Jazyk K ... 1 fun. sym f (2)
pred p (2)

$\varphi \equiv p(x, f(x,x))$

$\chi \equiv p(x, f(x,y))$

$\psi \equiv p(x,y) \rightarrow \forall z\, p(x, f(y,z))$

1) Hledáme realizaci $\mathcal{R}$ $\mathcal{R} \models \varphi$

univ. $\mathbb{Z}$, $f_{\mathcal{R}}(a,b) = a-b$

$p_{\mathcal{R}}(a,b) \Leftrightarrow |a| \geq b$

$|a| \geq a-a$ ... ~~není pravdivé pro $a=-1$~~ je splněno $\forall a$
$\quad\; = 0$

2) T ... teorie uspořádání ... $T = \{p(x,x),\ (p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow x=y,$
$(p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)\}$

i: $\mathcal{R} \models T$? NE

$a \neq b$
~~$1 \neq 5$ $p_{\mathcal{R}}(1,5)$~~
$-5 \neq 5$ $p_{\mathcal{R}}(-5,5)$

$|-5| \geq 5 \wedge |5| \geq -5$

ii) $S = T \cup \{\chi\}$

$S \models \psi$?

$\mathcal{M} \models S$?

$\mathbb{Z}$, $p_{\mathcal{M}}(a,b) \Leftrightarrow a \leq b$

$f_{\mathcal{M}}(a,b) = a + |b|$

pro lib. z

$(p(x,y) \,\&\, p(y, f(y,z))) \xRightarrow{\text{tranzit.}} p(x, f(y,z))$

$\Downarrow$ $p(y, f(y,z))$ &

$p(x,y) \longrightarrow \forall z\, p(x, f(y,z))$

Prenexní tvar

$\forall z\, (p(x,y) \longrightarrow p(x, f(y,z)))$

Převod fle do prenex. tvaru

$(\forall x\, p) \to q \equiv \exists x (p \to q)$ 1.

$(\exists x\, p) \to q \equiv \forall x (p \to q)$ 2.

$p \to Qx\, q \equiv Qx (p \to q)$ 3. $Q \in \{\forall, \exists\}$

$\forall x\, p \to \exists y\, q \equiv \exists x \exists y (p \to q)$

$(\forall x\, p \wedge \forall x\, q) \equiv \forall x (p \wedge q)$

$(\exists x\, p \vee \exists x\, q) \equiv \exists x (p \vee q)$

$\neg(\forall x\, p) \vee \exists y\, q$

$\exists x \neg p \vee \exists x\, q_{y \to x}$

$\exists x (\neg p \vee q_{y \to x})$

$\exists x (p \to q_{y \to x}) \equiv \forall x\, p \to \exists y\, q$ 4

přejmenování proměnných

$(\forall x'\, p(x', y) \to \exists \hat{x} \forall y\, q(\hat{x}, y)) \to \exists z (\forall \hat{y} \{ p(z, \hat{y}) \to \forall \bar{y} \exists x\, q(x, \bar{y}))$

volná

$\hat{x} = x'$

$(\forall x'\, p(x', y) \to \exists x' \forall y'\, q(x', y')) \to \exists z \forall \bar{y} (\forall \hat{y}\, p(z, \hat{y}) \to \exists x\, q(x, \bar{y}))$

$\hat{y} = x$

$\exists^{4} x' (p(x', y) \to \forall y'\, q(x', y')) \to \exists z \forall \bar{y} (\forall x\, p(z, x) \to \exists x\, q(x, \bar{y}))$

$\exists x' \overset{3}{\forall} y' (p(x', y) \to q(x', y')) \to \exists z \forall \bar{y} \overset{4}{\exists} x (p(z, x) \to q(x, \bar{y}))$

$\forall x'^{1} (\forall y' (p(x', y) \to q(x', y')) \to \exists z \forall \bar{y} \exists x (p(z, x) \to q(x, \bar{y})))$

$y' = z$

$\forall x' \exists z^{4} ((p(x', y) \to q(x', z)) \to \forall \bar{y} \exists x (p(z, x) \to q(x, \bar{y})))$

$\boxed{\forall x' \exists z \forall \bar{y} \exists x ((p(x', y) \to q(x', z)) \to (p(z, x) \to q(x, \bar{y})))}$

Algebra na množině $A = \{0, 1, \infty\}$ s 1 binární komutativní idempotentní operací $\cdot$

splňující $0 \cdot 1 = 0$, $\infty \cdot 1 = \infty$, $0 \cdot \infty = 1$

Napište tabulku operace $\cdot$ a rozhodněte, zda $(A, \cdot)$ je pologrupa.

$\cdot$	0	1	∞
0	0	0	1
1	0	1	∞
∞	1	∞	∞

1 neutrál.

Není asociativní: $0 \cdot (0 \cdot \infty) = 0 \cdot 1 = 0$ $\neq$
$(0 \cdot 0) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 1$

$\{0, 1\}$ je podalgebra ✓

je asoc? ... $(\mathbb{B}_2, \wedge)$, $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ ... kom. monoidy

polosvazy s nejm. prvkem 0

nejv. –"– 1

$\{1, \infty\} \cong \{0, 1\}$

$f: 1 \mapsto 1, \ \infty \mapsto 0$

$f(1 \cdot \infty) = f(\infty) = 0$

$f(1) \cdot f(\infty) = 1 \cdot 0 = 0$

$f(\infty \cdot \infty) = f(\infty)$

$f(\infty) f(\infty)$ ✓

homomorf. pologrup monoidů

$B = \{-1, 0, 1\}$

co počítá operace $*$?

