Konečné automaty

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

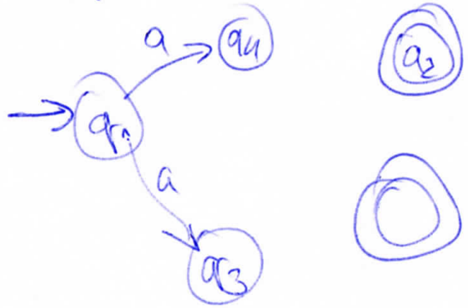
  $q_0 \in Q$ $\quad F \subseteq Q$

  $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

DKA : $\forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma : |\delta(q,a)| \le 1$, pak $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

NKA : $\exists q \in Q \; \exists a \in \Sigma : |\delta(q,a)| > 1$

- konfigurace $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
- $\vdash_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$
- $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q_f \in F : (q_0, w) \vdash_M^* (q_f, \varepsilon) \}$
- KA - diagram



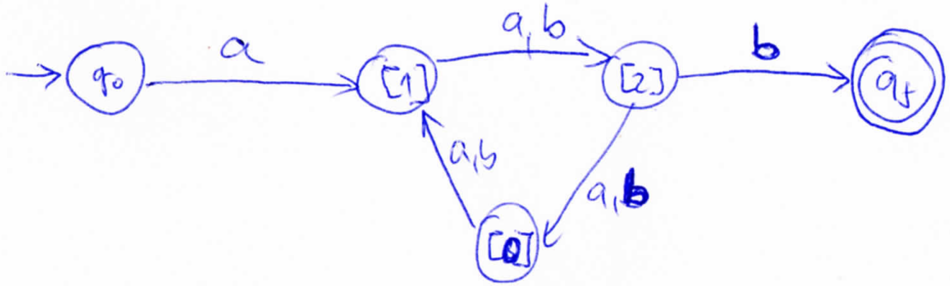
tabulka

	a	b	...
$\rightarrow q_1$	$\{q_3, q_4\}$		
q_2			
$\vdots$			

- Sestavte KA, který přijímá jazyk

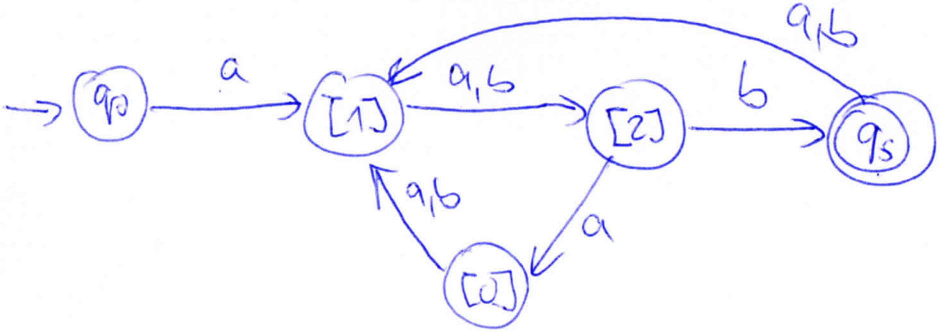
  $L = \{ awb \in \{a,b\}^* \mid |awb| = 3k, k \ge 0 \}$.

NKA



$L = \{ w' \in \{a,b\}^* \mid \exists w'' \in \{a,b\}^* \; w' = a w'' b \wedge \dots$

DKA



Zapište výše uvedený jazyk pomocí RV:

$$a(a+b)\big((a+b)(a+b)(a+b)\big)^* b$$

- Na základě přechodové f-ce definujte predikát nad stavy KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, který rozhoduje, zda lze z daného stavu přijmout řetězce $w \in aaa^*$

1. Zavedeme relaci $\xrightarrow{a} \subseteq Q \times Q$ přímé dosažitelnosti stavů přes symbol "a" definovanou takto:

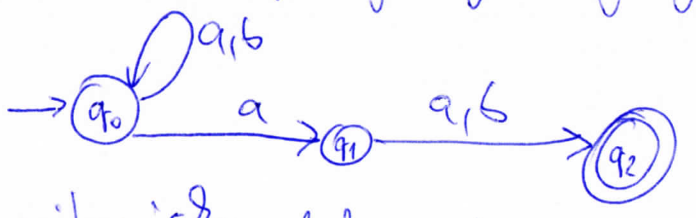
$$\forall q_1, q_2 \in Q: q_1 \xrightarrow{a} q_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} q_2 \in \delta(q_1, a)$$

