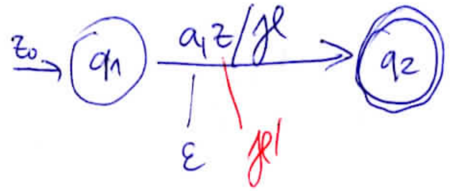
Zásobníkové automaty

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$

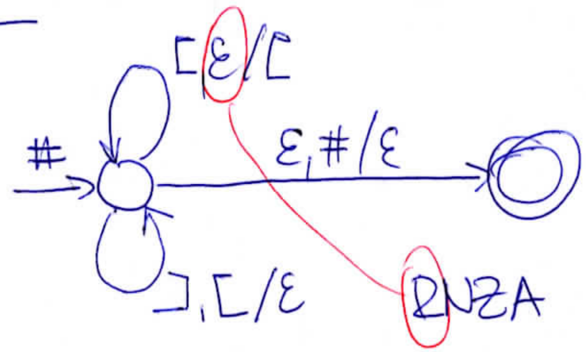
$q_0 \in Q$, $z_0 \in \Gamma$, $F \subseteq Q$

RNZA

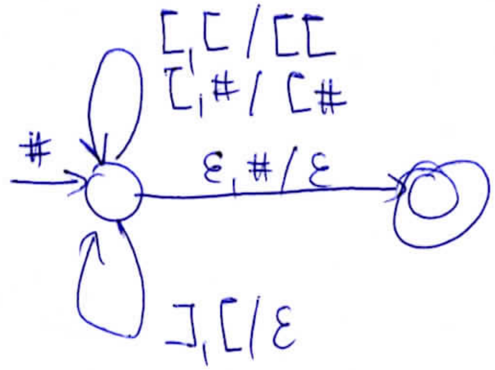
NZA: $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{*} \to 2^{Q \times \Gamma^*}$



- Sestavte (R)NZA pro Dyckův jazyk typu 1, který lze popsat gramatikou s pravidly $S \to [S] \mid SS \mid \varepsilon$.

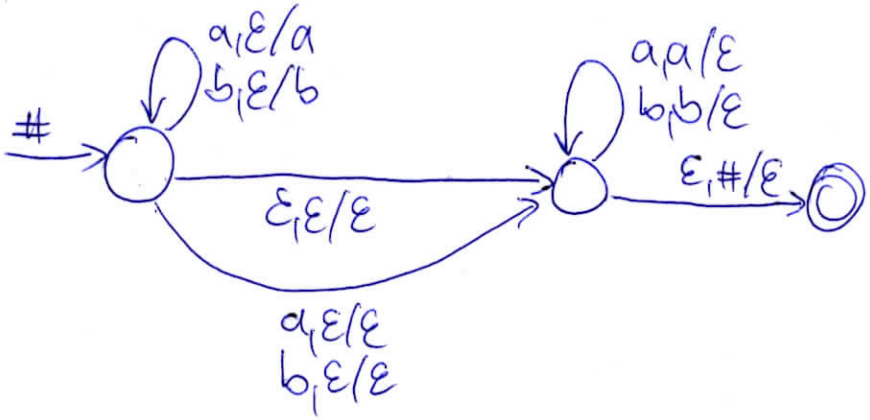


NZA:



- Sestavte (R)NZA přijímající jazyk generovaný gramatikou s pravidly $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$, tj.:

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \}$. Např. abba $\in L$
ababa



Mějme dánu bezk. gr. s pravidly

$E \to E+T \mid T$

$T \to T*F \mid F$

$F \to i \mid (E)$

kde E je startovací symbol. (a) Sestavte ZA přijímající vyprázdněním zásobníku a modelující synt. analýzu shora dolů. (b) Sestavte RNZA modelující synt. zdola nahoru pro daný jazyk.

(a) - $Q = \{q\}$
- $\Sigma = \{+, *, (,), i\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F\}$

- δ: $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, E+T), (q, T)\}$
  $\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, T*F), (q, F)\}$
  $\delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, i), (q, (E))\}$
  $\delta(q, i, i) = \{(q, \varepsilon)\}$
  $\delta(q, +, +) = \{(q, \varepsilon\}$
  $\delta(q, *, *) = \{(q, \varepsilon)\}$
  $\delta(q, (, () = \{(q, \varepsilon)\}$
  $\delta(q,),)) = \{(q, \varepsilon)\}$
- $q_0 = q$
- $z_0 = E$
- $F = \emptyset$ – přijímá vypr. zás.

