Propočítané příklady CV.6,DÚ6

Monday, December 30, 2024 12:33

Úloha 1. *Klasifikujte typ izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7},\ z \in P(i),$$

v bodě $z = i$.

$$f(z) = \cancel{\frac{2}{(z-i)^3}} + \cancel{\frac{1}{z-i}} + \underbrace{\cancel{\frac{-2}{(z-i)^3}}}_{n=-5} + \underbrace{\cancel{\frac{-1}{(z-i)}}}_{n=-4} + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}$$

Všechny záporné mocniny $(z-i)$ se vyrušily tudíž je singularita v bodě $z=i$ odstranitelná

Úloha 1: Odstranitelná singularita.

Úloha 2. *Určete koeficient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *a exponent* $k \in \mathbb{Z}$ *tak, aby funkce*

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \underbrace{\frac{7}{3(z-1)^2}}_{\text{zbavit se}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n},\ z \in P(1),$$

měla v bodě 1 jednoduchý pól.

Jednoduchý pól = pól řádu 1

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \underbrace{\frac{7}{3(z-1)^2} + \underbrace{\frac{1}{3(z-1)^2}}_{n=1}}_{\frac{8}{3(z-1)^2}} + \underbrace{\frac{1}{3^2(z-1)}}_{n=2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}$$

$$\underbrace{\frac{-8}{(z-1)^2}}$$

$\Rightarrow \alpha = -8;\ k = 2$

Zůstane pouze jednoduchý pól

Úloha 2: $k = 2$, $a = -\frac{8}{3}$

Úloha 3. *Klasifikujte všechny izolované singularity funkce* $f(z)$, *kde*

(a) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2 (z-\pi)^4}$

(b) $f(z) = \frac{(e^z - 1)(1-\cos z)^4}{z^{11}}$

(c) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5(1-e^{iz})}$

(d) $f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)^2 (z - \frac{\pi}{2})}$

a) $f(z) = \frac{\sin z + (z-\pi)}{z^2 (z-\pi)^4} \Rightarrow$ singularity v $z=\pi$ & $z=0$

a) $f(z) = \frac{\sin z + (z-\pi)}{z^2 (z-\pi)^4}$ ⇒ singularity v $z=\pi$ a $z=0$

Pro $z=0$

čitatel: $\sin 0 + 0 - \pi = -\pi \Rightarrow 0$

$V\ z=0$ má $f(z)$ pól řádu 2

jmenovatel: $\underbrace{z^2}_{\text{druhá mocnina}}(z-\pi)^4 \rightarrow 2$

S
C
−S
−C

Pro $z=\pi$

čitatel: $\sin\pi + \pi - \pi = 0 \rightarrow$ derivujeme

$(\sin z + z - \pi)' = \cos(z) + 1 \Big|_{z=\pi} = 0 = 0$

$(\sin z + z - \pi)'' = -\sin(z) \Big|_{z=\pi} = 0$

$(\sin z + z - \pi)''' = -\cos(z)\Big|_{z=\pi} = 1 \neq 0 \rightarrow$ nás. č. $= 3$

Jmenovatel: $z^2 \underbrace{(z-\pi)^4}_{\text{násobnost } 4} \rightarrow 4$

$V\ z=\pi$ má $f(z)$ pól řádu $4-3=1$

(a) Izolované singularity jsou body 0 a π. Bod 0 je pól řádu 2. Bod π je pól řádu 1.

(b) $f(z) = \frac{(e^z - 1)(1 - \cos z)^4}{z^{11}}$

S
C
−S
−C

Izolovaní singularity jsou v $z=0$

Násobnost kořene v čitateli pro $z=0$:

$(e^z - 1)(1-\cos z)^4 \Big|_{z=0} = 0 \cdot 0^4$

$(e^z - 1)' = e^z \rightarrow$ nás. $e^z - 1 \rightarrow 1$

$(1-\cos z) = 0$

$(1-\cos z)' = \sin z \Big|_{z=0} = 0$

$(1-\cos z)'' = \cos z \Big|_{z=0} = 1$ tudíž nás. kořene je pro $(1-\cos z)$ rovna 2, ... jmenovateli $f(z)$ je $(1-\cos z)^4$

$(1-\cos z)'' = \cos z\big|_{z=0} = 1$ tudíž nás. kořene je pro $(1-\cos z)$ rovna 2, ale ve jmenovateli $f(z)$ je $(1-\cos z)^4$ takže násobnost kořene $(1-\cos z)^4$ je $2\cdot 4 = 8$

Celková násobnost čitatele je $1 + 2\cdot 4 = \underline{\underline{9}}$

Násobnost kořene jmenovatele je 11

Tudíž $f(z)$ má v bodě $z=0$ pól řádu $11-9=2$

(b) Jediná izolovaná singularita je bod 0. Bod 0 je pól řádu 2.

