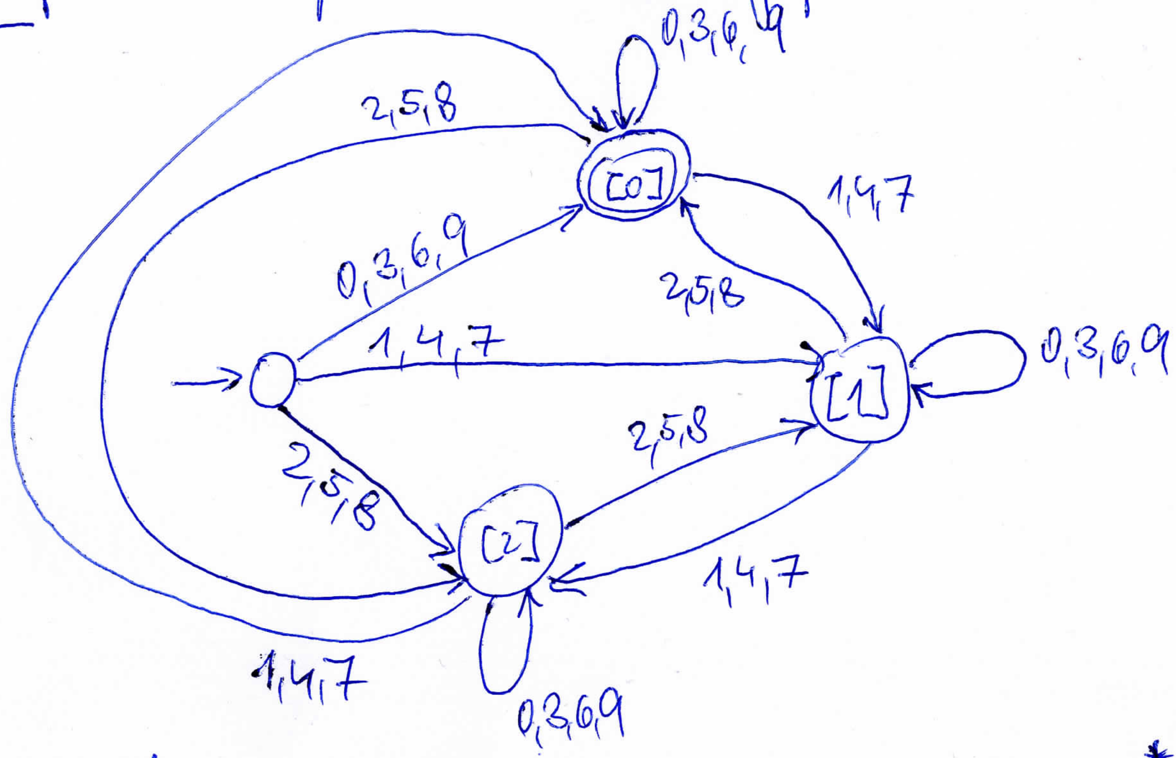
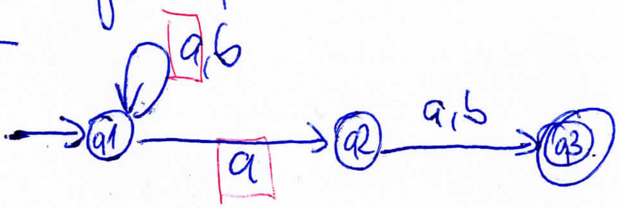
Sestrojte KA nad $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$, který přijímá jazyk všech zápisů přirozených čísel v des. soustavě dělitelných 3. Připouštíme přitom libovolný počet úvodních nul.



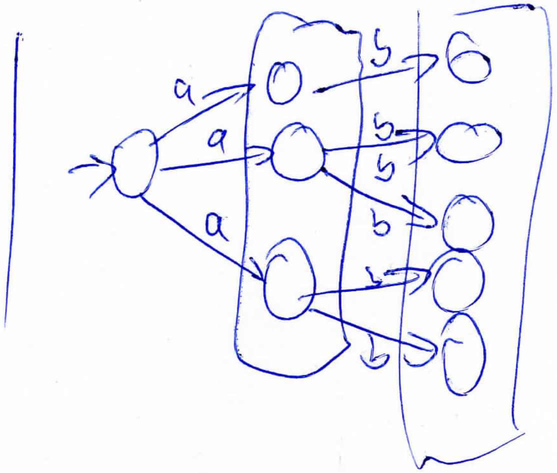
– Sestrojte KA přijímající jazyk $L = \{a,b\}^*\{a\}\{a,b\} \subseteq \{a,b\}^*$. Pokud je tento automat nedeterministický, zdeterminizujte ho alg. způsobem.