$*$	-1	0	1
-1	0	1	1
0	-1	0	1
1	-1	-1	0

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & x<y \\ 0 & x=y \\ -1 & x>y \end{cases}$$

$x \longleftarrow F(x,y)$

je $(B,*)$ pologrupa ?

$(-1 * -1) * 0 = 0 * 0 = 0$

$-1 * (-1 * 0) = -1 * 1 = 1$

není asoc.

levý neutrál. : 0 $\quad 0 * a = a$

$a * a = 0$

generujeme ekvivalenci relací R

$(00)(01)(02)$

(11)

(22)

$\{(00), (0,1), (0,2)\}$

	0	1	2
	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22

2 : $(1,0), (0,2)$

$\mathbb{Z}_p$ je těleso

$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) = (\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$

	00	01	02	10	11	12	20	21	22
00									
01						10			

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\{(0,2), (1,1)\}$ generuje podalgebru

$3\alpha \quad 2\alpha \quad \alpha$

$\langle\{0,2\}\rangle = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$ uzavřená relace na operaci $+$

$\langle\{1,1\}\rangle = \{(0,0), (11), (22)\}$ kongruence

R

jsou $\langle(0,2)\rangle$ ✗

$\langle(1,1)\rangle$ ✓

ekvivalence ?

$(0,2) \in R \quad (2,0) \notin R$

$(k,l) \overset{?}{\in} \langle(0,2),(1,1)\rangle = M$

$(k,k) \in \langle\{1,1\}\rangle$

$(k,k) + \underbrace{(l-k)(0,1)}_{\in \langle(0,2)\rangle} \in M$

$A = \{a, b, c, d\}$ A^* ... volný monoid
= množina všech slov nad A , ε prázdné slovo

uvažujme $R = \{(ac, \varepsilon), (ca, \varepsilon), (bd, \varepsilon), (db, \varepsilon)\}$

relací R generujeme kongruenci ρ na monoidu $(A^*, \cdot)$ $\Rightarrow$ $\alpha, \beta, \gamma \in A^*$

$\alpha \rho \beta \Rightarrow (\alpha\gamma) \rho (\beta\gamma)$

popište relaci ρ na obecných slovech

— " — faktorový monoid A^*/ρ

$A^*/\rho \cong M = \{$ řetězce neobsahující podřetězce $ac, ca, bd, db \}$

$abac \, \rho \, ab$ $\quad$ $aacbdc \, \rho \, \varepsilon \, \rho \, db$

$ab.ac$ $\quad$ $ac \rho \varepsilon$

Na M zavedeme operaci $\odot$

$a \odot c$ = zkrácení $a \cdot c$

je asoc.

$M \subset A^*$

je homom.

$A^* \longrightarrow A^*/\rho \xrightarrow{\varphi} A^*$

$\alpha \longmapsto [\alpha]$

$[\alpha] \longrightarrow \alpha$ bez zakáz. řetězců

$[a] \longmapsto a$

$[c] \longmapsto c$

$[ac] \longmapsto \varepsilon \neq a \cdot c$

je to homom?

$\varphi([\alpha] \cdot [\beta]) \overset{?}{=} \varphi([\alpha]) \cdot \varphi([\beta])$

$\varphi([\alpha \cdot \beta]) = \alpha \cdot \beta$ po zkrácení

není homomorf.

$\varphi([\alpha]) = \alpha$ po zkrácení

$\varphi([\beta]) = \beta$ — " —

$(M,\odot)$ je asoc.

$a, c \qquad a \odot c = \varepsilon$

inverzní pro a

$c \odot a = \varepsilon$

$(abba)^{-1} = cddc$

$abbacddc = \varepsilon$

$(M,\odot)$ je grupa je dvougenerovaná

$\langle a \rangle = \{\varepsilon, a, a^2, a^3 \dots a^k, c, c^2, c^k \dots\}$

$M = \langle a, b \rangle$

$$\begin{tikzcd} \{a,b\} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "v"'] & G \\ & M \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

G — grupa

pak $\exists!$ homof $f: M \to G$

$f \circ v = h$

inverzní prvky v $\mathbb{Z}_p$ — těleso

$p = 7$

$k = 4 \qquad \frac{1}{4} = ?$

hledáme $x \qquad 4x = 1 \quad / \cdot -1$

$(-4)x = -1$

$-x = \frac{1}{-4}$

$\frac{1}{4} = -\frac{-1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = \cancel{1}\frac{-4}{2} = 2$

$2 \cdot 4 = 8 \equiv_7 1$

Bezoutova rovnost

Euklid. alg.

$7 : 4 = 1 \qquad 3 = 7 - 4$

$4 : 3 = 1 \qquad 1 = 4 - 3$

$3, 1$

$1 = 4 - (7 - 4) =$

$= 4 + 4 - 7 = 2 \cdot 4 - 7$

$1 = 2 \cdot 4 - 7$

$1 \equiv_7 2 \cdot 4 \Rightarrow 2 =_7 \frac{1}{4}$