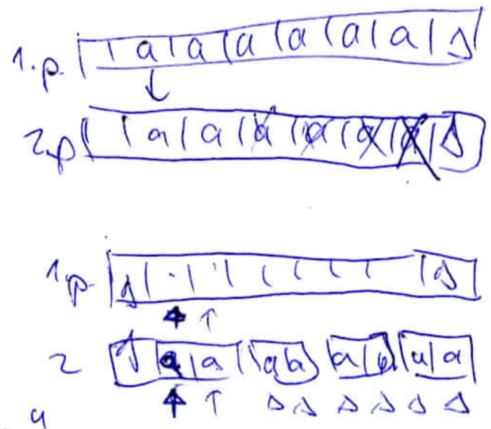
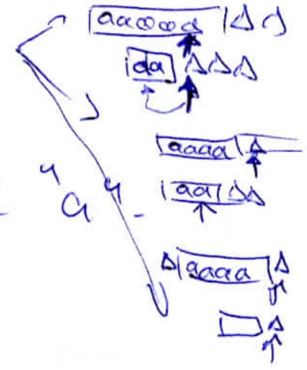
– Sestavte TS (lze užít vícepáskový) takový, že jeho jazyk je $\{ a^p \mid p \text{ je prvočíslo} \}$. Popište princip činnosti uvedeného TS

Uvedený TS může pracovat následovně:



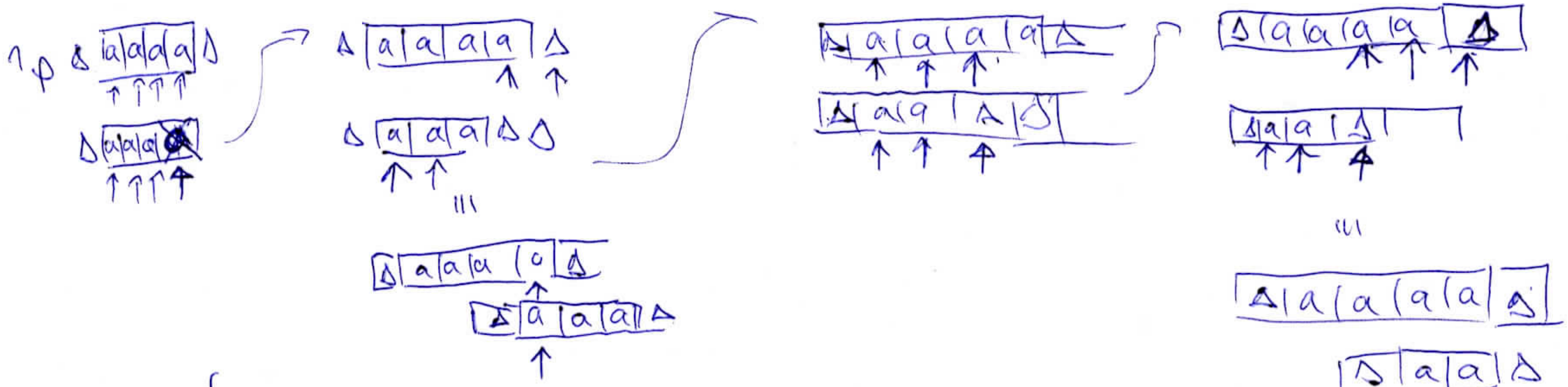
1. TS ověří, zda na vstupní pásce není žádné „a", nebo, zda tam je právě jedno „a". Pokud některý z těchto případů nastane, odmítne.
2. Nakopíruji obsah 1. pásky na pásku 2.
3. TS ověří, zda na 2. pásce jsou 2 symboly „a". Pokud ano, přijme.
4. Umaže na 2. pásce jeden symbol „a" a posune čtecí hlavy na obou páskách na nejlevější symbol „a".