– 

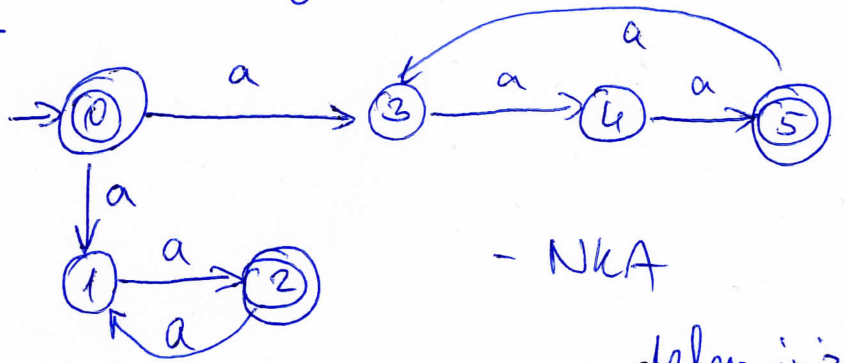
NKA

- determinizace

	a	b
→ $\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
[$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
[$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$



- Sestavte KA přijímající jazyk $L = \{ a^n \mid n$ je dělitelné 2 či 3 $\}$.
Je-li sestavený automat NKA, algoritmicky ho determinizujte.

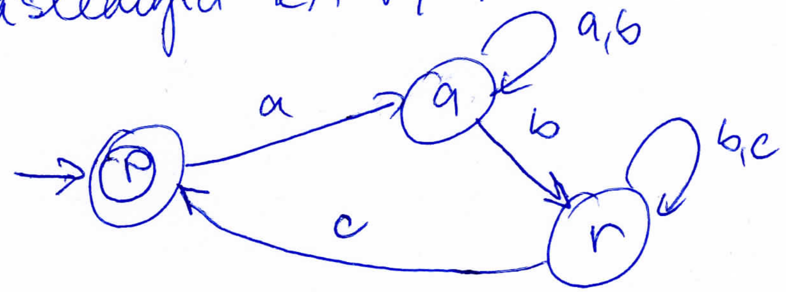


- NKA

determinizace:

	a
→ [$\{0\}$	$\{1, 3\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$
[$\{2, 4\}$	$\{1, 5\}$
[$\{1, 5\}$	$\{2, 3\}$
[$\{2, 3\}$	$\{1, 4\}$
$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$
[$\{2, 5\}$	$\{1, 3\}$

- Mějme následující KA M :



převeďte algoritmicky na gramatiku G typu 3 takovou, že L(G) = L(M).

P: $p \longrightarrow aq \mid \varepsilon$

$q \longrightarrow aq \mid bq \mid br$

$r \longrightarrow br \mid cr \mid cp$

$G = (\{p, q, r\}, \{a, b, c\}, P, p)$

⊕ dodejme odpovídající derivaci a posl. konfigurací pro stejný řetězec, např. abc,

M: $(p, abc) \vdash (q, bc) \vdash (r, c) \vdash (p, \varepsilon)$

G: $p \Rightarrow aq \Rightarrow abr \Rightarrow abcp \Rightarrow abc$

- Budiž dána gramatika $G = (\{A, B\}, \{a, b, c\}, P, A)$, kde

P: $A \rightarrow abB \mid bcA$

$B \rightarrow bB \mid abb$.

převeďte tuto gramatiku typu 3 algoritmicky na KA.