2. Definujme predikát $p(x)$ tak, že

$$\forall q \in Q : p(q) \iff \exists q_1 \in Q \; \exists q_2 \in F : \quad q \xrightarrow{a} q_1 \land q_1 \xrightarrow{a}{}^{+} q_2$$

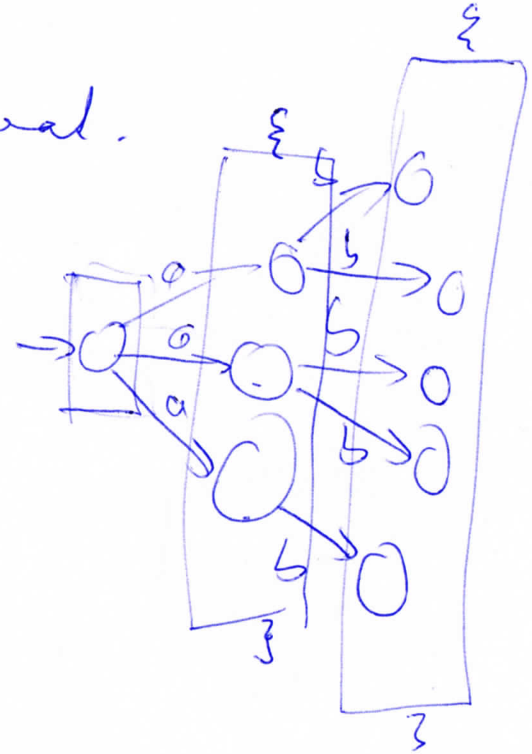
- Sestavte KA přijímající jazyk $L = \{a,b\}^+ \{a\} \{a,b\} = (a+b)^* a (a+b)$

NKA



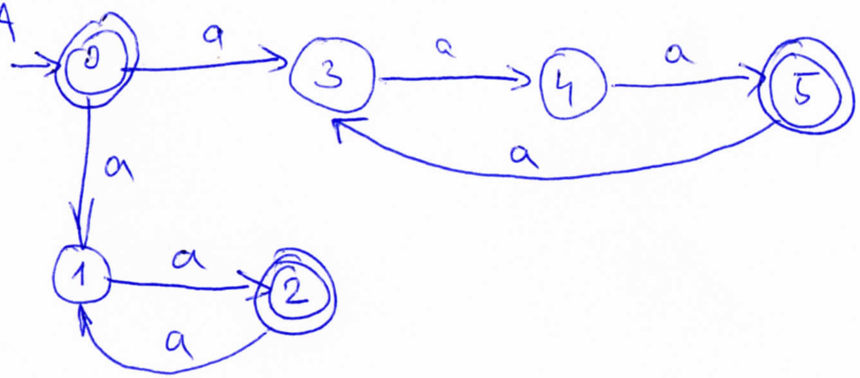
- Algoritmicky determinizujte výše uvedený automat.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$[\![\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$[\![\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$



- Sestavte KA přijímající jazyk $L = \{a^n \mid n$ je dělitelné 2 nebo 3$\}$. Vyjádřete také RV. Je-li KA nedeterministický, převeďte algoritmicky na DKA

- NKA

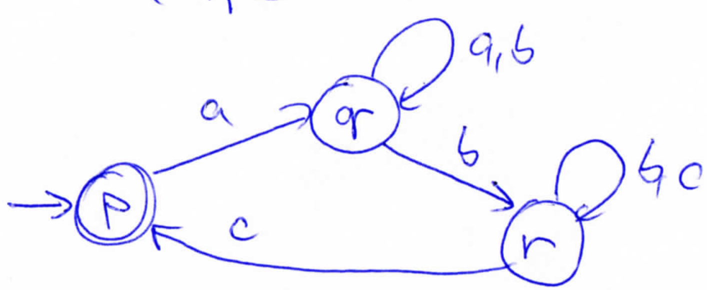


- RV: $(aa)^* + (aaa)^*$

- DKA

	a
→ [{0}	{1,3}
{1,3}	{2,4}
[{2,4}	{1,5}
[{1,5}	{2,3}
[{2,3}	{1,4}
{1,4}	{2,5}
[{2,5}	{1,3}

- Majme KA M:



Preveďte algoritmicky na gramatiku G typu 3 takovú, že $L(M) = L(G)$.