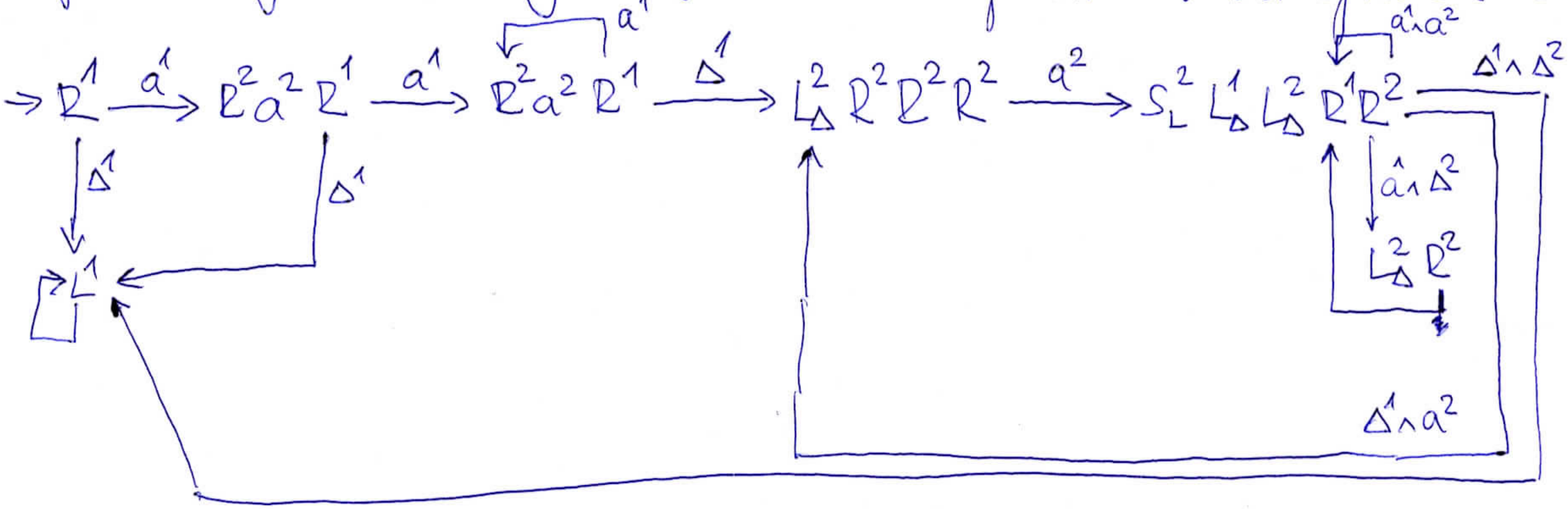
5. Synchronizovaně posouvá hlavy na obou páskách, dokud na obou páskách čte symboly „a"
6. Je-li na 2. pásce pod čtecí hlavou „Δ" zatímco na 1. pásce je čten symbol „a", přejde na nejlevější symbol „a" na 2. pásce a pokračuje bodem 5.

7. Je-li na 1. pásce čten symbol "Δ" a na 2. pásce symbol "a", pak přejde na bod 3.

8. Jinak (čte na obou páskách "Δ") a odmítne.



- Zapište výše uvedený TS formou kompozitního diagramu.

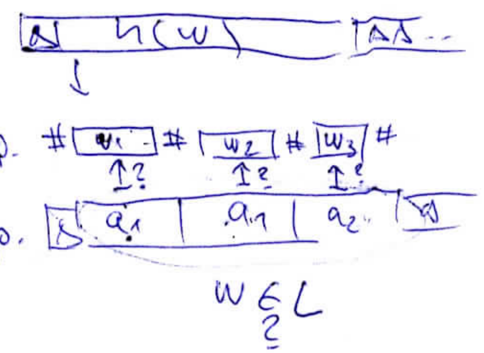


- Ukažte, že třída $\mathcal{L}_0$ je uzavřena vůči morfismu.

Důkaz (idea):

- Buď dán r.v. jazyk $L \subseteq \Sigma_1^*$ a morfismus $h: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$.
- Protože $L \in \mathcal{L}_0$, existuje TS M takový, že $L = L(M)$.
- Vzhledem k tomu, že h je morfismus, stačí k jeho zakódování f-ce $h_0 : \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$ taková, že $\forall a \in \Sigma_1 : h_0(\Sigma_1) = h(\Sigma_1)$.
- Přitom h_0 je konečná f-ce, tedy vlastně konečná mn-a, kterou si lze pamatovat jako součást řídicích stavů TS.
- TS, který přijímá $h(L)$, lze sestavit jako NTS M' pracující následovně:
  1. M' nedeterministicky rozdělí vložením vhodného symbolu $\# \notin \Sigma_2 \cup \Delta$ svůj vstupní řetězec w na $n \geq 0$ podřetězců w_i, $1 \leq i \leq n$, tak, že $w = w_1 \ldots w_n$

