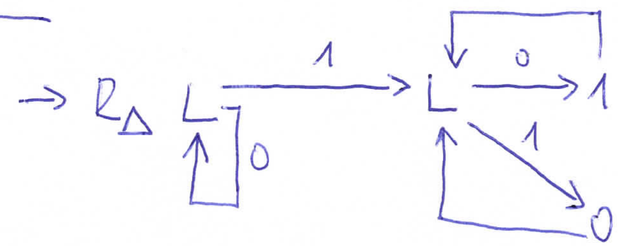
- Sestavte TS, který převede číslo x zapsané v binárním doplňkovém kódu ($x \in \mathbb{Z}$) na daném počtu bitů na $-x$.

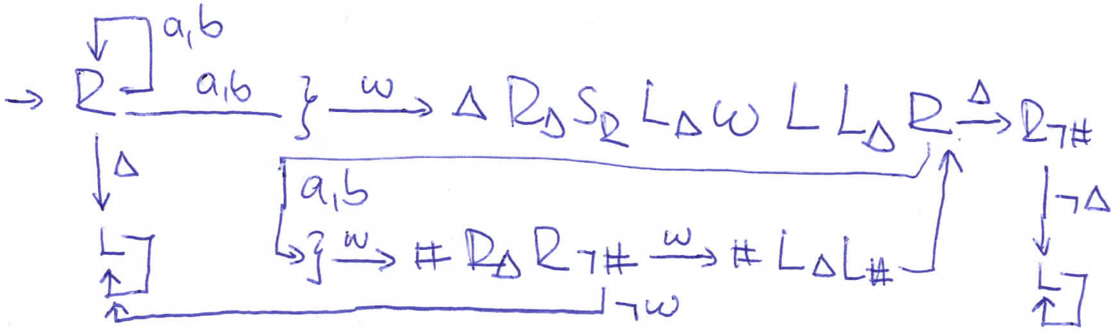
Např. 52 :

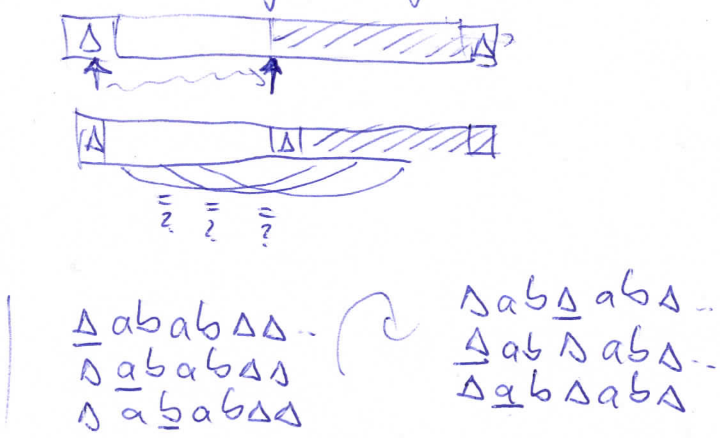
$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\
52: & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
+ & & & & & & & & 1 \\
\hline
-52 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Popište kompozitním diagramem.



- Sestavte a popište komp. diagramem NTS, který přijímá jazyk $L = \{ ww \mid w \in \{a,b\}^+ \}$.

