Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (DD.MM.RRRR)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 99

Body

Úloha	1	2	3	4	5	Σ
Body						

Před zahájením práce

- **Vyplňte** čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a **podepište se**.
- **Poznamenejte si Vaše identifikační číslo**. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít **na lavici pouze** zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. **Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište**.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Vzorec pro výpočet rezidua v pólech

- Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k funkce $f(z)$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.
- $\mathscr{F}\left[t f(t)\right](\omega) = i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$ a $\mathscr{L}\left[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.
- $\mathscr{L}\left[t f(t)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.
- $\mathscr{Z}\left[n a_n\right](z) = -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$.

Písemná část (varianta A)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{2-3i}{1+2i}.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$1 - 6i = re^{i\varphi}.$$

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-4)^k} + \sum_{n=-2}^{\infty} 3^n (z-4)^{3n}, \ z \in P(4),$$

měla v bodě $z_0 = 4$ pól řádu 3.

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^5(z^2+6z+9)}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 4$ a určete parametry tohoto mezikruží.

(b) Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z+5)^n$ má poloměr konvergence $R = 2$. Konverguje v bodě $z = -2 + i$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{(z-\pi)(\cos z + 1)}{(1+e^{iz})^3}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Označme jako $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ inverzní Z-transformaci funkce

$$F(z) = \frac{1}{z^6 + 3z^2}.$$

Určete, čemu se rovná a_3 a a_{14}.

[Nápověda: Rozviňte $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí ∞.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right) * (n(2i)^n)\right)_{n=0}^{\infty}.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'''(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

[Využijte faktu, že $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.]

(b) Určete řešení $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice, je-li Fourierův obraz řešení roven

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\omega}{(\omega+2i)^2(\omega - i)}.$$

Písemná část (varianta B)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{i^{17}}{(2-i)^2}.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (-2-2i)e^{1+\frac{3\pi}{2}i}.$$

(c) Určete $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_1 \left((z-1)^2 + \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^8} + \frac{a}{(z-1)^k} \right) = -2.$$

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)2^{n+4}}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Laurentova řada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+5)^n$ má vnitřní poloměr konvergence $r = 2$ a vnější $R = 9$. Konverguje v bodě $z = -6$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Nejprve zapište funkci

$$f(t) = \begin{cases} e^{it}, & \text{pokud } t \in [0,2), \\ 0, & \text{pokud } t \in [2,4), \\ (t-3)^2, & \text{pokud } t \in [4,\infty), \end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce a poté nalezněte její Laplaceovu transformaci.

(b) Nalezněte Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+2i)^2}.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + 2y'(t) = \sin(3t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)^2(s+1)}.$$

Písemná část (varianta C)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$z^2 + 6z + 15 = 0.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (3 - 3i)^5.$$

(c) Určete číslo $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{e^{zi} + a}{z^5(z + \pi)^2}$$

měla v bodě $z = -\pi$ pól 1. řádu.

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Mějme funkci

$$u(x, y) = 2 + 3x - y + x^2 - y^2 - 4xy, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x, y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá funkce. Určete $f'(1 + i)$.

(b) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \operatorname{Re} z + \alpha \operatorname{Re}(z^2) + i\beta|z|^2, \ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná v bodě $1 + 2i$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{\cos z}{(z+10i)^2} + \frac{z+2\pi}{(\sin z)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $-\frac{5\pi}{2}+i$, $-\frac{5\pi}{2}-i$, $-\frac{3\pi}{2}+i$, $-\frac{3\pi}{2}-i$.

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+1) - \mathbb{1}(t-5),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

[Nápověda: Transformaci počítejte z definice, integrál NEroztrhávejte.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[(te^{-\frac{t^2}{2}}) * (e^{2it}h'''(t))\right](\omega)\,.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Z-transformaci $Y(z)$ řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = \sum_{k=0}^{n} k b_{n-k}$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 2$ a $y_1 = 1$. Obraz posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je $\mathscr{Z}[b_n](z) = \frac{(z-1)^2}{z^4}$.

(b) Určete řešení y_n diferenční rovnice, je-li Z-transformace řešení rovna

$$Y(z) = \frac{1}{(z-3+i)(z-3)^2}.$$

Písemná část (varianta D)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{(3-4i)^2}{i^{83}}.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$-2-3i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

(c) Určete $k \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-2)^k} + \frac{3}{(z-2)^3} + \sum_{n=-1}^{\infty} n(z-2)^{3n}, \ z \in P(5),$$

měla v bodě 2 odstranitelnou singularitu.

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2+i-z)^2}$$

do mocninné řady na maximálním okolí bodu $z_0 = i$ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Víme, že mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-6)^n$$

má poloměr konvergence $R = 3$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 4$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(1 - \cos z)}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = z^3 \sin\left(\frac{3}{z^5}\right), \ z \in U(\infty),$$

a napište, čemu se rovná a_2 a a_{30}.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\sin z$.]

(b) Pomocí obrazu $\mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$ vyjádřete Z-transformaci posloupnosti

$$\left((b_{n+3}) * (n^2)\right)_{n=0}^{\infty},$$

kde $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost splňující $b_0 = 0$, $b_1 = 2$ a $b_2 = 4$.

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'''(t) + 2y''(t) + y(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

[Využijte faktu, že $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.]

(b) Určete řešení $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice, je-li Fourierův obraz řešení roven

$$\hat{y}(\omega) = i\frac{\omega + 2i}{(\omega^2 + 4)^2}.$$

Písemná část (varianta E)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$z^2 - 8z + 18 = 0.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$-3 + 5i = re^{i\varphi}.$$

(c) Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{3}{(z+5)^{10}} + \frac{1}{(z-5)^2} + \frac{4}{z+5}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+5| = 1$.

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby funkce

$$u(x,y) = e^{\alpha x}\cos y + xy^3 + \beta x^3 y,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

(b) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + i(z+\overline{z})^2 + 2i\operatorname{Im} z,\ \ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 1 + 4i$. Pokud ano, určete $f'(1+4i)$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3} + \frac{\sin(z^2)}{\cos z}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $\frac{i}{2}$, $-1+2i$, $1+2i$.

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Určete spojitou funkci $f \in L^1(\mathbb{R})$, víte-li, že

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+9} \qquad \text{a} \qquad \widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-3i)(\omega-i)}.$$

[Nápověda: Nejprve vyjádřete, čemu se rovná $\hat{f}(\omega)$.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[h(t-1)\cos(3t)\right](\omega)\,.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 \sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1$ a $y'(0) = 2$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s^2+s-2)^2}.$$

Písemná část (varianta F)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím" téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = (2-3i)(3+i) + \frac{2}{i^{13}}.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = 5\Big(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Big)^{16}.$$

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_i\left(\frac{4}{(z-i)^3} + \frac{a}{(z-i)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} n^3 (z-i)^{3n-7}\right) = 1+i.$$

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n+1) z^{3n+2}}{n! 2^n}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+i)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = \sqrt{6}$ a vnější $R = \infty$. Konverguje v bodě $z = 2+i$?

Úloha 3 ([12 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.**

(a) Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce $f(t)$ s periodou $T=5$, která je na intervalu $[0,5)$ dána předpisem

$$f(t) = e^{4t}\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big),\ t \in [0,5).$$

(b) Pomocí Laplaceova obrazu $G(s)$ „pěkné“ funkce $g(t) \in L_0$ splňující $g(0)=2$ a $g'(0)=1$ vyjádřete

$$\mathscr{L}\left[(t\sin(it)) * g''(t)\right](s)\,.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6])**.**

(a) Určete Z-transformaci $Y(z)$ řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 0$ a $y_1 = 1$.

(b) Určete řešení y_n diferenční rovnice, je-li Z-transformace řešení rovna

$$Y(z) = \frac{z(z-2i)}{(z^2+4)^2}.$$

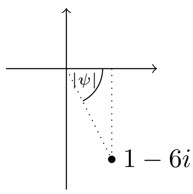
varianta A – řešení[1]

Úloha 1: (a) Komplexní číslo usměrníme. Jmenovatel bychom mohli také roznásobovat, ale je s výhodou si pamatovat, že pro každé komplexní číslo z platí $z\bar{z} = |z|^2$, čímž si lze zjednodušit výpočty. Jest

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{2-3i}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{1+4} = \frac{2-4i-3i-6}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Tedy $\operatorname{Re} z = -\frac{4}{5}$ a $\operatorname{Im} z = -\frac{7}{5}$.

(b) Cílem je převést číslo $1-6i$ do exponenciální tvaru. Nejdříve určíme jeho velikost (a tedy hledané r). Jest $|1-6i| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$. Tedy $r = \sqrt{37}$. Nakonec určíme (nějakou) hodnotu argumentu čísla $1-6i$ (tedy hledané φ). Z algebraického tvaru okamžitě vidíme, že číslo leží ve 4. kvadrantu. Úhel φ můžeme zvolit tedy (například) jako $\varphi = -|\psi|$, kde $|\psi|$ je velikost (neorientovaného) úhlu ψ ve vhodně zvoleném pravoúhlém trojúhelníku. Např.:



Takže $\operatorname{tg}|\psi| = \frac{6}{1} = 6$, tedy $|\psi| = \operatorname{arctg} 6$.

Můžeme tedy vzít např. $\varphi = -\operatorname{arctg} 6$. Zde je dobré si mimo soutěž uvědomit, že takto zvolený úhel φ leží v intervalu $(-\pi, \pi]$, a tedy se jedná o hlavní hodnotu argumentu čísla $1-6i$.

(c) Funkce $g(z)$ je zadaná pomocí Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu $z_0 = 4$. Má-li mít v bodě $z_0 = 4$ pól 3. řádu, nejmenší mocnina $(z-4)$ vyskytující se v tomto rozvoji s nenulovým koeficientem musí být (-3). mocnina. Rozepíšeme si

$$g(z) = \frac{a}{(z-4)^k} + \frac{3^{-2}}{(z-4)^6} + \frac{3^{-1}}{(z-4)^3} + 3^0(z-4)^0 + \cdots,$$

kde $\cdots$ již obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-4)$, kterou jsou pro nás zcela irelevantní. Vidíme, že musíme zvolit $k = 6$ a $a = -3^{-2} = -\frac{1}{9}$. Potom totiž

$$g(z) = \frac{3^{-1}}{(z-4)^3} + 3^0(z-4)^0 + \cdots, \quad z \in P(4).$$

Úloha 2: (a) Funkci chceme rozvinout do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 = 4$. To znamená pomocí celočíselných mocnin $(z-4)$. Tedy vyskytující se $(z-4)^{-5}$ pouze vytkneme:

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^5(z^2+6z+9)} = \frac{1}{(z-4)^5}\frac{1}{z^2+6z+9}. \tag{1}$$

[1]Pokud objevíte v řešeních nějaké chyby či překlepy (zejména v matematice), budu Vám vděčný, pokud se se mnou o Vaše nálezy podělíte.

