- Dokažte, že $R^*R^* = R^*$ v alg. Reg. Množin. (aniž bychom využili odkazu na Kl. alg.).

- $R^*R^* \overset{\text{def. * jazyků}}{=} \left(\bigcup_{n\geq 0} R^n\right)\cdot\left(\bigcup_{m\geq 0} R^m\right) \overset{\text{def. } \cup \text{ jazyků}}{=}$

$= \{w_1 \mid w_1\in R^n, n\geq 0\}\cdot\{w_2 \mid w_2\in R^m, m\geq 0\} =$

$\overset{\text{def. } \circ \text{ jazyků}}{=} \{w_1w_2 \mid w_1\in R^n, w_2\in R^m, n,m\geq 0\} =$

$\overset{\text{def. } \circ \text{ jazyků}}{=} \{w_1^1w_1^2\cdots w_1^n\cdot w_2^1\cdots w_2^m \mid n,m\geq 0 \wedge \forall 1\leq i\leq n: w_1^i\in R \wedge \forall 1\leq j\leq m: w_2^j\in R\}$

$= \{w_1w_2\cdots w_{m+n} \mid n,m\geq 0 \wedge \forall 1\leq i\leq m+n: w_i\in R\}$

= | a) každé přir. číslo $k\in N$ lze zapsat jako $m+n$ pro nějaké $m,n\geq 0$: stačí zvolit např. $m=k \wedge n=0$.
b) uzavřenost N vůči $+$, která garantuje, že $\forall m,n\geq 0: m+n\in N$ |

$= \{w_1w_2\cdots w_k \mid k\geq 0 \wedge \forall 1\leq i\leq k: w_i\in R\} =$

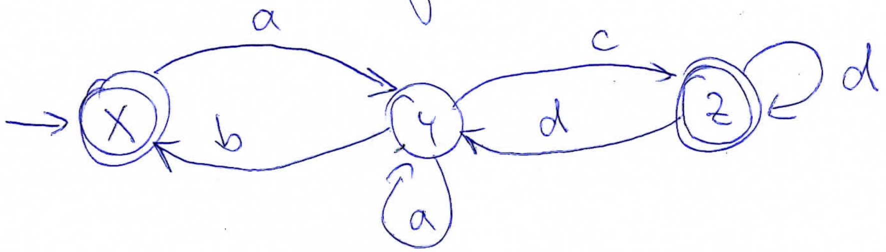
$$\underset{\substack{\text{def.}\\\text{jazyků}}}{=} \{ w \in \Sigma^k \mid k \geq 0 \} \underset{\substack{\text{def } \cup\\\text{jazyka}}}{=} \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k \underset{\substack{\text{def } *\\\text{jazyků}}}{=} \Sigma^* \qquad \square$$

- alternativně lze ukázat
  a) $\Sigma^*\Sigma^* \subseteq \Sigma^*$,
  b) $\Sigma^* \subseteq \Sigma^*\Sigma^*$,

přičemž $A \subseteq B$ lze ukazovat tak, že ukážeme, že $\forall w \in A : w \in B$.

Převod KA → RV : pomocí řešení rovnic

- Převeďte KA zadaný níže na RV řešením rovnic nad RV:



—

- $X = \varepsilon + aY$
  $Y = bX + aY + cZ$
  $Z = \varepsilon + dY + dZ$

řešení soustav rovnic nad RV:

- pro $X = pX + q$ je řešení $X = p^*q$.

Konečně:

$LS = X = p^*q$

$PS = pX + q = pp^*q + q =$

$= \underbrace{p^+q + p^0q}_{(p^+ + \varepsilon)q} = p^*q$

- upravíme $Z = \varepsilon + dY + dZ$ na

$$Z = dZ + (\varepsilon + dY)$$

Řešením je: $Z = d^*(\varepsilon + dY) = d^* + d^+Y$

- Dosadíme do 2. rovnice:

$$Y = bX + aY + c(d^* + d^+Y) =$$

$$= bX + aY + cd^* + cd^+Y =$$

$$= (a + cd^+)Y + (bX + cd^*)$$

- Vyřešíme:

$$Y = (a + cd^+)^*(bX + cd^*)$$

- Dosadíme do rovnice pro X:

$$X = \varepsilon + a[(a + cd^+)^*(bX + cd^*)] =$$

$$= \varepsilon + a(a + cd^+)^*bX + a(a + cd^+)^*cd^*$$

$$= a(a + cd^+)^*bX + (\varepsilon + \text{—"—})$$

- Řešením získáme:

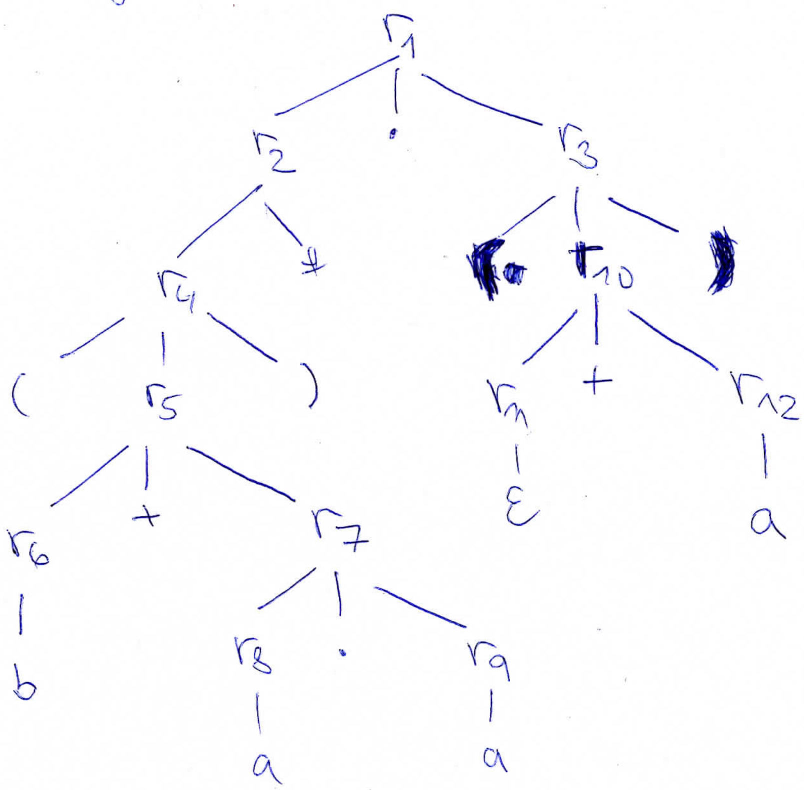
$$X = (a(a + cd^+)^*b)^* \cdot (\varepsilon + a(a + cd^+)^*cd^*),$$

což je RV reprezentující jazyk daného KA.

Převod z RV na KA

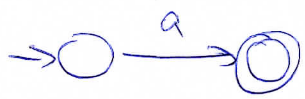
- Převeďte algoritmicky RV $\underbrace{(b+aa)^*}\underbrace{(\varepsilon+a)}$ na min. DKA.

1) Vybudujeme synt. strom daného RV (r_1):

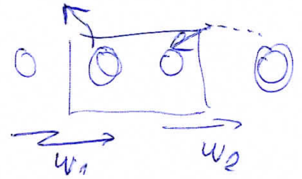


2) Převedeme daný RV induktivně dle struktury jeho synt. stromu na RKA

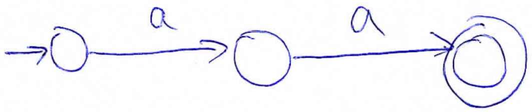
M_6: 

M_8, M_9, M_{12}: 

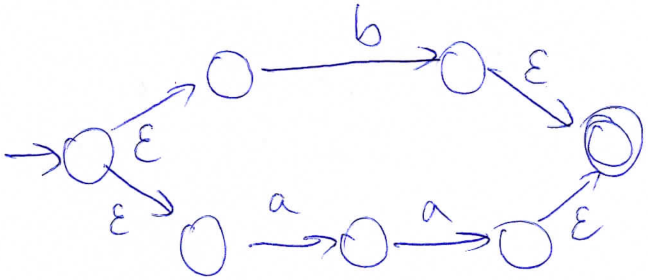
M_{11}:



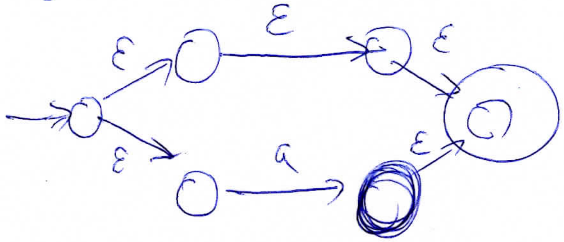
M_7:



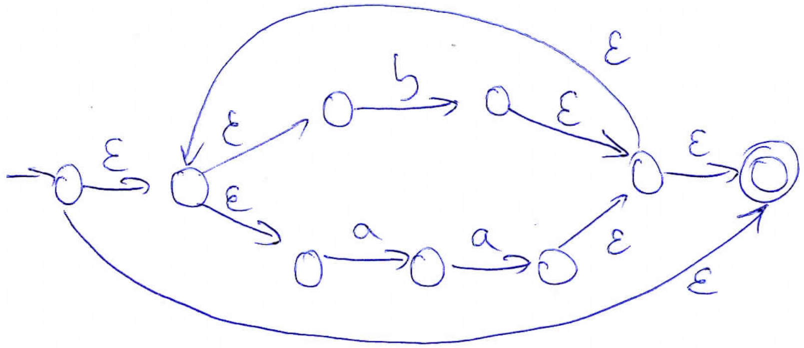
$M_4 : M_5$:



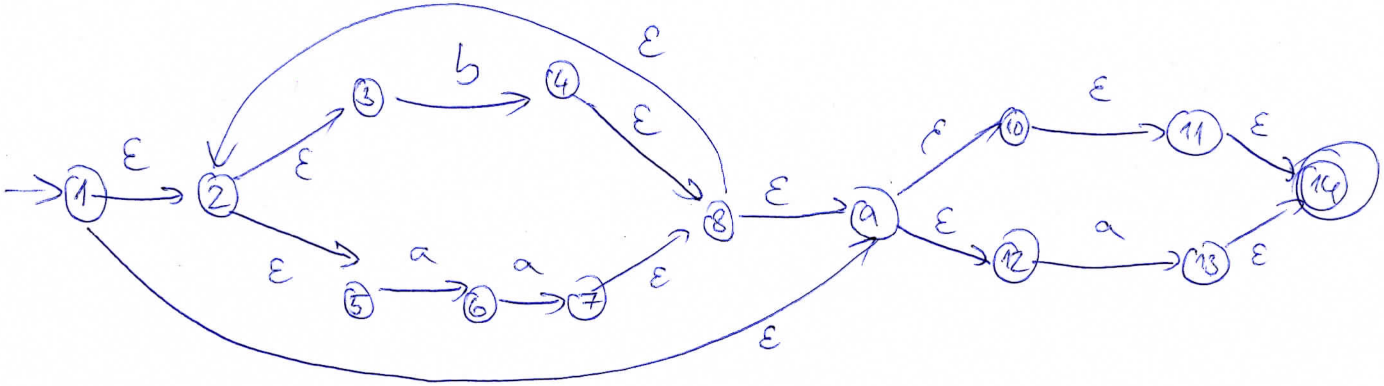
$M_3 : M_{10}$



M_2



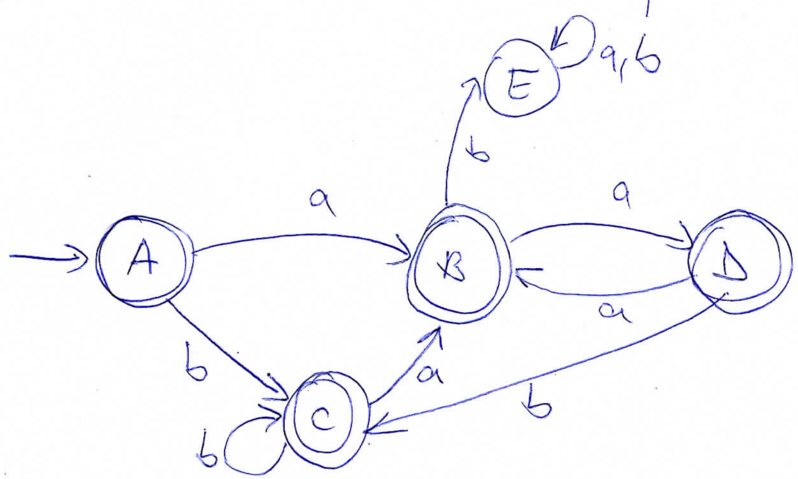
M_1:



- Determinizace :