(b) - $Q = \{q, r\}$
- $\Sigma = \{i, +, *, (,)\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F, \#\}$
- δ: $\delta(q, i, \varepsilon) = \{(q, i)\}$ $\quad\delta(q, (, \varepsilon) = \{(q, ()\}$
  $\delta(q, +, \varepsilon) = \{(q, +)\}$ $\quad\delta(q,), \varepsilon) = \{(q,))\}$
  $\delta(q, *, \varepsilon) = \{(q, *)\}$
  | shift

$\delta(q, \varepsilon, i) = \{(q, F)\}$ předp., že vrchol zás. je vpravo.

$\delta(q, \varepsilon, (E)) = \{(q, F)\}$

$\delta(q, \varepsilon, T*F) = \delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, T)\}$ | redukce

$\delta(q, \varepsilon, E+T) = \delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, E)\}$

$\delta(q, \varepsilon, \#E) = \{(r, \varepsilon)\}$ | accept

- $q_0 = q$
- $z_0 = \#$
- $F = \{r\}$

- sestavte a formálně popište alg. pro průnik jazyků <u>KA</u> a ZA.

Vstup: ZA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, z_0^1, F_1)$

KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

Výstup: ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ takový, že

$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Metoda: 1. $Q = Q_1 \times Q_2$

2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (lze vzít $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ pokud $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$)

3. $\Gamma = \Gamma_1$

4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ tak, že:

a) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \; \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \; \forall a \in \Sigma \; \forall z \in \Gamma \; \forall \gamma \in \Gamma^*$:

$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a, z) \iff$$
$$(q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, a, z) \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a)$$

b) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \; \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \; \forall z \in \Gamma \; \forall \gamma \in \Gamma^*$:

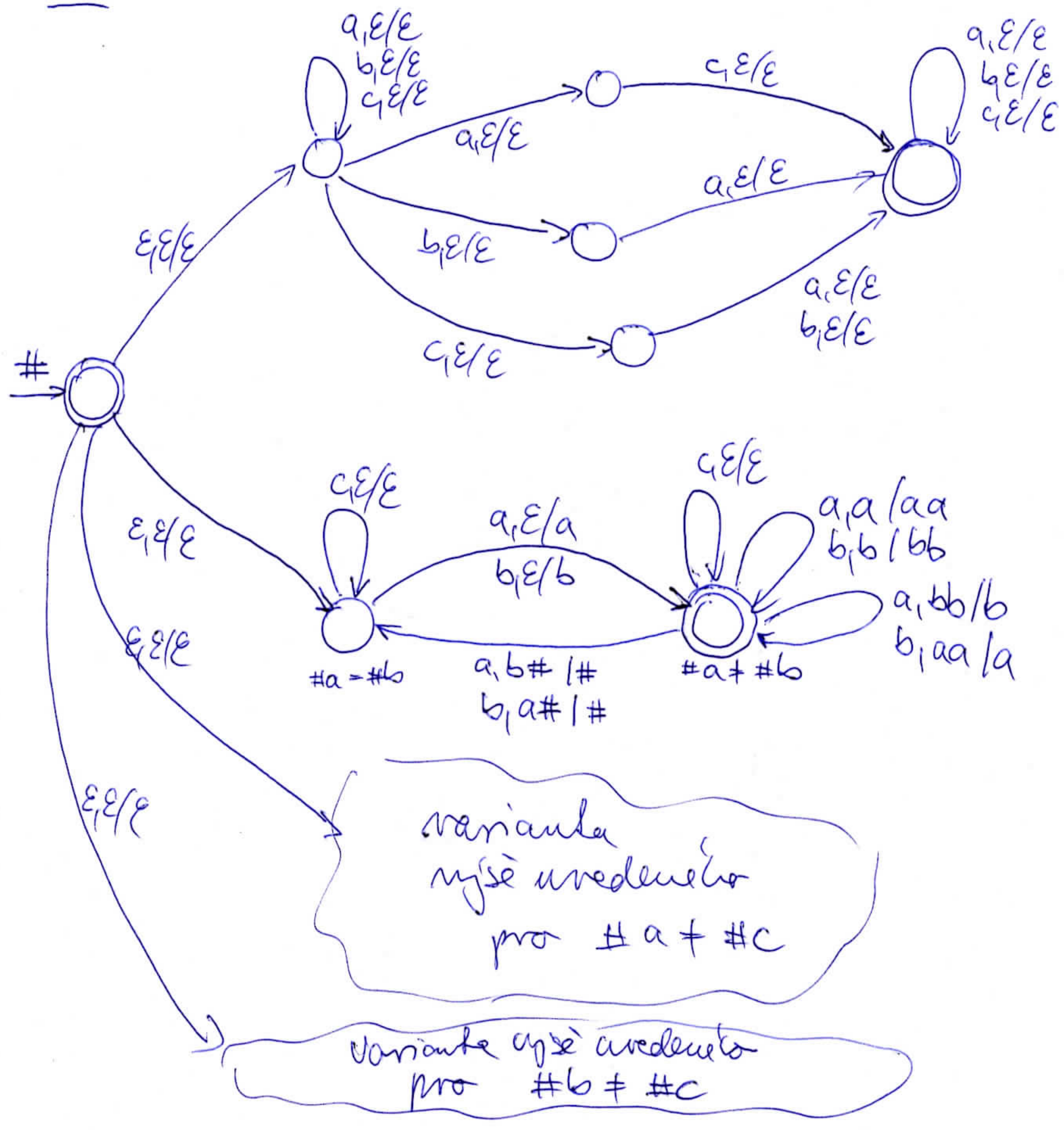
$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), \varepsilon, z) \iff$$
$$(q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, \varepsilon, z) \wedge q_1^2 = q_2^2.$$

5. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$

6. $z_0 = z_0^1$

7. $F = F_1 \times F_2$.

- Sestavte NZZA přijímající jazyk $\overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}$ pro $\Sigma = \{a,b,c\}$



kontrola porušení pořadí symbolů a, b, c

kontrola porušení stejného počtu symbolů a a b.

Deterministické zás. automaty

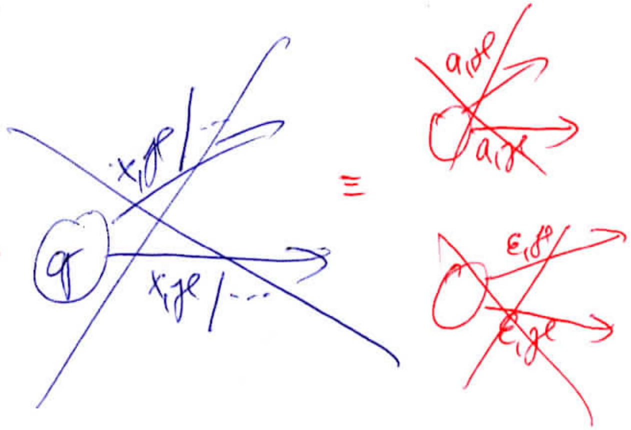
- NZA: $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$
- DZA: $\forall q \in Q\ \forall a \in \Sigma\ \forall z \in \Gamma:$

$$\big(|\delta(q,a,z)| \le 1 \ \wedge\ \delta(q,\varepsilon,z) = \emptyset\big)$$
$$\vee\ \big(\delta(q,a,z) = \emptyset \ \wedge\ |\delta(q,\varepsilon,z)| \le 1\big)$$

- RNZA: $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

RDZA: $\big(\forall q \in Q\ \forall x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\ \forall \gamma \in \Gamma^*:$

$$|\delta(q,x,\gamma)| \le 1\big)\ \wedge$$

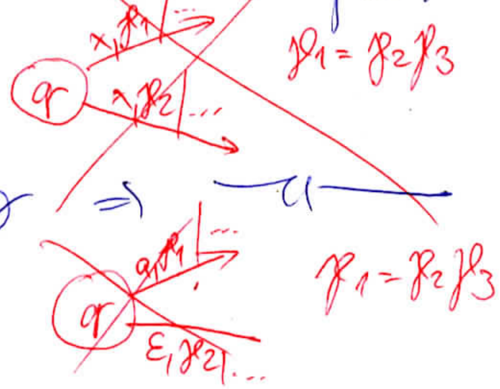


$\big(\forall q \in Q\ \forall x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*:$

$$\delta(q,x,\gamma_1) \neq \emptyset \wedge \delta(q,x,\gamma_2) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_1 \text{ není prefix } \gamma_2 \text{ ani naopak.}\big)$$

$\wedge\ \big(\forall q \in Q\ \forall a \in \Sigma\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$

$$\delta(q,a,\gamma_1) \neq \emptyset \wedge \delta(q,\varepsilon,\gamma_2) \neq \emptyset \Rightarrow \text{—"—}\big)$$



