00

Úloha 1. *Určete reálnou $u(x,y)$ a imaginární část $v(x,y)$ funkce $f(z)$, $z = x+iy$, kde*
(a) $f(z) = \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{iz}$;
(b) $f(z) = |z+i|^2 + e^{z-\bar{z}}$.

a) $f(z) = \frac{\mathrm{Im}((x+iy)^2)}{i(x-iy)} = \frac{\mathrm{Im}(x^2+2ixy-y^2)}{ix+y} = \frac{2ixy}{ix+y} \cdot \frac{ix-y}{ix-y} = \frac{-2x^2y-2ixy^2}{x^2+y^2}$

$\mathrm{Re}(f) = 2 \cdot \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

$\mathrm{Im}(f) = -2 \cdot \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

b) $f(z) = |z+i|^2 + e^{z-\bar{z}} = |x+i(y+1)|^2 + e^{2yi} = x^2+(y+1)^2 + e^{2yi}$

$\mathrm{Re}(f) = x^2+(y+1)^2 + \cos(2y)$

$\mathrm{Im}(f) = \sin(2y)$

Výsledky

Úloha 1: (a) $u(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$
(b) $u(x,y) = x^2+(y+1)^2+\cos 2y$, $v(x,y) = \sin 2y$

Úloha 2. *Určete všechny body, kde je funkce*

$$f(z) = i\,(\mathrm{Re}\,z)^2 - (\mathrm{Im}\,z)^2,\ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná, a v těchto bodech určete $f'(z)$.

$f(z) = ix^2 - y^2$ CR1: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ✓

Re $u(x,y) = -y^2$ CR2: $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $-\frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ $\Rightarrow \underline{\underline{x=y}}$

Im $v(x,y) = x^2$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \underline{0+2ix}$

$f(z)$ je diferencovatelná na $x=y$ a $f'(z) = 2ix$

Úloha 2: Funkce je diferencovatelná v bodech splňující $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z$, tj. na přímce $x=y$. V těchto bodech platí $f'(z) = 2xi = 2i\,\mathrm{Re}\,z$.

Úloha 3. *Rozhodněte, zda je funkce*

$$f(z) = \mathrm{Re}(z^2) + i(z+\bar{z})^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,z,\ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 1+4i$. Pokud ano, určete $f'(1+4i)$.

$f(z) = x^2-y^2+i(4x^2+2y)$

$u(x,y) = x^2-y^2$ CR1: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$ $\Rightarrow x = 1$

$v(x,y) = (4x^2+2y)$

CR2: $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $-\frac{\partial v}{\partial x} = -8x^2$ $\Rightarrow y = 4$

$f(z)$ je dif v bodě $z = 1+4i$
a $\underline{\underline{f'(1+4i) = 2+8i}}$.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 8x^2 i$

Úloha 3: Ano, je. Máme $f'(1+4i) = 2+8i$.

Úloha 4. *Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce*

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x), \ \ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $1+3i$. Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(1+3i)$.

$u(x,y) = x^2 + \alpha x + \alpha y$ CR1: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \alpha$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 5\beta$ $2x + \alpha = 2y - 5\beta$

$v(x,y) = y^2 - 5\beta y + \beta x$ CR2: $\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha$ $-\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta$ $\Rightarrow \alpha = -\beta$

$$2x + \alpha = 2y - 5\beta$$
$$\alpha = -\beta$$

$z = 1+3i$

① $2 + \alpha = 6 - 5\beta$

② $\alpha = -\beta$

② → ①

$$2 - \beta = 6 - 5\beta$$
$$4\beta = 4$$
$$\beta = 1; \alpha = -1$$

pro $\alpha = -1; \beta = 1$:

$u(x,y) = x^2 - x - y$

$v(x,y) = y^2 - 5y + x$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1 + ix$

$\underline{f'(1+3i) = 1+i}$

Pro $\alpha = -1$ a $\beta = 1$ je $f'(1+3i) = 1+i$

Úloha 4: $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f'(1+3i) = 1+i$

Úloha 5. *Rozhodněte, zda je reálná část funkce*

$$f(z) = \left(\operatorname{Im}(z^2)\right)^3 + i\bar{z}, \ \ z \in \mathbb{C},$$

harmonická funkce.

$f(z) = (2xy)^3 + i(x - iy) = 8x^3y^3 + ix + y$

$\operatorname{Re}(f) = u(x,y) = 8x^3y^3 + y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 8 \cdot 3 \cdot 2\, x y^3 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 8 \cdot 3 \cdot 2\, x^3 y \end{aligned}\right\} + \neq 0 \Rightarrow \underline{u(x,y) \text{ není harmonická}}$$

Úloha 5: Není harmonická.

Úloha 6. *Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce*

$$u(x,y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x^2 y + \beta y^3, \ \ x, y \in \mathbb{R},$$

byla harmonická.

