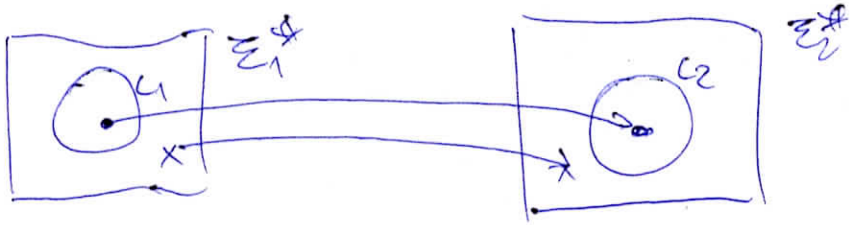
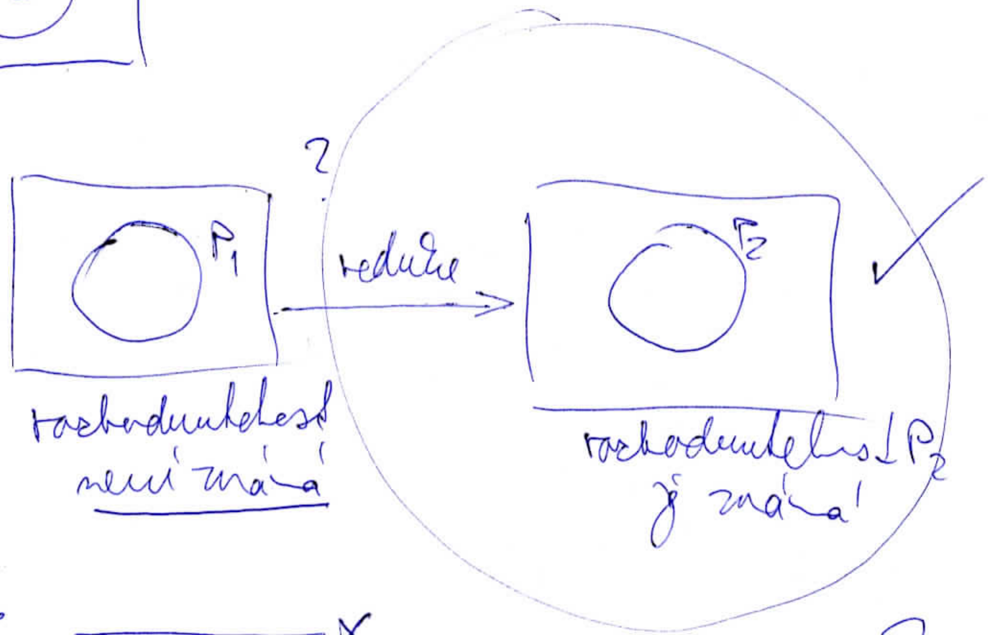
NEROZHODNUTELNOST

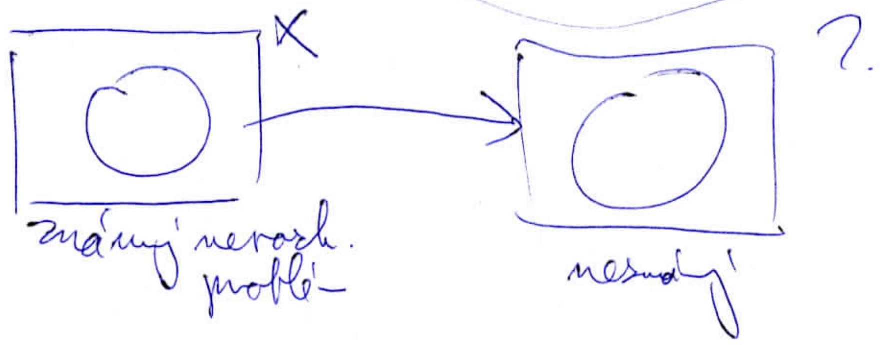
- redukcí z jazyka $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ na jazyk $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ rozumíme zobrazení $\sigma : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ takové, že lze vyčíslit úplným TS a zachovávající členství v jazyku ($\forall w \in \Sigma_1^* : w \in L_1 \Leftrightarrow \sigma(w) \in L_2$)



- rozhodnutelnost pomocí redukce



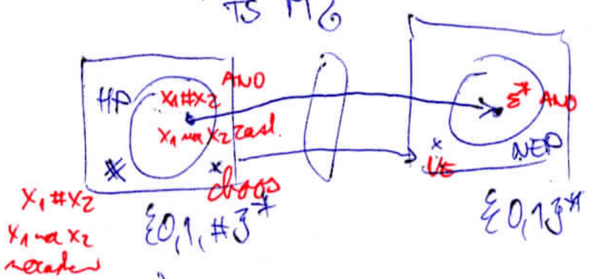
- nerozhodnutelnost pomocí redukce



Dokončení příkladu z minulého STI – nerozhodnutelnost problému neprázdnosti jazyka TS.