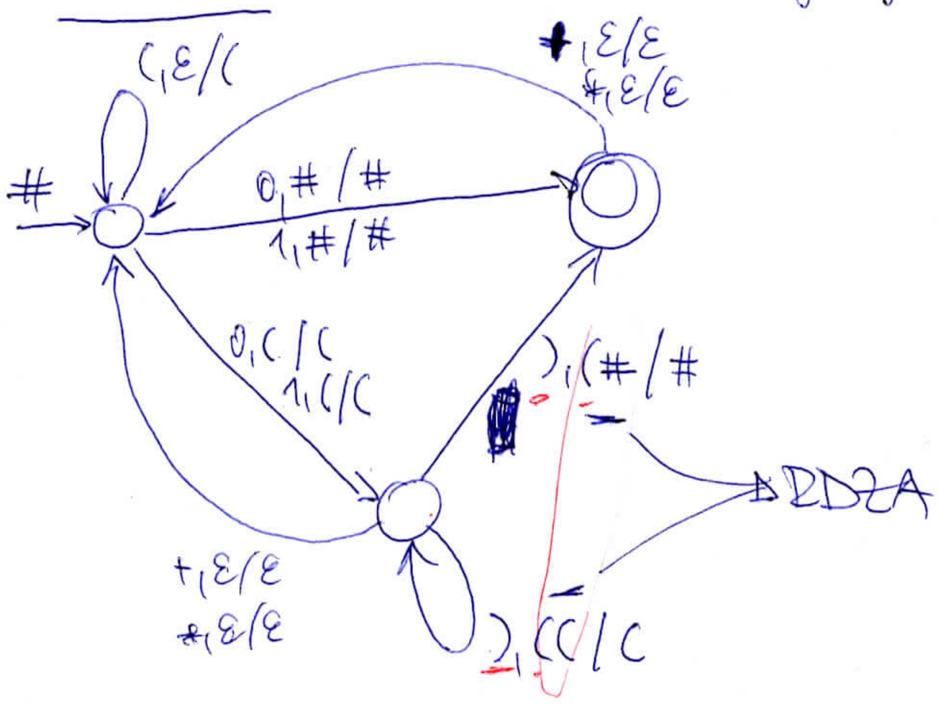
– Mějme gramatiku s pravidly $E \to E+T \mid T$

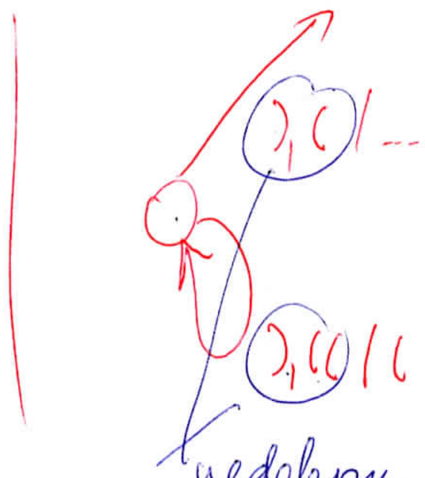
$T \to T*F \mid F$

$F \to 0 \mid 1 \mid (E)$,

kde E je startovací symbol.

Sestavte (R)DZA přijímající jazyk této gramatiky.

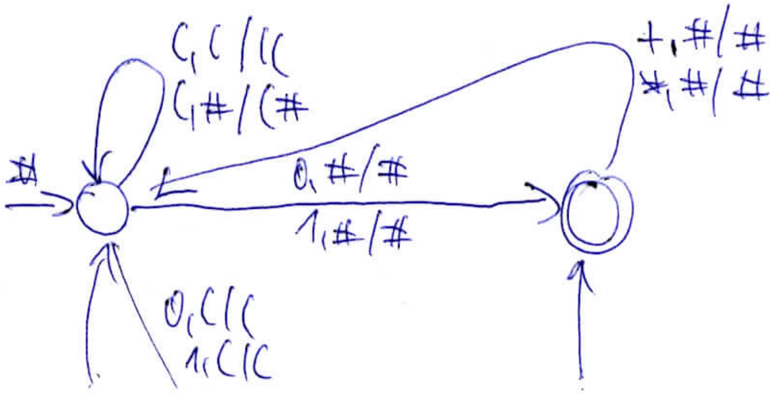


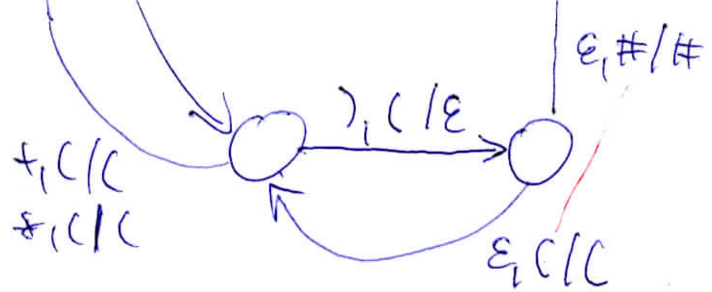


nedeterm.

