,\pi$$

$P(z) = z^2+1$

$Q(z) = z^4+1$

$\operatorname{st} Q = 4 > 2+1 = \operatorname{st} P + 1$

$$z^4+1=0 \Longleftrightarrow z \in \left\{ \frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2} \right\}$$

binomická rovnice

- $$\operatorname{res}_{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{(z^2+1)\big|_{z=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}{(z^4+1)'\big|_{z=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1}{4\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^3} = \frac{1+i}{-2\sqrt2+2i\sqrt2} = \frac12 \frac{1+i}{-\sqrt2+i\sqrt2} = \frac12 \frac{(1+i)(-\sqrt2-i\sqrt2)}{2+2} = \frac18\left(-\sqrt2+\sqrt2+i(-\sqrt2-\sqrt2)\right)$$
  $$= -\frac{2\sqrt2}{8} i = -\frac{\sqrt2}{4} i$$

  [$z^4+1 = \left(z-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)$]

  [$\cdot \left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = \frac12 + i - \frac12 = i$

  $\cdot \left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^3 = i\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = -\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$]

- $$\operatorname{res}_{-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{(z^2+1)\big|_{z=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}{(z^4+1)'\big|_{z=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1}{4\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^3} = \frac{1-i}{2\sqrt2+2i\sqrt2} = \frac12 \frac{1-i}{\sqrt2+i\sqrt2} = \frac12 \frac{(1-i)(\sqrt2-i\sqrt2)}{2+2} = \frac18\left(+\sqrt2-\sqrt2+i(-\sqrt2-\sqrt2)\right)$$
  $$= -\frac{2\sqrt2}{8} = -\frac{\sqrt2}{4} i$$

  [$\cdot \left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = \frac12 - i - \frac12 = -i$

  $\cdot \left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^3 = -i\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$]

Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x)\,dx$:

Nechť P, Q jsou polynomy takové, že st Q > st P (tj. jmenovatel má ostře vyšší stupeň než čitatel) a nechť Q nemá reálné kořeny.

Je-li $\alpha > 0$, potom $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in \{w\in\mathbb{C};\, Q(w)=0 \text{ a } \operatorname{Im} w>0\}} res_{z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$.

Je-li $\alpha < 0$, potom $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = -2\pi i \sum_{z_0 \in \{w\in\mathbb{C};\, Q(w)=0 \text{ a } \operatorname{Im} w<0\}} res_{z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$.

Poněvadž (pro x, $\alpha \in \mathbb{R}$) je $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$, tak (mají-li polynomy P, Q reálné koeficienty) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x)\,dx = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx\right)$ a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x)\,dx = Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx\right)$.

ZADÁNÍ: Z přednášky:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2+7)\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx$

ŘEŠENÍ:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{-i} \left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right) + \operatorname{res}_{-3i} \left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right) \right) \quad (*)$$

[$P(x) \equiv 1$ $\qquad \alpha = -2$

$Q(x) = (x^2+1)(x^2+9)$

$\operatorname{st} Q = 4 > \operatorname{st} P = 0$

$$z^2+1=0 \iff z=\pm i$$
$$z^2+9=0 \iff z=\pm 3i$$
$$Q(z)=0 \iff z\in\{\pm i, \pm 3i\}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right)=\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right)=\frac{e^{-2i(-i)}}{(-i-i)\cdot 1\cdot(-i-3i)(-i+3i)}=\frac{e^{-2}}{(-2i)(-4i)(2i)}=\frac{e^{-2}}{16i^3}=\frac{i}{16e^2}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-3i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right)=\operatorname{res}_{-3i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right)=\frac{e^{-2i(-3i)}}{(-3i-i)(-3i+i)(-3i-3i)\cdot 1}=\frac{e^{-6}}{48i}=-\frac{i}{48e^6}$$

$$\xrightarrow{(*)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx=-2\pi i\left(\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right)+\operatorname{res}_{-3i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}\right)\right)=-2\pi i\left(\frac{i}{16e^2}-\frac{i}{48e^6}\right)$$
$$=\frac{\pi}{8e^2}\left(1-\frac{1}{3e^4}\right)$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx=\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}e^{ix}\,dx\right)\quad (*)$$

$$\cdot\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}e^{ix}\,dx=2\pi i\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{z}{(z^2-2z+2)^2}e^{iz}\right)\quad (**)$$

$P(x)=x$

$Q(x)=(x^2-2x+2)^2$ $\qquad \alpha=1$

$\operatorname{st} Q=4 > \operatorname{st} P=1$

$Q(z)=0:$

$(z^2-2z+2)^2=0$

$z^2-2z+2=0$

$(z-1)^2+1=0$

$(z-1)^2=-1$

$z-1=\pm i$

$z=1\pm i$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{z}{(z^2-2z+2)^2}e^{iz}\right)=\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}e^{iz}\right)\overset{\text{pól řádu 2}}{=}\lim_{z\to 1+i}\left((z-1-i)^2\frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}e^{iz}\right)'=\lim_{z\to 1+i}\left(\frac{z e^{iz}}{(z-1+i)^2}\right)'=$$
$$=\dots=\lim_{z\to 1+i}\frac{ie^{iz}(z^2-(1-2i)z+1+i)}{(z-1+i)^3}=\frac{ie^{i(1+i)}\left((1+i)^2-(1-2i)(1+i)+1+i\right)}{(1+i-1+i)^3}=\frac{ie^{-1+i}(2i+2i(1+i))}{(2i)^3}=$$
$$=\frac{e^{-1+i}(4i-2)}{8i^2}=e^{-1+i}\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{(**)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}e^{ix}\,dx=2\pi i\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{z}{(z^2-2z+2)^2}e^{iz}\right)=2\pi i\,e^{-1+i}\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)=e^{-1+i}\pi\left(1+\frac{i}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{(*)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx=\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}e^{ix}\,dx\right)=\operatorname{Im}\left(e^{-1+i}\pi\left(1+\frac{i}{2}\right)\right)=\pi\operatorname{Im}\left(e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)\left(1+\frac{i}{2}\right)\right)=$$

$$= \pi e^{-1}\, \operatorname{Im}\left(\cos 1 - \tfrac{1}{2}\sin 1 + i\left(\sin 1 + \tfrac{1}{2}\cos 1\right)\right) = \pi e^{-1}\left(\sin 1 + \tfrac{1}{2}\cos 1\right)$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2+7)\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2+7)\, e^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx\right)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2+7)\, e^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{2i} \frac{(2z^2+7)\, e^{iz}}{z^4+5z^2+4} + \operatorname{res}_{i} \frac{(2z^2+7)\, e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{12e^2} - \frac{5}{6e}i\right) = 2\pi\left(\frac{1}{12e^2} + \frac{5}{6e}\right)$$

- $\alpha = 1$
  $P(z) = 2z^2+7$
  $Q(z) = z^4+5z^2+4$
  $\deg Q = 4 > 2 = \deg P$

$z^4+5z^2+4=0$
$w = z^2$
$w^2+5w+4=0$
$(w+4)(w+1)=0$
$\underbrace{(z^2+4)}_{\pm 2i}\underbrace{(z^2+1)}_{\pm i}=0$

- $$\operatorname{res}_{2i} \frac{(2z^2+7)\, e^{iz}}{z^4+5z^2+4} = \frac{(2(2i)^2+7)\, e^{-2}}{4z^3+10z\big|_{z=2i}} = \frac{-e^{-2}}{-32i+20i} = \frac{-e^{-2}}{-12i} = -\frac{i}{12e^2}$$

- $$\operatorname{res}_{i} \frac{(2z^2+7)\, e^{iz}}{z^4+5z^2+4} = \frac{(-2+7)\, e^{-1}}{4z^3+10z\big|_{z=i}} = \frac{5e^{-1}}{-4i+10i} = \frac{5e^{-1}}{6i} = -\frac{5}{6e}i$$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx\right) \quad (*)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right) + \operatorname{res}_{-1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right)\right) \quad (**)$$

$P(x) = 1$
$Q(x) = x^4+4$ $\qquad \deg Q = 4 > 0 = \deg P$
$\qquad \alpha = \pi$
$Q(z) = 0$:
$z^4+4=0$
$z^4=-4$
$|z|^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$
$|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$
$4\varphi = \pi + 2k\pi$
$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,3$
$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\right),\ k=0,1,2,3$

$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$
$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1+i$
$z_3 = -1-i$
$z_4 = 1-i$

- $$\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right) = \operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)}\right) = \frac{e^{i\pi(1+i)}}{1\cdot(1+i-1+i)(1+i+1-i)(1+i+1+i)} = \frac{e^{-\pi+i\pi}}{(2i)(2)(2+2i)} =$$

$$= \frac{e^{-\pi+i\pi}}{-8+8i} = \frac{e^{-\pi+i\pi}(-8-8i)}{128} = -\frac{e^{-\pi+\pi i}(1+i)}{16} \overset{e^{i\pi}=-1}{=} \frac{e^{-\pi}(1+i)}{16}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right)=\operatorname{res}_{-1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)}\right)=\dots=\frac{e^{-\pi}(-1+i)}{16}$$

$$\xrightarrow{(**)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx=2\pi i\left(\operatorname{res}_{1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right)+\operatorname{res}_{-1+i}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\right)\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{-\pi}(1+i)}{16}+\frac{e^{-\pi}(-1+i)}{16}\right)=2\pi i\,\frac{2e^{-\pi}}{16}\,i=-\frac{e^{-\pi}}{4}\pi=-\frac{\pi}{4e^{\pi}}$$

$$\xrightarrow{(*)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx\right)=\operatorname{Re}\left(-\frac{\pi}{4e^{\pi}}\right)=-\frac{\pi}{4e^{\pi}}$$

8 Fourierova transformace

Fourierova transformace

úterý 1. prosince 2020 10:12

Pro komplexní funkci f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ reálné proměnné definujeme její **Fourierovu transformaci** jako $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$, $\omega \epsilon \mathbb{R}$. Definiční obor Fourierovy transformace jsou ty body ω, pro které integrál existuje (jako hlavní hodnota).

Inverzní Fourierova transformace funkce f je definovaná jako $\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$.

Platí tedy vztah $\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\omega)$.

ZADÁNÍ: Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f.

a) $f(t) = e^{-|t|}$

b) $f(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$, kde $a > 0$

c) $f(t) = t\,e^{-(t+5)^2}$

d) $f(t) = \dfrac{1}{(1-it)^2}$

e) $f(t) = \dfrac{1}{(1+it)(2+it)}$

ŘEŠENÍ:

a)

$$\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{t=-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\omega} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} + \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} - \frac{1}{-(1+i\omega)} = \frac{1}{1-i\omega} - 0 + 0 - \frac{1}{-(1+i\omega)} =$$

$$\left[\ \cdot\ |e^{(1-i\omega)t}| = e^{t} \xrightarrow{t\to-\infty} 0,\quad \cdot\ |e^{-(1+i\omega)t}| = e^{-t} \xrightarrow{t\to\infty} 0\ \right]$$

$$= \frac{1+i\omega+1-i\omega}{(1-i\omega)(1+i\omega)} = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

b)

$$\mathcal{F}[e^{-at}\mathbb{1}(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mathbb{1}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{t(-a-i\omega)}\,dt = \left[\frac{e^{t(-a-i\omega)}}{-a-i\omega}\right]_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-at-i\omega t}}{-a-i\omega} - \frac{1}{-a-i\omega} = 0 + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{1}{a+i\omega} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\left[\ \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-at-i\omega t}}{-a-i\omega} = 0, \text{ neboť } |e^{-at-i\omega t}| = e^{-at} \xrightarrow[a>0!]{t\to\infty} 0\ \right]$$

c)

$\mathcal{F}(t\,e^{-(t+5)^2})$ určíme pomocí pravidel pro počítání s Fourierovou transformací a známého Fourierova obrazu Gaussovy funkce.