Máme $z^2+6z+9=(z+3)^2$, takže
$$\frac{1}{z^2+6z+9}=\frac{1}{(z+3)^2}.$$
Jelikož $\left(\frac{1}{z+3}\right)'=-\frac{1}{(z+3)^2}$, máme $\frac{1}{(z+3)^2}=-\left(\frac{1}{z+3}\right)'$. Rozvineme tedy $\frac{1}{z+3}$ se správným středem a výslednou řadu zderivujeme člen po členu, abychom získali rozvoj $\frac{1}{(z+3)^2}$. Využijeme známého součtu geometrické řady, který nám říká, že
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q} \qquad \text{pro každé } q\in\mathbb{C} \text{ splňující } |q|<1. \tag{GEOM}$$
Máme
$$\begin{aligned}\frac{1}{z+3}&=\frac{1}{3+4+(z-4)}=\frac{1}{7+(z-4)}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{(z-4)}{7})}\\&=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(z-4)}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}(z-4)^n,\end{aligned}$$
takže
$$\frac{1}{(z+3)^2}=-\left(\frac{1}{z+3}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}(z-4)^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}n(z-4)^{n-1}.$$
Dosadíme-li zpět do (1), dostaneme
$$f(z)=\frac{1}{(z-4)^5}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}n(z-4)^{n-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{7^{n+1}}n(z-4)^{n-6}.$$
Ze vzorce pro součet geometrické řady dostáváme podmínku, že $|-\frac{(z-4)}{7}|<1$. Rozvoj je tedy platný pro z splňující $0<|z-4|<7$ (vnitřní poloměr je tedy $r=0$ a vnější $R=7$).

(b) Jest $|(-2+i)+5|=|3+i|=\sqrt{10}>\sqrt{9}=3>2=R$, takže mocninná řada v bodě $z=-2+i$ nekonverguje.

Úloha 3: Nejprve určíme kořeny jmenovatele. Jest
$$\begin{aligned}1+e^{iz}&=0\\e^{iz}&=-1=e^{\pi i}\\iz&=\pi i+2k\pi i\\z&=\pi+2k\pi,\end{aligned}$$
kde $k\in\mathbb{Z}$. Vyšetřujeme tedy nekonečně mnoho izolovaných singularit v bodech $z=\pi+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$. Nyní zjistíme, kolika násobné jsou to kořeny čitatele a kolika násobné kořeny jmenovatele. Začneme čitatelem. Máme
$$(z-\pi)(\cos z+1)\big|_{z=\pi+2k\pi}=2k\pi(-1+1)=0.$$
Jedná se tedy o kořeny a pokračujeme dále, abychom zjistili jejich násobnost. Zde se nabízí dva způsoby:

(i) První, který je rychlejší a měli byste ho ideálně použít. Vidíme, že bod $z=\pi$ (což odpovídá $k=0$) je jednonásobný kořen faktoru $(z-\pi)$, ale je-li $k\neq 0$, potom body $z=\pi+2k\pi$ nejsou kořeny tohoto faktoru (což odpovídá násobnosti 0). Co se týče faktoru $(\cos z+1)$, tak máme

$$\begin{aligned}(\cos z+1)'\big|_{z=\pi+2k\pi} &= -\sin z\big|_{z=\pi+2k\pi}=0\\ (\cos z+1)''\big|_{z=\pi+2k\pi} &= (-\sin z)'\big|_{z=\pi+2k\pi}=-\cos z\big|_{z=\pi+2k\pi}=1\neq 0,\end{aligned}$$

pro každé $k\in\mathbb{Z}$, takže se jedná o dvojnásobné kořeny faktoru $(\cos z+1)$. Celkem jsme tedy zjistili, že body $z=\pi+2k\pi$ jsou

$$\text{kořeny čitatele násobnosti}\begin{cases}1+2=3 & \text{pokud } k=0\\ 0+2=2 & \text{pokud } k\neq 0.\end{cases}\tag{2}$$

(ii) Druhý je založený na přímočarém derivování. To je ovšem nejenom pomalejší, ale také náchylnější na chyby… Přesto si ho uvedeme, abyste mohli sami porovnat jeho neefektivitu (dále ale už budeme používat pouze „chytrý postup“). Máme

$$\left((z-\pi)(\cos z+1)\right)'\big|_{z=\pi+2k\pi}=\cos z+1-(z-\pi)\sin z\big|_{z=\pi+2k\pi}=0,$$

dále

$$\begin{aligned}\left((z-\pi)(\cos z+1)\right)''\big|_{z=\pi+2k\pi} &= \left(\cos z+1-(z-\pi)\sin z\right)'\big|_{z=\pi+2k\pi}\\ &= -\sin z-\sin z-(z-\pi)\cos z\big|_{z=\pi+2k\pi}\\ &= 0-0+2k\pi.\end{aligned}$$

Jelikož $2k\pi\neq 0$ pokud $k\neq 0$, zjistili jsme, že body $z=\pi+2k\pi$ jsou dvojnásobné kořeny čitatele pro $k\neq 0$. V případě $k=0$ (tedy $z=0$) je ale $2k\pi|_{k=0}=0$, takže musíme derivovat dále. Jest

$$\begin{aligned}\left((z-\pi)(\cos z+1)\right)'''\big|_{z=\pi} &= \left(-\sin z-\sin z-(z-\pi)\cos z\right)'\big|_{z=\pi}\\ &= -\cos z-\cos z-\cos z+(z-\pi)\sin z\big|_{z=\pi}\\ &= -3\neq 0,\end{aligned}$$

takže bod $z=\pi$ je trojnásobný kořen čitatele. Zjistili jsme tedy to samé, co předchozím postupem, ale uvědomme si, kolik zbytečného úsilí (a času) nás to stálo…

Zpět k naší úloze. Zjistili jsme násobnost kořenů $z=\pi+2k\pi$ v čitateli. Zbývá zjistit jejich násobnost ve jmenovateli. Postupujeme chytře a první si zjistíme jejich násobnost jakožto kořene[2] $(1+e^{iz})$. Máme

$$(1+e^{iz})'=ie^{iz}\big|_{z=\pi+2k\pi}=-i\neq 0.$$

Jedná se tedy o jednonásobné kořeny faktoru $(1+e^{iz})$, a tedy o $3\cdot 1=3$ násobné kořeny jmenovatele. Nyní již víme vše potřebné a můžeme klasifikovat

[2] Víme, že jsou to kořeny $(1+e^{iz})$, tak jsme na ně přišli, takže to není třeba ověřovat.

izolované singularity. Body $z = \pi + 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou dvojnásobné kořeny čitatele (viz (2)) a trojnásobné kořeny jmenovatele. Jsou to tedy póly řádu $3 - 2 = 1$. Bod $z = \pi$ (což odpovídá $k = 0$) je trojnásobný kořen čitatele (viz (2)) a také trojnásobný kořen jmenovatele. Jedná se tedy o odstranitelnou singularitu.

Úloha 4: (a) Funkci $F(z)$ rozvine do Laurentovy řady na okolí ∞. Jest

$$F(z) = \frac{1}{z^6 + 3z^2} = \frac{1}{z^6}\frac{1}{1 + \frac{3}{z^4}}.$$

Dále využijeme (GEOM), abychom získali

$$\frac{1}{1 + \frac{3}{z^4}} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{z^4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{4n}}.$$

Tedy

$$F(z) = \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{4n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{4n+6}}.$$

Máme určit a_3 a a_{14}. Tedy popořadě koeficient u $\frac{1}{z^3}$ a $\frac{1}{z^{14}}$. Jest $4n+6 = 3 \Leftrightarrow n = -\frac{3}{4}$, což ale není celé číslo. Koeficient u $\frac{1}{z^3}$ je tedy 0 (v řadě se nevyskytuje), takže $a_3 = 0$. Jest $4n + 6 = 14 \Leftrightarrow n = 2$, takže $a_{14} = (-3)^n\big|_{n=2} = 9$.

(b) Díky pravidlu o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{Z}\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right) * (n(2i)^n)\right](z) = \mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) \cdot \mathscr{Z}\left[n(2i)^n\right](z).$$

První určíme obraz $\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)$. Nabízejí se dvě možnosti (začneme tou pomalejší). Díky pravidlu o obrazu posunutí máme

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) &= z^2\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\Big|_{n=0}\right)z^2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\Big|_{n=1}\right)z \\ &= z^2\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) - z^2.\end{aligned}$$

S využitím známého obrazu posloupnosti $\mathscr{Z}[\cos\omega n](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ (v našem případě $\omega = \frac{\pi}{2}$) tedy

$$\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) = \frac{z^2}{z^2+1},$$

takže

$$\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = z^2\frac{z^2}{z^2+1} - z^2 = -\frac{z^2}{z^2+1}.$$

Tento obraz jsme ale mohli určit výrazně rychleji. A to takto:

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) &= \mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \pi\right)\right](z) \\ &= -\mathscr{Z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) \\ &= -\frac{z^2}{z^2+1}.\end{aligned}$$

Zbývá nám určit $\mathscr{Z}\left[n(2i)^n\right](z)$. Zde se nabízejí opět dvě možnosti. Můžeme využít pravidla o derivaci obrazu a známého obrazu $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$ (v našem případě s $\alpha = 2i$), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[n(2i)^n\right](z) &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\left[(2i)^n\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{z-2i} = -z\frac{z-2i-z}{(z-2i)^2} \\ &= \frac{2iz}{(z-2i)^2}.\end{aligned}$$

Nebo použijeme známé pravidlo $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ (v našem případě s $\alpha = 2i$) a známý obraz $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, čímž také dostaneme

