Cvičení 10 – Komplexní analýza 2024/2025
Dobrovolná domácí cvičení, řešení

Úloha 1. *Uvědomíme si, že integrál vystupující v rovnici je konvoluce dvou funkcí, takže rovnici lze psát jako:*

$$y'(t) + y(t) * (e^{-3t}\mathbb{1}(t)) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Aplikací Fourierovy transformace tedy dostaneme

$$\begin{aligned}
i\omega\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega)\mathcal{F}[e^{-3t}\mathbb{1}(t)](\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\
i\omega\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega)\frac{1}{3+i\omega} &= \pi e^{-|\omega|} \\
\Big(i\omega + \frac{1}{3+i\omega}\Big)\hat{y}(\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\
\hat{y}(\omega) &= \frac{3+i\omega}{-\omega^2+3i\omega+1}\pi e^{-|\omega|}
\end{aligned}$$

Úloha 2. *Aplikací inverzní Fourierovy transformace dostaneme*

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{F}^{-1}[\frac{i}{(\omega^2+4i\omega-3)(\omega+i)}](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{(\omega^2+4i\omega-3)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4i\omega-3)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Označme jako I integrál na pravé straně, tj.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4i\omega-3)(\omega+i)}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Jest

$$\begin{aligned}
z^2+4iz-3 &= 0 \\
(z+2i)^2+4-3 &= 0 \\
(z+2i)^2 &= -1 \\
z+2i &= \pm i \\
z &\in \{-i,-3i\}
\end{aligned}$$

Kořeny jmenovatele jsou tedy body $-i$ a $-3i$, přičemž $-i$ je dvojnásobný.

Všechny kořeny jmenovatele mají zápornou imaginární část, takže víme, že pro $t \geq 0$ jest $I = 2\pi i\cdot 0 = 0$.

Pro $t < 0$ máme

$$I = -2\pi i\Big(\operatorname{res}_{z=-3i}\frac{1}{(z+3i)(z+i)^2}e^{izt} + \operatorname{res}_{z=-i}\frac{1}{(z+3i)(z+i)^2}e^{izt}\Big) \qquad (2)$$

První reziduum určíme snadno „dosazovací metodou“. Jest

$$\operatorname{res}_{z=-3i}\frac{1}{(z+3i)(z+i)^2}e^{izt} = \frac{1}{(-2i)^2}e^{i(-3i)t} = -\frac{e^{3t}}{4}.$$

Druhé reziduum určíme pomocí limitního vzorečku pro póly (jedná se o pól řádu 2). Jest

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=-i}\frac{1}{(z+3i)(z+i)^2}e^{izt} &= \lim_{z\to -i}\Big((z+i)^2\frac{1}{(z+3i)(z+i)^2}e^{izt}\Big)' = \lim_{z\to -i}\Big(\frac{e^{izt}}{z+3i}\Big)' \\
&= \lim_{z\to -i}\frac{ite^{izt}(z+3i)-e^{izt}}{(z+3i)^2} = \frac{-2t-1}{-4}e^t = \frac{2t+1}{4}e^t.
\end{aligned}$$

Dosazením zpět do (2) tedy dostaneme

$$I = -2\pi i\Big(-\frac{e^{3t}}{4} + \frac{2t+1}{4}e^t\Big)$$

pro $t < 0$.

Celkem tedy (viz (1))

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pokud } t \geq 0, \\ -\frac{e^{3t}}{4} + \frac{2t+1}{4}e^t & \textit{pokud } t < 0. \end{cases}$$

Úloha 3. *Na jednu stranu díky pravidlu o obrazu konvoluce víme, že*

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\frac{1}{(\omega - 2 + i)^2}.$$

Na druhou stranu máme zadáno, že

$$\widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 - 4\omega + 5)^2(\omega + 2i)}.$$

Takže

$$\hat{f}(\omega) = \frac{(\omega - 2 + i)^2}{(\omega^2 - 4\omega + 5)^2(\omega + 2i)}.$$

Jest

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 5 &= 0 \\ (z-2)^2 - 4 + 5 &= 0 \\ (z-2)^2 &= -1 \\ z - 2 &= \pm i \\ z &= 2 \pm i \end{aligned}$$

takže

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega - 2 - i)^2(\omega + 2i)}.$$

Aplikací inverzní Fourierovy transformace dostaneme

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(\omega - 2 - i)^2(\omega + 2i)}](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - 2 - i)^2(\omega + 2i)} e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

Označme jako I integrál na pravé straně, tj.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - 2 - i)^2(\omega + 2i)} e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Pro $t \geq 0$ máme

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2+i} \frac{1}{(z - 2 - i)^2(z + 2i)} e^{izt}.$$

Pomocí limitního vzorečku pro výpočet rezidua máme

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2+i} \frac{1}{(z - 2 - i)^2(z + 2i)} e^{izt} &= \lim_{z \to 2+i} \left((z - 2 - i)^2 \frac{1}{(z - 2 - i)^2(z + 2i)} e^{izt}\right)' = \lim_{z \to 2+i} \left(\frac{e^{izt}}{z + 2i}\right)' \\ &= \lim_{z \to 2+i} \frac{ite^{izt}(z + 2i) - e^{izt}}{(z + 2i)^2} = \frac{it(2 + 3i) - 1}{(2 + 3i)^2} e^{-t+2it} = \frac{-3t - 1 + 2it}{-5 + 12i} e^{-t+2it}. \end{aligned}$$

Takže

$$I = 2\pi i \frac{-3t - 1 + 2it}{-5 + 12i} e^{-t+2it}$$

pro $t \geq 0$.

Pro $t < 0$ máme

$$I = -2\pi i \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{1}{(z - 2 - i)^2(z + 2i)} e^{izt}.$$

Dle „dosazovacího pravidla“ máme

$$\operatorname{res}_{z=-2i} \frac{1}{(z - 2 - i)^2(z + 2i)} e^{izt} = \frac{e^{2t}}{(-2 - 3i)^2} = \frac{e^{2t}}{-5 + 12i},$$

a tedy

$$I = -2\pi i \frac{e^{2t}}{-5 + 12i}$$

pro $t < 0$.

Celkem tedy (viz (3)*)*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-3t-1+2it}{-5+12i} e^{-t+2it} i & \textit{pokud } t \geq 0, \\ -\frac{e^{2t}}{-5+12i} i & \textit{pokud } t < 0. \end{cases}$$