Fourierova transformace Gaussovy funkce

Pro $f(t) = e^{-at^2}$, kde a > 0, platí $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Pravidlo o posunu vzoru

Platí $F\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$.

Derivace obrazu

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Potom $\mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$.

• $g(t) = e^{-(t+5)^2}$

• $\mathcal{F}\left(t e^{-(t+5)^2}\right)(\omega) = \mathcal{F}(t g(t))(\omega) \overset{\text{derivace obrazu}}{=} i \frac{d}{d\omega}\hat{g}(\omega)$. (*)

• $g(t) = h(t+5)$, kde $h(t) = e^{-t^2}$.

Tedy $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}(h(t+5))(\omega) \overset{\text{posun vzoru}}{=} e^{5\omega i}\hat{h}(\omega) \overset{\text{Four. transf. Gaussovy funkce}}{=} e^{5\omega i}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}+5i\omega}$

• Tedy $\frac{d}{d\omega}\hat{g}(\omega) = \sqrt{\pi}\left(-\frac{\omega}{2}+5i\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}+5i\omega}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{F}\left(t e^{-(t+5)^2}\right)(\omega) = i\sqrt{\pi}\left(5i-\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}+5i\omega} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

d) $f(t) = \frac{1}{(1-it)^2}$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx$:

Nechť P, Q jsou polynomy takové, že st Q > st P (tj. jmenovatel má ostře vyšší stupeň než čitatel) a nechť Q nemá reálné kořeny.

Je-li $\alpha > 0$, potom $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in \{w \in \mathbb{C};\, Q(w)=0 \text{ a } \operatorname{Im} w>0\}} res_{z=z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$.

Je-li $\alpha < 0$, potom $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{z_0 \in \{w \in \mathbb{C};\, Q(w)=0 \text{ a } \operatorname{Im} w<0\}} res_{z=z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$.

Je-li st Q > st P + 1, lze zahrnout i $\alpha = 0$.

• $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-it)^2} e^{-i\omega t}\, dt$

• $\alpha = -\omega$

• jediný kořen jmenovatele je bod $-i$.

• $res_{-i}\left(\frac{1}{(1-iz)^2} e^{-i\omega z}\right) \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{z \to -i}\left(\frac{(z+i)^2 e^{-i\omega z}}{(1-iz)^2}\right)' = \lim_{z\to -i}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{(-i)^2}\right)' = -\lim_{z\to -i}(-i\omega)e^{-i\omega z} = i\omega e^{-\omega}$

• Tedy $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} -2\pi i(i\omega e^{-\omega}) = 2\pi\omega e^{-\omega} \ldots \omega \geq 0 \\ 0 \ldots \omega < 0. \end{cases}$

což lze psát jako $\hat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^{-\omega}\mathbb{1}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

e) $f(t) = \frac{1}{(1+it)(2+it)}$ $\qquad (1+iz)(2+iz) = 0 \iff z \in \{i, 2i\}$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+it)(2+it)}\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$\omega \geq 0$ $\lceil \alpha=-\omega\leq 0 \rfloor$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+it)(2+it)}\,e^{-i\omega t}\,dt=-2\pi i\cdot \underbrace{0}_{}=0$$

žádný kořen jmenovatele se zápornou imaginární částí

$\omega<0$ $\lceil \alpha>0 \rfloor$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+it)(2+it)}\,e^{-i\omega t}\,dt=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=i}\frac{e^{-i\omega z}}{(1+iz)(2+iz)}+\operatorname{res}_{z=2i}\frac{e^{-i\omega z}}{(1+iz)(2+iz)}\right)=2\pi i\left(-e^{\omega}i+e^{2\omega}i\right)=2\pi\left(e^{\omega}-e^{2\omega}\right)$$

$$\lceil \operatorname{res}_{z=i}\frac{e^{-i\omega z}}{(1+iz)(2+iz)}=\frac{e^{\omega}}{(2-1)i}=\frac{e^{\omega}}{i}=-e^{\omega}i \qquad \operatorname{res}_{z=2i}\frac{e^{-i\omega z}}{(1+iz)(2+iz)}=\frac{e^{2\omega}}{(1-2)i}=\frac{e^{2\omega}}{-i}=e^{2\omega}i \rfloor$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{f}(\omega)=\begin{cases}0 & \ldots\ \omega\geq 0\\ 2\pi\left(e^{\omega}-e^{2\omega}\right) & \ldots\ \omega<0\end{cases}$$

což lze psát jako $\hat{f}(\omega)=2\pi\left(e^{\omega}-e^{2\omega}\right)\mathbb{1}(-\omega)$

ZADÁNÍ:

Je dána funkce $f(t)=\dfrac{1}{t^2-2t+5}$.

a) Nalezněte $\hat{f}(\omega)$

b) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci funkce f.

c) Nalezněte $\hat{g}(\omega)$, kde $g(t)=f'(t)\sin t+f(-4t+3)$

ŘEŠENÍ:

a) $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2-2t+5}\,e^{-i\omega t}\,dt$

$z^2-2z+5=0$

$(z-1)^2=-4$

$z-1=\pm 2i$

$z=1\pm 2i$

$$\operatorname{res}_{z=1+2i}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{(z-1-2i)(z-1+2i)}\right)=\frac{e^{(2-i)\omega}}{4i}=-\frac{e^{(2-i)\omega}}{4}i$$

$$\operatorname{res}_{z=1-2i}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{(z-1-2i)(z-1+2i)}\right)=\frac{e^{-(2+i)\omega}}{-4i}=\frac{e^{-(2+i)\omega}}{4}i$$

- Tedy $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}-2\pi i\,\dfrac{e^{-(2+i)\omega}}{4}\,i=\dfrac{\pi}{2}e^{-(2+i)\omega} & \ldots\ \omega\geq 0\\[2ex] 2\pi i\left(-\dfrac{e^{(2-i)\omega}}{4}\,i\right)=\dfrac{\pi}{2}e^{(2-i)\omega} & \ldots\ \omega<0\end{cases}$

- To lze jednoduše zapsat jako $\hat{f}(\omega)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}e^{-i\omega}\quad \forall\omega\in\mathbb{R}$

b) $\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\omega) = \frac{1}{4}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}$

c) $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}\big(f'(t)\sin t + f(-4t+3)\big)(\omega) = \mathcal{F}\big(f'(t)\sin t\big)(\omega) + \mathcal{F}\big(f(-4t+3)\big)(\omega)$ (*)

$$\cdot\ \mathcal{F}\big(f'(t)\sin t\big)(\omega) = \mathcal{F}\left(f'(t)\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)(\omega) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\big(f'(t)e^{it}\big)(\omega) - \mathcal{F}\big(f'(t)e^{-it}\big)(\omega)\right) \overset{\text{posun obrazu}}{=} \frac{1}{2i}\left(\hat{f'}(\omega-1) - \hat{f'}(\omega+1)\right) =$$

$$\overset{\text{obraz derivace}}{=} \frac{1}{2i}\left(i(\omega-1)\hat{f}(\omega-1) - i(\omega+1)\hat{f}(\omega+1)\right) = \frac{1}{2}\left((\omega-1)\hat{f}(\omega-1) - (\omega+1)\hat{f}(\omega+1)\right)$$

Pravidlo o posunu obrazu
Platí $F\{e^{iat}f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$

Obraz derivace
Nechť $f, f', \dots, f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, jsou spojité a integrovatelné. Potom $\mathcal{F}\left\{f^{(k)}\right\}(\omega) = (i\omega)^k\hat{f}(\omega)$.

$$\cdot\ \mathcal{F}\big(f(-4t+3)\big)(\omega) \overset{\text{změna měřítka}}{=} \frac{1}{4}\mathcal{F}\big(f(t+3)\big)\left(\frac{\omega}{-4}\right) \overset{\text{posun vzoru}}{=} \frac{1}{4}e^{3\left(-\frac{\omega}{4}\right)i}\hat{f}\left(-\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\omega}{4}i}\hat{f}\left(-\frac{\omega}{4}\right)$$

$\left[\begin{array}{l} g(t) = f(t+3) \\ f(-4t+3) = g(-4t) \end{array}\right]$

Pravidlo o posunu vzoru
Platí $F\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$.

Pravidlo o změně měřítka
$F\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), a \neq 0$

(*)
$$\Longrightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{\omega-1}{2}\hat{f}(\omega-1) - \frac{\omega+1}{2}\hat{f}(\omega+1) + \frac{1}{4}e^{-\frac{3\omega}{4}i}\hat{f}\left(-\frac{\omega}{4}\right)$$

ZADÁNÍ:

Je dána funkce $f(t) = t\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)\big)$.

a) Určete Fourierovu transformaci funkce f.

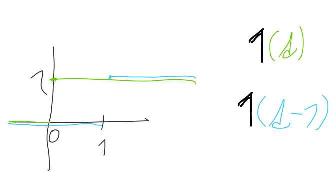
b) Pomocí a) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce h, která vznikne zúžením funkce f na interval $[0,1]$.

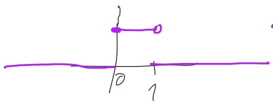
ŘEŠENÍ:

a)

$$\cdot\ \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\Big(t\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)\big)\Big)(\omega) \overset{\text{derivace obrazu}}{=} i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\Big(\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)\big)\Big)(\omega) \quad (*)$$

Derivace obrazu
Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Potom $\mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$.





$$1(t)-1(t-1) = \begin{cases} 1 & \dots\ t\in[0,1) \\ 0 & \dots\ \text{jinak}\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[1(t)-1(t-1)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(1(t)-1(t-1))e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=0}^1 = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}-1) = \frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}i \quad \text{pro } \omega\neq 0$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \hat f(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}i\right) = -\frac{-ie^{-i\omega}\omega-(e^{-i\omega}-1)}{\omega^2} = \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}+\frac{e^{-i\omega}}{\omega}i-\frac{1}{\omega^2} \quad \text{pro } \omega\neq 0$$

· $\hat f(0)$ lze spočítat jako limitu ze spojitosti obrazu nebo zde jednodušeji přímo z definice

$$\hat f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} t(1(t)-1(t-1))\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac12$$

$$\Longrightarrow \quad \hat f(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}+\frac{e^{-i\omega}}{\omega}i-\frac{1}{\omega^2} & \dots\ \omega\neq 0 \\ \frac12 & \dots\ \omega=0\end{cases}$$

b) · $h = f|_{[0,1]}$

Nechť a∈ℝ a T > 0. **(Komplexní) Fourierova řada funkce f**$\in L^1([a,a+T])$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$, kde $c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2\pi int}{T}}\,dt$.