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[n(2i)^n\right](z) &= \mathscr{Z}\left[n\right]\left(\frac{z}{2i}\right) = \frac{\frac{z}{2i}}{(\frac{z}{2i}-1)^2} = (-4)\frac{-\frac{zi}{2}}{(z-2i)^2} \\ &= \frac{2iz}{(z-2i)^2}.\end{aligned}$$

Úloha 5: (a) První si všimneme toho, že integrál, který se v rovnici vyskytuje, je konvoluce $e^{-|t|} * y(t)$. Aplikací Fourierovy transformace na rovnici, pravidla o obrazu konvoluce a známého obrazu Gaussovy funkce[3] tedy dostaneme

$$\mathscr{F}\left[y'''(t)\right](\omega) + \frac{2}{1+\omega^2}\hat{y}(\omega) = 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2}.$$

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu derivace, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}(i\omega)^3\hat{y}(\omega) + \frac{2}{1+\omega^2}\hat{y}(\omega) &= 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2} \\ \left(-i\omega^3 + \frac{2}{1+\omega^2}\right)\hat{y}(\omega) &= 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2} \\ \frac{2-i\omega^3-i\omega^5}{1+\omega^2}\hat{y}(\omega) &= 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2} \\ \hat{y}(\omega) &= 2\sqrt{\pi}\frac{1+\omega^2}{2-i\omega^3-i\omega^5}e^{-\omega^2}.\end{aligned}$$

(b) Dle věty o inverzi pro Fourierovu transformaci máme

$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\omega}{(\omega+2i)^2(\omega-i)}\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega+2i)^2(\omega-i)}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál spočítáme pomocí (INT+) nebo (INT−) v závislosti na tom[4], zda popořadě $t \geq 0$ nebo $t < 0$. Pro $t \geq 0$ tedy dle (INT+) máme

$$y(t) = \frac{2\pi i}{2\pi}\operatorname{res}_{z=i}\frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2(z-i)}.$$

[3] Pro $a > 0$ jest $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

[4] Uvědomme si, že parametr α ve vzorcích je roven t.

Reziduum určíme rychle „dosazovací metodou“, jelikož bod i je jednoduchý kořen. Tedy

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2(z-i)} = \frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2}\bigg|_{z=i} = -\frac{e^{-t}}{9}i,$$

takže $y(t) = \frac{e^{-t}}{9}$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ dle (INT$-$) máme

$$y(t) = \frac{-2\pi i}{2\pi} \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2(z-i)}.$$

Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=-2i} \frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2(z-i)} &= \lim_{z\to-2i} \left((z+2i)^2 \frac{ze^{izt}}{(z+2i)^2(z-i)}\right)' \\ &= \lim_{z\to-2i} \left(\frac{ze^{izt}}{(z-i)}\right)' = \lim_{z\to-2i} \frac{(e^{izt}+itze^{izt})(z-i)-ze^{izt}}{(z-i)^2} \\ &= -\frac{-3i(e^{2t}+2te^{2t})+2ie^{2t}}{9} = \frac{e^{2t}}{9}(6t+1)i,\end{aligned}$$

takže $y(t) = \frac{e^{2t}}{9}(6t+1)$ pro $t < 0$.

varianta B – řešení

Úloha 1: (a) Nejprve si uvědomíme, že $i^{17} = i^{16}i = i$, a roznásobíme $(2-i)^2 = 4-4i-1 = 3-4i$. Komplexní číslo nakonec usměrníme. Jmenovatel bychom mohli také roznásobovat, ale je s výhodou si pamatovat, že pro každé komplexní číslo z platí $z\bar{z} = |z|^2$, čímž si lze zjednodušit výpočty. Jest tedy

$$\frac{i^{17}}{(2-i)^2} = \frac{i}{3-4i} = \frac{i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-4+3i}{9+16} = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i.$$

Tedy $\operatorname{Re} z = -\frac{4}{25}$ a $\operatorname{Im} z = \frac{3}{25}$.

(b) Vidíme, že $|-2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ a $|e^{1+\frac{3\pi}{2}i}| = e^1 = e$, takže $|z| = \sqrt{8}e$. Jelikož argument součinu je součet argumentů, stačí si určit argument čísla $-2-2i$, jelikož argument čísla $e^{1+\frac{3\pi}{2}i}$ okamžitě vidíme (např. $\frac{3\pi}{2}i$). Číslo $-2-2i$ zřejmě leží na ose 3. kvadrantu, takže jeho argument je např. $-\pi+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$ (mimo soutěž je dobré si uvědomit, že je to hlavní hodnota jeho argumentu). Argument čísla $z = (2-2i)e^{1+\frac{3\pi}{2}i}$ je tedy (například) $-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}i = \frac{3\pi}{4}i \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Číslo z tedy leží ve 2. kvadrantu.

(c) Funkce, ze které se určuje reziduum, je zadaná pomocí svého Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$. Reziduum v bodě $z_0 = 1$ je koeficient u (-1). mocniny $(z-1)$ v takovém rozvoji. Zvolíme-li tedy $k = 1$, potom

$$\operatorname{res}_1\left((z-1)^2 + \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^8} + \frac{a}{z-1}\right) = 4 + a.$$

Má být $4 + a = -2$, takže zvolíme $a = -6$.

Úloha 2: (a) Řadu sečteme s využitím známého součtu geometrické řady (GEOM). Nejprve se ale potřebujeme zbavit faktoru $(n+1)$ ve jmenovateli, jelikož ten nám brání, abychom mohli známý součet využít. Faktoru se zbavíme derivací řady, vzniklou řadu sečteme a zpětnou integrací dostaneme hledaný součet. První si ale řadu musíme vhodně připravit. Jest

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)2^{n+4}} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)2^{n+4}}. \tag{3}$$

Dále řešíme pouze řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)2^{n+4}}$, která je již vhodně připravená. Jest

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)2^{n+4}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+4}} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{16-8z},$$

tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)2^{n+4}} = \int \frac{1}{16-8z}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{8}\ln(16-8z) + C.$$

Konstantu C zjistíme snadno dosazením bodu $z = 0$. Pro $z = 0$ máme $0 = -\frac{1}{8}\ln(16-8z) + C$, takže $C = \frac{\ln(16)}{8}$. Nakonec dosadíme zpět do (3), čímž dostaneme

$$f(z) = z\Big(-\frac{1}{8}\ln(16-8z) + \frac{\ln(16)}{8}\Big).$$

Ze vzorce pro součet geometrické řady dostáváme podmínku, že $|\frac{z}{2}| < 1$. Nalezený součet je tedy platný pro z splňující $|z| < 2$ (poloměr kruhu konvergence je tedy $R = 2$).

(b) Jest $|-6+5| = 1 < 2 = r$, takže bod $z = -6$ neleží uvnitř mezikruží konvergence. Laurentova řada v bodě $z = -6$ tedy nekonverguje.

Úloha 3: Připomeňme si, jak se počítají integrály ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou vhodné polynomy[5]. Výpočet se liší podle toho, zda $\alpha \geq 0$ nebo $\alpha < 0$. Pro $\alpha \geq 0$ platí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, \qquad \text{(INT+)}$$

kde suma probíhá přes všechny kořeny[6] polynomu $Q(z)$ s *kladnou imaginární částí*. Pro $\alpha < 0$ platí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, \qquad \text{(INT−)}$$

kde suma probíhá přes všechny kořeny polynomu $Q(z)$ se *zápornou imaginární částí*.

V našem příkladě je $\alpha = 3$, takže budeme počítat podle (INT+). Určíme kořeny jmenovatele. Jest

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 5 &= 0 \\ (z+2)^2 - 4 + 5 &= 0 \\ (z+2)^2 &= -1 \\ z + 2 &= \pm i \\ z &= -2 \pm i. \end{aligned}$$

Jediný kořen jmenovatele s kladnou imaginární částí je tedy bod $z = -2 + i$. Takže

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_{-2+i} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4z+5)^2}. \qquad (4)$$

[5] Viz přednáška, jaké předpoklady na polynomy klademe.
[6] Všechny kořeny znamená všechny kořeny v komplexním oboru.

Víme, že $(z^2+4z+5)^2 = (z+2-i)^2(z+2+i)^2$, takže se jedná o dvojnásobný kořen jmenovatele (a zřejmě se nejedná o kořen čitatele). Počítáme tedy reziduum v pólu druhého řádu. Připomeňme si obecný vzoreček pro výpočet rezidua v pólu násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k, potom[7]

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)} \tag{RES}$$

V našem příkladě tedy

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2+i} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4z+5)^2} &= \lim_{z \to -2+i} \left((z+2-i)^2 \frac{e^{3iz}}{(z+2-i)^2(z+2+i)^2}\right)' \\
&= \lim_{z \to -2+i} \left(\frac{e^{3iz}}{(z+2+i)^2}\right)' \\
&= \lim_{z \to -2+i} \frac{3ie^{3iz}(z+2+i)^2 - 2(z+2+i)e^{3iz}}{(z+2+i)^4} \\
&= \frac{-12ie^{-3-6i} - 4ie^{-3-6i}}{16} \\
&= -ie^{-3-6i}.
\end{aligned}$$

Dosazením do (4) tedy dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi e^{-3-6i}.$$

Úloha 4: (a) Funkci $f(t)$ nejprve zapíšeme pomocí Heavisideovy funkce jako

$$f(t) = e^{it}\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-2)\big) + (t-3)^2\mathbb{1}(t-4).$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) &= \mathscr{L}\left[e^{it}\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-2)\big)\right](s) + \mathscr{L}\left[(t-3)^2\mathbb{1}(t-4)\right](s) \\
&= \mathscr{L}\left[e^{it}\right](s) - \mathscr{L}\left[e^{it}\mathbb{1}(t-2)\big)\right](s) + \mathscr{L}\left[(t-3)^2\mathbb{1}(t-4)\right](s).
\end{aligned}$$

První obraz není nic jiného než známý obraz $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$, kde $a \in \mathbb{C}$, s $a = i$. Co se týče druhého obrazu, s využitím pravidla

$$\mathscr{L}\left[g(t)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[g(t+a)\right](s), \tag{LPos}$$

kde $a \geq 0$, a známého obrazu $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$ máme

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[e^{it}\mathbb{1}(t-2)\right](s) &= e^{-2s}\mathscr{L}\left[e^{i(t+2)}\right](s) = e^{-2s}e^{2i}\mathscr{L}\left[e^{it}\right](s) \\
&= e^{-2s+2i}\frac{1}{s-i}.
\end{aligned}$$

[7] Horní index $(k-1)$ ve vzorečku značí $(k-1)$. derivaci.