Důkaz

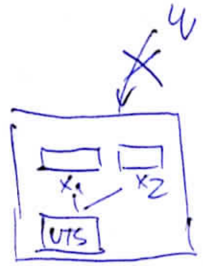
- Použijeme redukci z problému HP.
- Problém HP lze charakterizovat jazykem
  $HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid \text{TS } M \text{ zastaví na vstupu } w \} \subseteq \{0,1,\#\}^*$
- Problém neprázdnosti můžeme charakterizovat jazykem
  $NEP = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset \text{ pro TS } M \} \subseteq \{0,1\}^*$
- Sestrojíme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ redukující HP na NEP.
- TS M_σ implementující σ přiřadí každému vstupu $x \in \{0,1,\#\}^*$ řetězec $\langle M_x \rangle$, kde M_x je TS, který na vstupu $w \in \{0,1\}^*$ pracuje takto:
  1. M_x smaže z pásky w.
  2. M_x zapíše na vstupní pásku řetězec x.
  3. M_x ověří, zda x je dobře zformovaná instance problému zastavení.



$\forall x \in \{0,1,\#\}^* : \sigma(x) = \langle M_x \rangle$

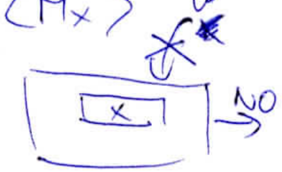
pokud je x správně zformované: $x_1 \# x_2$

M_x



pokud je x nesprávně zform.

$\sigma(x) = \langle M_x \rangle$



4. Pokud ne, odmítne. Pokud ano, pak odsimuluje na vstupu s kódem x_2 TS s kódem x_1, kde $x = x_1\#x_2$.
5. Pokud simulace skončí, přijme.

- Uvedenou redukci lze opravdu implementovat úplným TS. Konečně M_x lze sestavit kompozicí několika komponent, které jsou většinou konstantní (konkrétně: smazání pásky, posouzení, zda na vstupu je dobře zformovaná instance HP, simulace TS pomocí UTS). Tyto komponenty (resp. jejich kódy) M_0 snadno vypíše spolu s předáváním řízení mezi nimi. Jedinou nekonstantní komponentou je TS vypisující x na vstupní pásku. Evidentně ale není problém vypsat kód TS, který zapisuje na pásku určitý řetězec (pro $x = a_1 \dots a_n$ M_0 vypíše TS "$R a_1 R a_2 \dots R a_n$").
- Zkoumejme jazyk TS M_x – snadno nahlédneme, že:

a) $L(M_x) = \emptyset \iff x$ nemá strukturu $x_1\#x_2$ pro x_1 kód TS a x_2 kód vstupu, nebo x má strukturu $x_1\#x_2$, kde TS s kódem x_1 na vstupu s kódem x_2 nezastaví.

b) $L(M_x) = \{0,1\}^* \iff x$ má strukturu $x_1\#x_2$, kde x_1 je kód TS a x_2 kód jeho vstupu, a x_1 na x_2 zastaví.

- Nyní snadno ukážeme, že ϕ zachovává členství v jazyce, neboť:

$$\langle M_x \rangle \in NEP \Leftrightarrow L(M_x) = \{0,1\}^* \Leftrightarrow x \text{ má strukturu}$$

$x_1 \# x_2$ pro kód TS x_1 a kód vstupu x_2, kde TS s kódem x_1 na vstupu s kódem x_2 zastaví $\Leftrightarrow$