· V našem příkladě tedy $c_n = \int_0^1 f(t)\,e^{-2\pi int}\,dt$.

· Ovšem $\hat f(2\pi n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i2\pi nt}\,dt \overset{f \text{ nulová mimo } [0,1]}{=} \int_0^1 f(t)\,e^{-i2\pi nt}\,dt = c_n \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

· Tedy dle a) máme $c_n = \begin{cases} -\dfrac{-i\overbrace{e^{-2\pi ni}}^{=1}2\pi n-\overbrace{e^{-2\pi ni}}^{=1}+1}{(2\pi n)^2} & \dots\ n\neq 0 \\ \frac12 & \dots\ n=0\end{cases}$, tj. $c_n = \begin{cases} \frac{i}{2\pi n} & \dots\ n\neq 0 \\ \frac12 & \dots\ n=0\end{cases}$

Tedy Fourierova řada funkce h je $\frac12 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}e^{2\pi int}$.

ZADÁNÍ: Naleznete Fourierovu transformaci funkce $f(t) = t^2 e^{-3t} \mathbb{1}(t+2) + \left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right)'$.

ŘEŠENÍ:

2x derivace obrazu

$$\cdot\ \mathcal{F}\left(t^2 e^{-3t} \mathbb{1}(t+2)\right) = i^2 \frac{d^2}{d\omega^2} \mathcal{F}\left(e^{-3t} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) \quad (*)$$

Posun vzoru
$\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)$

$$\cdot\ \mathcal{F}\left(e^{-3t} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-3(t+2)+6} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) = e^6 \mathcal{F}\left(e^{-3(t+2)} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) = e^6 e^{2i\omega} \mathcal{F}\left(e^{-3t} \mathbb{1}(t)\right)(\omega) =$$

⌈obraz $\mathcal{F}[e^{-at} \mathbb{1}(t)](\omega)$, kde $a > 0$, jsme počítali dříve⌋

$$= e^6 e^{2i\omega} \frac{1}{3+i\omega}$$

$$\cdot\ \frac{d^2}{d\omega^2} \mathcal{F}\left(e^{-3t} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) = e^6 \left(\frac{e^{2i\omega}}{3+i\omega}\right)'' = e^6 \frac{2(2\omega^2 - 10i\omega - 13)\, e^{2i\omega}}{(3+i\omega)^3}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\left(t^2 e^{-3t} \mathbb{1}(t+2)\right)(\omega) = i^2 e^6 \frac{2(2\omega^2 - 10i\omega - 13)\, e^{2i\omega}}{(3+i\omega)^3} = -\frac{2(2\omega^2 - 10i\omega - 13)\, e^{2i\omega+6}}{(3+i\omega)^3}$$

· Dále:

$$\cdot\ \mathcal{F}\left[\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right)'\right](\omega) = i\omega \mathcal{F}\left[e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right](\omega) \quad (**)$$

Posun obrazu
$\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$

$$\cdot\ \mathcal{F}\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}\right)(\omega-1) + \frac{1}{2} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}\right)(\omega+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega-1)} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(\omega-1) + e^{i(\omega+1)} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(\omega+1)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(e^{i(\omega-1)} e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}} + e^{i(\omega+1)} e^{-\frac{(\omega+1)^2}{2}}\right)$$

Obraz Gaussovy funkce
Pro $f(t) = e^{-at^2}$, kde $a > 0$, platí $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\left\{\left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right)'\right\}(\omega) = i\omega \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(e^{i(\omega-1)} e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}} + e^{i(\omega+1)} e^{-\frac{(\omega+1)^2}{2}}\right)$$

$\Longrightarrow$ Celkem tedy:

$$\mathcal{F}\left(t^2 e^{-3t} \mathbb{1}(t+2) + \left(e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \cos t\right)'\right)(\omega) = -\frac{2(2\omega^2 - 10i\omega - 13)\, e^{2i\omega+6}}{(3+i\omega)^3} + i\omega \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(e^{i(\omega-1)} e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}} + e^{i(\omega+1)} e^{-\frac{(\omega+1)^2}{2}}\right).$$

ZADÁNÍ: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je „dostatečně pěkná" funkce. Pomocí $\hat{f}$ vyjádřete $\mathcal{F}\left[t f'(3t-1) + e^{-2(t+3)^2} \cos 4t\right](\omega)$

ŘEŠENÍ:

$$\mathcal{F}\left[t f'(3t-1) + e^{-2(t+3)^2} \cos 4t\right](\omega) = \mathcal{F}\left[t f'(3t-1)\right](\omega) + \mathcal{F}\left[e^{-2(t+3)^2} \cos 4t\right](\omega) = \ldots =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3} i e^{-i\frac{\omega}{3}} \omega \hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right) + e^{-i\frac{\omega}{3}}\left(\hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right) + \omega \hat{f}'\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(e^{3(\omega-4)i - \frac{(\omega-4)^2}{8}} + e^{3(\omega+4)i - \frac{(\omega+4)^2}{8}}\right)$$

$\mathcal{F}\left[t f'(3t-1)\right](\omega)$:

$$\mathcal{F}[s f'(3s-1)](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f'(3s-1)](\omega) = \dots = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}\, i\frac{\omega}{3}\hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right)\right) = -\frac{1}{9}\frac{d}{d\omega}\left(e^{-i\frac{\omega}{3}}\,\omega \hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}i e^{-i\frac{\omega}{3}}\,\omega\hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right) + e^{-i\frac{\omega}{3}}\left(\hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right) + \omega\hat{f}'\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\left\lceil \mathcal{F}[f'(3s-1)](\omega) = \mathcal{F}[g(3s)](\omega) = \frac{1}{|3|}\hat{g}\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[f'(s-1)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}\mathcal{F}[f'(s)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}\, i\frac{\omega}{3}\hat{f}\left(\frac{\omega}{3}\right) \right\rfloor$$

$g(s) = f'(s-1)$

$\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}\cos 4s](\omega)$:

$$\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}\cos 4s](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}e^{4is}](\omega) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}e^{-4is}](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}](\omega-4) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-2(s+3)^2}](\omega+4) \overset{g(s)=e^{-2s^2}}{=}$$

$\left\lceil \cos 4s = \frac{e^{4is}+e^{-4is}}{2} \right\rfloor$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}[g(s+3)](\omega-4) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[g(s+3)](\omega+4) = \frac{1}{2}e^{-i(\omega-4)(-3)}\hat{g}(\omega-4) + \frac{1}{2}e^{-i(\omega+4)(-3)}\hat{g}(\omega+4)$$

$$= \frac{1}{2}e^{3(\omega-4)i}\mathcal{F}[e^{-2s^2}](\omega-4) + \frac{1}{2}e^{3(\omega+4)i}\mathcal{F}[e^{-2s^2}](\omega+4) = \frac{1}{2}e^{3(\omega-4)i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{(\omega-4)^2}{8}} + \frac{1}{2}e^{3(\omega+4)i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{(\omega+4)^2}{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(e^{3(\omega-4)i - \frac{(\omega-4)^2}{8}} + e^{3(\omega+4)i-\frac{(\omega+4)^2}{8}}\right)$$

ZADÁNÍ: a) Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce $g(s) = (f_1 * f_2)(s)$, kde $f_1(s) = e^{-s}\mathbb{1}(s)$ a $f_2(s) = e^{-2s}\mathbb{1}(s)$.
b) Určete funkci $g(s)$.

ŘEŠENÍ:

a) **Konvoluce** dvou funkcí f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $f * g$ definovaná jako $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds$, $t\in\mathbb{R}$, existuje-li integrál na pravé straně.

Pro **Fourierův obraz konvoluce** platí $\mathcal{F}\{(f*g)(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

- $\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(s)](\omega) = \hat{f}_1(\omega)\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}\,\frac{1}{2+i\omega} \quad \forall \omega\in\mathbb{R}$

b) **Věta o inverzi** pro Fourierovu transformaci říká, že pokud $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ je spojitá a $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, potom $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right](t) = f(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

z a) víme, že $\mathcal{F}[(f_1*f_2)(s)](\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$.

jeho inverzí

$$\Longrightarrow \quad (f_1*f_2)(s) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right](s) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right](-s) \overset{(*)}{=} \begin{cases} e^{-s} - e^{-2s} & \dots\ s>0 \\ 0 & \dots\ s\le 0 \end{cases}$$

$\left\lceil \text{Počítali jsme, že } \mathcal{F}\left[\frac{1}{(1+is)(2+is)}\right](\omega) = \begin{cases} 0 & \dots\ \omega \ge 0 \\ 2\pi(e^{\omega}-e^{2\omega}) & \dots\ \omega<0 \end{cases} \quad (*) \right\rfloor$

ZADÁNÍ: Nechť $f\in L^1(\mathbb{R})$. Nalezněte funkci g (v integrálním tvaru), jejíž Fourierova transformace se rovná funkci $\frac{2}{1+\omega^2}\hat{f}(\omega)$.

ŘEŠENÍ:

- Chceme najít funkci g tak, aby $\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\hat{f}(\omega)$.
- Pravou stranu si vyjádříme jako součin dvou Fourierových transformací.
- Tj. nejprve nalezneme funkci h tak, aby $\hat{h}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.
- Díky větě o inverzi tedy:
- $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{1+\omega^2}\right\}(t) = \dots$
- My jsme ale už spočítali, že $\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, takže $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{1+\omega^2}\right\}(t) = e^{-|t|}$, tedy $h(t) = e^{-|t|}$.

$$\xrightarrow{\text{věta o obrazu konvoluce}} \hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[(h*f)(t)](\omega) \xrightarrow{\text{věta o inverzi}} g(t) = (h*f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} f(t-\tau)\,d\tau$$

ZADÁNÍ:

Jsou dány funkce $f(t) = 1(t+1) - 1(t-1)$ a $g(t) = 1(t) - 1(t-1)$.

a) Spočtěte $h(t) = f*g(t)$.

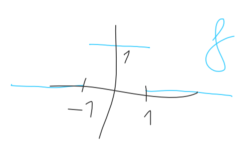
b) Určete $\hat{h}$.

c) Pomocí b) určete komplexní Fourierovy koeficienty rozšíření funkce h na interval $[-1,2]$.