S
C
-S
-C

$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^y \cos(\alpha x) + 3y + 2xy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^y(-\sin(\alpha x)) + 2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin(\alpha x) + 3x + x^2 + 3\beta y^2$ $+\Big\{$ $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha = -1$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin(\alpha x) + 3x + x^2 + 3\beta y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin(\alpha x) + 6\beta y$$

$+$ $\alpha = 0,\ \alpha = 1,\ \alpha = -1$

$$2y + 6\beta y = 0$$

$$\beta = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha^2 = 1$$

$$\alpha = \pm 1$$

Úloha 6: $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ a zároveň $\beta = -\frac{1}{3}$

DDÚ2:

Úloha 1. *Určete reálnou a imaginární část funkce*

$$f(z) = \frac{2z^2}{z - i} + i|z - 2 + i|^2 + \mathrm{Re}(i^{13} z).$$

$$\frac{2z^2}{\overline{z-i}} = \frac{2\,(x^2 + 2ixy - y^2)}{x - (y-1)i} \cdot \frac{x + (y-1)i}{x + (y-1)i} = \frac{2\,(x + (y-1)i)\,(x^2 + 2ixy - y^2)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 4ix^2y - 2xy^2 + 2(y-1)x^2 i - 4xy(y-1) - 2y^2(y-1)i}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$

$$i\,|z - 2 + i|^2 = i\left((x-2)^2 + (y+1)^2\right)$$

$$\mathrm{Re}(i^{13} z) = -y$$

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{2x^3 - 2xy^2 - 4xy(y-1)}{x^2 + y^2 - 2y + 1} - y = \frac{2x^3 - 6xy^2 + 4xy}{x^2 + y^2 - 2y + 1} - y$$

$$\mathrm{Im}(f) = \frac{4x^2y + 2x^2(y-1) - 2y^2(y-1)}{x^2 + y^2 - 2y + 1} + (x-2)^2 + (y+1)^2$$

$$u(x, y) = \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy}{x^2 + (1-y)^2} - y$$

$$v(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 - \frac{(2x^2 - 2y^2)(1-y) - 4x^2y}{x^2 + (1-y)^2}.$$

Úloha 2. *Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce*

$$\beta^2 \operatorname{Im}(\bar{z}) - 2\operatorname{Im}(z^2) + i\alpha\left(\operatorname{Re}(z^2) + 2\left(\operatorname{Im} z\right)^2\right), \ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná v bodě $-\frac{1}{2} - 2i$. Pro tyto hodnoty parametrů dále určete $f'(-\frac{1}{2} - 2i)$.

$$f(z) = \beta^2(-y) - 4xy + i\alpha(x^2 - y^2 + 2y^2) = -\beta^2 y - 2xy + i\alpha(x^2 - y^2)$$

$u(x,y) = -\beta^2 y - 4xy$

$v(x,y) = \alpha(x^2 - y^2)$

$\alpha = 2, \beta = \pm 2$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -4y - 4ix$

$f'(-\frac{1}{2} - 2i) = 8 + 2i$

CR1: $\frac{\partial u}{\partial x} = -4y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\alpha y$

CR2: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\beta^2 - 4x \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2\alpha x$

$x = -\frac{1}{2}$

$y = -2$

$\alpha = 2$

$\beta = -4x + 2\alpha x$

$\beta^2 = 2 + \alpha = 4$

$\beta = \pm 2$

Úloha 3. *Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce*

$$u(x,y) = \alpha x^3 y^3 + xy^5 + x^5 y + e^{2x}\cos(\beta y), \ x, y \in \mathbb{R},$$

byla harmonická.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\alpha x^2 y^3 + y^5 + 5x^4 y + 2e^{2x}\cos(\beta y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\alpha x^3 y^2 + 5xy^4 + x^5 - \beta e^{2x}\sin(\beta y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\alpha xy^3 + 20x^3 y + 4e^{2x}\cos(\beta y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x}\cos(\beta y)$$

$\beta = \pm 2$

$\alpha = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$

Úloha 3. *Připomeňme si, že $u(x,y)$ je harmonická, jestliže*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \equiv 0 \quad \textit{pro } \text{všechny } x, y \in \mathbb{R}.$$

Spočteme nejdříve tyto parciální derivace. Jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\alpha x^2 y^3 + y^5 + 5x^4 y + 2e^{2x}\cos(\beta y)\right) = 6\alpha xy^3 + 20x^3 y + 4e^{2x}\cos(\beta y)$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3\alpha x^3 y^2 + 5xy^4 + x^5 - \beta e^{2x}\sin(\beta y)\right) = 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x}\cos(\beta y).$$

Hledáme tedy parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$6\alpha xy^3 + 20x^3 y + 4e^{2x}\cos(\beta y) + 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x}\cos(\beta y) \equiv 0$$

$$(6\alpha + 20)xy^3 + (20 + 6\alpha)x^3 y + (4 - \beta^2)e^{2x}\cos(\beta y) \equiv 0$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. *Vidíme, že zvolíme-li $\alpha = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$, pak jsou první dva členy konstantě nulové (a jiná možnost zřejmě není). Dále vidíme, že zvolíme-li $\beta = \pm 2$,* **pak je i třetí člen konstatně nulový.** *Zde bychom si měli uvědomit, že jiná možnost není. Neexistuje totiž volba parametru β taková, aby $\cos(\beta y) \equiv 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$ (stačí zvolit $y = 0$, potom zřejmě $\cos(\beta \cdot 0) = 1 \neq 0$ pro libovolné $\beta \in \mathbb{R}$).*

Funkce $u(x,y)$ je tedy harmonická právě tehdy, když $\alpha = -\frac{10}{3}$ a $\beta = \pm 2$.