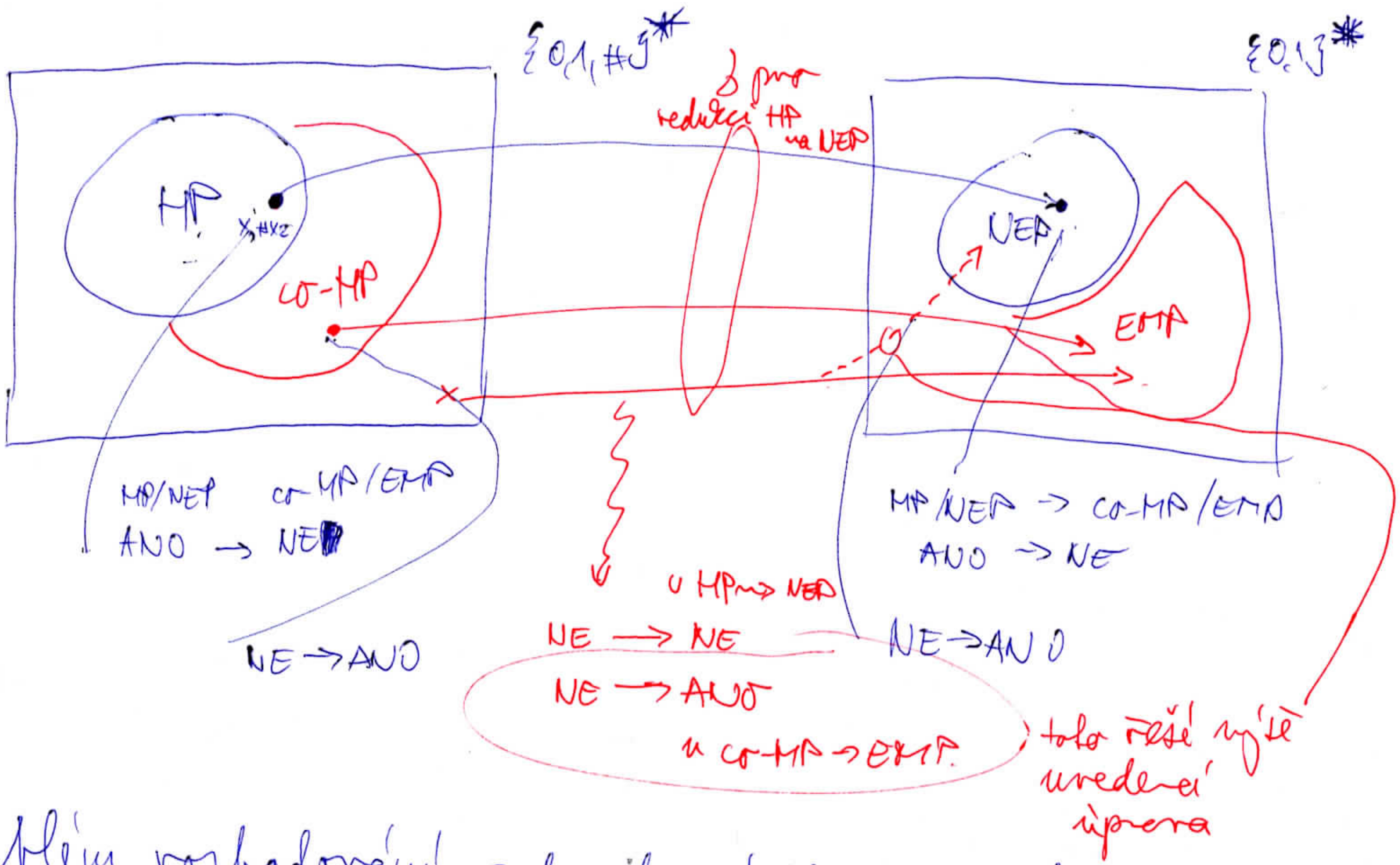
$x = x_1 \# x_2 \in HP$ $\square$

- Dokažte, že problém, zda jazyk daného TS je prázdný, není ani částečně rozhodnutelný!

Důkaz (idea) - Redukcí z problému co-HP, který lze charakterizovat jazykem co-$HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid$ TS M na řetězci w nezastaví $\}$.

- Problém prázdnosti lze charakterizovat jazykem $EMP = \{ \langle M \rangle \mid M$ je TS takový, že $L(M) = \emptyset \}$.

- Lze užít takřka stejnou redukci jako v případě redukce z HP na NEP. Jedinou odlišností je, že M_x pro řetězec x, který nemá strukturu $x_1 \# x_2$ pro kód TS x_1 a kód vstupu x_2, přijme. $\square$



- Dokažte, že problém rozhodování, zda daný TS M zastaví na vstupu ε není rozhodnutelný.

Důkaz - Redukcí z HP, který je charakterizován jazykem
$HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M \text{ je TS, který na } w \text{ zastaví} \}$

- uvedený problém můžeme charakterizovat jazykem
$HPE = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ je TS, který zastaví na } \varepsilon \}$.

- Lze užít analogickou redukci jako u redukce z HP na NEP, pouze pro případ, kdy x není správně zformovanou instancí MP, M_x na libovolném vstupu cyklí. $\square$

PCP nad Σ

- Postův systém nad Σ je $S = \langle (\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), \dots, (\alpha_k,\beta_k) \rangle$, kde $k \geq 1$ a $\forall 1 \leq i \leq k: \alpha_i, \beta_i \in \Sigma^+$.
- Řešením PS S je $I = \langle i_1, \dots, i_m \rangle$, kde $m \geq 1$ a $\forall 1 \leq j \leq m: 1 \leq i_j \leq k$, taková, že $\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_m} = \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_m}$.
- PCP: Má daný P. systém S řešení?
- Rozhodněte, zda níže uvedené PS mají řešení:

a) $S_1 = \langle (ab,a), (aa,baaab), (aa,a) \rangle$

b) $S_2 = \langle (ab,a), (aaa,aa), (ba,a) \rangle$ nad $\Sigma = \{a,b\}$.

