Otázky ke státnicím - MMI

neděle 21. února 2016
14:30

Link: https://www.fit.vutbr.cz/info/rd/2015/rd08-150326.pdf
Fituška - http://wiki.fituska.eu/index.php/Okruhy_MMI_2011
https://kalabovi.org/pitel:msz:mgm
http://wiki.fituska.eu/index.php/Okruhy_MMI_2013
https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&hilit=komise

Průběhy státnic

- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread
- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread
- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread
- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread
- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20068&all_posts=1#unread
- https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread

Seznam otázek

- **MAT**

1. Jazyk a sémantika predikátové logiky (termy, formule, realizace jazyka, pravdivost formulí).
2. Formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost, model a důsledek teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti, prenexní tvar formulí).
3. Algebraické struktury (grupy, okruhy, obory integrity a tělesa, svazy a Boolovy algebry, univerzální algebry).
4. Základní algebraické metody (podalgebry, homomorfismy, přímé součiny, kongruence a faktorové algebry, normální podgrupy a ideály okruhů).
5. Obory integrity a dělitelnost (okruhy polynomů, pravidla dělitelnosti, Gaussovy a Eukleidovy okruhy).
6. Teorie polí (minimální pole, rozšíření pole, konečná pole a jejich konstrukce).
7. Metrické prostory (příklady, konvergence posloupností, spojitá a izometrická zobrazení, úplnost, Banachova věta o pevném bodu).
8. Normované a unitární prostory (základní vlastnosti a příklady, normované prostory konečné dimenze, uzavřené ortonormální systémy a Fourierovy řady).
9. Obyčejné grafy (stupně uzlů, cesty a kružnice, souvislost grafu, stromy, kostry, Kruskalův a Primův algoritmus pro hledání minimální kostry ohodnoceného grafu, eulerovské a hamiltonovské grafy, obarvitelnost a planarita).
10. Orientované grafy (orientované cesty a kružnice, souvislost a silná souvislost, turnaj, eulerovské a hamiltonovské grafy, Dijkstrův a Floyd-Warshallův algoritmus pro hledání cesty minimální délky).

- **TIN**

11. Klasifikace gramatik, formálních jazyků a automatů přijímajících jazyky.
12. Vlastnosti formálních jazyků (typické vlastnosti a jejich rozhodnutelnost).
13. Konečné automaty (jazyky přijímané jazyky KA, varianty KA, minimalizace KA).
14. Regulární množiny, regulární výrazy a rovnice nad regulárními výrazy.
15. Transformace a normální formy bezkontextových gramatik.
16. Zásobníkové automaty (jazyky přijímané ZA, varianty ZA).
17. Turingovy stroje (jazyky přijímané TS, varianty TS, lineárně omezené automaty, univerzální TS).
18. Nerozhodnutelnost (problém zastavení TS, princip diagonalizace a redukce, Postův korespondenční problém).
19. Parciální rekurzivní funkce.
20. Časová a paměťová složitost (třídy složitosti, úplnost, SAT problém).

- **FLP**

21. Lambda kalkul (definice všech pojmů, operací...).
22. Haskell - lazy evaluation (typy v jazyce včetně akcí, význam typových tříd, demonstrace lazy

evaluation).

23. Prolog - způsob vyhodnocení (základní princip, unifikace, chování vestavěných predikátů, operátor řezu /vhodné a nevhodné užití/).

- **MAR**

24. Segmentace trhu (podstata a účel segmentace, segmentační kriteria, žádoucí charakteristiky segmentů).
25. Marketingový mix (co to je, které prvky tvoří marketingový mix 4P, 5P a 7P).
26. Cena (faktory ovlivňující výši ceny, metody stanovení ceny a jejich stručná charakteristika).
27. Distribuce (účel distribuce, distribuční cesty/kanály,charakteristika velkoobchodu a maloobchodu).
28. Propagace (podstata a účel komunikace, prvky komunikačního mixu).

- **MPR**

29. Životní cyklus projektu z hlediska projektového řízení. Souvislosti projektového řízení (objekty řízení projektu, princip trojího omezení, faktory podnikového prostředí, organizační struktury, zainteresované strany, socioekonomické vlivy).
30. Znalostní oblasti managementu projektů (vyjmenovat, každou oblast stručně charakterizovat). Management rozsahu projektu (procesy, metody, strukturovaná dekompozice práce).
31. Management času a nákladů v rámci projektů (procesy, metody, metoda kritické cesty CPM – Critical Path Method, metoda odhadu pracnosti FPA - Function Point Analysis, řízení dosažené hodnoty projektu EVM - Earned Value Management, prognózování).
32. Management rizik v rámci projektů (procesy, metody, rozhodovací strom, matice pravděpodobnosti a dopadu, analýza očekávané peněžní hodnoty, kategorie rizik v projektech IT, eliminace rizik v softwarových projektech).
33. Management kvality v rámci projektu (procesy, metody, Paretova analýza, diagram příčin a účinků, kvalitativní charakteristiky softwarových produktů).
34. Metoda Logického rámce (LFM - Logical Framework Matrix).

- **PRL**

35. Klasifikace a vlastnosti paralelních a distribuovaných architektur.
36. Základní typy topologií paralelních a distribuovaných architektur a jejich vlastnosti.
37. Distribuované a paralelní algoritmy - algoritmy řazení, select.
38. Distribuované a paralelní algoritmy - algoritmy vyhledávání.
39. Distribuované a paralelní algoritmy - algoritmy nad seznamy, stromy a grafy.
40. Interakce mezi procesy a typické problémy paralelismu (synchronizační a komunikační mechanismy).
41. Distribuované a paralelní algoritmy - předávání zpráv a knihovny pro paralelní zpracování (MPI).
42. Distribuovaný broadcast, synchronizace v distribuovaných systémech.