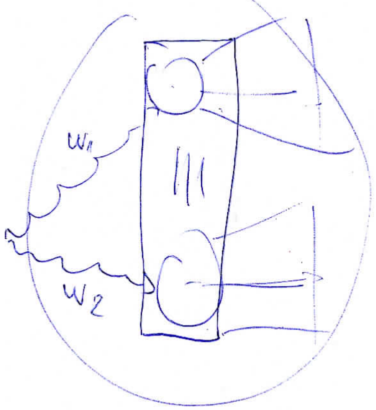
	a	b
→ e-uz({1}) = {1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 14, 12} = **A**	e-uz({6, 13}) = {6, 13, 14} = B	e-uz({4}) = {4, 8, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 14, 12} = C
B	e-uz({7}) = {7, 8, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 14, 12} = D	e-uz(∅) = ∅ = E
C	e-uz({6, 13}) = B	e-uz({4}) = C
D	e-uz({6, 13}) = B	e-uz({4}) = C
E	E	E

Diagram:



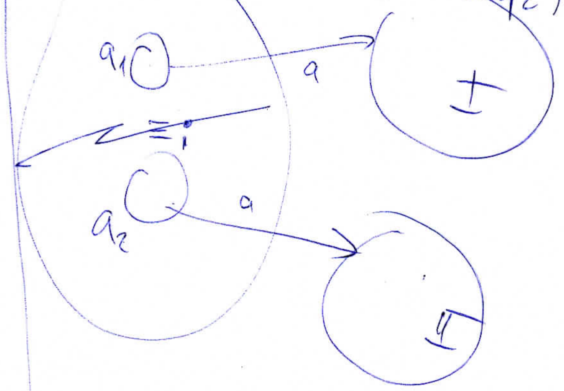
- minimalizace (převod na redukovaný DKA)
  - daný automat je již úplně def. a bez nedosaž. stavů
  - vybudujeme iterativně relaci nerozlišitelnosti $\equiv$

	$\overset{0}{\equiv}$	a	b
I	A	B (I)	C (I)
I	B	D (I)	E (II)
I	C	B (I)	C (I)
I	D	B (I)	C (I)
II	E	E (II)	E (II)



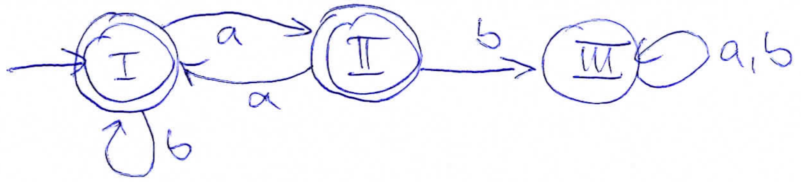
$\equiv \subseteq Q \times Q$ def. tak, že $\forall q_1, q_2 : q_1 \equiv q_2 \Leftrightarrow$ $(\forall w \in \Sigma^* : w \in L(q_1) \Leftrightarrow w \in L(q_2))$

	$\overset{1}{\equiv}$	a	b
I	A	B (II)	C (I)
I	C	B (II)	C (I)
I	D	B (II)	C (I)
II	B	D (I)	E (III)
III	E	E (III)	E (III)



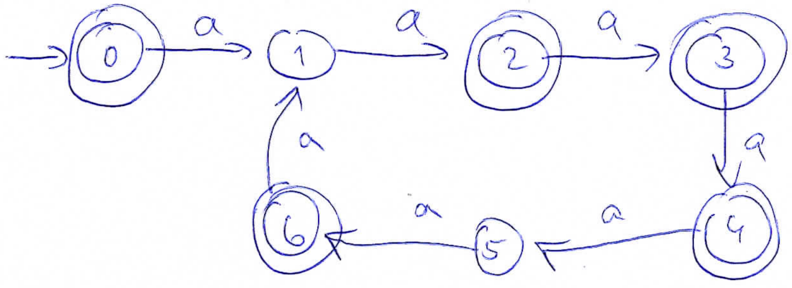
tedy $\overset{1}{\equiv} = \overset{2}{\equiv} = \equiv$

- vybudujeme redukovaný úplně def. DKA



(Není-li požadován úplně def. DKA, lze stav III vypustit)

– Mějme následující DKA:



Převeďte algoritmicky do redukované podoby. automat je již úplně def., nemá nedosl. st.