1) Upravíme pravidla do podoby $A \rightarrow aB \mid \varepsilon$

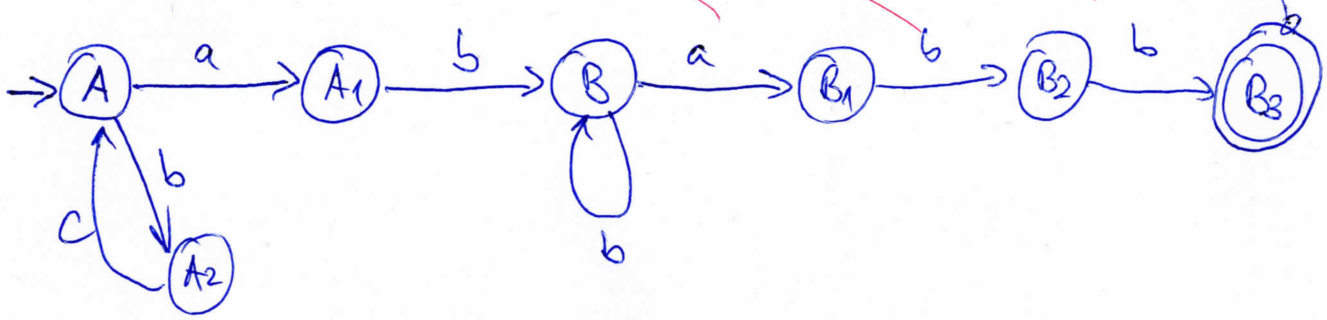
$A \rightarrow aA_1 \mid bA_2$

$A_1 \rightarrow bB \quad A_2 \rightarrow cA$

$B \rightarrow bB \mid aB_1$

$B_1 \rightarrow bB_2 \quad B_2 \rightarrow bB_3 \quad B_3 \rightarrow \varepsilon$

2) převedeme na KA



- Zkonstruujte bezkontextovou gramatiku, která generuje aritmetické výrazy nad proměnnými i, j, k, konstantami 0, 1, operátory +, * s obvyklou prioritou a závorkami.

$$
\begin{aligned}
P: \quad E &\to T+E \mid T \\
T &\to F*T \mid F \\
F &\to (E) \mid i \mid j \mid k \mid 0 \mid 1
\end{aligned}
$$

$$G = (\{E, T, F\}, \{+, *, (,), i, j, k, 0, 1\}, P, E)$$

- Vytvořte gramatiku, která generuje jazyk $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 0\}$.

$$P: \quad S \to aaaSbb \mid \varepsilon$$

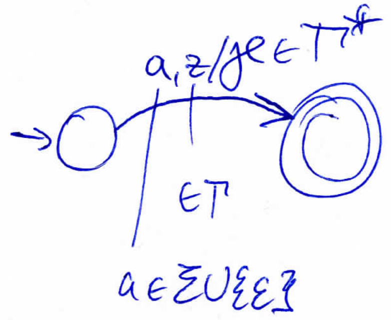
$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

- <u>Zásobníkové automaty</u>

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \underset{q_0 \in Q}{q_0}, \underset{z_0 \in \Gamma}{z_0}, \underset{F \subseteq Q}{F})$$

NZA: $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{(*)} \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

RNZA



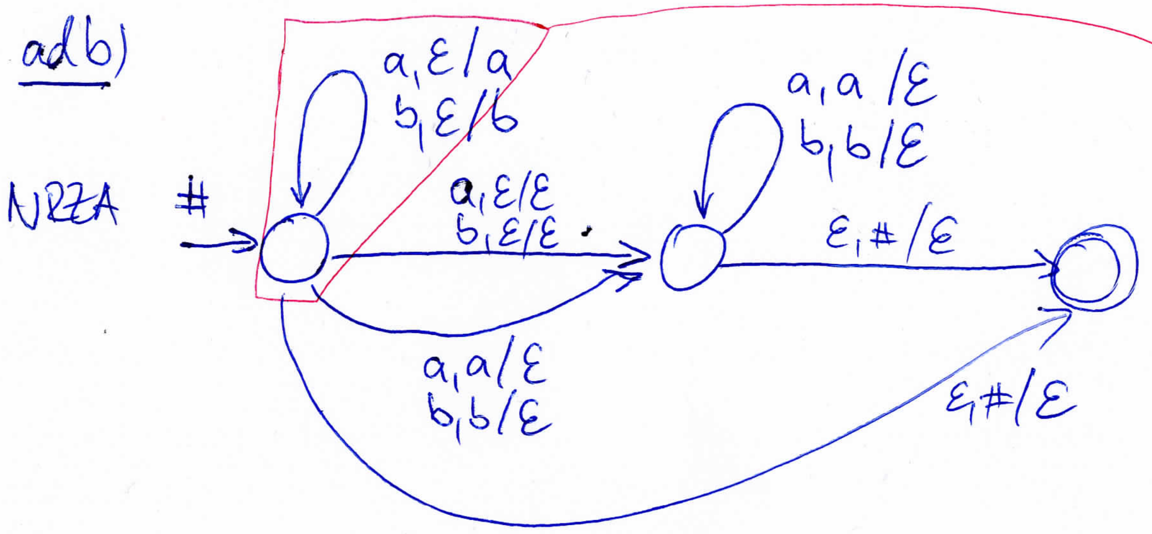
- Sestavte (a) bezk. gramatiku a (b) RNZA přijímající jazyk $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \}$.