- $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ takové, že $\forall a_1 \ldots a_n \in \Sigma_1^*$: $h(a_1 \ldots a_n) = h(a_1) \cdots h(a_n)$. Speciálně: $h(\varepsilon) = \varepsilon$
- pro $L \subseteq \Sigma_1^*$: $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$

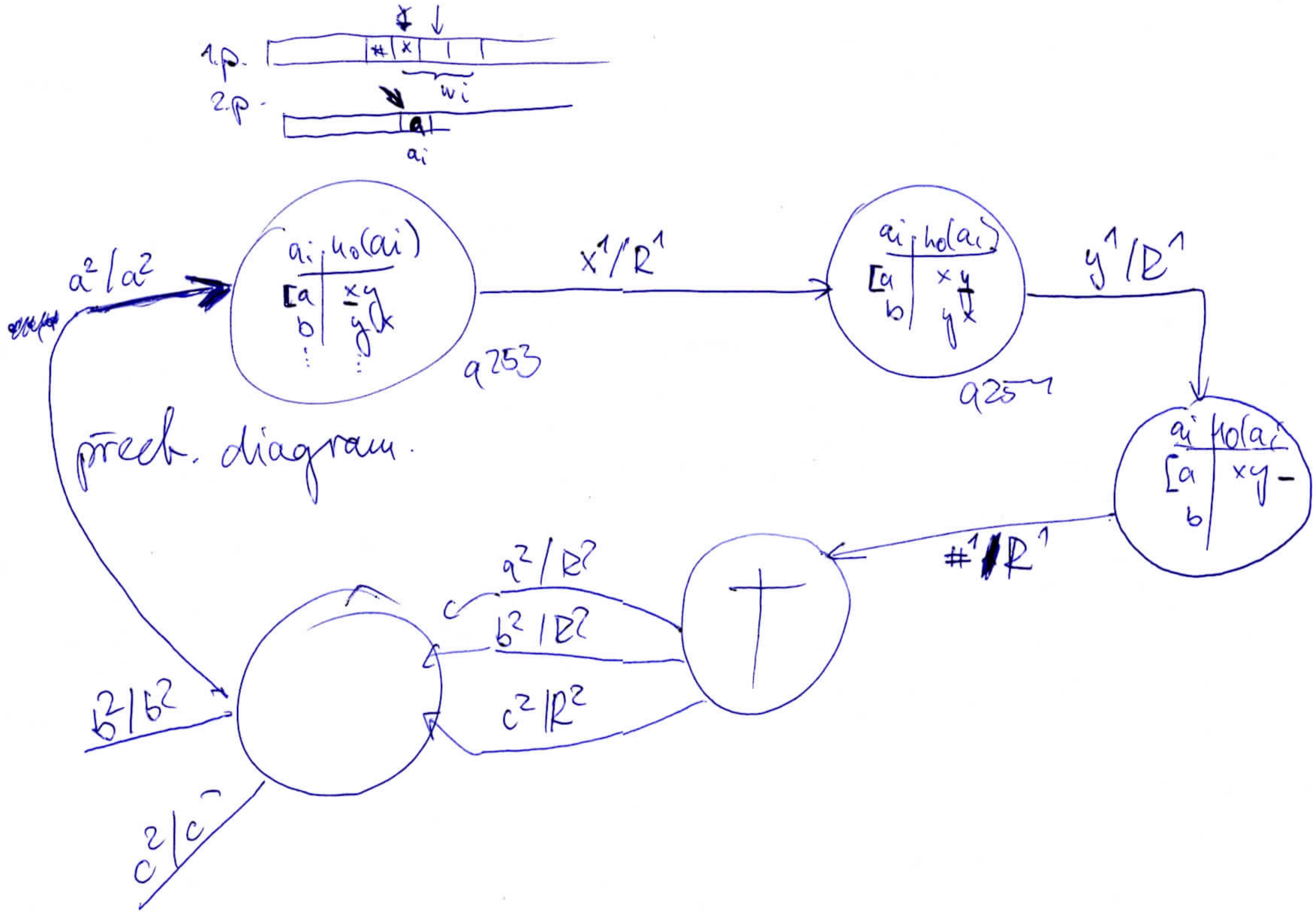


(pro $n=0$ máme, že $w=\varepsilon$). Každý z podřetězců w_i může přitom být také prázdný.

