Cvičení 9–10 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 10–11

Úloha 1. *Spočtěte Fourierovu transformaci funkce*

$$f(t) = \mathbb{1}(t+4) - \mathbb{1}(t-2) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } t \in [-4,2), \\ 0 & \textit{pokud } t \in \mathbb{R} \setminus [-4,2), \end{cases}$$

kde $\mathbb{1}$ *je* Heavisideova funkce *definovaná jako*

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } t \geq 0, \\ 0 & \textit{pokud } t < 0. \end{cases}$$

Úloha 2. *Za pomoci Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *vyjádřete následující Fourierovy obrazy.*

(a) $\mathcal{F}[h(4t+5)](\omega)$
(b) $\mathcal{F}[e^{5it}h(t-2)](\omega)$
(c) $\mathcal{F}[h''(t)](\omega)$
(d) $\mathcal{F}[\sin(3t)h'(t+4)](\omega)$

Úloha 3. *Určete následující Fourierovy transformace.*

(a) $\mathcal{F}[te^{-9t^2}](\omega)$
(b) $\mathcal{F}[e^{-4(2t-3)^2}](\omega)$

Úloha 4. *Nalezněte Fourierův obraz* $\hat{y}(\omega)$ *řešení diferenciální rovnice*

$$y'''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

[Využijte faktu, že $\mathcal{F}[\frac{1}{1+t^2}](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$*.]*

Úloha 5. *Určete řešení* $y(t)$ *diferenciální rovnice, víte-li že její Fourierův obraz je*

(a) $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega^2-2\omega+5}$*;*
(b) $\hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega-2i)^2(\omega+i)}$.

Úloha 6. *Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce* $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ *vyjádřete*

$$\mathcal{F}[(te^{-\frac{(3t+2)^2}{2}}) * (e^{-2it}h'''(t))](\omega).$$

Úloha 7. *Nalezněte Fourierův obraz* $\hat{y}(\omega)$ *řešení integrodiferenciální rovnice*

$$y''(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

[Využijte faktu, že $\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$*.]*

Pro nudící se

Úloha 8. *Určete spojitou funkci* $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$*, víte-li, že*

(a)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+16} \qquad a \qquad \widehat{f*g}(\omega) = \frac{1}{(\omega-4i)^2(\omega+4i)(\omega+2i)}.$$

(b)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2-2i\omega-1} \qquad a \qquad \widehat{f*g}(\omega) = \frac{1}{(\omega-i)^4}.$$

Úloha 9. *Spočtěte Fourierovu transformaci funkce* $f(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$*, kde* $a > 0$.
[Fourierovu transformaci počítejte z definice.]

Úloha 10. *Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice*

$$y''(t) - y(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t).$$

Úloha 11. *Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení integrální rovnice*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-t^2}.$$

Fourierova transformace

Připomenutí.

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(}\textbf{Fourierova transformace } \textit{funkce } f(t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\textit{)}$$

$$\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(}\textbf{inverzní Fourierova transformace } \textit{funkce } f(t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\textit{)}$$

- $\hat{f}(\omega) = 2\pi\check{f}(-\omega)$
- *Pro hezké funkce platí* $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f(t)]) = f(t)$ *(***věta o inverzi***).*
- **Základní aritmetika Fourierovy transformace***:*
  - ⋆ $\mathcal{F}$ *je lineární.*
  - ⋆ *Pro* $a\in\mathbb{R}$*:* $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f(t)](\omega)$. *[posun vzoru]*
  - ⋆ *Pro* $a\in\mathbb{R}$*:* $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - a)$. *[posun obrazu]*
  - ⋆ *Pro* $a\in\mathbb{R}$ *nenulové:* $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)](\frac{\omega}{a})$. *[škálování]*
- **Obraz Gaussovy funkce***:*

