Základní pojmy

- výroková & pred. logika

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

$\forall x\, \varphi(x) \equiv \neg \exists \neg \varphi(x)$

$\exists x\, \varphi(x)$

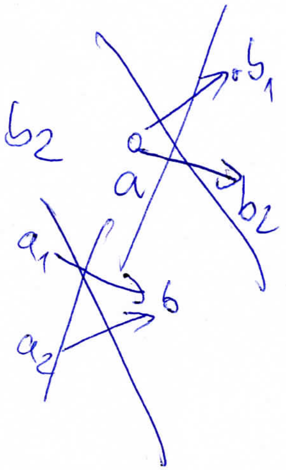
- množina
  - $\cup, \cap, \overline{A}, A \setminus B$
  - $\in, \subseteq$
  - zápis $\{1,2,3\}$, NE: ~~(1,2,3)~~, ~~[1,2,3]~~ ~~1,2,3~~

- kartézský součin $A_1 \times A_2 \times \dots A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
- relace ρ na $A_1, \dots, A_n$: $\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$
- vlastnosti: - souvislá bin. relace $\rho \subseteq A \times A$: $\forall a, b \in A: a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a$
  - reflexivní, ireflexivní
  - symetrická, asymetrická a antisymetrická

- tranzitivní
- tranzitivní uz. relace ϱ^+
- reflex. a —"— ϱ^*
- ekvivalence  příklad
  - └ reflex., sym., tranz.
- ostré/neostré úplné/částečné uspořádání
- funkce $f: A \to B$: $f \subseteq A \times B$ taková, že

  1) $\forall a \in A\ \exists b \in B: f(a) = b$ [neboli $(a,b) \in f$]

  2) $\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B: f(a) = b_1 \wedge f(a) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$



- injekce $f: A \to B$ je f-ce taková, že

  $\forall a_1, a_2 \in A\ \forall b \in B: f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$
- surjekce (zobrazení na množinu):

  $\forall b \in B\ \exists a \in A: f(a) = b$
- bijekce: injekce + surjekce
- spočetná množina A: ex. bijekce $f: A \leftrightarrow N$

Formální jazyky

- abeceda Σ
- jazyk $L \subseteq \Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$, kde $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

$$\boxed{L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n, \quad \text{kde } L^0 = \{\varepsilon\}}$$

- operace
  - množinové: $\cup, \cap, \ldots$
  - speciální: $\cdot, +, *$

- Vypočítejte:

$$\boxed{L_1 \cdot L_2 = \{ w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \}}$$

- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset^+ = \emptyset$
- $\emptyset \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$
- $\emptyset \cdot L = \emptyset$
- $\emptyset \cdot \{\varepsilon\} = \emptyset$

- $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$
- $\{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset \cap L = \emptyset$
- $\{\varepsilon\} \cap L = \begin{cases} \emptyset & \text{jestliže } \varepsilon \notin L \\ \{\varepsilon\} & \text{jinak} \end{cases}$
- $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
- $\{\varepsilon\} \cdot L = L$

Gramatiky

- $G = (N, \Sigma, P, S)$
  - N - kon. mn-a neterminálů
  - Σ - kon. abeceda, $N \cap \Sigma = \emptyset$

- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

  pravidlo: $(\alpha, \beta) \in P$, zapisujeme $\alpha \to \beta$

- S: startovací neterminál, $S \in N$

- rel. přímé derivace: $\underset{G}{\Rightarrow} \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ taková, že

  $\forall \lambda, \mu \in (N \cup \Sigma)^*: \lambda \underset{G}{\Rightarrow} \mu \iff \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^*:$

  $\lambda = \gamma \alpha \delta \wedge \mu = \gamma \beta \delta \wedge (\alpha \to \beta) \in P$

- $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \}$

- uvažme gramatiku G s pravidly:

  $S \to A \mid B$

  $A \to aA \mid a$

  $B \to bB$

  Zapište množinově jazyk této gramatiky

  $L(G) = \{ a^n \mid n \geq 1 \}$

  $S \Rightarrow A \Rightarrow a$

  $S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aa$

  $S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \ldots$

  $S \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow \ldots$

- Uvažme gramatiku $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$.

  Zapište množinově jazyk G.

  $L(G) = \emptyset$

- Chomského klasifikace gr. a jazyků

  - typ 3 (KA) : $A \to wB \mid w$, kde $A, B \in N$, $w \in \Sigma^*$
  - typ 2 (ZA) : $A \to \alpha$, kde $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
  - typ 1 (LA) : $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, kde $A \in N$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$

    nebo $S \to \varepsilon$, pokud $\varepsilon \in L(G)$, v tom případě S není na pravé straně přep. pravidel.
  - typ 0 (TS, ...) neomezené

- zapište množinově jazyky generované následujícími gramatikami a posuďte typ dané gramatiky a typ jejího jazyka:

a) $\underline{G} = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \to 1S1 \mid 0S0 \mid \varepsilon\}, S)$

- $L(G) = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$
- typ gramatiky: 2
- typ jazyka: 2

b) $G = (\{S,Z\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid Z, Z \to aZ \mid Zb \mid \varepsilon\}, S)$

- $L(G) = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0 \}$
- typ gramatiky: 2
- typ jazyka: 3
  - lze generovat gramatikou $(\{S,A\}, \{a,b\}, \{S \to aS \mid A, A \to bA \mid \varepsilon\}, S)$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaZbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaaZbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaaZbbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaaZbbbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaabbbb$