2. Zapíše na 2. pásku sekvenci n náhodně zvolených symbolů $a_i \in \Sigma_1$ ($1 \leq i \leq n$).

3. Projde 2. pásku zleva doprava a ověří, že pro každý symbol a_i ($1 \leq i \leq n$) má na 1. pásce podřetězec $w_i = h_0(a_i)$. Pokud ne, odmítne. Toto lze snadno zrealizovat, neboť h_0 je součástí řídicích stavů M'. Stačí tedy projít odpovídající podřetězec zleva doprava a ověřit, že se opravdu jedná o $h_0(a_i)$.

4. M' odsimuluje na 2. pásce TS M. Pokud M přijme, pak M' také přijme, jinak odmítne (nebo cyklí). □



1.p.
2.p.
wi
ai
a²/a²
ai | h₀(ai)
a | xy
b | y/x
q253
x¹/R¹
ai | h₀(ai)
a | xy
b | yx
q254
y¹/R¹
ai | h₀(ai)
a | xy
b
#¹/R¹
a²/R²
b²/R²
c²/R²
b²/b²
c²/c²
preck. diagram.

- Je-li R regulární jazyk a L jazyk rek. vyč., je $R \cap L$ regulární? Dokažte/vyvraťte!

NENÍ, důkaz:

- Víme, že $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_0$.
- Zvolme tedy $L \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$ — takový jazyk nutně existuje.
- L je jazyk a tedy existuje nějaká Σ taková, že $L \subseteq \Sigma^\#$.
- Zvolme $R = \Sigma^\# \in \mathcal{L}_3$.
- Ale $L \cap R = L \cap \Sigma^\# = L \notin \mathcal{L}_3$. $\square$

- Je-li $R \in \mathcal{L}_3$ a $L \in \mathcal{L}_0$, je $R \cup L \in \mathcal{L}_3$? Dokažte/vyvraťte.

NENÍ, důkaz: Analogicky k výše uvedenému s tím, že zvolíme $R = \emptyset$. $\square$

(NE)ROZHODNUTELNOST

- Dokažte, že pro libovolný TS M lze rozhodnout, zda M má definované přechody z alespoň 2016 řídicích stavů.

Důkaz (idea):

- Využijeme toho, že každý TS lze zakódovat jako sekvenci 0 a 1, kterou umí interpretovat UTS.
- Tento kód má charakter sekvence

$$1\langle t_1\rangle 1\langle t_2\rangle 1 \ldots 1\langle t_n\rangle 1,$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou přechody daného TS a $\langle t_i\rangle$ pro $1 \le i \le n$ je jejich kód.

Přitom každý přechod t: $q_1 \xrightarrow{x/y} q_2$, kde $q_1, q_2 \in Q$, $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma \cup \{L, R\}$, je zakódován jako sekvence $\langle q_1\rangle 1\langle x\rangle 1\langle y\rangle 1\langle q_2\rangle$.

Zde $\langle q_1\rangle, \langle q_2\rangle, \langle x\rangle, \langle y\rangle \in 0^*$ jsou kódy stavů, symbolů a příkazů L/R ($\langle q_0\rangle = \varepsilon$, $\langle q_F\rangle = 0$, $\langle \Delta\rangle = \varepsilon$, $\langle L\rangle = 0$, $\langle R\rangle = 00$).

- TS M', který bude rozhodovat uvedený problém může pracovat následovně za předpokladu, že vstupní instance budou kódovány (bez ztráty na obecnosti) výše uvedeným způsobem:
  1. M' ověří, že na vstupu má platný kód TS M. To je snadné, odpovídá to členství v reg. jazyce. Pokud NE, odmítne.
  2. M' postupně projde vstupní pásku a v kódu každého přechodu se zaměří na kód výchozího stavu. Pro každý takový kód projde 2. pásku a ověří si, zda tam ještě není zapsán (mezi vhodnými oddělovači). Pokud není, na 2. pásku tento kód zapíše.
  3. Projde znovu 2. pásku a pokud na ní najde 2016 kódů přijme, jinak odmítne. $\square$

- Dokažte, že pro daný TS M je rozhodnutelné, zda existuje slovo $w \in \Sigma^*$, nad kterým M provede alespoň 2016 kroků.

