k-páskový DTS (NTS) M přijímá jazyk L v čase $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pokud (1)

$L(M) = L$ a M přijímá každé $w \in L$ v nanejvýš $T_M(|w|)$ krocích

Σ

lineární

2) $w \in \Sigma^*$

$2n \in O(n)$ ✓

$c = 2,\ n_0 = 0$

$2n \leq c \cdot n^2$

$\underline{2n+5} \in \underline{O(n)}$

$c = 3,\ n_0 = 5$

$c = 100,\ n_0 = 1$

$2n + 5 \leq 3n$

$n \geq 5$

$n^2 \notin O(n)$

Před. $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall n \geq n_0:\ n^2 \leq c \cdot n$

$m = \max(c, n_0) + 1$

$m \geq n_0 \quad m^2 > cm$ neplatí

$3n^2 + 4n + 17 \in O(n^2 - n + 1)$

$\boxed{c = 4} \quad n_0 =$

$4n^2 - 4n + 4 \geq 3n^2 + 4n + 17$

$n^2 \geq 8n + 13$

$\boxed{n_0 \geq 10}$

$2^n \notin O(n^2)$

Předpokládám $2^n \in O(n) \Rightarrow \underbrace{\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}:\ 2^n \leq cn^2}$

$\boxed{\Rightarrow \forall n \geq n_0\ \ \frac{c \cdot n^2}{2^n} \geq 1}$ Spor

$n \to \infty \quad cn^2 \to \infty, \quad 2^n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{cn^2}{2^n} \overset{L.H.}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{(cn^2)'}{(2^n)'} = \lim_{n \to \infty} \frac{2c \cdot n}{(\ln 2) 2^n} \overset{L.H.}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{2c}{(\ln 2)^2 2^n} = 0$$

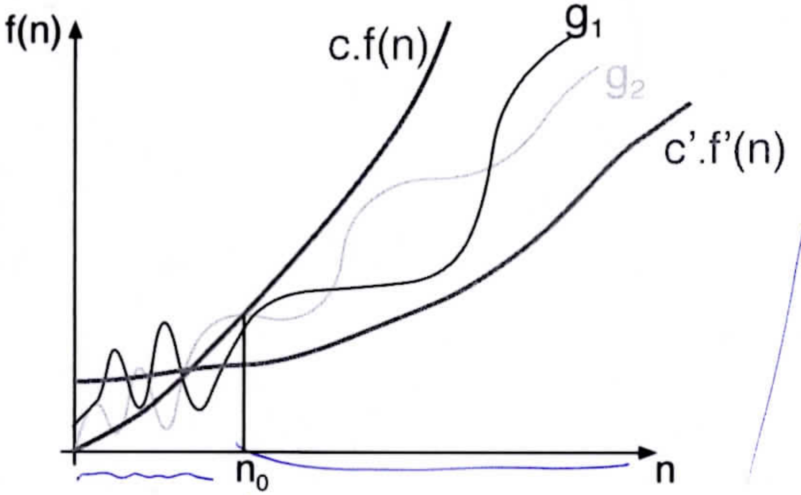
1,5

Definice 12.3 Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pro danou funkci $f \in \mathcal{F}$ definujeme množiny funkcí $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ a $\Theta(f(n))$ takto:

n = 0

2n + 5 $\not\leq$ 2n

- Asymptotické horní omezení funkce $f(n)$ je množina $O(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq c.f(n)\}$.
- Asymptotické dolní omezení funkce $f(n)$ je množina $\Omega(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c.f(n) \leq g(n)\}$.
- Asymptotické oboustranné omezení funkce $f(n)$ je množina $\Theta(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c_1.f(n) \leq g(n) \leq c_2.f(n)\}$.



2n ∈ O(n)

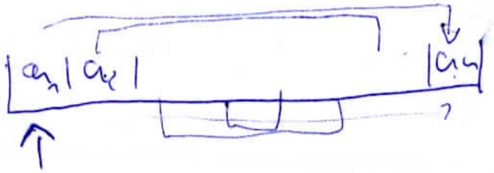
Příklad 12.5 S využitím asymptotických odhadů složitosti můžeme říci, že složitost našeho srovnání řetězců patří do $O(n)$ a složitost insert-sort do $O(n^2)$.

Ukažte, že $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w = w^R \} \in \boxed{DTime[n]}$

$= \{ L \mid \exists$ k-páskový DTS M: $L = L(M) \wedge T_M \in O(n) \}$

1. řešení

$w = a_1 a_2 \dots a_n$



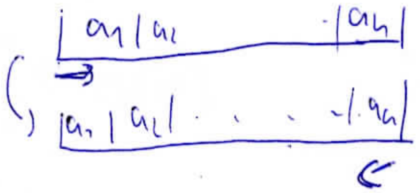
~~[illegible]~~ i- pozici

$n - i + 1$

$n/2 \cdot n/2 \in O(n^2)$ ✓

2. řešení

kopie



kopírování $- O(n)$

posun $- O(n)$

hlavy

kontrola $- O(n)$

$O(n)$

(5) $L = \{ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \mid \varphi_1, \varphi_2$ jsou CNF formule nad proměnnými $x_1 \dots x_n$ t.ž. existuje valuace (ohodnocení) $a_1 \dots a_n$ a platí $\varphi_1(a_1 \dots a_n) \neq \varphi_2(a_1 \dots a_n) \}$?

literály

$\underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{\text{klauzule}} \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \dots$

NP-úplnost

polynomiální redukce DTS

L je NP-úplný $\Leftrightarrow$ $\forall L' \in NP$ $L' \leq_p L$ $\wedge$ $L \in NP$

$L \in P \Rightarrow \forall L' \in NP : L' \in P \Rightarrow$ ~~NP=P~~ $\boxed{NP \neq P}$

SAT $= \{ \varphi \mid \varphi$ je CNF a je splnitelná $\}$

$\forall L' \in NP \quad L' \leq SAT$

$SAT \leq_p L \Rightarrow L$ je NP-úplný

$L' \leq_p SAT \leq_p L$

P < nerozhod. $\notin$ P; rozhod. < neefekt., efekt.