Nakonec s využitím známého obrazu $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, a opět pravidla (LPos) máme

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[(t-3)^2\mathbb{1}(t-4)\right](s) &= e^{-4s}\mathscr{L}\left[(t+1)^2\right](s)\\ &= e^{-4s}\mathscr{L}\left[t^2\right](s) + 2e^{-4s}\mathscr{L}[t](s) + e^{-4s}\mathscr{L}[1](s)\\ &= e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3} + 2\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s-i} - \frac{e^{-2s+2i}}{s-i} + e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

(b) Nejprve[8] najdeme metodou reziduí Laplaceův vzor $h(t)$ k funkci $H(s) = \frac{1}{(s+2i)^2}$. Dle metody reziduí tedy

$$h(t) = \operatorname{res}_{s=-2i} \frac{e^{st}}{(s+2i)^2},$$

přičemž vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže za použití (RES) rychle určíme, že

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=-2i} \frac{e^{st}}{(s+2i)^2} &= \lim_{s\to-2i}\left((s+2i)^2\frac{e^{st}}{(s+2i)^2}\right)' = \lim_{s\to-2i}\left(e^{st}\right)'\\ &= \lim_{s\to-2i} te^{st} = te^{-2it}.\end{aligned}$$

Máme $h(t) = te^{-2it}$, takže hledaný vzor $g(t)$ je[8]

$$g(t) = h(t-2)\mathbb{1}(t-2) = (t-2)e^{-2it+4i}\mathbb{1}(t-2).$$

Úloha 5: (a) Aplikací Laplaceovy transformace na rovnici a známého obrazu[9] dostaneme

$$\mathscr{L}[y''(t)](s) + 2\mathscr{L}[y'(t)](s) = \frac{3}{s^2+9}.$$

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu derivace, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\big(s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)\big) + 2\big(sY(s) - y(0)\big) &= \frac{3}{s^2+9}\\ \big(s^2Y(s) - s + 2\big) + 2\big(sY(s) - 1\big) &= \frac{3}{s^2+9}\\ (s^2+2s)Y(s) - s &= \frac{3}{s^2+9}\\ (s^2+2s)Y(s) &= \frac{s^3+9s+3}{s^2+9}\\ Y(s) &= \frac{s^3+9s+3}{(s^2+9)(s^2+2s)}.\end{aligned}$$

[8] Častou chybou studentů je, že rovnou hledají vzor k funkci ve tvaru $\frac{P(s)}{Q(s)}e^{-as}$, kde $a > 0$. První je ale třeba najít vzor k funkci $\frac{P(s)}{Q(s)}$ a poté ho posunout. Metoda reziduí totiž „nevidí“ posun způsobený faktorem e^{-as}. Je-li $h(t)$ Laplaceův vzor funkce $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, potom Laplaceův vzor $g(t)$ funkce $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}e^{-as}$ je $g(t) = h(t-a)\mathbb{1}(t-a)$.

[9] Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

(b) Potřebujeme určit Laplaceův vzor funkce $y(t)$ funkce $Y(s)$. Dle metody reziduí máme

$$y(t) = \operatorname{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+1)} + \operatorname{res}_{s=-1} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+1)}.$$

Reziduum v bodě $s = -1$ můžeme určit rychle „dosazovací metodou“, neboť se jedná o jednonásobný kořen. Jest

$$\operatorname{res}_{s=-1} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+1)} = \left.\frac{e^{st}}{(s-3)^2}\right|_{s=-1} = \frac{e^{-t}}{16}.$$

Nakonec určíme reziduum v bodě $s = 3$. Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+1)} &= \lim_{s\to 3} \left((s-3)^2 \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+1)} \right)' = \lim_{s\to 3} \left(\frac{e^{st}}{s+1} \right)' \\ &= \lim_{s\to 3} \frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{e^{3t}}{16}(4t-1).\end{aligned}$$

varianta C – řešení

Úloha 1: (a) Rovnici vyřešíme např. doplněním na čtverec, což je jednoduchá metoda, kterou je užitečné ovládat. Máme

$$z^2 + 6z + 15 = (z+3)^2 - 9 + 15 = (z+3)^2 + 6.$$

S využitím znalosti, že pro $a < 0$ máme $w^2 = a$ právě tehdy, když $w = \pm i\sqrt{-a}$, tedy máme

$$\begin{aligned} z^2 + 6z + 15 &= 0 \\ (z+3)^2 + 6 &= 0 \\ (z+3)^2 &= -6 \\ z + 3 &= \pm i\sqrt{6} \\ z &= -3 \pm i\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Rovnice má tedy dvě různá řešení $z \in \{-3 + i\sqrt{6}, -3 - i\sqrt{6}\}$.

(b) Jelikož $|3 - 3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$, jest $|(3-3i)^5| = |3-3i|^5 = (\sqrt{18})^5$. Okamžitě vidíme, že číslo $3 - 3i$ leží na ose 4. kvadrantu, takže ho můžeme zapsat v exponenciálním tvaru jako $3 - 3i = \sqrt{18}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Dle Moivreovy věty tedy máme

$$(3-3i)^5 = (\sqrt{18})^5 \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^5 = (\sqrt{18})^5 e^{-\frac{5\pi}{4}i}.$$

Jelikož $-\frac{5\pi}{4} = -\pi - \frac{\pi}{4}$, vidíme, že číslo $(3-3i)^5$ leží ve 2. kvadrantu. Podobně efektivně lze samozřejmě využít také goniometrického tvaru, ale to vyžaduje více psaní. Rozumíme-li dobře geometrické interpretaci násobení komplexních čísel, nemusíme si exp. či gon. tvar vůbec rozepisovat, jelikož okamžitě vidíme, že argument čísla $(3-3i)^5$ je 5 krát argument čísla $3-3i$, tedy $5 \cdot (-\frac{\pi}{4}i) = -\frac{5\pi}{4}$.

(c) $z = -\pi$ je zřejmě dvojnásobný kořen jmenovatele. Aby funkce $g(z)$ měla v bodě $z = -\pi$ pól 1. řádu, potřebujeme, aby tento bod byl jednonásobný kořen čitatele. Jelikož $e^{iz}|_{z=-\pi} = e^{-\pi i} = -1$, jediná možnost, jak toho docílit, je zvolit $a = 1$. Správně bychom si měli ještě uvědomit, že se jedná o jednonásobný kořen (nikoliv vícenásobný). O tom se ale lze snadno přesvědčit pomocí derivace.

Úloha 2: (a) Připomeňme si Cauchyovy-Riemannovy podmínky, které musí hledaná funkce $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňovat v každém bodě $x + iy$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \tag{CR1}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{CR2}$$

Napočítejme si $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ (dále již nebudeme psát obecný bod, ve kterém počítáme parciální derivace):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2x - 4y \tag{5}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 - 2y - 4x. \tag{6}$$

Integrací (CR1) podle proměnné y s využitím (5) dostaneme

$$v(x, y) = \int 3 + 2x - 4y \, \mathrm{d}y = 3y + 2xy - 2y^2 + C(x). \tag{7}$$

Zde nezapomeneme na to, že $C(x)$ je obecně neznámá funkce (nikoliv automaticky konstanta), která může záviset na proměnné x, ale jistě nezávisí na proměnné y, jelikož integrujeme podle proměnné y, takže je konstantní vzhledem k proměnné y (stále ale může záviset na proměnné x).[10] Teď využijeme (CR2). Na jednu stranu díky (CR2) a (6) víme, že

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(-1 - 2y - 4x) = 1 + 2y + 4x.$$

Na druhou stranu ale díky (7) víme, že

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(3y + 2xy - 2y^2 + C(x)\big) = 2y + C'(x).$$

Porovnáním těchto dvou rovností dostáváme $1 + 2y + 4x = 2y + C'(x)$, takže $C'(x) = 1 + 4x$. Integrací podle proměnné x tedy

$$C(x) = \int 1 + 4x \, \mathrm{d}x = x + 2x^2 + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Dosazením zpět do (7) tedy dostaneme

$$v(x, y) = 3y + 2xy - 2y^2 + x + 2x^2 + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Zbývá určit $f'(1 + i)$. Víme, že v bodě $z = x + iy$ se derivace funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ rovná

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \tag{DER}$$

takže

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 3 + 2x - 4y + i(1 + 2y + 4x)\big|_{x=y=1} \\ &= 1 + 7i. \end{aligned}$$

[10] Kdybychom se alternativně rozhodli vyjít z (CR2) a integrovat podle proměnné x, vznikla by nám neznámá funkce, která by mohla záviset na proměnné y.

(b) Potřebujeme najít parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby byly obě Cauchyovy-Riemannovy (CR1) a (CR2) splněny v bodě $z = 1 + 2i$, což odpovídá $x = 1$ a $y = 2$. Nejprve si určíme reálnou a imaginární část funkce $g(z)$ v obecném bodě $z = x + iy$ (a označíme je popořadě $u(x, y)$ a $v(x, y)$). Jest $|z|^2 = x^2 + y^2$. Dále $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, takže $\mathrm{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2$. Tedy

$$g(z) = x + \alpha x^2 - \alpha y^2 + i(\beta x^2 + \beta y^2),$$

takže

$$u(x, y) = x + \alpha x^2 - \alpha y^2 \quad \text{a} \quad v(x, y) = \beta x^2 + \beta y^2.$$

Díky (CR1) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha x &= 2\beta y\Big|_{x=1,\, y=2} \\ 1 + 2\alpha &= 4\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Nyní využijeme (CR2):

$$\begin{aligned} -2\alpha y &= -2\beta x\Big|_{x=1,\, y=2} \\ 4\alpha &= 2\beta \\ \alpha &= \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dosazením zpět do (8) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= 4\beta \\ \beta &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme zpět do (9), čímž dostaneme $\alpha = \frac{1}{6}$.