$\overset{0}{\equiv}$

		a
I	0	1 (II)
	2	3 (I)
	3	4 (I)
	4	5 (II)
	6	1 (II)
II	1	2 (I)
	5	6 (I)

$\overset{1}{\equiv}$

		a
I	0	1 (III)
	4	5 (III)
	6	1 (III)
II	2	3 (II)
	3	4 (I)
III	1	2 (II)
	5	6 (I)

$\overset{2}{\equiv}$

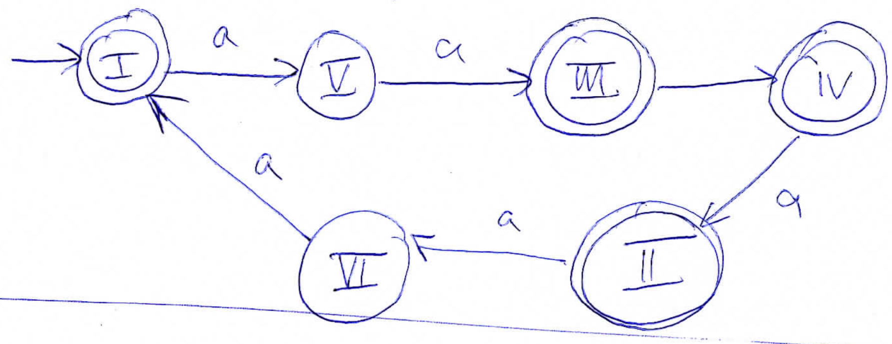
		a
I	0	1 (IV)
	4	5 (V)
	6	1 (IV)
II	2	3 (III)
III	3	4 (I)
IV	1	2 (II)
V	5	6 (I)

$\overset{3}{\equiv}$

		a
I	0	1 (V)
	6	1 (V)
II	4	5 (VI)
III	2	3 (IV)
IV	3	4 (II)
V	1	2 (III)
VI	5	6 (I)

$\overset{4}{\equiv} = \overset{3}{\equiv} = \equiv$; finální DKA

redukovaný



Pumping lemma pro R. J.

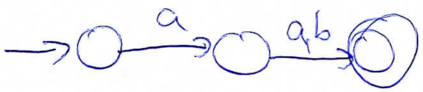
$\forall \Sigma : \Sigma$ je kon. abeceda $\forall L \subseteq \Sigma^* : L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow$

$\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$

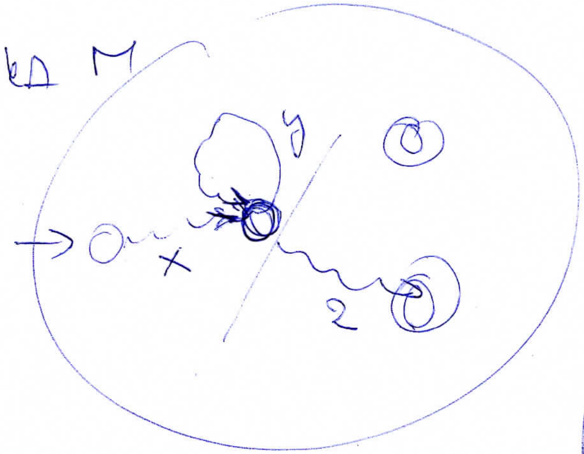
$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : (xy^iz \in L)$

Co když $L \in Fin$

např. $L = \{aa, ab\}$



KA M



$L(M) = L$, M má mn-u stavů Q, zvolme $k = |Q|$

zvolme w, $|w| \geq k$

- Dokažte, že $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w| = j^2, j \geq 0 \} \notin \mathcal{L}_3$.

- Důkaz sporem:
  - Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_3$.
  - $\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$
  - Uvažme libovolné $k > 0$ splňující uvedené tvrzení.
  - Zvolme $w = a^{k^2} \in L$, $|w| = k^2 \geq k$
  - Tedy $\exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$
  - Uvažme všechny volby $x,y,z \in \Sigma^*$ takové, že
    $w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.
  - Zvolme $i = 2$. Dle výše uvedeného $xy^2z \in L$,
    tedy $\exists l \geq 0 : |xy^2z| = l^2$
  - Zkoumejme $|xy^2z|$: $|xy^2z| = |xyz| + |y| = k^2 + |y|$
  - Víme, že $y \neq \varepsilon$. Tedy $|xy^2z| = k^2 + |y| > k^2$
  - Nadruhou stranu víme, že $|xy| \leq k$. Tedy:
    $|xy^2z| = k^2 + |y| \leq k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$,
    protože $k > 0$

- Tedy $k^2 < |xy^2z| < (k+1)^2$ a současně
$|xy^2z| = l^2$ pro $l \geq 0$.

Tedy $k < l < (k+1)$, což je pro přirozená čísla spor! $\square$