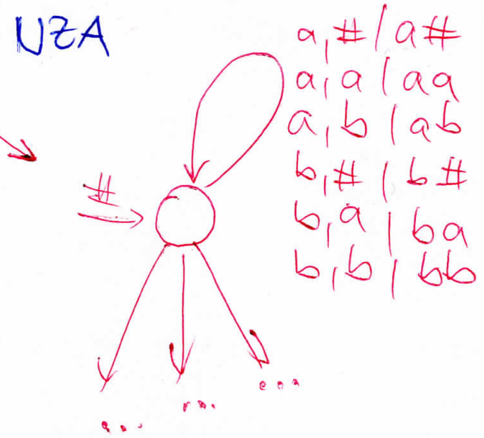
ad a) $P: \quad S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

[např. $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aababaa$]

$G = (\{S\}, \{a,b\}, P, S)$

ad b)



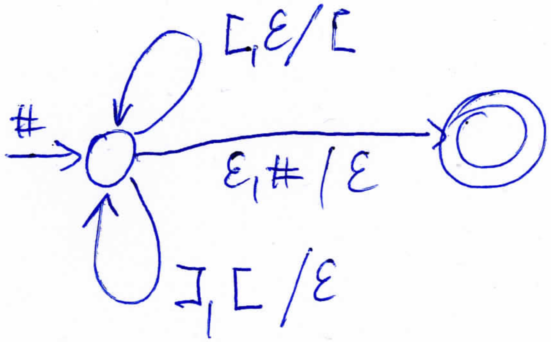


- Sestavte ZNZA přijímající Dyckův jazyk typu 1 a sestavte také odpovídající bezk. gramatiku.

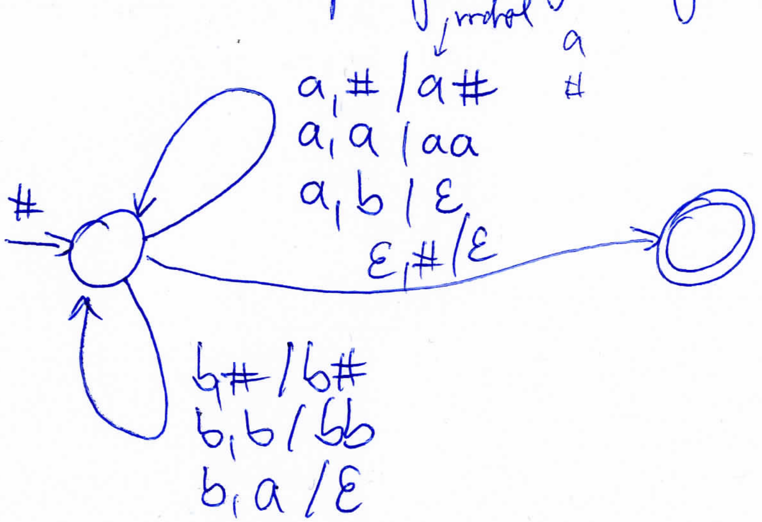
- bezk. gr. : $G = (\{S\}, \{[,]\}, P, S)$

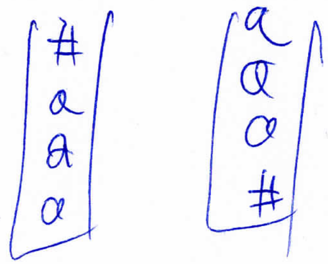
  $P: \; S \to [S] \mid SS \mid \varepsilon$

- ZNZA:



- Sestavte ZNZA přijímající jazyk $\{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$





- Určete, zda platí následující tvrzení. Dokažte, nebo vyvraťte.