Úloha 3: Pro přehlednost si označme

$$\int_C \frac{\cos z}{(z + 10i)^2} + \frac{z + 2\pi}{(\sin z)^2}\,\mathrm{d}z = I.$$

Začneme tím, že najdeme izolované singularity jednotlivých členů. Funkce $\frac{\cos z}{(z+10i)^2}$ má zřejmě izolovanou singularitu pouze v bodě $z + 10i = 0 \Leftrightarrow z = -10i$. Snadno se ale obrázkem přesvědčíme, že tento bod neleží uvnitř zadané křivky C. Dle Cauchyovy věty tedy máme

$$\int_C \frac{\cos z}{(z + 10i)^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

takže

$$I = \int_C \frac{z + 2\pi}{(\sin z)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Funkce $\frac{z+2\pi}{(\sin z)^2}$ má izolované singularity v bodech $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Z obrázku okamžitě vidíme, že jediný z těchto bodů, který leží uvnitř křivky C, je bod $z = -2\pi$. Dle reziduové věty tedy máme

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{-2\pi} \frac{z + 2\pi}{(\sin z)^2}. \tag{10}$$

Bod $z = -2\pi$ je zřejmě jednonásobný kořen čitatele. Víme, že $z = -2\pi$ je kořen $\sin z$, a máme

$$(\sin z)'\big|_{z=-2\pi} = \cos z\big|_{z=-2\pi} = 1 \neq 0.$$

Je to tedy jednonásobný kořen funkce $\sin z$, a tedy $2 \cdot 1 = 2$ násobný kořen funkce $(\sin z)^2$. Funkce $\frac{z+2\pi}{(\sin z)^2}$ má tedy v bodě $z = -2\pi$ pól řádu $2 - 1 = 1$. Reziduum spočítáme pomocí (RES)[11]. Jest

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2\pi} \frac{z+2\pi}{(\sin z)^2} &= \lim_{z\to-2\pi} (z+2\pi)\frac{z+2\pi}{(\sin z)^2} = \lim_{z\to-2\pi} \frac{(z+2\pi)^2}{(\sin z)^2} \\
&\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{z\to-2\pi} \frac{2(z+2\pi)}{2\sin(z)\cos z} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{z\to-2\pi} \frac{2}{2(\cos z)^2 - 2(\sin z)^2} \\
&= \frac{2}{2-0} = 1.
\end{aligned}$$

Dosazením zpět do (10) tedy dostaneme $I = 2\pi i$.

Úloha 4: (a) Připomeňme si, že Fourierova transformace $\hat{f}(\omega)$ funkce $f(t)$ je definována jako

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Uvědomíme si, že funkce $f(t)$ v naší úloze je rovna 1 na intervalu $[-1, 5)$ a 0 jinde, takže pro naši funkci $f(t)$ jest

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{5} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-1}^{t=5} = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-5i\omega} - e^{i\omega}\right) \\
&= \frac{e^{-5i\omega} - e^{i\omega}}{\omega} i.
\end{aligned}$$

Tento výpočet byl platný pro $\omega \neq 0$, ještě zbývá určit hodnotu $\hat{f}(0)$, což je ale ještě jednodušší, neboť

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{5} \mathrm{d}t = 6.$$

(b) Díky pravidlu o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{F}\left[(te^{-\frac{t^2}{2}}) * (e^{2it}h'''(t))\right](\omega) = \mathscr{F}\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega) \cdot \mathscr{F}\left[(e^{2it}h'''(t))\right](\omega).$$

Obraz $\mathscr{F}\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega)$ zjistíme pomocí pravidla o derivaci obrazu a známého obrazu Gaussovy funkce[12]. Máme

$$\mathscr{F}\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\right) = -i\sqrt{2\pi}\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

[11] Zde je dobré si uvědomit, že nemůžeme použít „dosazovací metodu“, jelikož bod -2π je vícenásobný kořen jmenovatele.

[12] Pro $a > 0$ jest $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Obraz $\mathscr{F}\left[e^{2it}h'''(t)\right](\omega)$ určíme pomocí pravidla o posunu obrazu, tj.

$$\mathscr{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)\,, \tag{FPosO}$$

kde $a \in \mathbb{R}$, a pravidla o obrazu derivace. Máme

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[e^{2it}h'''(t)\right](\omega) &= \mathscr{F}\left[h'''(t)\right](\omega-2) = (i(\omega-2))^3\mathscr{F}\left[h(t)\right](\omega-2)\\ &= -i(\omega-2)^3\mathscr{F}\left[h(t)\right](\omega-2)\,.\end{aligned}$$

Úloha 5: (a) První si všimneme toho, že suma, která se v rovnici vyskytuje, je konvoluce $(n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$. Aplikací Z-transformace na rovnici, pravidla o obrazu konvoluce a známých obrazů [13] tedy dostaneme

$$\mathscr{Z}\left[y_{n+2}\right](z) - \mathscr{Z}\left[y_{n+1}\right](z) + 2Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}\cdot\frac{(z-1)^2}{z^4}$$

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu posunu, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\big(z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z\big) - \big(zY(z) - y_0z\big) + 2Y(z) &= \frac{1}{z^3}\\ \big(z^2Y(z) - 2z^2 - z\big) - \big(zY(z) - 2z\big) + 2Y(z) &= \frac{1}{z^3}\\ (z^2 - z + 2)Y(z) - 2z^2 + z &= \frac{1}{z^3}\\ Y(z) &= \frac{2z^5 - z^4 + 1}{z^3(z^2 - z + 2)}.\end{aligned}$$

(b) Potřebujeme určit inverzní Z-transformaci $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce $Y(z)$. Dle metody reziduí máme[14]

$$y_n = \operatorname{res}_{z=3-i}\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)(z-3)^2} + \operatorname{res}_{z=3}\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)(z-3)^2}.$$

Reziduum v bodě $z = 3 - i$ můžeme určit rychle „dosazovací metodou“, neboť se jedná o jednonásobný kořen. Jest

$$\operatorname{res}_{z=3-i}\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)(z-3)^2} = \left.\frac{z^{n-1}}{(z-3)^2}\right|_{z=3-i} = -(3-i)^{n-1}.$$

Nakonec určíme reziduum v bodě $z = 3$. Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=3}\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)(z-3)^2} &= \lim_{z\to3}\left((z-3)^2\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)(z-3)^2}\right)'\\ &= \lim_{z\to3}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-3+i)}\right)' = \lim_{z\to3}\frac{(n-1)z^{n-2}(z-3+i) - z^{n-1}}{(z-3+i)^2}\\ &= -(3^{n-2})((n-1)i - 3).\end{aligned}$$

[13] Jest $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ a obraz $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je zadán.

[14] Striktně vzato tento vztah platí pouze pro $n \geq 1$, tj. ne pro y_0, ale y_0 bychom měli zadané jako počáteční podmínku naší diferenční rovnice, takže ho nepotřebujeme počítat znovu.

varianta D – řešení

Úloha 1: (a) Nejprve si uvědomíme, že $i^{83} = i^{80} i^3 = -i$, a roznásobíme

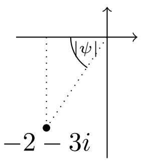
$$(3-4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i.$$

Komplexní číslo nakonec usměrníme. Jest tedy

$$\frac{(3-4i)^2}{i^{83}} = \frac{-7-24i}{-i} = \frac{-7-24i}{-i}\frac{i}{i} = -7i + 24.$$

Tedy $\operatorname{Re} z = 24$ a $\operatorname{Im} z = -7$.

(b) Cílem je převést číslo $-2-3i$ do goniometrického tvaru. Nejdříve určíme jeho velikost (a tedy hledané r). Jest $|-2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Tedy $r = \sqrt{13}$. Nakonec určíme (nějakou) hodnotu argumentu čísla $-2-3i$ (tedy hledané φ). Z algebraického tvaru okamžitě vidíme, že číslo leží ve 3. kvadrantu. Úhel φ můžeme zvolit tedy (například) jako $\varphi = -\pi + |\psi|$, kde $|\psi|$ je velikost (neorientovaného) úhlu ψ ve vhodně zvoleném pravoúhlém trojúhelníku. Např.:



Takže $\operatorname{tg} |\psi| = \frac{3}{2}$, tedy $|\psi| = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.

Můžeme tedy vzít např. $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$. Zde je dobré si mimo soutěž uvědomit, že takto zvolený úhel φ leží v intervalu $(-\pi, \pi]$, a tedy se jedná o hlavní hodnotu argumentu čísla $-2-3i$.

(c) Funkce $g(z)$ je zadaná pomocí Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu $z_0 = 2$. Má-li mít v bodě $z_0 = 2$ odstranitelnou singularitu, mohou se v rozvoji vyskytovat s nenulovým koeficientem pouze nezáporné mocniny $(z-2)$. Rozepíšeme si

$$g(z) = \frac{a}{(z-2)^k} + \frac{3}{(z-2)^3} + \frac{-1}{(z-2)^3} + 0\cdot(z-2)^0 + 1\cdot(z-2)^3 + \cdots,$$

kde $\cdots$ již obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-2)$, kterou jsou pro nás zcela irelevantní. Vidíme, že musíme zvolit $k = 3$ a koeficient a tak, aby $a + 3 - 1 = 0$, tedy $a = -2$. Potom totiž

$$g(z) = (z-2)^3 + 2(z-2)^6 + \cdots, \; z \in P(2).$$

Úloha 2: (a) Funkci chceme rozvinout do mocninné řady na okolí bodu $z_0 = i$. To znamená pomocí nezáporných mocnin $(z-i)$. Tedy vyskytující se $(z-i)^4$ pouze vytkneme:

$$f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2+i-z)^2} = (z-i)^4 \frac{1}{(2+i-z)^2}. \tag{11}$$

Jelikož máme $\left(\frac{1}{2+i-z}\right)' = \frac{1}{(2+i-z)^2}$, rozvineme tedy $\frac{1}{2+i-z}$ se správným středem a výslednou řadu zderivujeme člen po členu, abychom získali rozvoj $\frac{1}{(2+i-z)^2}$. Využijeme známého součtu geometrické řady (GEOM). Máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i-z} &= \frac{1}{2-(z-i)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z-i)}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z-i)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

takže

$$\frac{1}{(2+i-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z-i)^{n-1}.$$

Dosadíme-li zpět do (11), dostaneme

$$f(z) = (z-i)^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z-i)^{n+3}.$$

Ze vzorce pro součet geometrické řady dostáváme podmínku, že $|\frac{z-i}{2}| < 1$. Rozvoj je tedy platný pro z splňující $|z-i| < 2$ (poloměr je tedy $R = 2$).