$\tilde{P}$

4

SAT $\leq_p$ L

$\sigma(\varphi) \rightsquigarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$: $\varphi \in SAT \Leftrightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in L$

DTS v polym. case

$\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = x_1 \wedge \neg x_1 \rightarrow$ false

$\varphi \in SAT \Rightarrow \varphi_1(a_1 \dots a_n) = true$

$\exists a_1 \dots a_n$

$\varphi_2 = false$

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in L$

$\varphi \notin SAT \Rightarrow \nexists a_1 \dots a_n : \varphi_1(a_1 \dots a_n) = false$

$\Rightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \notin L$

p. reprezent

$\varphi_1 = \varphi \quad \varphi_2 = \neg \varphi$

$\varphi \notin SAT \not\Rightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \notin L$

⑥ 3-SAT = { φ | φ je CNF formule kde každá klauzule má právě 3 literály a φ je splnitelná }

$(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_5) \wedge (\quad) \wedge (\quad) \wedge x_i \wedge x_j \wedge x_k$

C_i

$(x_i \vee x_j \vee x_k)$

$(x_i \vee x_i \vee x_i)$

SAT ≤ 3-SAT

$\sigma(\varphi) \leadsto \varphi'$

klauzule s 1(2) literálem ->

$C = (l_1 \vee l_2 \vee l_3 \ldots l_n)$. $n > 3$

$(l_1 \vee l_2 \vee l_3) \wedge (l_4 \vee l_5 \cdots l_n)$

$\boxed{a} \leadsto$

vit další papír

$(l_1 \vee l_2 \vee a_1) \wedge (\neg a_1 \vee \underbrace{l_3\, l_4 \vee \ldots l_5 \vee \ldots l_n}_{n-1}) \rightarrow$

$(l_3 \vee l_4 \vee a_2) \wedge$

$(\neg a_2 \vee l_5 \vee l_6 \ldots)$ $n-2$

⑥

$C = (\underbrace{l_1 \vee l_2 \vee l_3 \cdots l_n}_{n})$ ~> true pro $v_1 \cdots v_n$ (valuace)

$\Updownarrow$

$\exists v_1 \cdots v_n$ pro C je true $\Rightarrow \exists$ $v_1 \cdots v_n$ a a_1 pro $C' \wedge C''$ je true

$$\big(\underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee a_1)}_{C'} \wedge \underbrace{\overbrace{(\neg a_1 \vee l_3 \vee l_4 \cdots)}^{n-1}}_{C''}\big)$$

$\Updownarrow$

$$\big(\boxed{(\neg a_1 \vee l_3 \vee a_2)} \wedge \underbrace{(\neg a_2 \vee l_4 \vee l_5 \cdots)}_{n-2}\big)$$

⋮

3-literály

$$\underbrace{(\quad) \quad (\quad) \wedge (\neg a_{n-3} \vee l_{n-1} \vee l_n)}_{n}$$

$2\text{-SAT} \in P$ $\qquad\qquad$ $2\text{-SAT} \leq_p$ dosažitelnost v G ⑦

$\cancel{SAT \overset{?}{\leq_p} 2\text{-SAT}}$ $\qquad\qquad$ $\Uparrow P$ $\qquad$ $\Uparrow P$

$(\overset{false}{x_1} \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge \dots$

$\Updownarrow$

$(\neg x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow \neg x_3) \ (\neg x_3 \Rightarrow \neg x_4) (\Rightarrow)$ $\qquad$ není SAT

$\wedge (\neg x_2 \Rightarrow x_1)$

$\neg x_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1$ $\quad \leadsto$ ~~...~~ $\varphi \notin 2\_SAT$

$\wedge \quad x_1 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \neg x_1$

$2\text{-SAT} \leadsto G(V, E)$

~~..~~ $V: x_i, \neg x_i \quad i \geq 1$

$E: (x, y) \in E$ pokud $(\neg x \vee y)$ je klauzula v φ

dosažitelnost cesty $x_i \leadsto \neg x_i \wedge \neg x_i \leadsto x_i$ pro nějaký $x_i \in V$

SAT8 $\in$ NP

8

má NTS

- uhádne $\boxed{\text{8 valuací}}$
- zkontroluje
  - jsou to různé valuace
  - všechny jsou pravdivé

$\in$ P

$SAT8 = \{ \varphi \mid \varphi$ je CNF formule a φ má alespoň 8 splnitelných valuací (pravdivých) $\}$

1) $SAT8 \in NP$

2) $SAT \leq_p SAT8$

$\sigma(\varphi) \rightsquigarrow \varphi'$

3) σ je realizovatelná polyn DTS

Př. $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \rightsquigarrow$ true

$x_1 \rightsquigarrow$ true
$x_2 \rightsquigarrow$ false
$x_3 \rightsquigarrow$ false

+

$\varphi' = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4)$ $\rightsquigarrow$ 15 pravdivých přiřazení

~~$\sigma(\varphi) \rightsquigarrow \varphi^* \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4)$~~

$\varphi \in SAT \Rightarrow \varphi' \in SAT8$

$\varphi \notin SAT \Rightarrow \varphi' \notin SAT8$

$\boxed{\sigma(\varphi) = \overbrace{\varphi \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4)}^{\varphi'}}$