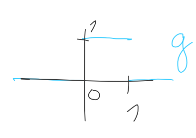
ŘEŠENÍ:

a) **Konvoluce** dvou funkcí f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $f * g$ definovaná jako $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds$, $t \in \mathbb{R}$, existuje-li integrál na pravé straně.

$$f(t) = 1(t+1) - 1(t-1) = \begin{cases} 1 & - \; t \in [-1,1) \\ 0 & - \; \text{jinak} \end{cases}$$

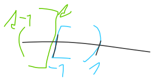


$$g(t) = 1(t) - 1(t-1) = \begin{cases} 1 & - \; t \in [0,1) \\ 0 & - \; \text{jinak} \end{cases}$$



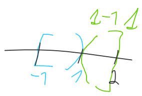
- $h(t) = f*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds = \text{délka průniku } [-1,1) \cap (t-1, t]$
  - $f(s) \neq 0 \iff -1 \leq s < 1$
  - $g(t-s) \neq 0 \iff 0 \leq t-s < 1 \iff t-1 < s \leq t$

i) $t \le -1$:



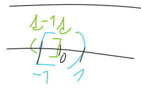
průnik má délku 0

ii) $t \ge 2$:



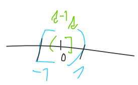
průnik má délku 0

iii) $-1 < t \le 0$:



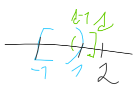
průnik má délku $t-(-1) = t+1$

IV) $0 < t \le 1$:



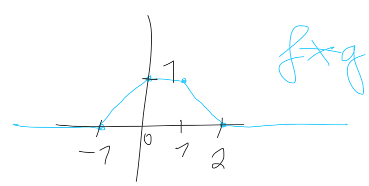
průnik má délku 1

V) $1 < t < 2$:



průnik má délku $1-(t-1) = 2-t$

Celkem tedy
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds = \begin{cases} 0 \dots & t \le -1 \\ t+1 \dots & t \in (-1,0] \\ 1 \dots & t \in (0,1] \\ 2-t \dots & t \in (1,2) \\ 0 \dots & t \ge 2 \end{cases}$$



b)

obraz konvoluce

$$\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}(f*g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Pro **Fourierův obraz konvoluce** platí $\mathcal{F}\{(f*g)(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

viz přednáška

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(\omega)}{\omega} \dots & \omega \ne 0 \\ 2 \dots & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{e^{-i\omega}-1}{\omega} i \dots & \omega \ne 0 \\ 1 \dots & \omega = 0 \end{cases}$$

viz dřívější úloha

Tedy $\hat{h}(w) = \begin{cases} 2\frac{\sin(w)}{w}\frac{e^{-iw}-1}{w}i \dots w \neq 0 \\ 2 \dots w = 0 \end{cases}$

· c) · Fourierovy koeficienty funkce $h|_{[-1,2]}$ jsou $c_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} h(t)e^{-\frac{2\pi}{3}int}\,dt$

Nechť a$\epsilon\mathbb{R}$ a $T > 0$. **(Komplexní) Fourierova řada funkce f**$\epsilon L^1([a, a+T])$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$, kde $c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2\pi int}{T}}\,dt$.

h nulová mimo $[-1,2]$

· $\hat{h}\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-\frac{2\pi}{3}int}\,dt = \int_{-1}^{2} h(t)e^{-\frac{2\pi}{3}int}\,dt = 3c_n$.

· Tedy $c_n = \frac{1}{3}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

ZADÁNÍ: Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=\frac{1}{2}e^{-|t|}$ na intervalu $(-\infty,\infty)$.

ŘEŠENÍ:

- Aplikujeme Fourierovu transformaci a větu o obrazu derivace $\Longrightarrow$

Obraz derivace
Nechť f, f′, …, $f^{(k)}$, $k\in\mathbb{N}$, jsou spojité a integrovatelné. Potom $\mathcal{F}\{f^{(k)}\}(\omega)=(i\omega)^k\hat{f}(\omega)$.

$$(i\omega)^2\hat{y}(\omega)+4i\omega\hat{y}(\omega)+4\hat{y}(\omega)=\frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega)$$

[Již dříve jsme spočítali, že $\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$.]

$$(4-\omega^2+4i\omega)\hat{y}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\hat{y}(\omega)=\frac{1}{(4-\omega^2+4i\omega)(1+\omega^2)}=-\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}\xRightarrow{\text{věta o inverzi}} y(t)=-\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}\right](t)=\dots=\begin{cases}\frac{e^{-t}}{2}-\left(\frac{t}{3}+\frac{4}{9}\right)e^{-2t} & \dots\ t\geq 0\\ \frac{e^{t}}{18} & \dots\ t<0\end{cases}$$

[
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}\right](t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}e^{i\omega t}\,d\omega=\dots=\begin{cases}-\left(\frac{e^{-t}}{2}-\left(\frac{t}{3}+\frac{4}{9}\right)e^{-2t}\right) & \dots\ t\geq 0\\ -\frac{e^{t}}{18} & \dots\ t<0\end{cases}$$

- $t\geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}e^{i\omega t}\,d\omega=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}+\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}\right)=-2\pi\left(\frac{e^{-t}}{2}-\left(\frac{t}{3}+\frac{4}{9}\right)e^{-2t}\right)$$

- $$\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}=\frac{\frac{e^{-t}}{(-i)^2}}{2z\Big|_{z=i}}=-\frac{e^{-t}}{2i}$$

- $$\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}\underset{\text{pól 2. řádu}}{=}\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}\right)'=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{izt}}{1+z^2}\right)'=\lim_{z\to 2i}\frac{ite^{izt}(1+z^2)-2ze^{izt}}{(1+z^2)^2}=\frac{ite^{-2t}(1-4)-4ie^{-2t}}{(1-4)^2}=-\frac{1}{3}te^{-2t}i-\frac{4}{9}e^{-2t}i$$

- $t<0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2-4i\omega-4)(1+\omega^2)}e^{i\omega t}\,d\omega=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-i}\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(1+z^2)}\right)=-2\pi i\,\frac{\frac{e^{t}}{(-3i)^2}}{2z\Big|_{z=-i}}=-2\pi i\,\frac{e^{t}}{18i}=-2\pi\frac{e^{t}}{18}$$

ZADÁNÍ:

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice $y''(t)-y(t)=e^{-t}\mathbb{1}(t)$ na intervalu $(-\infty,\infty)$.

ŘEŠENÍ:

$$(i\omega)^2\hat{y}(\omega)-\hat{y}(\omega)=\mathcal{F}[e^{-t}\mathbb{1}(t)](\omega)$$

$$-(\omega^2+1)\hat{y}(\omega)=\mathcal{F}[e^{-t}\mathbb{1}(t)](\omega)$$

[Již dříve jsme spočítali, že $\mathcal{F}(e^{-t}\mathbb{1}(t))(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$.]

$$\hat{y}(\omega)=-\frac{1}{(1+i\omega)(1+\omega^2)}$$

$$\xrightarrow{\text{věta o inverzi}} y(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+i\omega)(1+\omega^2)}\right](t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+i\omega)(1+\omega^2)} e^{i\omega t}\, d\omega = \dots =$$

$$= \begin{cases} -\frac{t}{2}e^{-t} - \frac{e^{-t}}{4} \;\dots\; t \geq 0 \\ -\frac{e^{t}}{4} \;\dots\; t < 0 \end{cases}$$

• Výsledek lze jednotně zapsat jako $y(t) = -\frac{t}{2}e^{-t}\mathbb{1}(t) - \frac{e^{-|t|}}{4}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+i\omega)(1+\omega^2)} e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega-i)^2(\omega+i)}\, d\omega = \dots = \begin{cases} 2\pi\left(\frac{t}{2}e^{-t} + \frac{e^{-t}}{4}\right) \;\dots\; t \geq 0 \\ 2\pi \frac{e^{t}}{4} \;\dots\; t < 0 \end{cases}$$

$1 + iz = 0 \Leftrightarrow z = i$

$1 + z^2 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$

$t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega-i)^2(\omega+i)}\, d\omega = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{izt}}{i(z-i)^2(z+i)} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} 2\pi i \lim_{z\to i}\left((z-i)^2 \frac{e^{izt}}{i(z-i)^2(z+i)}\right)' = 2\pi \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{izt}}{z+i}\right)' = 2\pi \lim_{z\to i} \frac{it e^{izt}(z+i) - e^{izt}}{(z+i)^2} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{t}{2}e^{-t} + \frac{e^{-t}}{4}\right)$$

$t < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega-i)^2(\omega+i)}\, d\omega = -2\pi i \operatorname{res}_{z=-i} \frac{e^{izt}}{i(z-i)^2(z+i)} = -2\pi i \frac{\frac{e^{t}}{-4i}}{1} = 2\pi \frac{e^{t}}{4}$$

ZADÁNÍ: Pomocí Fourierovy transformace řešte integrální rovnici $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2}\varphi(\tau)\,d\tau = e^{-t^2}$.

ŘEŠENÍ:

• Označme $g(t) = e^{-2t^2}$. Potom $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2}\varphi(\tau)\,d\tau = (\varphi * g)(t)$.

• $(\varphi * g)(t) = e^{-t^2} \xrightarrow{\text{Fourierova transformace}} \hat{\varphi}(\omega)\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega)$

Fourierova transformace Gaussovy funkce

Pro $f(t) = e^{-at^2}$, kde $a > 0$, platí $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

• $\hat{\varphi}(\omega)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

• $\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}} \xrightarrow[\text{věta o inverzi}]{} \varphi(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}}\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\sqrt{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}}\right)(-t) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{8\pi}\, e^{-\frac{8}{4}t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2t^2}$$

ZADÁNÍ: Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice $y''(t)-4y'(t)+3y(t)=h(t)$, kde $h(t)\in L^1(\mathbb{R})$ je spojitá funkce taková, že $\hat{h}(\omega)=\dfrac{4}{(\omega+3i)(\omega-i)}$.