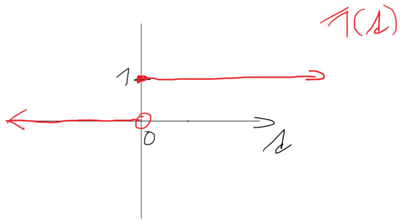
$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad \textit{kde } a>0 \textit{ je parametr.}$$

- **Vztah Fourierovy transformace a derivace** *pro pěkné funkce:*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n\mathcal{F}[f(t)](\omega) \qquad \textit{(obraz derivace)}$$

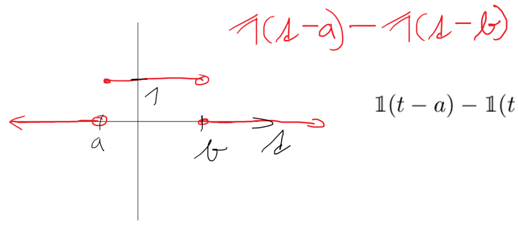
$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) \qquad \textit{(derivace obrazu).}$$

- **Heavisideova funkce***:*



$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } t\geq 0,\\ 0 & \textit{pro } t<0.\end{cases}$$

- *Pro* $a<b$ *jest*



$$\mathbb{1}(t-a) - \mathbb{1}(t-b) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } a\leq t<b\\ 0 & \textit{jinak.}\end{cases}$$

- **Konvoluce** *dvou pěkných funkcí* $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *je funkce* $(f*g)(t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *definovaná jako*

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{pro } t\in\mathbb{R}.$$

- **Fourierova transformace konvoluce***:*

$$\mathcal{F}[(f*g)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Výsledky

Úloha 1: $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-2i\omega} - e^{4i\omega}}{\omega} i & \text{pokud } \omega \neq 0, \\ 6 & \text{pokud } \omega = 0. \end{cases}$

Úloha 2: (a) $\frac{1}{4} e^{\frac{5\omega}{4} i} \hat{h}(\frac{\omega}{4})$

(b) $e^{-2(\omega-5)i} \hat{h}(\omega - 5)$

(c) $-\omega^2 \hat{h}(\omega)$

(d) $\frac{1}{2}(e^{4(\omega-3)i}(\omega - 3)\hat{h}(\omega - 3) - e^{4(\omega+3)i}(\omega + 3)\hat{h}(\omega + 3))$

Úloha 3: (a) $-i\frac{\sqrt{\pi}}{54} e^{-\frac{\omega^2}{36}}$

(b) $\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{3\omega}{2} i} e^{-\frac{\omega^2}{64}}$

Úloha 4: $\hat{y}(\omega) = \frac{\pi e^{-|\omega|}}{-i\omega^3 + 2i\omega + 3}$

Úloha 5: (a) $y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-2t+it}}{4} & \text{pokud } t \geq 0, \\ \frac{e^{2t+it}}{4} & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$

(b) $y(t) = \begin{cases} -\frac{3t+1}{9} e^{-2t} & \text{pokud } t \geq 0, \\ -\frac{e^t}{9} & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$

Úloha 6: $\left(i\frac{\sqrt{2\pi}}{3}(\frac{2}{3}i - \frac{\omega}{9})e^{\frac{2\omega}{3}i - \frac{\omega^2}{18}}\right)\left(-i(\omega + 2)^3 \hat{h}(\omega + 2)\right)$

Úloha 7: $\hat{y}(\omega) = 2\sqrt{\pi}\frac{1+\omega^2}{-\omega^4 - \omega^2 + 2} e^{-\omega^2}$

Úloha 8: (a) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} e^{-4t} & \text{pokud } t \geq 0, \\ \frac{\pi}{6} e^{2t} & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} -te^{-t} & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$

Úloha 9: $\mathcal{F}[e^{-at}\mathbb{1}(t)](\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$, kde $a > 0$

Úloha 10: $y(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} e^{-t} - \frac{e^{-t}}{4} & \text{pokud } t \geq 0, \\ -\frac{e^t}{4} & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$

Úloha 11: $y(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2t^2}$