$$P: \quad p \to aq \mid \varepsilon$$
$$q \to aq \mid bq \mid br$$
$$r \to br \mid cr \mid cp$$

$$G = (\{p, q, r\}, \{a, b, c\}, P, p)$$

- Zapište odpovídající sekvence konfigurací / větných forem pro přijetí / vygenerování řetězce abc:

$$M: \quad (p, \underline{a}bc) \vdash (q, bc) \vdash (r, c) \vdash \underline{(p, \varepsilon)}$$

$$G: \quad p \Rightarrow \underline{a}q \Rightarrow abr \Rightarrow abcp \Rightarrow \underline{abc}$$

- Mějme gramatiku $G = (\{A, B\}, \{a, b, c\}, P, A)$, kde

$$P: \quad A \to \underline{a}\underbrace{bB}_{A_1} \mid b\underbrace{cA}_{A_2},$$
$$B \to bB \mid a\,b\,b \qquad B_1,\ B_2,\ B_3$$

Převeďte tuto gramatiku algoritmicky na KA.

---

1. Upravíme G na G' s pravidly typu $A \to aB \mid \varepsilon$:

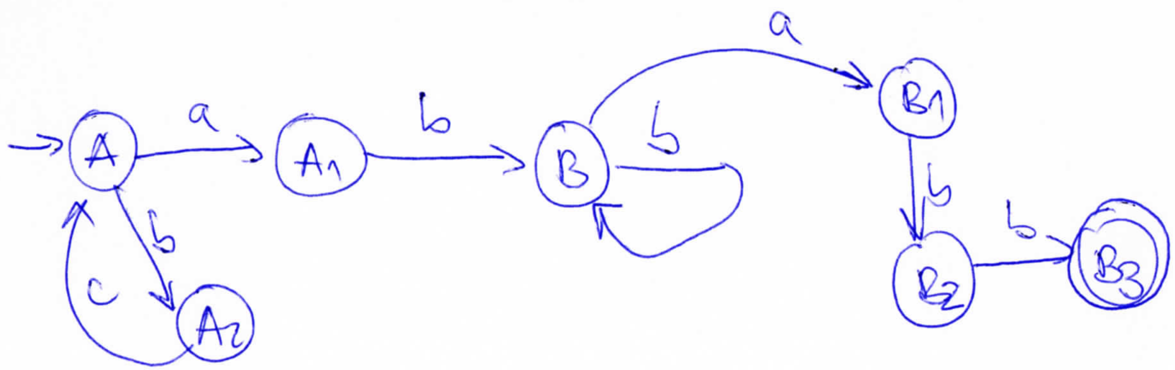
$$P': \quad A \to \underline{a}A_1 \mid bA_2$$

$A_1 \to bB \quad A_2 \to cA$

$B \to bB \mid aB_1$

$B_1 \to bB_2 \quad B_2 \to bB_3 \quad B_3 \to \varepsilon$

2. převedeme na KA M:



Bezkontextové gramatiky a ZA

- Zkonstruujte bezk. gr., která generuje aritmetické výrazy nad proměnnými i, j, k, konstantami 0, 1, operátory +, * s obvyklými prioritami a závorkami:

P: $E \to T+E \mid T$

$T \to F*T \mid F$

$F \to (E) \mid i \mid j \mid k \mid 0 \mid 1$

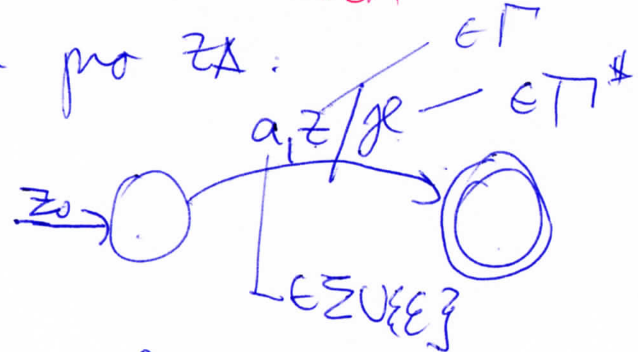
$G = (\{E,T,F\}, \{*,+,(,), i,j,k,0,1\}, P, E)$

- ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$, $q_0 \in Q$, $z_0 \in \Gamma$, $F \subseteq Q$

NZA: $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{*} \longrightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

RNZA

- přechodový diagram pro ZA:



- sestavte (a) bezk. gramatiku a (b) RNZA přijímající jazyk $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \}$.