ŘEŠENÍ:

$$\mathcal{F}[y''(t)](\omega)-4\,\mathcal{F}[y'(t)](\omega)+3\hat{y}(\omega)=\hat{h}(\omega)$$

$$(i\omega)^2\hat{y}(\omega)-4(i\omega)\hat{y}(\omega)+3\hat{y}(\omega)=\frac{4}{(\omega+3i)(\omega-i)}$$

$$-\omega^2\hat{y}(\omega)-4i\omega\,\hat{y}(\omega)+3\hat{y}(\omega)=\frac{4}{(\omega+3i)(\omega-i)}$$

$$-(\omega^2+4i\omega-3)\hat{y}(\omega)=\frac{4}{(\omega+3i)(\omega-i)}$$

$$\hat{y}(\omega)=-\frac{4}{(\omega+3i)(\omega-i)(\omega^2+4i\omega-3)}\ \underset{\text{věta o inverzi}}{\Longrightarrow}\ y(t)=-4\,\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega+3i)(\omega-i)(\omega^2+4i\omega-3)}\right](t)=\ldots=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{e^{-t}}{8} & \ldots\ t\geq 0\\[2mm] \left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{8}\right)e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^{t} & \ldots\ t<0\end{cases}$$

- $$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega+3i)(\omega-i)(\omega^2+4i\omega-3)}\right](t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-i)(\omega+i)}\right](t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-i)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,d\omega=\ldots=\begin{cases}-\dfrac{e^{-t}}{32} & \ldots\ t\geq 0\\[2mm] -\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{t}{4}-\dfrac{3}{16}\right)e^{3t}+\dfrac{1}{4}e^{t}\right) & \ldots\ t<0\end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned}&z^2+4iz-3=0\\&(z+2i)^2+4-3=0\\&(z+2i)^2=-1\\&z+2i=\pm i\\&z=-2i\pm i=\begin{cases}-i\\-3i\end{cases}\end{aligned}\right]$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-i)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,d\omega=\begin{cases}-\dfrac{e^{-t}}{16}\pi & \ldots\ t\geq 0\\[2mm] -\pi\left(\left(\dfrac{t}{4}-\dfrac{3}{16}\right)e^{3t}+\dfrac{1}{4}e^{t}\right) & \ldots\ t<0\end{cases}$$

a) $t\geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-i)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,d\omega=2\pi i\,\operatorname{res}_{z=i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)^2\cancel{(z-i)}(z+i)}=2\pi i\,\frac{\dfrac{e^{-t}}{(4i)^2(2i)}}{1}=2\pi i\,\frac{e^{-t}}{-32i}=-\frac{e^{-t}}{16}\pi$$

b) $t<0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-i)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,d\omega=-2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=-3i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)^2(z-i)(z+i)}+\operatorname{res}_{z=-i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)^2(z-i)(z+i)}\right)=-2\pi i\left(-\left(\frac{t}{8}-\frac{3}{32}\right)ie^{3t}-\frac{e^{t}}{8}i\right)=$$

$$=-\pi\left(\left(\frac{t}{4}-\frac{3}{16}\right)e^{3t}+\frac{1}{4}e^{t}\right)$$

$$\Big[\cdot\ \operatorname{res}_{z=-3i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)^2(z-i)(z+i)}\underset{\text{pól 2. řádu}}{=}\lim_{z\to-3i}\left((z+3i)^2\frac{e^{izt}}{(z+3i)^2(z-i)(z+i)}\right)'=\lim_{z\to-3i}\left(\frac{e^{izt}}{(z-i)(z+i)}\right)'=\lim_{z\to-3i}\frac{it\,e^{izt}(z-i)(z+i)-2z\,e^{izt}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

$[(z-i)(z+i)=z^2+1]$

$$= \frac{it e^{3t}(-4i)(-2i) + 2(-3i)e^{3t}}{(-4i)^2(-2i)^2} = \frac{-8it e^{3t} + 6i e^{3t}}{(-16)(-4)} = \frac{-8it e^{3t} + 6i e^{3t}}{64} = -\left(\frac{t}{8} - \frac{3}{32}\right) i e^{3t}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{z=-i} \frac{e^{izt}}{(z+3i)^2(z-i)(z+i)} = \frac{\frac{e^{t}}{(-2i)^2(-2i)}}{1} = \frac{e^{t}}{(-4)(-2i)} = \frac{e^{t}}{8i} = -\frac{e^{t}}{8} i$$

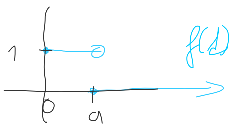
9 Laplaceova transformace

Laplaceova transformace funkce f: $[0,\infty) \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce komplexní proměnné $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ definovaná předpisem $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt$ (za předpokladu, že integrál konverguje pro alespoň jedno $s \epsilon \mathbb{C}$).

Je-li $f \epsilon L_0$ (tj. "f je nejvýše exponenciálního řádu"; polynomy, sin, cos, e^{at} ($a \epsilon \mathbb{C}$),.. jsou v L_0; funkce e^{t^2} už ne), potom Laplacův obraz $\mathcal{L}[f]$ existuje.

ZADÁNÍ: Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-a) = \begin{cases} 1 \dots & t \in [0,a) \\ 0 \dots & t \in [a,\infty) \end{cases}$ kde $a > 0$.

ŘEŠENÍ:



$f(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-a)$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt = \int_0^a e^{-ts}\, dt = \left[\frac{e^{-ts}}{-s}\right]_{t=0}^a = -\frac{e^{-as}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1-e^{-as}}{s}.$$

Podobně lze spočítat:
$\mathcal{L}[\mathbf{1}](s) = \frac{1}{s}$
Obecněji $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$, kde $a \geq 0$.

ZADÁNÍ: Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = t\sin(3t) + e^{-3t}t^2$.

ŘEŠENÍ:

$$\mathcal{L}[t\sin(3t) + e^{-3t}t^2](s) = \dots = \frac{6s}{(s^2+9)^2} + \frac{2}{(s+3)^3}$$

$$\mathcal{L}[t\sin(3t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin(3t)](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{3}{(s^2+9)^2}\,2s = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

Pravidlo o derivaci obrazu:
$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s)$

Laplaceova transformace sin a cos
Pro $\omega \epsilon \mathbb{C}$:
$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\mathcal{L}[e^{-3t}t^2](s) = \mathcal{L}[t^2](s+3) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

Pravidlo o posunu obrazu:
Pro $a \in \mathbb{C}$: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$

Laplaceův obraz mocniny:
$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$

ZADÁNÍ: Je dána funkce $f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t + 1 \dots & t \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \cos t \dots & t \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$

Vyjádřete f pomocí Heavisideovy funkce a nalezněte Laplaceovu transformaci funkce f.

ŘEŠENÍ:

$$f(t) = \left(-\frac{2}{\pi}t + 1\right)\left(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})\right) + \cos(t)\,\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})$$

$$\cdot\ \mathcal{L}\left[\left(-\frac{2}{\pi}t+1\right)\left(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})\right)\right](s) = -\frac{2}{\pi}\mathcal{L}[t](s) + \frac{2}{\pi}\mathcal{L}[t\,\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})](s) + \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})](s) =$$

Pravidlo o translaci
Pro $a > 0$:
$\mathcal{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$

Laplaceův obraz mocniny:
$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{s^2} + \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}[t+\tfrac{\pi}{2}](s) + \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{s^2} + \frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2} + e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} =$$

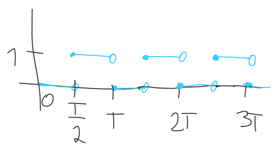
$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}-1}{s^2}$$

- $\mathcal{L}[\cos(t)\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{2})](s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}[\cos(t+\frac{\pi}{2})](s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}[-\sin t](s) = -e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2+1}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}\left[\left(-\tfrac{2}{\pi}t+1\right)\left(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})\right)\right](s) + \mathcal{L}\left[(\cos t)\left(\mathbb{1}(t-\tfrac{\pi}{2})\right)\right](s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}-1}{s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

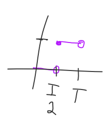
ZADÁNÍ: Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce s periodou $T>0$, která je zadána předpisem $f(t) = \mathbb{1}(t-\frac{T}{2})$, $t \in [0,T)$.

ŘEŠENÍ:



Laplaceův obraz periodické funkce
Jestliže $f \in L_0$ je periodická funkce (na intervalu $[0,\infty)$) s periodou $T > 0$, pak $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1-e^{-sT}} = \frac{\mathcal{L}[f(t)(\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-T))](s)}{1-e^{-sT}}$.

- $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-T))](s)\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}} = \mathcal{L}[\mathbb{1}(t-\frac{T}{2})-\mathbb{1}(t-T)](s)\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}} = \frac{e^{-\frac{T}{2}s}-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}} =$



$$= \frac{e^{-\frac{T}{2}s}-e^{-Ts}}{s(1-e^{-sT})} = \frac{1-e^{\frac{T}{2}s}}{s(1-e^{Ts})}.$$

ZADÁNÍ:

Je dána funkce $f(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin t & \dots\ t\in[0,\pi) \\ 0 & \dots\ t\in[\pi,2\pi) \\ t e^{it} & \dots\ t \geq 2\pi \end{cases}$

a) Zapište funkci $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.

b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$.

c) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $g(t)$ s periodou $T=2\pi$, která je na intervalu $[0,2\pi)$ dána předpisem $g(t)=f(t)$.

ŘEŠENÍ:

a) $f(t) = (e^{-2t}\sin t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\pi)) + t e^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)$

b) $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[(e^{-2t}\sin t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\pi)) + te^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)](s) = \mathcal{L}[e^{-2t}\sin t](s) - \mathcal{L}[(e^{-2t}\sin t)\mathbb{1}(t-\pi)](s) + \mathcal{L}[te^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)](s) = L_1 - L_2 + L_3 = \dots =$

$$= \frac{1}{(s+2)^2+1} + e^{-\pi(s+2)}\frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{2\pi e^{-2\pi s}(s-i)+e^{-2\pi s}}{(s-i)^2}$$

$\cdot\ L_1 = \mathcal{L}[e^{-2t}\sin t](s) = \mathcal{L}[\sin t](s+2) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$

Pravidlo o posunu obrazu:
Pro $a \in \mathbb{C}$: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$

Laplaceova transformace sin a cos
Pro $\omega \epsilon \mathbb{C}$:
$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$\cdot\ L_2 = \mathcal{L}[(e^{-2t}\sin t)\mathbb{1}(t-\pi)](s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-2(t+\pi)}\sin(t+\pi)](s) = -e^{-\pi s}e^{-2\pi}\mathcal{L}[e^{-2t}\sin t](s) = -e^{-\pi(s+2)}\frac{1}{(s+2)^2+1}$

$\ulcorner \sin(t+\pi) = -\sin t \lrcorner$

Pravidlo o translaci
Pro a > 0:
$\mathcal{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$

$\cdot\ L_3 = \mathcal{L}[te^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-2\pi(s-i)}}{s-i}\right) = -\frac{-2\pi e^{-2\pi(s-i)}(s-i) - e^{-2\pi(s-i)}}{(s-i)^2} = \frac{2\pi e^{-2\pi(s-i)}(s-i)+e^{-2\pi(s-i)}}{(s-i)^2} =$

$= \frac{2\pi e^{-2\pi s}(s-i)+e^{-2\pi s}}{(s-i)^2}$

$\ulcorner e^{2\pi i} = 1 \lrcorner$

Pravidlo o derivaci obrazu:
$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s)$

$\ulcorner \mathcal{L}[e^{it}\mathbb{1}(t-2\pi)](s) = \mathcal{L}[\mathbb{1}(t-2\pi)](s-i) = \frac{e^{-2\pi(s-i)}}{s-i} \lrcorner$

$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$, kde a ≥ 0.

c)

$\ulcorner f(t) = g(t)$ pro $t \in [0, 2\pi)$ $\lrcorner$

$\mathcal{L}[g(t)](s) \overset{\text{dle } 2\pi\text{-periodické funkce}}{=} \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\mathcal{L}[g(t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-2\pi))](s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-2\pi))](s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\mathcal{L}[e^{-2t}\sin t(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\pi))](s) =$

$\ulcorner f(t) = e^{-2t}\sin t$ pro $t \in [0,\pi)$
$f(t) = 0$ pro $t \in [\pi, 2\pi)$ $\lrcorner$

Laplaceův obraz periodické funkce
Jestliže fϵL_0 je periodická funkce (na intervalu $[0,\infty)$) s periodou $T > 0$, pak $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1-e^{-sT}} = \frac{\mathcal{L}[f(t)(\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-T))](s)}{1-e^{-sT}}$.