$S \Rightarrow Z \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon$

- Sestrojte gramatiku, která generuje řetězce nad $\{0,1\}$ takové, že obsahují sudý počet nul i jedniček, $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w) \bmod 2 = 0 \}$

P: $S \to \varepsilon \mid 0A \mid 1B$ $\qquad G = (\{S,A,B,C\}, \{0,1\}, P, S)$

$A \to 0S \mid 1C$

$B \to 0C \mid 1S$

$C \to 0B \mid 1A$

- Sestrojte gramatiku, která generuje jazyk $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

$\boxed{a^n (BC)^n}$

P: $S \to aSBC \mid abC$

$CB \to BC$

$bB \to bb$

$bC \to bc$

$cC \to cc$

$\cancel{B \to b}$

$\cancel{C \to c}$

nelze

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabCBCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabBCCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabBCBCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaab\underline{bC}BCC \Rightarrow$

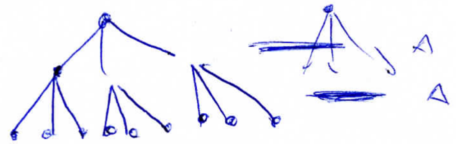
$\Rightarrow aaabbBCCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbCCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbcCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbccC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbccc$



- Sestrojte gramatiku, která generuje jazyk $\{a^{3^n} b^n \mid n \geq 1\}$

P: $S \to AS \mid AaX$

$Aa \to aaaA$

$AX \to Xb \mid b$

$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow$

$\Rightarrow AAAaX \Rightarrow AAaaaAX \Rightarrow$

$\Rightarrow AaaaAaaAX \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow aaaAaaAaaAX \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow a^{27}bbb$

Konečné automaty

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$q_0 \in Q,\ F \subseteq Q$

$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$

DKA: $\forall q \in Q\ \forall a \in \Sigma: |\delta(q,a)| \leq 1$, pak $\delta: Q \times \Sigma \to Q$

NKA: $\exists q \in Q\ \exists a \in \Sigma: |\delta(q,a)| > 1$

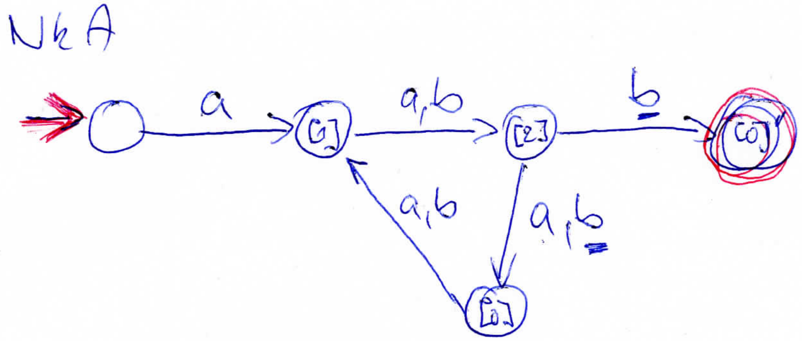
- konfigurace $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$
- $\vdash_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$ def. tak, že

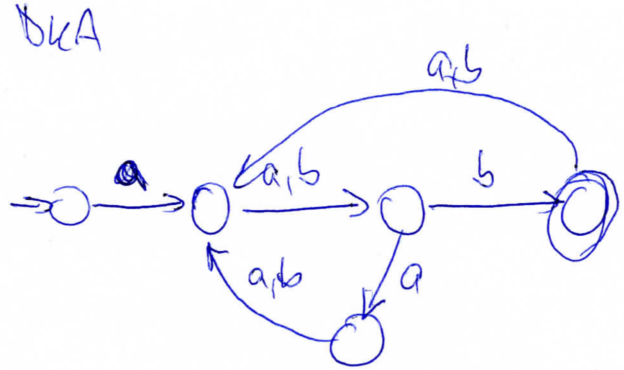
$\forall q_1, q_2 \in Q\ \forall w_1, w_2 \in \Sigma^*: (q_1, w_1) \vdash_M (q_2, w_2) \Leftrightarrow$

$\exists a \in \Sigma: w_1 = a w_2 \wedge q_2 \in \delta(q_1, a)$. [NE: $\cancel{q_2 = \delta(q_1,a)}$]

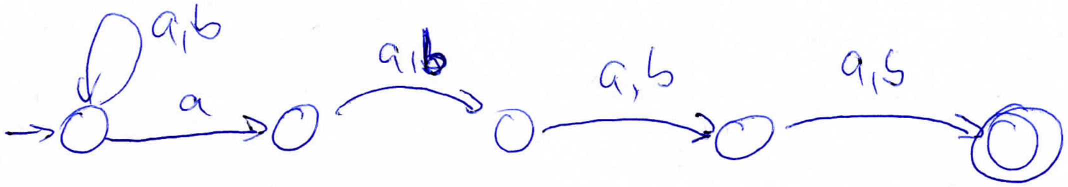
- $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash^* (q_f, \varepsilon), q_f \in F \}$

- Sestavte konečný automat, který přijímá jazyk $L = \{ awb \in \{a,b\}^* \mid |awb| = 3k, k \geq 0 \}$.





- sestavte KA přijímající jazyk $L = \{a,b\}^* \cdot \{a\}\{a,b\}^3$.



- zapište gramatiku typu 2, která generuje jazyk
$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$.

$P: S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$

$G = (\{S\}, \{a,b\}, P, S)$

~~S → AB | BA | SASBS~~