—

Důkaz (idea):

- Lze vzít TS M', který na své pásce postupně systematicky generuje všechna slova ze Σ^* do délky 2015. Na každém z nich odsimuluje max. 2016 kroků TS M. Pokud M provede na některém z těchto slov 2016 kroků, M' přijme, jinak odmítne.
- Tato konstrukce je korektní, protože pokud M na žádném ze slov délky 2015 neprovede alespoň 2016 kroků, nemá smysl uvažovat slova delší. Tato slova by M stejně nedočetl do konce – jejich symboly od pozice 2016 dále budou zcela jistě ignorovány. □

$\Sigma = \{0,1\}$

- Dokažte, že problém neprázdnosti jazyka daného TS je nerozhodnutelný, ale je částečně rozhodnutelný.

1. Ukážeme, že problém neprázdnosti je částečně rozhodnutelný.

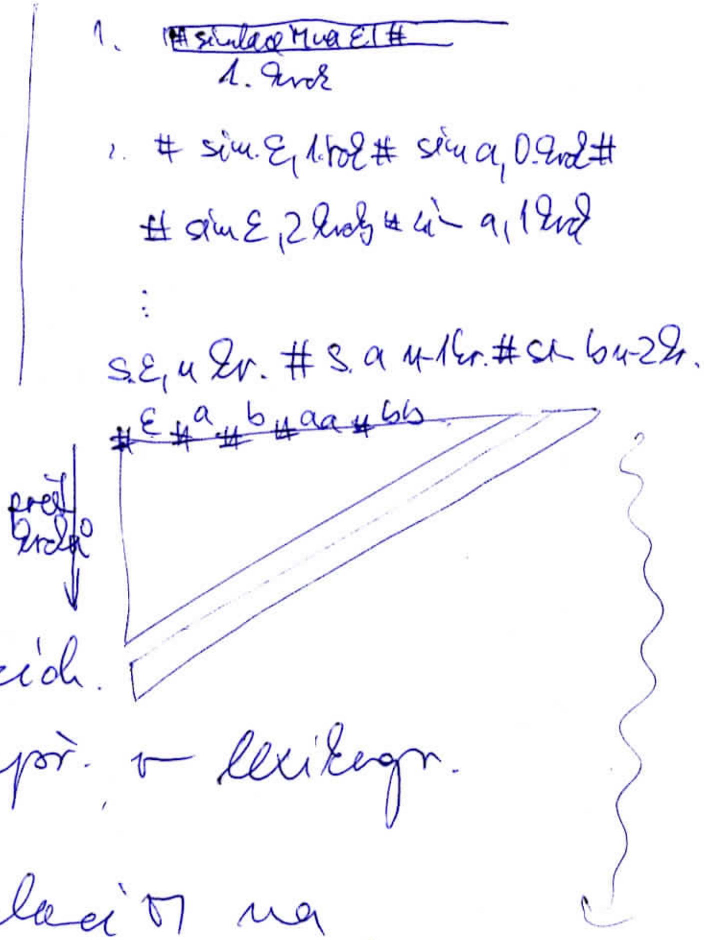
- Můžeme sestrojit TS M', který uvedený problém částečně rozhoduje.

Např. pro TS M nad $\Sigma = \{a,b\}$:

– M' bude postupovat následovně:

1. M' ověří, zda má na vstupu platný kód TS M. Pokud ne, odmítne. Toto ověření odpovídá vzhledem na běžné kódování TS do řetězců 0 a 1 testu členství v reg. jazyce.

2. – TS M' bude na své druhé pásce postupně simulovat běh M na delších a delších vstupních řetězcích. Vstupní řetězce bude generovat např. v lexikogr. uspořádání.



– M' nemůže rozjet neomezenou simulaci M na žádném vstupním řetězci – hrozí zacyklení.

– M' ale může mít na své pásce rozběhnutý libovolný počet simulací pro libovolné vstupní řetězce.

– M' pak tedy postupuje tak, že na každé rozběhnuté simulaci udělá 1 krok. Pokud některá z těchto simulací přijme, pak také přijme. Jinak přidá na svou pásku nově rozběhnutou simulaci pro další řetězec v pořadí a svůj postup opakuje

2. Ukážeme nerozhodnutelnost neprázdnosti redukcí z HP.