(b) Jest $|4-6| = 2 < 3 = R$, takže mocninná řada v bodě $z = 4$ konverguje.

Úloha 3: Nejprve určíme kořeny jmenovatele. Bod $z = 0$ je zřejmě kořen. Dále

$$\begin{aligned}1-\cos z &= 0 \\ \cos z &= 1 \\ z &= 2k\pi,\end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ (to v sobě zahrnuje i kořen $z = 0$). Vyšetřujeme tedy nekonečně mnoho izolovaných singularit v bodech $z = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Nyní zjistíme, kolika násobné jsou to kořeny čitatele a kolika násobné kořeny jmenovatele. Začneme čitatelem. Máme

$$\begin{aligned}\sin z\big|_{z=2k\pi} &= 0 \\ (\sin z)'\big|_{z=2k\pi} &= \cos z\big|_{z=2k\pi} = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o jednonásobné kořeny čitatele. Nyní vyšetříme jejich násobnost ve jmenovateli. Vidíme, že body $z = 2k\pi$ nejsou kořeny faktoru z, pokud $k \neq 0$. Pokud $z = 0$ (tj. $k = 0$), jedná se zřejmě o jednonásobný kořen faktoru z. Co se týče faktoru $(1-\cos z)$, máme[15]

$$(1-\cos z)'\big|_{z=2k\pi} = \sin z\big|_{z=2k\pi} = 0$$

a

$$(1-\cos z)''\big|_{z=2k\pi} = (\sin z)'\big|_{z=2k\pi} = \cos z\big|_{z=2k\pi} = 1 \neq 0$$

[15] Víme, že jsou to jeho kořeny, takže to nemusíme znovu ověřovat.

pro každé $k \in \mathbb{Z}$, takže se jedná o dvojnásobné kořeny jmenovatele. Zjistili jsme tedy, že body $z = 2k\pi$ jsou

$$\text{kořeny jmenovatele násobnosti} \begin{cases} 1+2=3 & \text{pokud } k=0 \\ 0+2=2 & \text{pokud } k \neq 0. \end{cases}$$

Nyní již víme vše potřebné a můžeme klasifikovat izolované singularity. Body $z = 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou jednonásobné kořeny čitatele a dvojnásobné kořeny jmenovatele. Jsou to tedy póly řádu $2-1=1$. Body $z=0$ (což odpovídá $k=0$) je jednonásobný kořen čitatele a trojnásobný kořen jmenovatele. Jedná se tedy o pól řádu $3-1=2$.

Úloha 4: (a) Funkci $F(z)$ rozvine do Laurentovy řady na okolí ∞ za využití známého rozvoje $\sin w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$, který je platný pro každé $w \in \mathbb{C}$. Jest

$$\begin{aligned} F(z) = z^3 \sin\left(\frac{3}{z^5}\right) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{3}{z^5}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{10n+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{10n+2}}. \end{aligned}$$

Máme určit a_2 a a_{30}. Tedy popořadě koeficient u $\frac{1}{z^2}$ a $\frac{1}{z^{30}}$. Koeficient u $\frac{1}{z^2}$ zřejmě odpovídá sumačnímu indexu $n=0$. Tedy $a_2 = \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big|_{n=0} = 3$. Snadno také vidíme, že $\frac{1}{z^{30}}$ se v rozvoji nevyskytuje, a tedy $a_{30} = 0$; jest totiž $10n+2 = 30 \Leftrightarrow n = \frac{28}{10}$, což ale není celé číslo.

(b) Díky pravidlu o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{Z}\left[(b_{n+3}) * (n^2)\right](z) = \mathscr{Z}\left[b_{n+3}\right](z) \cdot \mathscr{Z}\left[n^2\right](z).$$

První určíme obraz $\mathscr{Z}\left[b_{n+3}\right](z)$. Díky pravidlu o obrazu posunutí máme

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left[b_{n+3}\right](z) &= z^3 \mathscr{Z}\left[b_n\right](z) - b_0 z^3 - b_1 z^2 - b_2 z \\ &= z^3 \mathscr{Z}\left[b_n\right](z) - 2z^2 - 4z. \end{aligned}$$

Zbývá nám určit $\mathscr{Z}\left[n^2\right](z)$. Využijeme pravidla o derivaci obrazu a známého obrazu $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$. Jest

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left[n^2\right](z) = \mathscr{Z}\left[n \cdot n\right](z) &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathscr{Z}\left[n\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) \\ &= -z\frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \end{aligned}$$

Úloha 5: (a) Aplikací Fourierovy transformace na rovnici dostaneme

$$\mathscr{F}\left[y'''(t)\right](\omega) + 2\mathscr{F}\left[y''(t)\right](\omega) + \hat{y}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu derivace, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
(i\omega)^3\hat{y}(\omega) + 2(i\omega)^2\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\
(-i\omega^3 - 2\omega^2 + 1)\hat{y}(\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\
\hat{y}(\omega) &= -\frac{e^{-|\omega|}}{i\omega^3 + 2\omega^2 - 1}\pi.
\end{aligned}$$

(b) Dle věty o inverzi pro Fourierovu transformaci máme

$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[i\frac{\omega + 2i}{(\omega^2+4)^2}\right](t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega + 2i}{(\omega^2+4)^2} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Tento integrál spočítáme pomocí (INT+) nebo (INT−) v závislosti na tom[16], zda popořadě $t \geq 0$ nebo $t < 0$. Uvědomme si, že $\omega^2+4 = 0 \Leftrightarrow \omega = \pm 2i$, takže $\frac{\omega+2i}{(\omega^2+4)^2} = \frac{1}{(\omega-2i)^2(\omega+2i)}$. Pro $t \geq 0$ tedy dle (INT+) máme

$$y(t) = \frac{i}{2\pi} 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)}.$$

Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=2i} \frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)} &= \lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)}\right)' \\
&= \lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{izt}}{z+2i}\right)' = \lim_{z\to 2i}\frac{ite^{izt}(z+2i) - e^{izt}}{(z+2i)^2} \\
&= -\frac{-4te^{-2t} - e^{-2t}}{16} = \frac{e^{-2t}}{16}(4t+1),
\end{aligned}$$

takže $y(t) = -\frac{e^{-2t}}{16}(4t+1)$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ dle (INT−) máme

$$y(t) = \frac{i}{2\pi}(-2\pi i) \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)}.$$

Reziduum určíme rychle „dosazovací metodou“, jelikož bod $-2i$ je jednoduchý kořen. Tedy

$$\operatorname{res}_{z=-2i} \frac{e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)} = \left.\frac{e^{izt}}{(z-2i)^2}\right|_{z=-2i} = -\frac{e^{2t}}{16},$$

takže $y(t) = -\frac{e^{2t}}{16}$ pro $t < 0$.

[16] Uvědomme si, že parametr α ve vzorcích je roven t.

varianta E – řešení

Úloha 1: (a) Rovnici vyřešíme např. doplněním na čtverec, což je jednoduchá metoda, kterou je užitečné ovládat. Máme

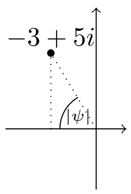
$$z^2 - 8z + 18 = (z-4)^2 - 16 + 18 = (z-4)^2 + 2.$$

S využitím znalosti, že pro $a < 0$ máme $w^2 = a$ právě tehdy, když $w = \pm i\sqrt{-a}$, tedy máme

$$\begin{aligned} z^2 - 8z + 18 &= 0 \\ (z-4)^2 + 2 &= 0 \\ (z-4)^2 &= -2 \\ z - 4 &= \pm i\sqrt{2} \\ z &= 4 \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Rovnice má tedy dvě různá řešení $z \in \{4 + i\sqrt{2}, 4 - i\sqrt{2}\}$.

(b) Cílem je převést číslo $-3+5i$ do exponenciálního tvaru. Nejdříve určíme jeho velikost (a tedy hledané r). Jest $|-3+5i| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. Tedy $r = \sqrt{34}$. Nakonec určíme (nějakou) hodnotu argumentu čísla $-3+5i$ (tedy hledané φ). Z algebraického tvaru okamžitě vidíme, že číslo leží ve 2. kvadrantu. Úhel φ můžeme zvolit tedy (například) jako $\varphi = \pi - |\psi|$, kde $|\psi|$ je velikost (neorientovaného) úhlu ψ ve vhodně zvoleném pravoúhlém trojúhelníku. Např.:



Takže $\operatorname{tg}|\psi| = \frac{5}{3}$, tedy $|\psi| = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

Můžeme tedy vzít např. $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. Zde je dobré si mimo soutěž uvědomit, že takto zvolený úhel φ leží v intervalu $(-\pi, \pi]$, a tedy se jedná o hlavní hodnotu argumentu čísla $-3+5i$.

(c) Okamžitě vidíme, že bod 5 leží mimo kružnici o rovnici $|z+5| = 1$, a tedy

$$\int_C \frac{1}{(z-5)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

dle Cauchyovy věty. Využijeme-li dále reziduovou větu, víme, že

$$\int_C \frac{3}{(z+5)^{10}} + \frac{1}{(z-5)^2} + \frac{4}{z+5}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_{-5}\left(\frac{3}{(z+5)^{10}} + \frac{4}{z+5}\right).$$

Funkce, ze které se určuje reziduum, je zadaná pomocí svého Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu $z_0 = -5$. Reziduum v bodě $z_0 = -5$ je koeficient u (-1). mocniny $(z+5)$ v takovém rozvoji. Okamžitě tedy vidíme, že reziduum je rovné 4, a tedy hodnota křivkového integrálu je $2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$.

Úloha 2: (a) Připomeňme si, že funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je harmonická, jestliže:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{pro každé } u, y \in \mathbb{R}. \tag{HARM}$$

Hledáme tedy parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby toto bylo splněno v *každém bodě*[17] $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha e^{\alpha x}\cos y + y^3 + 3\beta x^2 y\right) = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta xy$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{\alpha x}\sin y + 3xy^2 + \beta x^3\right) = -e^{\alpha x}\cos y + 6xy.$$

Dosazením do (HARM) tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta xy - e^{\alpha x}\cos y + 6xy &= 0 \\ (\alpha^2 - 1)e^{\alpha x}\cos y + 6(\beta + 1)xy &= 0, \end{aligned}$$

což má být splněno v *každém bodě* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Volíme tedy $\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ a $\beta = -1$.