$\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. mn-a $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

Neplatí. Protipříklad: $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$

$\{a\} \not\subseteq \{a\}\{b\} = \{ab\}$

např. $\Sigma = \{a, b\}$ $L_2 = \{\varepsilon, a, aa, \dots\}$

- Dokažte, že platí následující tvrzení:

$\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Leftrightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2$

Důkaz:

"$\Leftarrow$": Postačí ukázat, že $L_1 = \emptyset$ i $\varepsilon \in L_2$ implikují $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

a) Předpokládejme, že $L_1 = \emptyset$.
V tomto případě $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$ jistě platí,
protože $\emptyset$ je nejmenší množina vůči $\subseteq$.

b) Předpokládejme, že $\varepsilon \in L_2$.
K ukázání, že $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$, postačí ukázat,
že $\forall w \in L_1 : w \in L_1 \cdot L_2$.

$L \Leftrightarrow P$

1) $L \Leftrightarrow L_1$
$L_1 \Leftrightarrow L_2$
$\vdots$
$L_n \Leftrightarrow P$

2) $L \Rightarrow P$
$P \Rightarrow L$

Uvažme libovolné $w \in L_1$. Víme, že $\varepsilon \in L_2$.
Pak z definice konkatenace jazyků $w \cdot \varepsilon \in L_1 \cdot L_2$
Ale $w \cdot \varepsilon = w$ z definice konk. řetězců.
Tedy $w \in L_1 \cdot L_2$.

„$\Rightarrow$" Důkaz sporem.

- Předp., že $\neg(\forall \Sigma : \Sigma$ kon. mn-a $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2)$
neboli:

$\exists \Sigma :$ kon. abeceda $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \neg(L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2)$
——————" —————— $\neg(\neg L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \vee (L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2))$
——————" —————— $(\neg\neg L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge \neg($ ——"—— $))$
——————" —————— $(L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset \wedge \varepsilon \notin L_2)$

- Uvažme libovolné Σ, L_1, L_2 takové, že
$L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset \wedge \varepsilon \notin L_2$.

- Vzhledem k tomu, že $L_1 \neq \emptyset$, můžeme si z něj vybrat nějaký řetězec $w \in L_1$. Konkrétně zvolme w tak, že je to jeden z nejkratších řetězců v L_1
(Tedy $\neg \exists w' \in L_1 : |w'| < |w|$).

- z předpokladu víme, že $w \in L_1 \cdot L_2$ (neboť $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$).
- z def. konkatenace jazyků musí platit, že $w = w_1 \cdot w_2$, kde $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$.
- Ovšem z $\varepsilon \notin L_2$ plyne, že $|w_2| \geq 1$. A tedy $|w_1| \leq |w| - 1$ a w_1 je tak kratší než w. To je spor, protože w je jeden z nejkratších řetězců.

$\square$

C.B.D

Q.E.D

- Dokažte indukcí, že pro každou konečnou množinu A platí, že $|2^A| = 2^{|A|}$.

Důkaz indukcí podle $|A| \geq 0$.

1) Bázový případ: $|A| = 0$

V tomto případě $A = \emptyset$ a $2^A = \{\emptyset\}$,

Pak $|2^A| = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|} = 2^{|A|}$.

2) Předpokládejme, že věta platí pro $|A| = n \geq 0$

Ukážeme, že platí i pro $|A| = n+1$:

- Z toho, že $n \geq 0$ a $|A| = n+1$ je zřejmé, že $\exists\, a \in A$.
- Můžeme tedy vytvořit $A' = A \setminus \{a\}$.
- $|A'| = |A| - 1 = n+1-1 = n$
- Pro A' lze uplatnit ind. předpoklad:

$$|2^{A'}| = 2^{|A'|}.$$

- $2^A = \{B, B \cup \{a\} \mid B \in 2^{A'}\}$
- $|2^A| = |\{B, B \cup \{a\} \mid B \in 2^{A'}\}| =$

$$= 2 \cdot |2^{A'}| = 2 \cdot 2^{|A'|} = 2^{|A'|+1} = 2^{|A|} \quad \square$$