(c) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^5(1-e^{iz})}$

$f(z)$ má izolované singularity v 0 a v $2k\pi; k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Násobnost kořene v čitateli je $\underline{2}$ $\quad (1-\cos z)^{(II)} = \cos z\big|_{z=2k\pi} = 1 \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{n_c = 2}}$

Pro jmenovatel koukáme na $z=0$ a na $z=2k\pi$

Pro $z=0$:

$z^5 \rightarrow$ nás. kor.: 5

$(1-e^{iz})\big|_{z=0} = 0$

$(1-e^{iz})' = -ie^{iz}\big|_{z=0} = -i \neq 0 \rightarrow$ nás. kor.: $\underline{1}$

V $z=0$ má $f(z)$ má pól řádu $6-2=4$

Pro $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$z^5 \rightarrow$ nás 0 $(2k\pi)^5 \neq 0$

$(1-e^{iz})\big|_{z=2k\pi} = 0$

$(1-e^{iz})' = -ie^{iz} = -i$ Nás. č. $\rightarrow 1$

V $z=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ má $f(z)$ odstranitelnou singularitu

(c) Izolované singularity jsou body $2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$. Body $2k\pi$ pro $k\neq 0$ jsou odstranitelné singularity. Bod 0 je pól řádu 4.

(d) $f(z) = \dfrac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)^2(z-\frac{\pi}{2})}$

Izolované singularity jsou v $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ a v $z=\frac{\pi}{2}$

Pro $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Nás. koř. v čitateli:

$(e^{iz}-i-\cos z)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

$(e^{iz}-i-\cos z)'=ie^{iz}+\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=ii+1=0$

$(e^{iz}-i-\cos z)''=-e^{iz}+\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=-i\neq 0$ | nás. koř. $=2$

Nás. koř. ve jmenovateli

$(1-\sin z)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=0$

$[(1-\sin z)]'=-\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=0$ $\quad (1-\sin z)^2$

$[1-\sin z]''=\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=1 \Rightarrow$ nás. kořen $2\cdot 2=4$

$[z-\frac{\pi}{2}]\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi}=2k\pi\neq 0 \rightarrow$ nás. 0

Pro $z=\frac{\pi}{2}$:

ČITATEL / nás. koř. $=2$

Jmenovatel:

Pro $z=\frac{\pi}{2}$:

$(1-\sin z)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

$[1-\sin z]'=0$ $\quad (1-\sin z)^2$

$[1-\sin z]''\neq 0 \rightarrow +2\cdot 2=4$

$[z-\frac{\pi}{2}]\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

$[z-\frac{\pi}{2}]'=1\neq 0 \rightarrow \underbrace{+1}_{\text{nás. koř.}=5}$

V bodě $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ má $f(z)$ pól řádu 2 a v bodě $z=\frac{\pi}{2}$ má $f(z)$ pól řádu 3

(d) Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$. Body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k\neq\mathbb{Z}$ jsou póly řádu 2. Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu 3.

Úloha 4. *Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z, je-li*

(a) $z=-2$ *a*

$$f(z)=\frac{3}{(z+2)^2}+\frac{2}{z+2}+\sum_{n=-3}^{\infty}n^2(z+2)^{3n+5},\ z\in P(-2);$$

(b) $z=0$ *a*

$$f(z)=\frac{2}{z^3}+\sum_{n=-3}^{\infty}(n+1)z^{2n+4},\ z\in P(0).$$

a) $f(z)=\frac{3}{(z+2)^2}+\frac{2}{(z+2)}+\underbrace{\frac{9}{(z+2)^4}}_{n=-3}+\underbrace{\frac{4}{(z+2)}}_{n=-2}+\sum_{n=-1}^{\infty}n^2(z+2)^{3n+5};\ z\in P(-2)$