(b) Potřebujeme ověřit, za jsou splněny obě Cauchyovy-Riemannovy (CR1) a (CR2) v bodě $z = 1 + 4i$, což odpovídá $x = 1$ a $y = 4$. Nejprve si určíme reálnou a imaginární část funkce $f(z)$ v obecném bodě $z = x + iy$ (a označíme je popořadě $u(x,y)$ a $v(x,y)$). Jest $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, takže $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Dále jest $(z + \bar{z})^2 = (x + iy + x - iy)^2 = 4x^2$. Tedy

$$f(z) = x^2 - y^2 + 4ix^2 + 2iy = x^2 - y^2 + i(4x^2 + 2y),$$

takže

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{a} \quad v(x,y) = 4x^2 + 2y.$$

Ověříme platnost (CR1):

$$\begin{aligned} 2x &= 2\big|_{x=1,\, y=4} \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Podmínka (CR1) je tedy v bodě $z = 1 + 4i$ splněno. Zbývá ověřit (CR2). Jest

$$\begin{aligned} -2y &= -8x\big|_{x=1,\, y=4} \\ -8 &= -8, \end{aligned}$$

takže je také splněna. Funkce $f(z)$ je tedy diferencovatelná v bodě $z = 1+4i$. Nakonec tedy určíme ještě $f'(1+4i)$. Víme, že ta je dána vztahem (DER). Tedy

$$f'(1 + 4i) = 2x + i8x\big|_{x=1,\, y=4} = 2 + 8i.$$

[17] Častou chybou je, že studenti označí za výsledek něco, co závisí na x či y. To je ovšem zcela špatně a nedává to žádný smysl...

Úloha 3: Pro přehlednost si označme

$$\int_C \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3} + \frac{\sin(z^2)}{\cos z}\,\mathrm{d}z = I.$$

Začneme tím, že najdeme izolované singularity jednotlivých členů. Funkce $\frac{e^{z\pi}+z\pi-\pi i+1}{z(z-i)^3}$ má zřejmě izolované singularity v bodech 0 a i. Snadno se obrázkem přesvědčíme, že uvnitř křivky C leží pouze bod i. Co se týče funkce $\frac{\sin(z^2)}{\cos z}$, tak ta má izolované singularity v bodech $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Tyto body ale zřejmě neleží uvnitř křivky C. Dle Cauchyovy věty tedy máme

$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{\cos z}\,\mathrm{d}z = 0,$$

takže

$$I = \int_C \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3}\,\mathrm{d}z.$$

Dle reziduové věty tedy

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3}. \tag{12}$$

Bod $z = i$ je zřejmě trojnásobný kořen jmenovatele. Co se týče čitatele, máme

$$\begin{aligned} e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1\Big|_{z=i} &= -1 + i\pi - i\pi + 1 = 0, \\ (e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1)'\Big|_{z=i} &= \pi e^{z\pi} + \pi\Big|_{z=i} = -\pi + \pi = 0 \end{aligned}$$

a

$$(e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1)''\Big|_{z=i} = (\pi e^{z\pi} + \pi)'\Big|_{z=i} = \pi^2 e^{z\pi}\Big|_{z=i} = -\pi^2 \neq 0,$$

takže $z = i$ je jeho dvojnásobný kořen. Bod $z = i$ je tedy pól řádu $3 - 2 = 1$. Reziduum spočítáme pomocí (RES). Jest

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3} &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^3} = \lim_{z\to i} \frac{e^{z\pi} + z\pi - \pi i + 1}{z(z-i)^2} \\ &\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{z\to i} \frac{\pi e^{z\pi} + \pi}{(z-i)^2 + 2z(z-i)} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{z\to i} \frac{\pi^2 e^{z\pi}}{2(z-i) + 2(z-i) + 2z} \\ &= \frac{-\pi^2}{2i} = \frac{\pi^2}{2} i. \end{aligned}$$

Dosazením zpět do (12) tedy dostaneme $I = -\pi^3$.

Úloha 4: (a) Dle pravidla o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\frac{1}{\omega^2 + 9}.$$

Dosazením zadaného obrazu $\mathscr{F}[f*g](\omega)$ a využitím $\omega^2+9=(\omega-3i)(\omega+3i)$ tedy dostaneme

$$\frac{1}{\omega^2+9}\hat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega+3i)^2(\omega-3i)(\omega-i)}$$
$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega+3i)(\omega-i)}.$$

Dle věty o inverzi a definici inverzní Fourierovy transformace tedy

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega+3i)(\omega-i)}\right](t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\omega+3i)(\omega-i)}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Integrál na pravé straně snadno spočteme popořadě pomocí (INT+) a (INT−) v závislosti na tom[18], zda je $t\geq 0$ či $t<0$. V obou případech potřebujeme určit jediné reziduum, které lze určit prakticky okamžitě „dosazovací metodou". Pro $t\geq 0$ tedy máme

$$f(t)=\frac{2\pi i}{2\pi}\operatorname{res}_{z=i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)(z-i)}=i\left.\frac{e^{izt}}{(z+3i)}\right|_{z=i}=\frac{e^{-t}}{4},$$

zatímco pro $t<0$ máme

$$f(t)=\frac{-2\pi i}{2\pi}\operatorname{res}_{z=-3i}\frac{e^{izt}}{(z+3i)(z-i)}=-i\left.\frac{e^{izt}}{(z-i)}\right|_{z=-3i}=\frac{e^{3t}}{4}.$$

(b) Rozepíšeme si $\cos(3t)=\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}$, takže

$$\mathscr{F}[h(t-1)\cos(3t)](\omega)=\frac{1}{2}\left(\mathscr{F}\left[h(t-1)e^{3it}\right](\omega)+\mathscr{F}\left[h(t-1)e^{-3it}\right](\omega)\right).$$

Nyní jen aplikuje pravidlo o posunu obrazu (FPosO) a pravidlo o posunu vzoru, tj.

$$\mathscr{F}[f(t-a)](\omega)=e^{-i\omega a}\mathscr{F}[f(t)](\omega),$$

kde $a\in\mathbb{R}$. Nejprve posunutím obrazu a poté vzoru dostaneme

$$\mathscr{F}\left[h(t-1)e^{3it}\right](\omega)=\mathscr{F}[h(t-1)](\omega-3)=e^{-i(\omega-3)}\mathscr{F}[h(t)](\omega-3).$$

Podobně

$$\mathscr{F}\left[h(t-1)e^{-3it}\right](\omega)=\mathscr{F}[h(t-1)](\omega+3)=e^{-i(\omega+3)}\mathscr{F}[h(t)](\omega+3).$$

Úloha 5: (a) První si všimneme toho, že integrál, který se v rovnici vyskytuje, je konvoluce $(t^3)*(\sin(t))$. Aplikací Laplaceovy transformace na rovnici, pravidla o obrazu konvoluce a známých obrazů[19] tedy dostaneme

$$\mathscr{L}[y''(t)](s)+2\mathscr{L}[y'(t)](s)+Y(s)=\frac{6}{s^4}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

[18] Uvědomme si, že parametr α ve vzorcích je roven t.

[19] Pro $\omega\in\mathbb{C}$ jest $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a pro $n\in\mathbb{N}_0$ jest $\mathscr{L}[t^n](s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu derivace, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
\big(s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)\big) + 2\big(sY(s) - y(0)\big) + Y(s) &= \frac{6}{s^6 + s^4}\\
\big(s^2Y(s) + s - 2\big) + 2\big(sY(s) + 1\big) + Y(s) &= \frac{6}{s^6 + s^4}\\
(s^2 + 2s + 1)Y(s) + s &= \frac{6}{s^6 + s^4}\\
Y(s) &= \frac{6 - s^7 - s^5}{(s^6 + s^4)(s^2 + 2s + 1)}.
\end{aligned}$$

(b) Potřebujeme určit Laplaceův vzor funkce $y(t)$ funkce $Y(s)$. Řešením kvadratické rovnice nalezneme kořeny ve jmenovateli. Snadno zjistíme[20], že $s^2 + s - 2 = 0 \Leftrightarrow s \in \{-2, 1\}$, takže

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s^2+s-2)^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2(s-1)^2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)^2}.$$

Dle metody reziduí tedy máme

$$y(t) = \operatorname{res}_{s=-2} \frac{e^{st}}{(s+2)(s-1)^2} + \operatorname{res}_{s=1} \frac{e^{st}}{(s+2)(s-1)^2}.$$

Reziduum v bodě $s = -2$ můžeme určit rychle „dosazovací metodou“, neboť se jedná o jednonásobný kořen. Jest

$$\operatorname{res}_{s=-2} \frac{e^{st}}{(s+2)(s-1)^2} = \frac{e^{st}}{(s-1)^2}\bigg|_{s=-2} = \frac{e^{-2t}}{9}.$$

Nakonec určíme reziduum v bodě $s = 1$. Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{s=1} \frac{e^{st}}{(s+2)(s-1)^2} &= \lim_{s\to 1} \left((s-1)^2 \frac{e^{st}}{(s+2)(s-1)^2}\right)' = \lim_{s\to 1} \left(\frac{e^{st}}{s+2}\right)'\\
&= \lim_{s\to 1} \frac{te^{st}(s+2) - e^{st}}{(s+2)^2} = \frac{e^t}{9}(3t-1).
\end{aligned}$$

[20]Stojí za to si připomenout, že se relativně často dají s výhodou použít tzv. Vietovy vzorce. Máme-li kvadratický polynom $z^2 + bz + c$, snažíme se uhádnout čísla z_1 a z_2 tak, aby jejich součet byl b a součin c. Pokud se nám to povede, pak $z^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)$. Jsou-li b a c celá čísla, stojí za to věnovat pár jednotek vteřin času tomu, zda nelze „uhodnout“ kořeny pomocí Vietových vzorců. V našem případě se snažíme uhádnout dvě čísla tak, aby jejich součet byl 1 a součin -2. Snadno uhodneme, že toho lze docílit volbou 2 a -1.

varianta F – řešení

Úloha 1: (a) Nejprve si uvědomíme, že $i^{13} = i^{12}i = i$, a roznásobíme

$$(2-3i)(3+i) = 6 + 2i - 9i + 3 = 9 - 7i.$$

Jest tedy

$$(2-3i)(3+i) + \frac{2}{i^{13}} = 9 - 7i + \frac{2}{i} = 9 - 7i + \frac{2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 9 - 7i - 2i = 9 - 9i.$$

Tedy $\operatorname{Re} z = 9$ a $\operatorname{Im} z = -9$.