$\underset{\text{lin. }\mathcal{L}}{=} \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}(L_1 - L_2) =$

$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1} + e^{-\pi(s+2)}\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)$

ZADÁNÍ: Naleznete Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = |\sin t|$.

ŘEŠENÍ:

Laplaceova transformace sin a cos
Pro $\omega \epsilon \mathbb{C}$:
$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$\cdot\ |\sin(t)|$ je π - periodická.

$\ulcorner |\sin(t)| = \sin(t)$ pro $t \in [0,\pi] \lrcorner$

$\mathcal{L}(|\sin(t)|)(s) = \mathcal{L}(|\sin(t)|(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\pi)))(s)\frac{1}{1-e^{-s\pi}} = \mathcal{L}(\sin(t)(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\pi)))(s)\frac{1}{1-e^{-s\pi}} = \left[\frac{1}{s^2+1} - \mathcal{L}(\sin(t)\mathbb{1}(t-\pi))(s)\right]\frac{1}{1-e^{-s\pi}} =$

$= \left[\frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\mathcal{L}(\sin(t+\pi))(s)\right]\frac{1}{1-e^{-s\pi}} = \left[\frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\mathcal{L}(\sin(t))(s)\right]\frac{1}{1-e^{-s\pi}} = \left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right)\frac{1}{1-e^{-s\pi}} = \frac{(1+e^{-\pi s})}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

$\ulcorner \sin(t+\pi) = -\sin t \lrcorner$

Pravidlo o translaci
Pro a > 0:
$\mathcal{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$

Nechť $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionální funkce taková, že st P < st Q. **Laplaceův vzor** f(t) funkce F(s) se dá najít pomocí tzv. **metody reziduí**. Platí $f(t) = \sum_{k=1}^{n} res_{s=z_k}F(s)e^{st}$, kde $z_1, \dots, z_n \epsilon \mathbb{C}$ jsou všechny (různé) kořeny Q(s).

ZADÁNÍ: Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$.

ŘEŠENÍ:

$$\cdot \operatorname{res}_{s=1}\left(F(s)e^{st}\right) = \operatorname{res}_{s=1}\left(\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right) = \frac{e^{t}}{(-1)(-2)} = \frac{e^{t}}{2}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{s=2}\left(F(s)e^{st}\right) = \operatorname{res}_{s=2}\left(\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right) = \frac{e^{2t}}{1\cdot(-1)} = -e^{2t}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{s=3}\left(F(s)e^{st}\right) = \operatorname{res}_{s=3}\left(\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right) = \frac{e^{3t}}{2\cdot 1} = \frac{e^{3t}}{2}$$

$$\Longrightarrow f(t) = \operatorname{res}_{s=1}\left(F(s)e^{st}\right) + \operatorname{res}_{s=2}\left(F(s)e^{st}\right) + \operatorname{res}_{s=3}\left(F(s)e^{st}\right) = \frac{e^{t}}{2} - e^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}$$

ZADÁNÍ:

Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2-1}$.

ŘEŠENÍ:

Hledáme-li Laplaceův vzor k funkci $\frac{P(s)}{Q(s)}e^{-as}$, a > 0, **nejprve** najdeme Laplaceův vzor racionální funkce $\frac{P(s)}{Q(s)}$ **a potom** použijeme pravidlo o translaci. Je-li tedy $g(t)$ vzor k $\frac{P(s)}{Q(s)}$, pak $f(t) = g(t-a)\mathbf{1}(t-a)$ je hledaný vzor k $\frac{P(s)}{Q(s)}e^{-as}$.

$\cdot$ Nejprve najdeme Laplaceův vzor $g(t)$ funkce $G(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$.

$\cdot$ $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)}$

$$\cdot \operatorname{res}_{s=\pm 1}\left(G(s)e^{st}\right) = \operatorname{res}_{s=\pm 1}\left(\frac{e^{st}}{(s-1)(s+1)}\right) = \frac{e^{\pm t}}{\pm 2} = \pm\frac{e^{\pm t}}{2}.$$

$$\Longrightarrow g(t) = \operatorname{res}_{s=1}\left(G(s)e^{st}\right) + \operatorname{res}_{s=-1}\left(G(s)e^{st}\right) = \frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2}.$$

$\cdot$ Vzor pro $F(s) = e^{-s}G(s)$ teď nalezneme pomocí pravidla o translaci.

$$\Longrightarrow f(t) = g(t-1)\mathbf{1}(t-1) = \left(\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-(t-1)}}{2}\right)\mathbf{1}(t-1).$$

ZADÁNÍ: Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \dfrac{1-3s}{s^4}$.

ŘEŠENÍ:

$$\cdot F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{1-3s}{s^4} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\bullet\ F_2(s)=\frac{1-3s}{s^4}=\frac{1}{s^4}-\frac{3}{s^3}=\frac{1}{3!}\mathcal{L}(t^3)(s)-\frac{3}{2!}\mathcal{L}(t^2)(s)\implies f_2(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{3}{2}t^2 \quad (*)$$

Laplaceův obraz mocniny:
$\mathcal{L}[t^n](s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n\in\mathbb{N}_0$

$$\bullet\ G(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$\operatorname{res}_{s=0}\left(G(s)e^{st}\right)=\operatorname{res}_{s=0}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}\right)=\frac{e^0}{1^2}=1$$

$$\operatorname{res}_{s=-1}\left(G(s)e^{st}\right)=\operatorname{res}_{s=-1}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}\right)=\lim_{s\to-1}\left(\frac{e^{st}}{s}\right)'=\lim_{s\to-1}\frac{tse^{st}-e^{st}}{s^2}=-e^{-t}(t+1)$$

$$\implies g(t)=1-(t+1)e^{-t}\implies f_1(t)=g(t-2)\mathbb{1}(t-2)=\mathbb{1}(t-2)-(t-1)e^{-(t-2)}\mathbb{1}(t-2) \quad (**)$$

$$\overset{(*),(**)}{\implies} f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\mathbb{1}(t-2)-(t-1)e^{-(t-2)}\mathbb{1}(t-2)+\frac{t^3}{6}-\frac{3}{2}t^2$$

Metoda reziduí se dá použít také na hledání vzorů k funkcím ve tvaru $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}$, kde P, Q jsou polynomy takové, že st P < st Q, a T > 0. U těchto příkladů se typicky spokojíme s tím, že vzor najdeme ve tvaru Fourierovy řady.

ZADÁNÍ:

Naleznete Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)=\frac{1}{(s-i)^2}\frac{1}{1-e^{-\frac{s}{2}}}$ ve tvaru Fourierovy řady.

ŘEŠENÍ:

· Kořeny $(s-i)^2 \dots i$

· Kořeny $1-e^{-\frac{s}{2}} \dots 4k\pi i$ pro $k\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l}1-e^{-\frac{s}{2}}=0\\ e^{-\frac{s}{2}}=1=e^0\\ -\frac{s}{2}=2k\pi i\\ s=-4k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right]$

$$\cdot\ f(t)=\operatorname{res}_{s=i}F(s)e^{st}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{res}_{s=4k\pi i}F(s)e^{st}=\frac{1}{1-e^{-\frac{i}{2}}}\,t\,e^{it}-\frac{1}{2(1-e^{-\frac{i}{2}})^2e^{\frac{i}{2}}}e^{it}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{4k\pi i t}}{(4k\pi i-i)^2}$$

$$\left[\cdot\ \operatorname{res}_{s=i}F(s)e^{st}=\operatorname{res}_{s=i}\frac{e^{st}}{(s-i)^2(1-e^{-\frac{s}{2}})}\underset{\text{pól 2. řádu}}{=}\lim_{s\to i}\left((s-i)^2\frac{e^{st}}{(s-i)^2(1-e^{-\frac{s}{2}})}\right)'=\lim_{s\to i}\left(\frac{e^{st}}{1-e^{-\frac{s}{2}}}\right)'=\lim_{s\to i}\frac{te^{st}(1-e^{-\frac{s}{2}})-\frac{1}{2}e^{-\frac{s}{2}}e^{st}}{(1-e^{-\frac{s}{2}})^2}=\right.$$

$$=\frac{te^{it}(1-e^{-\frac{i}{2}})-\frac{1}{2}e^{-\frac{i}{2}}e^{it}}{(1-e^{-\frac{i}{2}})^2}=\frac{1}{1-e^{-\frac{i}{2}}}\,t\,e^{it}-\frac{1}{2(1-e^{-\frac{i}{2}})^2e^{\frac{i}{2}}}e^{it}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{s=4k\pi i}F(s)e^{st}=\operatorname{res}_{s=4k\pi i}\frac{e^{st}}{(s-i)^2(1-e^{-\frac{s}{2}})}=\frac{e^{4k\pi i t}}{(4k\pi i-i)^2(1-e^{-\frac{s}{2}})'\big|_{s=4k\pi i}}=\frac{e^{4k\pi i t}}{(4k\pi i-i)^2\frac{1}{2}e^{-\frac{s}{2}}\big|_{s=4k\pi i}}\underset{\left[e^{\frac{s}{2}}\big|_{s=4k\pi i}=1\right]}{=}\frac{2e^{4k\pi i t}}{(4k\pi i-i)^2}$$

ZADÁNÍ:

Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

ŘEŠENÍ:

Podobně jako u hledání vzorů racionálních funkcí, hledáme-li Laplaceův vzor k funkci $\frac{P(s)}{Q(s)(1-e^{-sT})}e^{-as}$, a >0, T >0, nejprve najdeme Laplaceův vzor k funkci $\frac{P(s)}{Q(s)(1-e^{-sT})}$ a pak použijeme pravidlo o translaci.

- $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}e^{-2s}$

- Označme $G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}$

- Nejprve tedy najdeme Laplaceův vzor funkce $G(s)$.

