Cvičení 10–11 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 11–12

Úloha 1. *Určete následující Laplaceovy obrazy. Funkce $h(t)$ je „dostatečně pěkná" funkce z L_0.*
(a) $\mathcal{L}[e^{-it}t^2](s)$
(b) $\mathcal{L}[(t-3)^2\mathbb{1}(t-3)](s)$
(c) $\mathcal{L}[(t-1)^2\mathbb{1}(t-3)](s)$
(d) $\mathcal{L}[\sin(2t)\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{4})](s)$
(e) $\mathcal{L}[h'''(t)](s)$, *kde* $h(t)$ *splňuje* $h(0)=2$, $h'(0)=0$, $h''(0)=3$
(f) $\mathcal{L}[(h'(t)*(t\sin(it))](s)$, *kde* $h(t)$ *splňuje* $h(0)=-2$

Úloha 2. *Nejprve zapište funkci*

$$f(t)=\begin{cases} e^{4t} & \textit{pokud } t\in[0,\frac{\pi}{6}),\\ 2 & \textit{pokud } t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{5}),\\ 0 & \textit{pokud } t\in[\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{4}),\\ \cos(2t) & \textit{pokud } t\in[\frac{\pi}{4},\infty),\end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce a poté nalezněte její Laplaceovu transformaci.

Úloha 3. *Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení (integro-)diferenciální rovnice*
(a)

$$y''(t)+2y'(t)-y(t)=3$$

s počátečními podmínkami $y(0)=-1$ *a* $y'(0)=4$*;*
(b)

$$y''(t)+\int_0^t \tau^3 y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=e^{-t}$$

s počátečními podmínkami $y(0)=0$ *a* $y'(0)=-2$.

Úloha 4. *Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, víte-li že její Laplaceův obraz je*
(a) $Y(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)^2}$*;*
(b) $Y(s)=\frac{s}{(s+1)(s^2-3s-4)}$.

Úloha 5. *Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce*
(a) $F(s)=\frac{e^{-5s}}{s^4}$*;*
(b) $F(s)=\frac{e^{-3s}}{(s-i)^2}$.

Úloha 6. *Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce $f(t)$ s periodou T, kde*
(a) $T=\frac{3\pi}{4}$ *a funkce $f(t)$ je na intervalu $[0,\frac{3\pi}{4})$ zadána předpisem*

$$f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mathbb{1}\left(t-\frac{\pi}{4}\right);$$

(b) $T=5$ *a funkce $f(t)$ je na intervalu $[0,5)$ zadána předpisem*

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \textit{pokud } t\in[0,2),\\ e^{2it} & \textit{pokud } t\in[2,4),\\ 0 & \textit{pokud } t\in[4,5).\end{cases}$$

Pro nudící se

Úloha 7. *Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)=|\sin t|$.*

Úloha 8. *Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice*

$$y'(t)+9\int_0^t y(\tau)e^{-6(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=e^t$$

splňující počáteční podmínku $y(0)=1$.

Úloha 9. *Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)=\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2(1-e^{-4s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.*

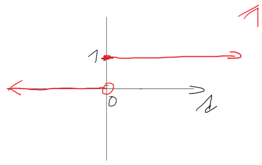
Laplaceova transformace

Připomenutí.

- **Laplaceova transformace** *funkce* $f(t)\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$:

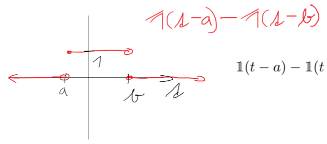
$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- *Ztotožňujeme funkce* $f(t)$ *a* $f(t)\mathbb{1}(t)$, *tj. funkce chápeme jako nulové pro* $t < 0$.
- **Heavisideova funkce**:



$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Pro $a < b$ *jest:*



$$\mathbb{1}(t-a) - \mathbb{1}(t-b) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \leq t < b \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Základní aritmetika Laplaceovy transformace**:
  - ⋆ $\mathcal{L}$ *je lineární.*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\frac{s}{a})$. *[škálování]*
  - ⋆ *Pro* $a \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$. *[posun obrazu]*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$. *[posun vzoru]*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(t)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$. *[„oříznutí“ vzoru]*
- **Pár známých obrazů**:
  - ⋆ *Pro* $n \in \mathbb{N}_0$ *jest* $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. *Speciálně* $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.
  - ⋆ *Pro* $a \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
  - ⋆ *Pro* $\omega \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ *a* $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- **Vztah Laplaceovy transformace a derivace** *pro pěkné funkce:*
  - ⋆ $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[f(t)](s)$ *[derivace obrazu]*
  - ⋆ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ *[obraz derivace]*
    Speciálně:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$
$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$
$$\mathcal{L}[f'''(t)](s) = s^3\mathcal{L}[f(t)](s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

- **Konvoluce a Laplaceův obraz konvoluce:** *Konvoluce funkcí* $f, g \in L_0$ *je funkce* $(f * g) \in L_0$ *definovaná jako*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ \ t \geq 0,$$

a platí $\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s)$.

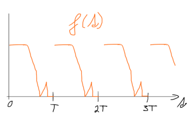
- *Pro* **inverzní Laplaceovu transformaci racionální funkce** $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, *kde* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, *platí*

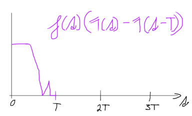
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st},$$

kde $z_1, \dots, z_n$ *jsou všechny póly funkce* $F(s)$.

- *Hledáme-li* **Laplaceův vzor pro funkce ve tvaru** $F(s) = G(s)e^{-as}$, *kde* $a > 0$, *postupujeme tak, že* **nejprve** *najdeme Laplaceův vzor* $g(t)$ *pro funkci* $G(s)$ *a* **poté** *(díky pravidlu o posunu vzoru) platí, že* $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$.
- **Obraz** $T > 0$ **periodické funkce** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *je*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T))](s)}{1 - e^{-sT}}$$





Výsledky

Úloha 1: (a) $\frac{2}{(s+i)^3}$

(b) $\frac{2e^{-3s}}{s^3}$

(c) $(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s})e^{-3s}$

(d) $\frac{s}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{4}s}$

(e) $s^3H(s)-2s^2-3$

(f) $\frac{2is}{(s^2-1)^2}$

Úloha 2: $f(t)=e^{4t}\big(\mathbb{1}(t)-\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{6})\big)+2\big(\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{6})-\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{5})\big)+\cos(2t)\mathbb{1}(t-\frac{\pi}{4})$

$F(s)=\frac{1-e^{-\frac{\pi}{6}s+\frac{2\pi}{3}}}{s-4}+2\frac{e^{-\frac{\pi}{6}s}-e^{-\frac{\pi}{5}s}}{s}-\frac{2}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{4}s}$

Úloha 3: (a) $Y(s)=\frac{3}{s(s^2+2s-1)}+\frac{2-s}{s^2+2s-1}=\frac{-s^2+2s+3}{s(s^2+2s-1)}$

(b) $Y(s)=\frac{s^4}{(s+1)(s^6+6)}-\frac{2s^4}{s^6+6}=\frac{-2s^5-s^4}{(s+1)(s^6+6)}$

Úloha 4: (a) $y(t)=e^{-2t}-(t+1)e^{-3t}$

(b) $y(t)=\frac{5t-4}{25}e^{-t}+\frac{4}{25}e^{4t}$

Úloha 5: (a) $f(t)=\frac{(t-5)^3}{6}\mathbb{1}(t-5)$

(b) $f(t)=(t-3)e^{i(t-3)}\mathbb{1}(t-3)$

Úloha 6: (a) $F(s)=\frac{1}{1-e^{-\frac{3\pi}{4}s}}\big(\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{4}s}+\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{3\pi}{4}s}\big)$

(b) $F(s)=\frac{1}{1-e^{-5s}}\big(\frac{1-e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-2s+4i}-e^{-4s+8i}}{s-2i}\big)$

Úloha 7: $F(s)=\frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

Úloha 8: $y(t)=\frac{7}{16}e^{t}+\frac{9(4t+1)}{16}e^{-3t}$

Úloha 9: $f(t)=\left(\frac{t-2}{1-e^4}e^{-(t-2)}-\frac{4e^4}{(1-e^4)^2}e^{-(t-2)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2+n\pi i)^2}e^{\frac{n\pi i}{2}(t-2)}\right)\mathbb{1}(t-2)$