(b) Dle Moivreovy věty máme

$$5\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{7}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{7}\Big)\Big)^{16} = 5\Big(\cos\Big(\frac{16\pi}{7}\Big) + i\sin\Big(\frac{16\pi}{7}\Big)\Big).$$

Vidíme tedy, že velikost z je 5 a $\frac{16\pi}{7}$ je argument čísla z. Jelikož $\frac{16\pi}{7} = 2\pi + \frac{2}{7}\pi$, vidíme, že číslo leží v 1. kvadrantu, neboť $\frac{2}{7}\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Mimo soutěž je dobré si uvědomit, že $\frac{2}{7}\pi$ je hlavní hodnota argumentu čísla z.

(c) Funkce, ze které se určuje reziduum, je zadaná pomocí svého Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu $z_0 = i$. Reziduum v bodě $z_0 = i$ je koeficient u (-1). mocniny $(z-i)$ v takovém rozvoji. Rozepíšeme si

$$\frac{4}{(z-i)^3} + \frac{a}{(z-i)^k} + \frac{1}{(z-i)^4} + \frac{8}{z-i} + 27(z-i)^2 + \cdots,$$

kde $\cdots$ již obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-i)$, kterou jsou pro nás zcela irelevantní. Zvolíme-li tedy $k = 1$, potom

$$\operatorname{res}_i\left(\frac{4}{(z-i)^3} + \frac{a}{z-i} + \frac{1}{(z-i)^4} + \frac{8}{z-i} + 27(z-i)^2 + \cdots\right) = a + 8.$$

Má být $a + 8 = 1 + i$, takže zvolíme $a = -7 + i$.

Úloha 2: (a) Řadu sečteme s využitím známého rozvoje exponenciální funkce:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \quad \text{pro každé } w \in \mathbb{C}. \tag{EXP}$$

Nejprve se ale potřebujeme zbavit faktoru $(3n+1)$ v čitateli, jelikož ten nám brání, abychom mohli známý součet využít. Faktoru se zbavíme integrací řady, vzniklou řadu sečteme a zpětnou derivací dostaneme hledaný součet. První si ale řadu musíme vhodně připravit. Jest

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)z^{3n+2}}{n!2^n} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)z^{3n}}{n!2^n}. \tag{13}$$

Dále řešíme pouze řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)z^{3n}}{n!2^n}$, která je již vhodně připravená. Integrací této řady člen po členu dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)z^{3n}}{n!2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n+1}}{n!2^n} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-z^3}{2}\right)^n}{n!}$$
$$= z e^{\frac{-z^3}{2}}.$$

Zpětnou derivací tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)z^{3n}}{n!2^n} = \left(z e^{\frac{-z^3}{2}}\right)' = e^{\frac{-z^3}{2}} - \frac{3z^3}{2} e^{\frac{-z^3}{2}}.$$

Nakonec dosadíme zpět do (13), čímž dostaneme

$$f(z) = z^2 e^{\frac{-z^3}{2}} \left(1 - \frac{3z^3}{2}\right).$$

Nalezený součet je tedy platný pro každé $z \in \mathbb{C}$ (poloměr kruhu konvergence je tedy $R = \infty$).

(b) Jest $|(2+i)+i| = |2+2i| = \sqrt{8} > \sqrt{6} = r$, takže bod $z = 2+i$ leží uvnitř mezikruží konvergence. Laurentova řada v bodě $z = 2+i$ tedy konverguje.

Úloha 3: Použijeme (INT+) s $\alpha = 0$. Určíme kořeny jmenovatele. Jest

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= 0 \\ (z-1)^2 - 1 + 5 &= 0 \\ (z-1)^2 &= -4 \\ z - 1 &= \pm 2i \\ z &= 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Jediný kořen jmenovatele s kladnou imaginární částí je tedy bod $z = 1 + 2i$. Takže

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 - 2x + 5)^2} \,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_{1+2i} \frac{z^2}{(z^2 - 2z + 5)^2}. \tag{14}$$

Víme, že $(z^2-2z+5)^2 = (z-1-2i)^2(z-1+2i)^2$, takže se jedná o dvojnásobný kořen jmenovatele (a zřejmě se nejedná o kořen čitatele). Za využití vzorce

(RES) tedy

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{1+2i} \frac{z^2}{(z^2-2z+5)^2} &= \lim_{z\to 1+2i} \left((z-1-2i)^2 \frac{z^2}{(z-1-2i)^2(z-1+2i)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to 1+2i} \left(\frac{z^2}{(z-1+2i)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to 1+2i} \frac{2z(z-1+2i)^2 - 2z^2(z-1+2i)}{(z-1+2i)^4} \\
&= \frac{-32(1+2i) - 8(1+2i)^2 i}{256} \\
&= \frac{-32 - 64i + 24i + 32}{256} \\
&= -\frac{40}{256} i = -\frac{5}{32} i.
\end{aligned}$$

Dosazením do (14) tedy dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\Big(-\frac{5}{32}i\Big) = \frac{5}{16}\pi.$$

Úloha 4: (a) Nejprve si připomeňme, že je-li funkce $f \in L_0$ periodická na intervalu $[0,\infty)$ s periodou $T>0$, potom pro její Laplaceův obraz platí

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \mathscr{L}\left[f(t)\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T)\big)\right](s).$$

V naší úloze tedy máme

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1}{1-e^{-5s}} \mathscr{L}\left[e^{4t}\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)\cdot\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5)\big)\right](s).$$

Zbývá určit $\mathscr{L}\left[e^{4t}\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)\cdot\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5)\big)\right](s)$. Zde je důležité nezaleknout se součinu $\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)\cdot\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5)\big)$ a uvědomit si, že tento se součin se rovná[21] $\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)$. Tedy s využitím pravidla (LPos) a známého obrazu $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$, kde $a \in \mathbb{C}$, jest

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left[e^{4t}\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)\cdot\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5)\big)\right](s) \\
&= \mathscr{L}\left[e^{4t}\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)\right](s) \\
&= e^{-s}\mathscr{L}\left[e^{4(t+1)}\right](s) - e^{-3s}\mathscr{L}\left[e^{4(t+3)}\right](s) \\
&= e^{-s}\frac{e^4}{s-4} - e^{-3s}\frac{e^{12}}{s-4}.
\end{aligned}$$

(b) Díky pravidlu o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{L}\left[(t\sin(it)) * g''(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[t\sin(it)\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[g''(t)\right](s).$$

[21] Pokud to hned nevidíte, nakreslete si obrázek. $\big(\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-3)\big)$ je roven 1 na intervalu $[1,3)$ (a 0 jinde), zatímco $\big(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5)\big)$ je roven 1 na intervalu $[0,5)$ (a 0 jinde). Součin je tedy roven 1 (a 0 jinde) na intervalu $[1,3)$.

Aplikací pravidla o obrazu derivace okamžitě získáme

$$\mathscr{L}\left[g''(t)\right](s) = s^2G(s) - sg(0) - g'(0) = s^2G(s) - 2s - 1.$$

Nakonec použijeme pravidlo o derivaci obrazu a známého obrazu[22], abychom získali

$$\mathscr{L}\left[t\sin(it)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\left[\sin(it)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{i}{s^2-1}\right) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}i.$$

Úloha 5: (a) Aplikací Z-transformace na rovnici a známého obrazu[23] dostaneme

$$\mathscr{Z}\left[y_{n+2}\right](z) + 2\mathscr{Z}\left[y_{n+1}\right](z) - 3Y(z) = \frac{z^2}{z^2+1}.$$

Nakonec použijeme pravidlo o obrazu posunu, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
\big(z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z\big) + 2\big(zY(z) - y_0z\big) - 3Y(z) &= \frac{z^2}{z^2+1}\\
\big(z^2Y(z) - z\big) + 2zY(z) - 3Y(z) &= \frac{z^2}{z^2+1}\\
(z^2+2z-3)Y(z) - z &= \frac{z^2}{z^2+1}\\
Y(z) &= \frac{z^2+z^3+z}{(z^2+1)(z^2+2z-3)}.
\end{aligned}$$

(b) Potřebujeme určit inverzní Z-transformaci $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce $Y(z)$. Jelikož $z^2+4=0 \Leftrightarrow z = \pm 2i$, jest

$$Y(z) = \frac{z(z-2i)}{(z^2+4)^2} = \frac{z(z-2i)}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \frac{z}{(z-2i)(z+2i)^2}.$$

Dle metody reziduí máme

$$y_n = \operatorname{res}_{z=2i}\frac{z^n}{(z-2i)(z+2i)^2} + \operatorname{res}_{z=-2i}\frac{z^n}{(z-2i)(z+2i)^2}.$$

Reziduum v bodě $z = 2i$ můžeme určit rychle „dosazovací metodou“, neboť se jedná o jednonásobný kořen. Jest

$$\operatorname{res}_{z=2i}\frac{z^n}{(z+2i)^2} = \left.\frac{z^n}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i} = -\frac{(2i)^n}{16}.$$

Nakonec určíme reziduum v bodě $z = -2i$. Vidíme, že se jedná o pól řádu 2, takže dle (RES) máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=-2i}\frac{z^n}{(z-2i)(z+2i)^2} &= \lim_{z\to-2i}\left((z+2i)^2\frac{z^n}{(z-2i)(z+2i)^2}\right)'\\
&= \lim_{z\to-2i}\left(\frac{z^n}{z-2i}\right)' = \lim_{z\to-2i}\frac{nz^{n-1}(z-2i)-z^n}{(z-2i)^2}\\
&= -\frac{(-2i)^{n-1}}{16}((-4i)n+2i).
\end{aligned}$$

[22]Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

[23]Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$.