- $1-e^{-4s}=0 \iff s=\dfrac{2n\pi i}{4}=\dfrac{n\pi i}{2}$ pro nějaké $n\in\mathbb{Z}$

- Funkce G má dvojnásobný pól -1 a jednoduché póly $\dfrac{n\pi i}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

- $\operatorname{res}_{s=-1}\left(G(s)e^{st}\right) \overset{\text{dvojnásobný pól}}{=} \lim\limits_{s\to-1}\left(\dfrac{(s+1)^2e^{st}}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}\right)' = \lim\limits_{s\to-1}\left(\dfrac{e^{st}}{1-e^{-4s}}\right)' = \lim\limits_{s\to-1}\dfrac{te^{st}(1-e^{-4s})-4e^{-4s}e^{st}}{(1-e^{-4s})^2} =$

$$= \frac{1}{1-e^4}te^{-t}-\frac{4e^4}{(1-e^4)^2}e^{-t}$$

- $\operatorname{res}_{s=\frac{n\pi i}{2}}\left(G(s)e^{st}\right)=\operatorname{res}_{s=\frac{n\pi i}{2}}\left(\dfrac{e^{st}}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}\right)=\dfrac{e^{\frac{n\pi i}{2}t}}{\left(\frac{n\pi i}{2}+1\right)^2(1-e^{-4s})'\Big|_{s=\frac{n\pi i}{2}}}=\dfrac{e^{\frac{n\pi i}{2}t}}{\left(\frac{n\pi i}{2}+1\right)^2 4\underbrace{e^{-4\frac{n\pi i}{2}}}_{=1}}=\dfrac{e^{\frac{n\pi i}{2}t}}{(n\pi i+2)^2}$

$$\Longrightarrow g(t)=\frac{1}{1-e^4}te^{-t}-\frac{4e^4}{(1-e^4)^2}e^{-t}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2+n\pi i)^2}e^{\frac{n\pi i}{2}t}$$

- Máme vzor pro G. Nyní aplikujeme pravidlo o translaci, abychom získali vzor pro F.

$$\Longrightarrow f(t)=g(t-2)\,\mathbb{1}(t-2)=\left(\frac{1}{1-e^4}(t-2)e^{-(t-2)}-\frac{4e^4}{(1-e^4)^2}e^{-(t-2)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2+n\pi i)^2}e^{\frac{n\pi i}{2}(t-2)}\right)\mathbb{1}(t-2)$$

ZADÁNÍ:

Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)=\dfrac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

ŘEŠENÍ:

- $1-e^{-2s}=0 \iff e^{-2s}=1=e^{0} \iff s=\frac{2n\pi i}{2}=n\pi i$ pro nějaké $n\in\mathbb{Z}$

  [Obecně $\underset{[T\neq 0]}{1-e^{-sT}}=0 \iff s=\frac{2n\pi i}{T}$ pro nějaké $n\in\mathbb{Z}$]

- Funkce $F(s)$ má dvojnásobný pól v 0 a jednoduché póly v bodech $n\pi i$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

  $n\pi i\big|_{n=0}=0$, což už jsme započítali

$$\Longrightarrow \quad f(s)=\operatorname{res}_{s=0}\left(F(s)e^{ss}\right)+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\operatorname{res}_{s=n\pi i}\left(F(s)e^{ss}\right) \quad (*)$$

- $$\operatorname{res}_{s=0}\left(F(s)e^{ss}\right)=\operatorname{res}_{s=0}\left(\frac{e^{ss}}{s(1-e^{-2s})}\right)\underset{\text{pól řádu 2}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2e^{ss}}{s(1-e^{-2s})}\right)'=\lim_{s\to 0}\left(\frac{se^{ss}}{1-e^{-2s}}\right)'=\lim_{s\to 0}\frac{(e^{ss}+sse^{ss})(1-e^{-2s})-2e^{-2s}se^{ss}}{(1-e^{-2s})^2}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}$$

- Pro $n\neq 0$:

$$\operatorname{res}_{s=n\pi i}\left(F(s)e^{ss}\right)=\operatorname{res}_{s=n\pi i}\left(\frac{e^{ss}}{s(1-e^{-2s})}\right)=\frac{e^{n\pi i s}}{n\pi i\,(1-e^{-2s})'\big|_{s=n\pi i}}=\frac{e^{n\pi i s}}{n\pi i\, 2\, e^{-2n\pi i}}=\frac{e^{n\pi i s}}{2n\pi i}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad f(s)=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{1}{2n\pi i}e^{n\pi i s}$$

Řešení diferenciálních a integrálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

středa 9. prosince 2020 15:12

Laplaceův obraz derivace

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

Speciálně tedy:

$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}[f'''(t)](s) = s^3\mathcal{L}[f(t)](s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

ZADÁNÍ: Nalezněte Laplaceův obraz řešení diferenciální rovnice $y''(t)+y(t)=|\sin(t)|$ splňující počáteční podmínky $y(0)=y'(0)=0$.

ŘEŠENÍ:

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) = s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - s\,y(0) - y'(0) \overset{\text{počáteční podmínky}}{=} s^2\mathcal{L}(y(t))(s)$$

$$\Longrightarrow\quad s^2\mathcal{L}(y(t))(s) + \mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(|\sin t|)(s) \overset{\text{počítali jsme}}{=} \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$$

$$\Longrightarrow\quad (s^2+1)Y(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$$

$$\Longrightarrow\quad Y(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)^2}$$

ZADÁNÍ: Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=e^{-2t}$ s počátečními podmínkami $y(0)=1$ a $y'(0)=-2$.

ŘEŠENÍ:

Aplikujeme Laplaceovu transformaci a pravidlo o obrazu derivace

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = \mathcal{L}(e^{-2t})(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4sY(s) - 4 + 3Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Pro $a \in \mathbb{C}$: $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$

$$(s^2+4s+3)Y(s) = \frac{1}{s+2} + s + 2$$

$$(s+3)(s+1)Y(s) = \frac{1}{s+2} + s + 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1+(s+2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\cdot \ \operatorname{res}_{s=-1}\left(\frac{1+(s+2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\, e^{st}\right) = \frac{2}{2}\, e^{-t} = e^{-t}$$

$$\operatorname{res}_{s=-2}\left(\frac{1+(s+2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\, e^{st}\right) = \frac{1}{-1}\, e^{-2t} = -e^{-2t}$$

$$\operatorname{res}_{s=-3}\left(\frac{1+(s+2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\, e^{st}\right) = \frac{2}{2}\, e^{-3t} = e^{-3t}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$$

ZADÁNÍ: Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = 1(t) - 1(t-1)$$

s počátečními podmínkami $y(0)=1$ a $y'(0)=0$.

ŘEŠENÍ:

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) + Y(s) = \mathcal{L}[1(t) - 1(t-1)]$$

$$s^2Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$, kde $a \geq 0$.

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$(s^2+1)\,Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + s$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)s} - \frac{e^{-s}}{(s^2+1)s} + \frac{s}{s^2+1}$$

$$y(t) = 1 - \cos t - (1 - \cos(t-1))\,1(t-1) + \cos t$$

$$= 1 - (1-\cos(t-1))\,1(t-1) \qquad \text{pro } t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)s}\right](t) = \operatorname{res}_{s=0} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} + \operatorname{res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} + \operatorname{res}_{s=-i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} = 1 - \frac{e^{it}}{2} - \frac{e^{-it}}{2} =$$

$$(s^2+1) = (s-i)(s+i)$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2}\right) = 1 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = 1 - \cos t$$

• $\operatorname{res}_{s=0} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} = 1$

• $\operatorname{res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} = \frac{e^{it}}{i2s}\Big|_{s=i} = -\frac{e^{it}}{2}$

• $\operatorname{res}_{s=-i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)s} = \frac{e^{-it}}{-i2s}\Big|_{s=-i} = -\frac{e^{-it}}{2}$

ZADÁNÍ:

Pomocí Laplaceovy transformace naleznětě řešení integrodiferenciální rovnice $y'(t) = t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau$ vyhovující počáteční podmínce $y(0)=4$.

ŘEŠENÍ:

Jsou-li f, gϵL_0, potom jejich konvoluce $h(t) = (f * g)(t)$: $[0,\infty) \to \mathbb{C}$ je definovaná předpisem $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$. Platí **pravidlo o obrazu konvoluce** $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$.

Uvažujeme-li ztotožnění $f(t) = f(t)\mathbf{1}(t)$, pak se jedná o stejnou konvoluci, jakou jsme viděli ve Fourierově transformaci.

• Rovnici lze zapsat jako $y'(t) = t + (y*g)(t)$, kde $g(t) = \cos t$.

• Aplikujeme Laplaceovu transformaci, pravidlo o obrazu derivace a pravidlo o obrazu konvoluce

$$\Longrightarrow \quad sY(s) - y(0) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{s}{s^2+1}$$

Laplaceův obraz mocniny:
$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$

Laplaceova transformace *sin* a *cos*
Pro $\omega \epsilon \mathbb{C}$:
$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

počáteční podmínka

$$\Longrightarrow$$

$$sY(s) - 4 = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{s}{s^2+1}$$

$$\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2} + 4$$

$$\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s^2} + 4$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^5} + \frac{4s^2+4}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} + \frac{4}{s} + \frac{4}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^3} + \frac{1}{s^5}$$

Laplaceův obraz mocniny: $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$

$$Y(s) = 4\mathcal{L}(1)(s) + \frac{5}{2!}\mathcal{L}(t^2)(s) + \frac{1}{4!}\mathcal{L}(t^4)(s)$$

$$\Longrightarrow \underline{y(t) = 4 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4}$$

ZADÁNÍ:

Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) - 2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 1(t-1)$$ vyhovující počáteční podmínce $y(0)=0$.

ŘEŠENÍ:

$$y'(t) - 2(y*g)(t) = 1(t-1), \quad \text{kde } g(t) = \cos t$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) - 2\,\mathcal{L}[(y*g)(t)](s) = \mathcal{L}[1(t-1)](s)$$

$$sY(s) - y(0) - 2\,Y(s)\,\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$, kde $a \geq 0$.

$$sY(s) - 2Y(s)\frac{s}{1+s^2} = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\left(s - \frac{2s}{1+s^2}\right)Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\frac{s(1+s^2) - 2s}{1+s^2}Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}\,\frac{1+s^2}{s^3-s} = \frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}\,e^{-s}$$

$$y(t) = \left(-(t-1) + e^{t-1} - e^{-(t-1)}\right)\mathbb{1}(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}\right](t) = \operatorname{res}_{s=0}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} + \operatorname{res}_{s=1}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} + \operatorname{res}_{s=-1}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} =$$

$$= -t + e^{t} - e^{-t}$$

- $\operatorname{res}_{s=1}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} = \frac{2}{1\cdot 2s}e^{st}\Big|_{s=1} = \frac{2e^{t}}{2} = e^{t}$
- $\operatorname{res}_{s=-1}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} = \frac{2}{1\cdot 2s}e^{st}\Big|_{s=-1} = \frac{2e^{-t}}{-2} = -e^{-t}$
- $\operatorname{res}_{s=0}\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{s\to 0}\left(s^2\,\frac{1+s^2}{s^2(s^2-1)}e^{st}\right)' = \lim_{s\to 0}\left(\frac{(1+s^2)e^{st}}{s^2-1}\right)' = \lim_{s\to 0}\frac{(2se^{st} + (1+s^2)te^{st})(s^2-1) - 2s(1+s^2)e^{st}}{(s^2-1)^2} =$

$$= \frac{te^{0}(-1) - 0}{(-1)^2} = -t$$

10 $\mathcal{Z}$-transformace

Z-transformace

úterý 29. prosince 2020 15:22

Je-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnost nejvýše exponenciálního řádu, pak její $\mathcal{Z}$ **−transformace** je funkce $\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ definovaná na největším možném okolí nekonečna, na kterém řada konverguje.

ZADÁNÍ: Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1,0,1,0,1,0,\dots)$.

a) Naleznete $\mathcal{Z}$-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

b) Naleznete $\mathcal{Z}$-transformaci posloupnosti $(2^n a_n - n a_n)_{n=0}^{\infty}$.

c) Naleznete posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \geq 1$.

d) Naleznete posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_1 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \neq 1$.

e) Naleznete $\mathcal{Z}$-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ z úlohy d).