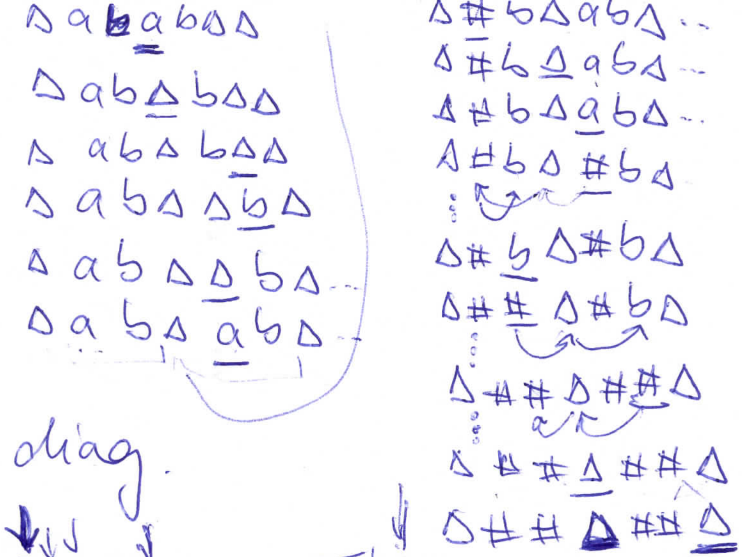




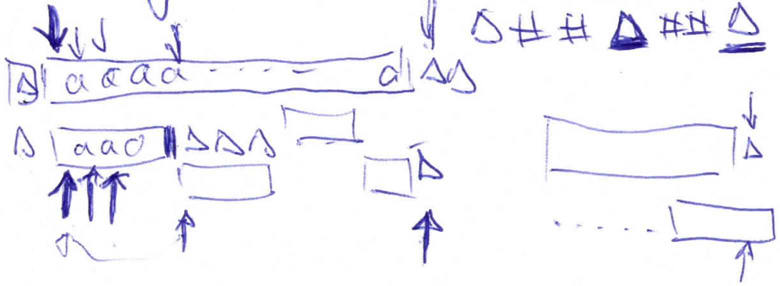
- Sestavte 2-páskový TS, který přijímá jazyk $L = \{ a^p \mid p \text{ je prvočíslo} \}$.

[prvočíslo je dělitelné právě 2 různými čísly: 1 a samo sebou.

Popište řídicím alg. TS a následně komp. diag.



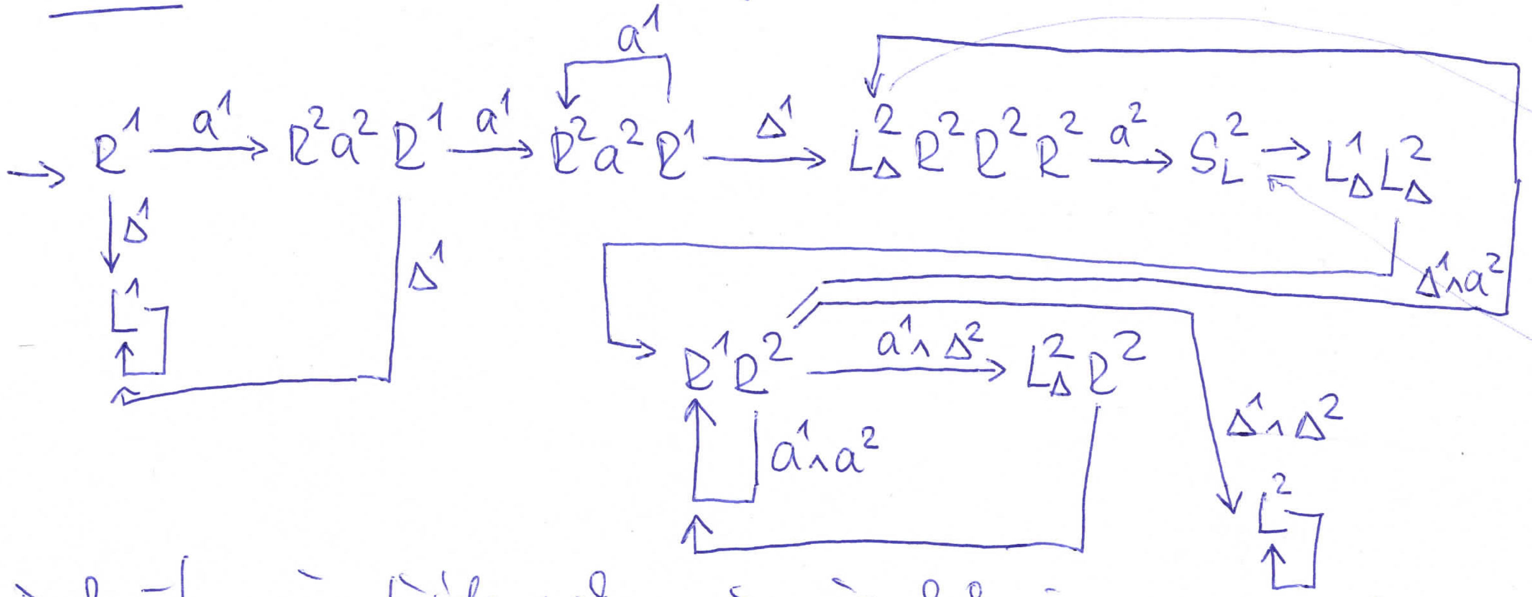
Princip činnosti uvedeného 2-pásk. TS M:



1. Je-li na 1. pásce 0 symbolů "a" nebo jeden symbol "a", M odmítne.
2. Jinak nakopíruje obsah (neblankový) 1. pásky na 2. pásku.
3. Jsou-li na 2. pásce právě 2 symboly "a", M přijme.
4. Jinak M odmaže na 2. pásce 1 symbol "a" a posune hlavy na obou páskách na první neblankový symbol zleva.
5. M synchronizovaně posouvá hlavy na obou páskách doprava, dokud obě hlavy čtou "a".
6. Pokud M čte na obou páskách "Δ", odmítne.

7. Jinak, jestliže M čte Δ pouze na 2. pásce, M posune hlavu na 1. symbol „a" zleva na 2. pásce a pokračuje bodem 5.

8. Jinak (v situaci, kdy M čte Δ pouze na 1. pásce), M přejde na bod 3.



p1: Δaaaa Δ...
p2: Δaaaa Δ
Δaaaa Δ
Δaaaa Δ
Δaaa$\boxed{a}$Δ
Δaa$\boxed{a}$ΔΔ

Morfismus

$h: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ takové, že

$\forall w = a_1 \dots a_n \in \Sigma_1^*$, $n \geq 0$: $h(w) = h(a_1) \dots h(a_n)$

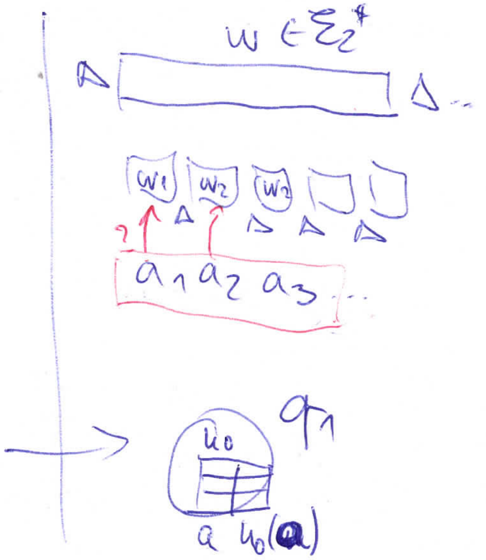
pro $L \subseteq \Sigma_1^*$: $h(L) = \{h(w) \mid w \in L_1\}$

– Dokažte, že třída rek. vyč. jazyků je uzavřena vůči morfismu.

Důkaz (idea):

- Mějme rek. vyč. jazyk $L \subseteq \Sigma_1^*$ a morfismus $h: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$.
- Ukážeme, že $h(L)$ je rek. vyč.

- Vzhledem k tomu, že $L \in \mathcal{L}_0$, existuje TS M takový, že $L(M) = L$.
- dále víme, že h lze bez ztráty informace reprezentovat konečnou f-cí $h_0 : \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$ tak, že $\forall a \in \Sigma_1 : h_0(a) = h(a)$.
- h_0 je konečný objekt a může být součástí jednotlivých řídicích stavů TS
- zkonstruujeme nyní TS M' takový, že $L(M') = h(L)$, a to jako 2-páskový TS, který pracuje následovně:



1. M' nedeterministicky rozdělí svůj vstup w na sekvenci podřetězců $w_1, w_2, \ldots, w_n$, kde $n \geq 0$, takovou, že $w = w_1 \ldots w_n$, a to vložením symbolů Δ. (Pro $n = 0$, $w = \varepsilon$.) Samozřejmě je možné, že $w_i = \varepsilon$ pro libovolné $1 \leq i \leq n$.
2. Na 2. pásku zapíše sekvenci $a_1 \ldots a_n$ nedeterministicky zvolených symbolů $a_i \in \Sigma_1$ (pro $1 \leq i \leq n$).

3. M' projde 2. pásku a pro každé i $(1 \le i \le n)$ ověří, zda $h_0(a_i) = w_i$, přičemž hodnotu $h_0(a_i)$ najde v kon. st. řízení. Pokud někde nastane neshoda, M' odmítne.