$\operatorname{res} f(z)=($

$n=-3 \qquad n=-2$

$$\mathrm{res}_{-2} f(z) = 6 \checkmark$$

$$b)\ f(z) = \frac{2}{z^3} + \underbrace{\frac{-2}{z^2}}_{n=-3} - \underbrace{1}_{n=-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) z^{2n+4}$$

$\Rightarrow$ žádná z^{-1} mocnina tudíž $\mathrm{res}_0 f(z) = 0 \checkmark$

Úloha 4: (a) $\mathrm{res}_{-2} f = 6$
(b) $\mathrm{res}_0 f = 0$

Úloha 5. *Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo*

$$\mathrm{res}_1 \left(\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n} \right) = \frac{4}{9}.$$

$$\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \underbrace{\frac{1}{3(z-1)^2}}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{3^2(z-1)}}_{n=2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 3/9 \\ k &= 1 \end{aligned}}$$

$$\frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \checkmark$$

Úloha 5: $k = 1$ a $\alpha = \frac{1}{3}$

Úloha 6. *Spočtěte.*

(a) $\mathrm{res}_\pi \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(b) $\mathrm{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(c) $\mathrm{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$
(d) $\mathrm{res}_0 \frac{\sin z}{e^z-1-z}$
(e) $\mathrm{res}_0 \frac{z^2}{1-\cos z}$

$$\mathrm{res}_\pi \frac{\overbrace{\cos z}^{1}}{\underbrace{z}_{0}\underbrace{(z-\pi)^2}_{2}}$$

V π pól řádu $2 = k$

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^k \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} \right)^{(k)} =$$

$$= \lim_{z\to\pi} \left(\cancel{(z-\pi)^2} \frac{\cos z}{z\cancel{(z-\pi)^2}} \right)' = \lim_{z\to\pi} \left(\frac{\cos z}{z} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{-z\sin z - \cos z}{z^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

(a) $\frac{1}{\pi^2}$

$$b)\ \mathrm{res}_0 \frac{\overbrace{\cos z}^{0}}{\underbrace{z}_{1}\underbrace{(z-\pi)^2}_{0}}$$

v $z=0$ pól řádu 1

$$\operatorname{res}_0 f = \frac{\cos z}{(z(z-\pi)^2)'} = \frac{\cos z}{(z-\pi)^2 + z\,2(z-\pi)}\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{\pi^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi^2}}}$$

c) $$(c)\ \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})} = \underline{\underline{-\frac{i}{2}}}$$ (c) $-\frac{i}{2}$

$(\sin(2z))' = 2\cos(2z) = -2 \neq 0$ v $\frac{\pi}{2}$ pól řádu 1

$$(d)\ \operatorname{res}_0 \frac{\overbrace{\sin z}^{1}}{\underbrace{e^z-1-z}_{2}} = \lim_{z\to 0}\left((z)\,\frac{\sin z}{e^z-1-z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{e^z-1-z} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0}\frac{\sin z + z\cos z}{e^z-1}$$

pól řádu 1

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0}\frac{\cos z + \cos z - z\sin z}{e^z} = \underline{\underline{2}}$$ (d) 2

$$(e)\ \operatorname{res}_0 \frac{\overbrace{z^2}^{2}}{\underbrace{1-\cos z}_{2}} = 0$$

V 0 je odstranitelná singularita

Úloha 7. *O funkci $f(z)$ víme, že má v bodě i pól řádu 1. Dále o ní víme, že splňuje $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ a $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$, $z \in P(i)$, v bodě i.*

Bude to odstranitelná singularita jelikož $f(z)$ a $-\frac{5i}{z-i}$ se v bodě i vykrátí

Úloha 8. *Zdůvodněte/Dokažte, že platí následující tvrzení: Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu $k \in \mathbb{N}$ a funkce $g(z)$ pól řádu $l \in \mathbb{N}$, přičemž $k \neq l$, pak funkce $f(z) + g(z)$ má v bodě z_0 pól řádu $\max\{k, l\}$. Rozmyslete si také, že předpoklad $k \neq l$ je důležitý.*

Rozklad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-l}$

$$f+g = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{n+k}(z-z_0)^{n-k} + b_{n+l}(z-z_0)^{n-l}}_{☺} =$$

$$= a_k (z-z_0)^{-k} + b_l (z-z_0)^{-k} \sum_1^{\infty} ☺ =$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0) \qquad = \underbrace{a_k (z-z_0)^{-k}}_{\text{když } a_k \neq 0 \text{ a}} + b_\ell (z-z_0)^{-k} \sum_{n=1} \ddot{\smile} =$$

Nvm řady go brrrrr

Úloha 1. *Klasifikujte typ izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{\sin z - \cos z - e^z + 2}{\sin(z^2) - 2 + 2\cos z}$$

v bodě $z = 0$.