ad a) P: $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

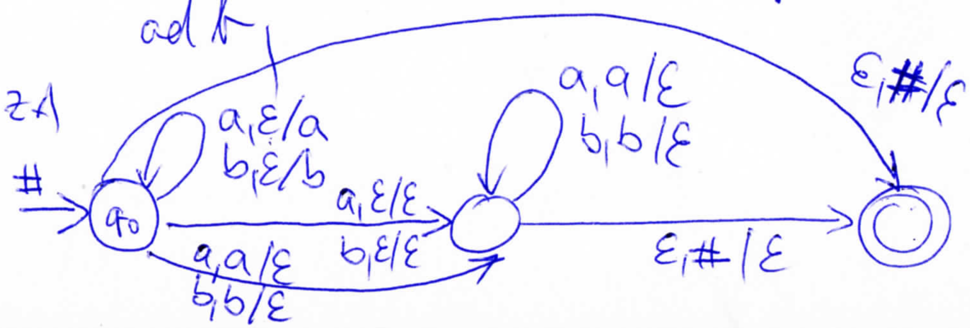
$G = (\{S\}, \{a,b\}, P, S)$

příklad derivace:

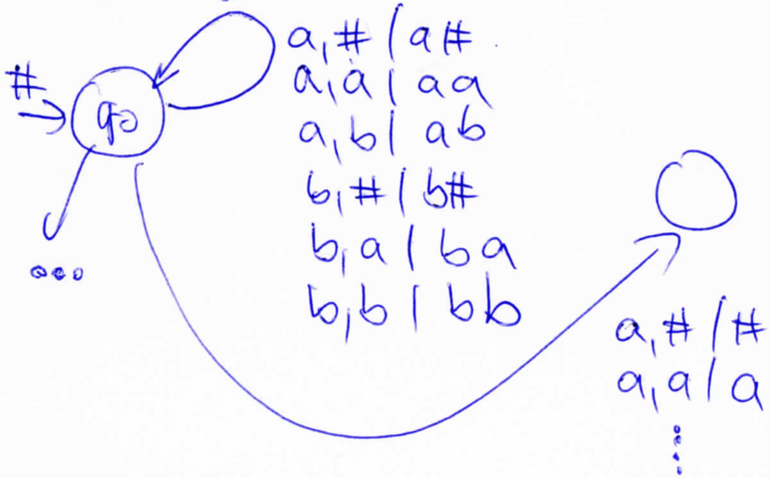
$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow$
$\Rightarrow aabSbaa \Rightarrow$
$\Rightarrow aababaa$

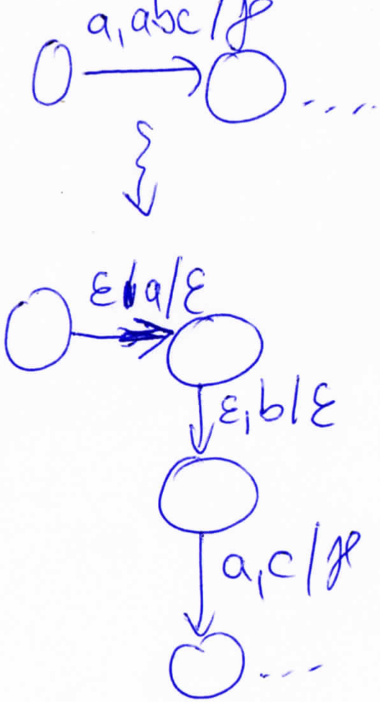
ad b)

RNZA



Jak by vypadala úprava na NZA?

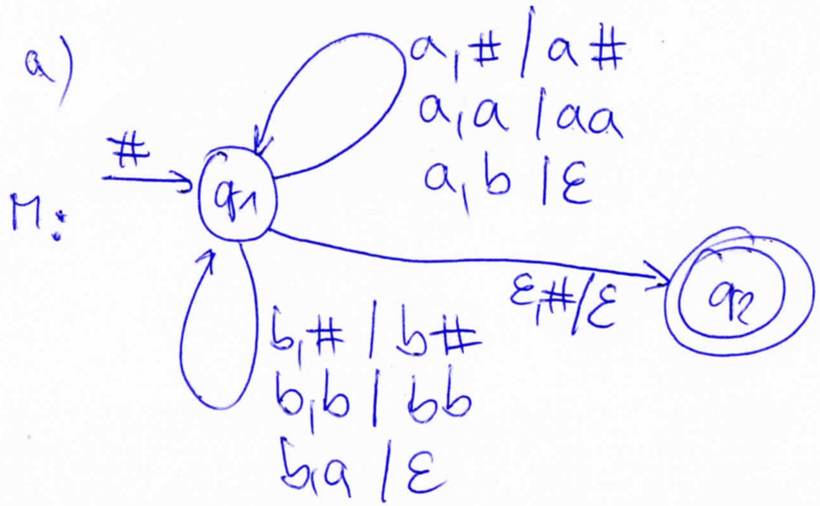




- Sestavte NZA přijímající jazyk $\{ w \in \{a,b\}^+ \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$.