---

ad a) S_1 má řešení, např. $I = \langle 1,2,1,3 \rangle$, kde:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 = ab.aa.ab.aa =$$
$$= \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 = a.baaab.a.a$$

ad b) S_2 nemá řešení, protože $\forall\, 1 \le i \le 3$. $|\alpha_i| > |\beta_i|$.

– Dokažte, že problém víceznačnosti bezkontextových gramatik je nerozhodnutelný.

Důkaz redukcí z PCP (idea):

- PCP lze charakterizovat jazykem $PCP = \{\langle S \rangle \mid S$ je PS, který má řešení$\}$, kde $\langle \rangle$ je kódování PS na řetězce 0 a 1. Takové kódování lze zřejmě sestrojit podobně jako u TS.
- Problém víceznačnosti lze charakterizovat jazykem $AG = \{\langle G \rangle \mid G$ je bezk. gr., která je víceznačná$\}$, kde $\langle \rangle$ je kódování gramatik na řetězce 0 a 1, které opět je snadno sestrojitelné.
- Naznačme redukci z PCP na AG.
- Redukce přiřadí libovolnému PS $S = \langle(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_k, \beta_k)\rangle$ nad Σ bezkontextovou gramatiku $G_S = (\{S, S_1, S_2\}, \Sigma \cup \{1, \dots, k, \#\}, P, S)$, kde P obsahuje pravidla

- $S \to S_1 \mid S_2$,
- pro $\forall\, 1 \leq i \leq k$: $S_1 \to \alpha_i S_1 i \mid \alpha_i \# i$ a
  $S_2 \to \beta_i S_2 i \mid \beta_i \# i$.

Žádná další pravidla G_S neobsahuje a předpokládáme přitom, že $\# \notin \Sigma$ (bez újmy na obecnosti).

- Uvedená redukce bude potřebovat pracovat s kódy gramatik a PS.
- Dodejme, že pokud na vstupu redukce bude řetězec x, který není kódem PS, pak $\sigma(x)$ bude kód gramatiky $(\{S\}, \{a\}, \{S \to a\}, S)$, která je jednoznačná!
- Uvedenou redukci lze evidentně implementovat úplným TS.
- G_S je víceznačná $\Leftrightarrow$ existuje $I = \langle i_1, \dots, i_m \rangle$, $m \geq 1$, takový, že $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \alpha_{i_1} S_1 i_1 \Rightarrow \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} S_1 i_2 i_1 \Rightarrow \dots$
  $\Rightarrow \underline{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m} \# i_m \dots i_1}$ a současně
  $S \Rightarrow S_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_m} \# i_m \dots i_1}$, kde
  $\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m} = \beta_{i_1} \dots \beta_{i_m}$ $\Leftrightarrow$ S má řešení $\square$

Např. k PS $S_1 = \langle (\underset{\alpha_1}{ab}, \underset{\beta_1}{a}), (\underset{\alpha_2}{aa}, \underset{\beta_2}{baaab}), (\underset{\alpha_3}{aa}, \underset{\beta_3}{a}) \rangle$ by uvedená redukce přiřadila gramatiku G_{S_1} s pravidly:

$$S \to S_1 \mid S_2$$

$$\begin{aligned}
S_1 \to\ & ab\,S_1\,1 \mid ab\#1 \mid \\
& aa\,S_1\,2 \mid aa\#2 \mid \\
& aa\,S_1\,3 \mid aa\#3 \\
S_2 \to\ & a\,S_2\,1 \mid a\#1 \mid \\
& baaab\,S_2\,2 \mid baaab\#2 \mid \\
& a\,S_2\,3 \mid a\#3 .
\end{aligned}$$

PS S_1 má řešení $I = \langle 1,2,1,3 \rangle$, čemuž odpovídají derivace:

a) $S \Rightarrow S_1 \Rightarrow ab\,S_1\,1 \Rightarrow abaa\,S_1\,21 \Rightarrow$
$\Rightarrow abaaab\,S_1\,121 \Rightarrow \underline{abaaabaa\#3121},$

b) $S \Rightarrow S_2 \Rightarrow a\,S_2\,1 \Rightarrow a\,baaab\,S_2\,21 \Rightarrow$
$\Rightarrow a\,baaab\,a\,S_2\,121 \Rightarrow \underline{abaaabaa\#3121},$