Formální důkazový systém
VÝROKOVÉ LOGIKY

3 schémata axiomů:

A1) $A \to (B \to A)$

A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

kde A, B, C jsou lib. Fle (V.L.)

+ odvozovací pravidlo MP:

$$A,\ A \to B \vdash B$$

Věta o dedukci:

$$T \cup \{A\} \vdash B \iff T \vdash A \to B$$

~~Dokázáno: $\vdash A \to A$~~

(C) $\vdash A \to \neg\neg A$

1) (b) $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$
2) A3 $\vdash (\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$
3) MP $\vdash A \to \neg\neg A$

Máme dokázat dokazatelnost Flí dle návodu

a) $\vdash \neg A \to (A \to B)$

1) A1 $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$
2) VD $\neg A \vdash \neg B \to \neg A$
3) A3 $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
4) MP $\neg A \vdash A \to B$
5) VD $\vdash \neg A \to (A \to B)$

0) $\neg A \vdash \neg A$ (předpokl. $\neg A$)
1) A1
2) MP

b) $\vdash \neg\neg A \to A$

1) (a) $\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$
2) VD $\neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$
3) A3 $(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$
4) MP $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$
5) VD $\neg\neg A \vdash A$
6) VD $\vdash \neg\neg A \to A$

d) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

0) (b) $\vdash \neg\neg A \to A$
1) VD $\neg\neg A \vdash A$
2) předp. $A \to B \vdash A \to B$
3) MP $A \to B, \neg\neg A \vdash B$
4) (c) $\vdash B \to \neg\neg B$
5) MP $A \to B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$
6) VD $A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$
7) A3 $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$
8) MP $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$
9) VD $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

---

e) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

1) předp A
2) —"— $A \to B$
3) MP $A, \cancel{A \to B} \vdash B$
4) VD $\boxed{A \vdash (A \to B) \to B}$
5) (d) $\vdash ((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
6) MP $A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$
7) VD $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A

$A \to B$

MP: B

f) $\vdash (\neg A \to A) \to A$

1) (e) $\vdash \neg A \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$
2) VD $\neg A \vdash \neg A \to \neg(\neg A \to A)$
3) VD $\neg A \vdash \neg(\neg A \to A)$
4) VD $\vdash \neg A \to \neg(\neg A \to A)$
5) A3 $\vdash (\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$
6) MP $\vdash (\neg A \to A) \to A$

Formální dů. systém PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

axiomy (A1 — A3) v. l., MP

MG — pravidlo zobecnění $\varphi \vdash \forall x\, \varphi$

axiom substituce $\forall x\, \varphi \to \varphi_x[t]$

term substituovatelný za x v φ

axiom kvantifikátorů

axiomy rovnosti

$\cancel{\vdash} \forall x\, \varphi \to \varphi$

Věta o dedukci: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff T \vdash \varphi \to \psi$

pokud φ je uzavřená flе

NEPLATÍ $\vdash \varphi \to \forall x\, \varphi$!

$\vdash \forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall x (P(x,x) \to \forall y\, P(x,y))$

1) předp.
2) AS $\quad \forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, P(x,y)$
3) MP $\quad \vdash \forall y\, P(x,y)$
4) A1 $\quad \forall y\, P(x,y) \to (P(x,x) \to \forall y\, P(x,y))$
5) MP $\quad \vdash P(x,x) \to \forall y\, P(x,y)$
6) MG $\quad \forall x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall x (P(x,x) \to \forall y\, P(x,y))$
7) VD $\quad \forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall x (P(x,x) \to \forall y\, P(x,y))$

Sémantika pred. log.

Realizace jazyka L

L s rovností =

pred. sym P ... 2 – binární

a) Realizace $\mathcal{M}$ na univerzu $\mathbb{N}$

$P_{\mathcal{M}} \ni (i,j) \iff i+1=j \qquad \boxed{i+1=j}$

$\varphi \equiv \boxed{(P(x,y) \land P(y,x)) \to x=y}$

$\psi \equiv (P(x,y) \land P(y,z)) \to P(x,z)$

i) Najděte ohodnocení proměnných e tak, aby $\mathcal{M} \not\models \varphi[e]$ $\quad e: x \mapsto 1,\ y \mapsto 1$

$\varphi[e]: ((1,1) \in P_{\mathcal{M}} \land (1,1) \in P_{\mathcal{M}})$

$\Rightarrow 1=1$ ✓

ii) $\mathcal{M} \overset{?}{\models} \varphi \qquad x=3,\ y=4$

$((3,4) \in P_{\mathcal{M}} \land (4,3) \in P_{\mathcal{M}}) \land 3=4$

$3 \neq 4$

$3+1=4$ ✓ $\quad 4+1 \neq 3$

Splněno protože $i+1=j \Rightarrow j+1=i+2 \neq i$

tedy $(i,j) \in P_{\mathcal{M}} \Rightarrow (j,i) \notin P_{\mathcal{M}}$, tedy

$P(x,y) \land P(y,x)$ není ~~splněna~~ pravdivá při lib. ohodnocení

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ ✓

b) Realizace ~~M~~ $\mathcal{N}$ na $\mathbb{Z}$

$$P_{\mathcal{N}}(i,j) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ i \cdot k = j$$

$$(i \mid j)$$

i) $\mathcal{N} \models \varphi$ ✓

$$P_{\mathcal{N}}(i,j) \wedge P_{\mathcal{N}}(j,h) \overset{?}{\Longrightarrow} P_{\mathcal{N}}(i,h)$$

$$\exists k\ ik=j \qquad \exists l\ jl=h \qquad \exists m\ im=h$$

$$i\underbrace{kl}_{m}=h$$

✓

$$\chi \equiv \boxed{(\forall x)(\exists y)\ (x \neq y \wedge P(x,y))}$$

uspořádání

$\neg\, x=y$

iii) $\boxed{\{\varphi, \psi, P(x,x)\} \models \chi}$?

důsledek teorie

$$\forall x\ \exists y \neq x\ \ x \leq y$$

$$\boxed{\forall x \exists y\ \ y > x}\ ?$$

ii) $\mathcal{N} \overset{?}{\not\models} T \Longleftrightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi$

$\mathcal{N} \models \psi$ ✓

$\mathcal{N} \models P(x,x)$

$(-1, 1) \in P_{\mathcal{N}}$? $-1 \mid 1$

✓

$(-1)\cdot(-1) = 1$

$(1,-1) \in P_{\mathcal{N}}$ $\qquad 1\cdot(-1) = -1$ #

1. nemá splněno χ

je model

$$T \not\models \chi$$