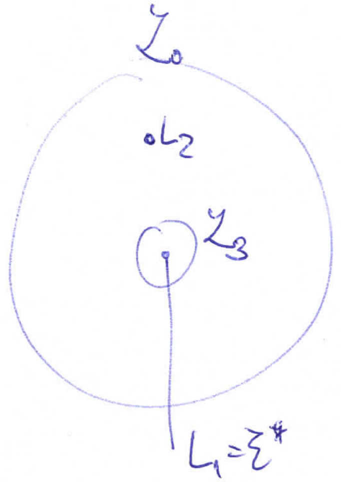
4. M' odsimuluje na 2. pásce běh TS M. Pokud přijme, přijme také, jinak odmítne (případně cyklí).

$\square$

- Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Je-li $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_0$, pak $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$.

b) Je-li $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_0$, pak $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$.



__ad a)__ Neplatí: Postačí zvolit abecedu Σ, jazyk $L_1 = \Sigma^*$ a $L_2 \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$. Přitom víme, že $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_0$, tedy nějaké $L_2 \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$ určitě existuje. Pak $L_1 \cap L_2 = L_2 \notin \mathcal{L}_3$

__ad b__ Neplatí: analogicky s bodem a, pouze zvolíme $L_1 = \emptyset$.

$\square$

NEROZHODNUTELNOST

Dokažte, že pro daný TS M lze rozhodnout, zda má definovány přechody z alespoň 2017 řídicích stavů.

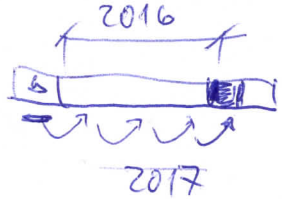
Důkaz (idea):

- Pro připomenutí: TS $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$, kde
  - Q - kon. mn-a stavů
  - Σ - kon. vst. abeceda, $\Delta \notin \Sigma$
  - $\Gamma \supset \Sigma$ kon. pásk. abeceda taková, že $\Delta \in \Gamma$, $L, R \notin \Gamma$.
  - δ: parc. f-ce $(Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$
  - $q_0, q_F \in Q$
- Víme dále, že TS lze kódovat pro interpretaci UTS jako řetězec nad $\{0, 1\}$ takto:
  - každý přechod $q_1 \xrightarrow{x/y} q_2$ lze kódovat jako $\langle q_1 \rangle 1 \langle x \rangle 1 \langle q_2 \rangle 1 \langle y \rangle$, kde $\langle q_1 \rangle, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle q_2 \rangle \in 0^*$

- TS s přechody $\delta = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ lze pak zakódovat jako $1 \langle t_1 \rangle 1 \langle t_2 \rangle \ldots \langle t_n \rangle 1$.
- Budeme předpokládat TS kódované výše uvedeným způsobem.
- Pak TS M, který rozhoduje uvedený problém může pracovat takto:
  1. M ověří, zda má na vstupu platný kód TS (což odpovídá testu na členství v reg. jazyce platných kódů). Pokud na vstupu není platný kód, TS M odmítne.
  2. M postupně prochází kódy jednotlivých přechodů na vstupní pásce a pro každý přechod ověří, zda již má na druhé pásce uveden kód výchozího stavu. Pokud ne, tento kód připíše na 2. pásku za vhodný oddělovač.
  3. M projde 2. pásku a ověří, zda má již alespoň 2017 kódů stavů.

D

Dokažte (stačí idea), že pro daný TS M je rozhodnutelné, zda existuje slovo $w \in \Sigma^*$, nad kterým M provede alespoň 2017 kroků.



Důkaz (idea):

Problém lze rozhodovat TS M' následovně:

- M' na své pásce postupně v lexikografickém uspořádání generuje řetězce nad Σ od délky 0 po délku 2016.
- Na každém vygenerovaném řetězci M' odsimuluje nanejvýše 2017 kroků TS M. Pokud M' na alespoň 1 z těchto řetězců provede 2017 kroků TS M, M' přijme, jinak odmítne.
- Tato konstrukce je korektní, neboť pokud M na žádném z řetězců délky 2016 neprovede 2017 kroků, pak to znamená, že se nikdy nedostane k 2017. symbolu. Nemá tedy

smysl uvažovat řetězce délky 2017 a více, protože od jejich 2017 symbolu dále nikdy nebudou porušity. $\square$