<u>zapište diagramem</u> i množinově.

a)



$(q_1, \underline{a}ababb, \#) \vdash$
$(q_1, ababb, a\#) \vdash$
$(q_1, babb, aa\#) \vdash$
$(q_1, abb, a\#) \vdash$
$(q_1, bb, aa\#) \vdash$
$(q_1, b, a\#) \vdash$
$(q_1, \varepsilon, \#) \vdash$
$(q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

b) $M = (\{q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_1, \#, \{q_2\})$

$\quad\quad\quad Q \quad\quad \Sigma \quad\quad \Gamma \quad\quad$ pře. stav. $\quad z_0 \quad F$

δ: $\delta(q_1, a, \#) = \{(q_1, a\#)\}$ $\quad \delta(q_1, b, \#) = \{(q_1, b\#)\}$

$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, aa)\}$ $\quad \delta(q_1, b, b) = \{(q_1, bb)\}$

$\delta(q_1, a, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\quad \delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, \#) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

Ukázka důkazových technik

- Určete, zda platí následující tvrzení. Dokažte, nebo vyvraťte:

$\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

Neplatí. Např. $\Sigma = \{a, b\}$

$L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{ab\}$, přitom

$\{a\} \not\subseteq \{ab\}$.

- Uvažme tvrzení

$\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Leftrightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2$.

<u>Důkaz</u>.

„$\Leftarrow$"

Postačí ukázat, že $L_1 = \emptyset$ i $\varepsilon \in L_2$ implikují $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

a) - Předpokládejme, že $L_1 = \emptyset$.
- V tomto případě $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$ jistě platí, protože $\emptyset$ je nejmenší množinou vůči $\subseteq$.

b) - Předpokládejme, že $\varepsilon \in L_2$. Ukážeme, že pak $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.
- K tomu postačí ukázat, že $\forall w \in L_1 : w \in L_1 \cdot L_2$.
- Uvažme libovolné $w \in L_1$.
- Z předpokladu víme, že $\varepsilon \in L_2$.
- Z definice konkatenace <u>jazyků</u> $w \cdot \varepsilon \in L_1 L_2$
- Z definice konkatenace řetězců $w \cdot \varepsilon = w$.
- Tudíž $w \in L_1 \cdot L_2$.

"$\Rightarrow$" Důkaz sporem.

předpokládáme, že platí:

$\neg(\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. ab. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2)$

$\Leftrightarrow \quad \exists \Sigma : \Sigma$ je kon. ab. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \neg(L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2)$

$\Leftrightarrow$ ——— " ——— $\neg(\neg L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \vee (L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2))$

$\Leftrightarrow$ ——— " ——— $\neg\neg L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge \neg($ — " — $)$

$\Leftrightarrow$ ——— " ——— $L_1 \subseteq L \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset \wedge \varepsilon \notin L_2$.

- Uvažme libovolné Σ, $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ takové, že $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$, $L_1 \neq \emptyset$ a $\varepsilon \notin L_2$.
- Vzhledem k tomu, že $L_1 \neq \emptyset$, můžeme z něj vybrat nějaký řetězec $w \in L_1$ a posoudit, zda je i v $L_1 \cdot L_2$.
- Zvolme za w libovolný z nejkratších řetězců v L_1. (Tedy volme ~~a~~ w tak, že $\neg \exists w' \in L_1 : |w'| < |w|$).
- Z předpokladu víme, že $w \in L_1 \cdot L_2$, protože $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.
- Z def. konkatenace jazyků víme, že $w = w_1 \cdot w_2$ tak, že $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$.
- Z toho, že $w_2 \neq \varepsilon$ $(\varepsilon \notin L_2)$, $|w_2| \geq 1$.

- z toho víme, že $|w_1| \le |w|-1$. Přitom $w_1 \in L_1$.
- Tedy w_1 je kratší než nejkratší řetězec z L_1. To je spor.

$\square$