ŘEŠENÍ:

a) $\mathcal{Z}[a_n](z) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-1}$ pro $|z| > 1$.

$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (\overset{0}{1}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{0}, \dots)$

b) $\mathcal{Z}[2^n a_n - n a_n](z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1} - \left(-z\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right)'\right) = \frac{z^2}{z^2-4} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2}$

- **Pravidlo o multiplikaci**
  Pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest $\mathcal{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathcal{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

- **Pravidlo o derivaci obrazu**
  $\mathcal{Z}[n a_n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a_n](z)$

c) **Konvoluce posloupností** $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

- $(1,0,1,0,1,0,\dots) * (1,0,0,0,\dots) = ?$
- $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_n b_0 = a_n \implies (1,0,1,0,1,0,\dots) * (1,0,0,0,\dots) = (a_n)_{n=0}^{\infty}$

d) $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (1,0,1,0,1,0,\dots) * (0,1,0,0,\dots) = ?$

- $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_{n-1} b_1 = a_{n-1}$ pro $n \geq 1$.
- Pro $n=0$ jest $c_0 = a_0 b_0 = 0$.
- Tedy $c_n = \begin{cases} 0 \dots n=0 \\ a_{n-1} \dots n \geq 1 \end{cases}$

e)

Pravidlo o obrazu konvoluce
Jsou-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \epsilon Z_0$, potom $\mathcal{Z}[a_n * b_n](z) = \mathcal{Z}[a_n](z)\mathcal{Z}[b_n](z)$.

$$\mathcal{Z}[a_n * b_n](z) = \mathcal{Z}[a_n](z)\,\mathcal{Z}[b_n](z) = \frac{z^2}{z^2-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z}{z^2-1}.$$

$$\left[\mathcal{Z}[(0,1,0,0,\dots)](z) = \frac{1}{z}\right]$$

ZADÁNÍ:

Nalezněte inverzní Z-transformaci funkce $F(z)$.

a) $F(z) = \dfrac{e^{\frac{5}{z}} - 1}{z^3}$

b) $F(z) = \ln\left(\dfrac{z-1}{z}\right)$

c) $F(z) = \dfrac{1}{z^{100}+1}$

d) $F(z) = \dfrac{z}{z^2-6z+8}$

ŘEŠENÍ: Pro funkci $F(z) \epsilon H_\infty$ hledáme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takovou, aby $\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z)$.

a)

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pro každé $z \epsilon \mathbb{C}$.

$$F(z) = \frac{e^{\frac{5}{z}} - 1}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{z}\right)^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{z^n\, n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{z^{n+3}\, n!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5^{n-3}}{z^n\,(n-3)!}$$

$$\Longrightarrow a_n = \begin{cases} 0 \dots & n = 0,1,2,3 \\ \dfrac{5^{n-3}}{(n-3)!} \dots & n \geq 4 \end{cases}$$

b)

$$F(z) = \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z-1}{z} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n\, z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n z^n}$$

$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$

$$\Longrightarrow a_n = \begin{cases} 0 \dots & n = 0 \\ -\dfrac{1}{n} \dots & n \geq 1. \end{cases}$$

c) $F(z) = \frac{1}{z^{100}+1} = \frac{1}{z^{100}} \frac{1}{1-(-\frac{1}{z^{100}})} = \frac{1}{z^{100}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^{100}}\right)^n = \frac{1}{z^{100}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{100n}} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{100(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^{100n}}$

$\Longrightarrow a_n = \begin{cases} (-1)^{l-1} \dots & n = 100l \text{ pro } l \in \mathbb{N} \\ 0 \dots & \text{jinak} \end{cases}$

d) $F(z) = \frac{z}{z^2-6z+8} = \frac{z}{(z-4)(z-2)}$

Pro inverzní $\mathcal{Z}$ –transformaci funkce $F(z)\epsilon H_\infty$ platí integrální vzoreček $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)z^{n-1}\,dz$, kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka, ležící v okolí nekonečna, na kterém je F(z) holomorfní. Tento křivkový integrál můžeme často spočítat pomocí reziduové věty.
Zejména, je-li $\mathbf{F(z)}\boldsymbol{\epsilon H_\infty}$ **holomorfní v** $\mathbb{C}$ **až na konečně mnoho izolovaných singularit** $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_n} \in \mathbb{C}$**, potom** $\boldsymbol{a_n = \sum_{j=1}^{n} res_{z_j} F(z) z^{n-1}}$.

Dále existuje limitní vzoreček pro výpočet a_n, který je užitečný zejména pro a_0. Platí $\boldsymbol{a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)}$.

Jest $a_n = \operatorname{res}_4 \frac{z^n}{(z-4)(z-2)} + \operatorname{res}_2 \frac{z^n}{(z-4)(z-2)} = \frac{4^n}{2} + \frac{2^n}{-2} = \frac{1}{2}\left(4^n - 2^n\right)$

$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(4^n - 2^n\right), \; n \in \mathbb{N}_0.$

ZADÁNÍ:

Je dána funkce $F(z) = \ln\left(1+\frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2}$.

a) Naleznete rozvoj funkce $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí nekonečna

b) Určete členy a_0, a_1, a_2 posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, která je inverzní Z-transformace funkce $F(z)$.

c) Určete členy c_0, c_1, c_2 posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty}$, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost z bodu b).

ŘEŠENÍ:

a) $F(z) = \ln\left(1+\frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2}$

$$\cdot \ln\left(1+\frac{4}{z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{4}{z^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n z^{2n}}$$

$$\cdot \frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3z} \frac{1}{1-\frac{2}{3z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}}$$

b)

- $a_0 = 0 - 0 = 0$
- $a_1 = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
- $a_2 = 4 - \frac{2}{9} = \frac{34}{9}$

c) $(c_n)_{n=0}^{\infty} = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{34}{9}, a_3, a_4, a_5, \dots\right) * (1, 1, 1, 1, \dots)$

- $c_0 = a_0 b_0 = 0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = \frac{34}{9} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{31}{9}$

Pravidlo o obrazu posunutí

Je-li $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $k \in \mathbb{N}$, potom $\mathcal{Z}[a_{n+k}](z) = z^k \mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \dots - a_{k-1} z$.

ZADÁNÍ: Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-2)^n$ s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$.

ŘEŠENÍ:

· Aplikujeme Z-transformaci a pravidlo o obrazu posunutí

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) + 3\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) + 2Y(z) = \mathcal{Z}[(-2)^n](z)$$

$\mathcal{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$

$$z^2 Y(z) - y_0 z^2 - y_1 z + 3(zY(z) - y_0 z) + 2Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

počáteční podmínky $\Longrightarrow$

$$z^2 Y(z) + 3zY(z) + 2Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z^2+3z+2)(z+2)} = \frac{z}{(z+2)^2(z+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad y_n = \operatorname{res}_{-2} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} + \operatorname{res}_{-1} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)}$$

· $\operatorname{res}_{-2} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} \underset{\text{pól řádu 2}}{=} \lim_{z \to -2} \left(\frac{z^n}{z+1} \right)' = \lim_{z \to -2} \frac{n z^{n-1}(z+1) - z^n}{(z+1)^2} = -n(-2)^{n-1} - (-2)^n = -(-2)^n \left(1 - \frac{n}{2}\right)$

· $\operatorname{res}_{-1} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} = (-1)^n$ jednoduchý kořen jmenovatele

$$\Longrightarrow \quad y_n = (-1)^n - (-2)^n \left(1 - \frac{n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

ZADÁNÍ: Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$$

s počáteční podmínkou $y_0 = 4$.

ŘEŠENÍ:

- Aplikujeme Z-transformaci a pravidlo o obrazu posunu

$$\Longrightarrow \quad zY(z) - y_0 z + 4Y(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}\right](z)$$

počáteční podmínka

$$\Longrightarrow \quad zY(z) - 4z + 4Y(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}\right](z)$$

- Všimneme si, že $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ je n-tý člen konvoluce $(2^n)_{n=0}^{\infty} * (3^n)_{n=0}^{\infty}$.
- Dle pravidla o obrazu konvoluce tedy

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}\right](z) = \mathcal{Z}[2^n](z)\,\mathcal{Z}[3^n](z)$$

- $\mathcal{Z}[2^n](z) = \dfrac{z}{z-2}$
- $\mathcal{Z}[3^n](z) = \dfrac{z}{z-3}$
- Tedy $\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}\right](z) = \dfrac{z}{z-2}\,\dfrac{z}{z-3} = \dfrac{z^2}{(z-2)(z-3)}$

$$\Longrightarrow \quad (z+4)Y(z) - 4z = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}$$

$$\Longrightarrow \quad Y(z) = \frac{z^2}{(z+4)(z-2)(z-3)} + \frac{4z}{z+4}$$

$$\Longrightarrow \quad y_n = \operatorname{res}_{-4} \frac{z^2}{(z+4)(z-2)(z-3)} z^{n-1} + \operatorname{res}_{2} \frac{z^2}{(z+4)(z-2)(z-3)} z^{n-1} +$$

$$+ \operatorname{res}_{3} \frac{z^2}{(z+4)(z-2)(z-3)} z^{n-1} + \operatorname{res}_{-4} \frac{4z}{z+4} z^{n-1}$$

$$= \frac{(-4)^{n+1}}{42} + \frac{2^{n+1}}{-6} + \frac{3^{n+1}}{7} + 4(-4)^n = -\frac{2}{21}(-4)^n - \frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} + 4(-4)^n$$

$$y_n = -\frac{2}{21}(-4)^n - \frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} + 4(-4)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ZADÁNÍ: Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici $y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = n$ s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$.

ŘEŠENÍ:

- Aplikujeme Z-transformaci a pravidlo o obrazu posunu

$$\Longrightarrow \quad z^2 Y(z) - y_0 z^2 - y_1 z + \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k}\right](z) = \mathcal{Z}[n](z)$$

$$\mathcal{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

počáteční podmínky

$$\Longrightarrow \quad z^2 Y(z) + \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k}\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- Všimneme si, že $\sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k}$ je n-tý člen konvoluce $(2^n)_{n=0}^{\infty} * (y_n)_{n=0}^{\infty}$.

Dle pravidla o obrazu konvoluce tedy

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k}\right](z) = \mathcal{Z}[2^n](z)\,\mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{z}{z-2} Y(z)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(z^2 + \frac{z}{z-2}\right) Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{z(z-1)^2}{z-2} Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^4}$$

Pro $n \geq 1$:

$$y_n = \operatorname{res}_1 \frac{z-2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \to 1} \left((z-2) z^{n-1}\right)''' = \frac{1}{6} \lim_{z \to 1} \left(z^n - 2z^{n-1}\right)''' =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to 1} \left(n(n-1)(n-2) z^{n-3} - 2(n-1)(n-2)(n-3) z^{n-4} \right) = \frac{1}{6} (n-1)(n-2)(n-2n+6) =$$

$$= \frac{1}{6} (n-1)(n-2)(6-n)$$

- $y_n = \frac{1}{6} (n-1)(n-2)(6-n), \; n \in \mathbb{N}$