(navíc špatně pro daný příklad)

DZA:





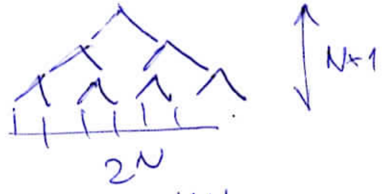
Pumping lemma pro $\mathcal{L}_2$

CNF
$A \to BC$
$A \to a$

$\forall \Sigma\ \forall L \subseteq \Sigma^*: L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists k>0\ \forall z \in L: |z| \geq k \Rightarrow$

$\exists u,v,w,x,y \in \Sigma^*: z = u\underline{v}w\underline{x}y \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$

$\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L.$



$k = 2^{|N|}$

- Dokažte, že $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$.

Důkaz sporem:

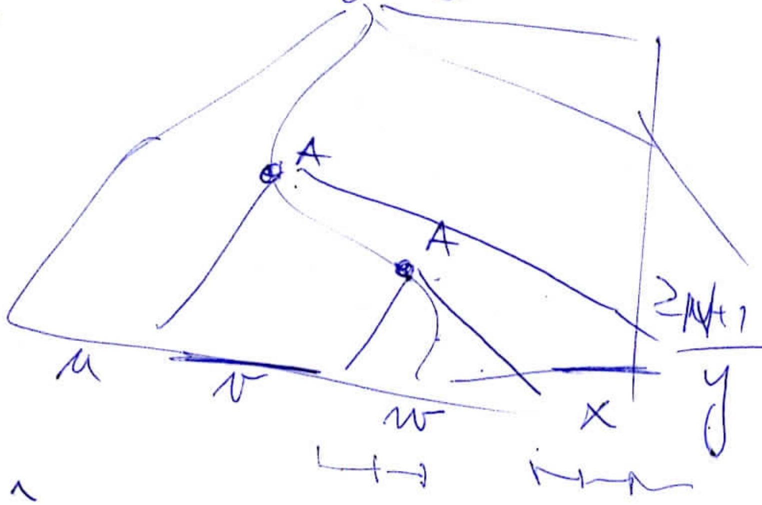
- předp., že $L \in \mathcal{L}_2$
- Pak dle P.L.

  $\exists k>0\ \forall z \in L: |z| \geq k \Rightarrow$

  $\exists u,v,w,x,y \in \Sigma^*: z = uvwxy \wedge$

  $vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$

  $\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$



- Uvažme libovolné $k>0$, pro které platí výše uvedené.

- Uvažme $z = a^{k^2} \in L$, $|a^{k^2}| = k^2 \geq k$ a tedy
$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*$: $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$
$\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.

- Uvažme libovolné $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ takové, že
$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$
- Uvažme $i = 2$ a zkoumejme řetězec $uv^2wx^2y \in L$:
$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| =$
$= k^2 + |vx|$

přitom víme, že: (a) $vx \neq \varepsilon$, tedy $|vx| > 0$
(b) $|vwx| \leq k$, tedy $|vx| \leq k$.

Tedy: $k^2 < |uv^2wx^2y| \leq k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ a $k > 0$.

Tedy $k^2 < |uv^2wx^2y| < (k+1)^2$ a
současně ale $uv^2wx^2y \in L$ a tedy $|uv^2wx^2y| = l^2$ pro $l \geq 1$.

To je spor neboť mezi k a $k+1$ není žádné další přirozené číslo l! (Neexistuje $k < l < k+1$ pro $k, l \in \mathbb{N}$) $\square$

O každé z následujících implikací rozhodněte, zda platí:

a) $(\forall L_1, L_2:)$ $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$

PLATÍ: budou-li L_1 a L_2 reprezentovány bezk. gr. se startovacími symboly S_1 a S_2, stačí tyto gramatiky "sjednotit" a dodat $S \to S_1 | S_2$ pravidlo, nový neterminál S.

b) $L_1 \in \mathcal{L}_2 \wedge L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$

NEPLATÍ: postačí zvolit $L_1 = \{a^n b^n c^m | \dots$
$L_2 = \{a^m b^n c^n | \dots \}$

c) $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

NEPLATÍ: $L_2 = \overline{\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}} \in \mathcal{L}_2$
$L_1 = \{a, b, c\}^*$, pak
$\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_2} = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$

d) $L_1 \in Fin \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{(L_1 \cap L_2)} \in \mathcal{L}_2$

PLATÍ: $L_1 \cap L_2 \in Fin \subseteq \mathcal{L}_3$