Čitatel

$$\sin z - \cos z - e^z + 2 \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)' = \cos z + \sin z - e^z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)'' = -\sin z + \cos z - e^z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin z - \cos z - e^z + 2)''' = -\cos z - \sin z - e^z \Big|_{z=0} = -2 \neq 0 \quad \text{nás. čit.} = 3$$

Jmenovatel:

$$\sin(z^2) - 2 + 2\cos z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z)' = 2z\cos(z^2) - 2\sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z)'' = 2\cos(z^2) - 4z^2\sin(z^2) - 2\cos z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z)''' = -4z\sin(z^2) - 8z\sin(z^2) - 8z^3\cos(z^2) - 4\sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(\sin(z^2) - 2 + 2\cos z)^{IV} = -4\sin(z^2) - 8z\cos(z^2) - 8\sin(z^2) - 16z^2\cos(z^2) - 24z^2\cos(z^2) + 16z^4\sin(z^2) \underline{+4\cos z \neq 0}$$

Jmen. nás koř = 4

f(z) má v z=0 pól řádu 4-3 = 1 ✓

Bod 0 je tedy 3-násobný kořen čitatele.

Porovnáním násobností kořene v čitateli a jmenovateli dostaneme, že bod 0 je pól řádu $4 - 3 = 1$.

Úloha 2. *Klasifikujte všechny izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{(z+5)\sin^3(2\pi z)}{(e^{\frac{\pi}{2}iz} + i)^4}.$$

$$-i = e^{\frac{\pi}{2}iz}$$

$$1e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}iz}$$

Pro $z = -1+4k$

Čitatel $z = -5 = -1+4(-1)$

$z+5 \to$ nás kor = 1

$\sin^3(2\pi z) = 0$

$6\pi\sin^2(2\pi z) = 0$

$24\pi^2\sin(2\pi z) = 0$

$$1e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}iz}$$

$$-\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i = \frac{\pi}{2}iz$$

$$z = -1+4k \quad k\in\mathbb{Z}$$

$6\pi \sin^4(2\pi z) = 0$

$24\pi^2 \sin(2\pi z) = 0$

$\underbrace{48\pi^3 \cos(2\pi z) \neq 0}_{\text{ČITNÁSKOR} = 3+1=4}$ → násk. = 3

$\left(e^{\frac{\pi}{2}iz}+i\right)^4$

Jmenovatel $z=-5$

$e^{\frac{\pi}{2}iz} + i = 0$

$\frac{\pi}{2}i\, e^{\frac{\pi}{2}iz}\Big|_{z=-5} = -\frac{\pi}{2} \neq 0$ } nás $1\cdot 4 < 4$

V $z=-5$ má $f(z)$ odstranitelnou singularitu

V bodech $z=-1+4k\pi$ $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ má $f(z)$ póly řádu $4-3=1$

Úloha 3. *Určete koeficient $\alpha\in\mathbb{C}$ a exponent $k\in\mathbb{Z}$ tak, aby platilo*

$$\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{\alpha}{(z+i)^k}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2(z+i)^{2n-7}\right)=3.$$

$$\frac{\alpha}{(z+i)^k}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\underbrace{\frac{9}{(z+i)^3}}_{n=2}+\underbrace{\frac{16}{z+i}}_{n=3}+\sum_{n=4}^{\infty}(n+1)^2(z+i)^{2n-7}$$

$3 = 16-2+\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= -11\\ k &= 1\end{aligned}}$$

kde $+\cdots$ již obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z+i)$. Zvolíme-li tedy $k=1$, jest

$$\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{\alpha}{z+i}+\frac{3}{(z+i)^2}-\frac{2}{z+i}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2(z+i)^{2n-7}\right)=\alpha-2+16=\alpha+14.$$

Potřebujeme tedy zvolit

$$\alpha+14=3$$
$$\alpha=-11.$$