- **ZPO**

43. Obrazová data, jejich pořizování a možná poškození (obrazová data, možné reprezentace obrazu, druhy snímacích čipů a zařízení, jejich vlastnosti, vady pořízeného obrazu, šumy, optimální filtrace obrazu).
44. Transformace obrazu (jaké se používají transformace při zpracování obrazu, důvody a typické příklady použití transformací při zpracování obrazu).
45. Filtrace obrazu (definice lineární filtrace, typické příklady použití filtrů, použití rychlá konvoluce (přes FFT), návrh lineárních filtrů, nelineární filtrace).
46. Detekce hran, segmentace (vymezení pojmů detekce hran a segmentace, možné aplikace algoritmů a jejich důvody, typické nasazení algoritmů).

- **EIP**

47. Informační management (základní souvislosti, postup tvorby podnikatelské/business strategie, manažerské informační systémy - MIS)
48. Oceňování a verzování (základní vlastnosti a nákladové charakteristiky informačních produktů, přístupy/strategie k ocěňování, verzování - podstata, dimenze použití, východiska pro určení počtu verzí, druhy a formy svazování, cenová diskriminace)
49. Uzamčení a náklady na přechod (pojem, klasifikace uzamčení, cyklus uzamčení, řízení uzamčení - strategie kupujících a prodávajících)
50. Řízení sítí a síťová ekonomika (síť a síťové struktury, síťové externality a příčiny vzniku, proces vytváření sítí, standardizace a její dopady na řízení sítí)

- **SRI**

51. Management procesů (co je to proces, základní charakteristiky a dělení procesů, charakteristiky procesní organizace a postup jejího zavádění). Analýza a modelování procesů - CASE nástroje (charakteristika, klasifikace, komponenty a přínosy)
52. Business Process Reengineering (pojem a podstata, klíčové charakteristiky, postup implementace).
53. Efektivnost IS/IT (efektivita vs. efektivnost, metrika - pojem, atributy, typy, klasifikace výdajů – pojem TCO, hodnocení přínosů).
54. Informační bezpečnost (přístupy k hodnocení, klasifikace hrozeb a zranitelností, postup analýzy rizik IS, porušení bezpečnosti - bezpečnostní incidenty, typy útoků, cíle útoků)

- **MEK**

55. Majetková a kapitálová struktura podniku; výnosy, náklady a výsledek hospodaření.
56. Vztah mezi náklady, objemem a ziskem. Bod zvratu početně a graficky.
57. Výrobní činnost podniku, výrobní kapacita, produktivita. Zásoby v podniku.
58. Investiční rozhodování v podniku. Metody hodnocení investic: čistá současná hodnota, doba návratnosti, vnitřní výnosové procento.

- **STM**

59. Popis a charakteristika procesu strategického řízení firmy.
60. Hierarchie firemní strategie - vize, mise, firemní strategie, business strategie, funkční strategie.
61. Princip a struktura strategické analýzy.
62. Analytické nástroje pro hodnocení interních a externích faktorů.
63. Definování strategických obchodních jednotek, využití strategických obchodních jednotek.

Komise

pátek 10. června 2016
10:23

Basic info

- Číslo - 63
- Místnost - M104
- Zahájení - 8:45
- Ukončení - 16:00

Členové

- Kreslíková Jitka, doc. RNDr., CSc. UIFS FIT VUT, Brno
- Hruška Tomáš, prof. Ing., CSc. UIFS FIT VUT, Brno
- Beran Vítězslav, Ing., Ph.D. UPGM FIT VUT, Brno
- Češka Milan, prof. RNDr., CSc. UITS FIT VUT, Brno
- Chudý Peter, Ing., Ph.D. MBA UPGM FIT VUT, Brno
- Kubíčková Lea, doc. Ing., Ph.D. Mendelu, Brno
- a) Růžička Richard, doc. Ing., Ph.D., MBAUPSY FIT VUT, Brno
- b) Křena Bohuslav, Ing., Ph.D. UITS FIT VUT, Brno

- Musil Miloš, Ing. UIFS FIT VUT, Brno
- c) Dytrych Jaroslav, Ing. UPGM FIT VUT, Brno

Studenti

1. Šafář Martin, Bc. xsafar13 Transformace dokumentů HTML na vektorovou grafiku SVG
2. Pyszko Petr, Bc. xpyszk02 Nativní framework pro univerzální nabídkový systém pro platformu Android
3. Marša Michal, Bc. xrysav17 Predikce hodnot v čase
4. Mareček Matěj, Bc. xmarec12 IDE for SCADA Development at CERN
5. Maňák Libor, Bc. xmanak17 Android aplikace - slovník s příklady
6. Maďarka Dušan, Bc. xmadar01 Implementace GIS služby WPS
7. Lorenc Ján, Bc. xloren10 Porovnání vlastností a výkonnosti jader uC/OS-II a uC/OS-III
8. Kajzar Aleš, Bc. xkajza00 Rozpoznávání pohybu těla pomocí nositelných zařízení

9. Hrivnák Jan, Bc. xhrivn01 Zvyšování kvality autoškol pomocí sdílení uživatelských zkušeností
10. Filičko Dávid, Bc. xfilic00 Rozšíření analýzy rizik v systému RTC
11. Černoch Jiří, Bc. xcerno18 Modelování a řízení projektového portfolia
12. Boychuk Maksym, Bc. xboych00 Zpracování a vizualizace senzorových dat ve vojenském prostředí

Oblíbené otázky členů komise

Kreslíková Jitka, doc. RNDr., CSc. UIFS FIT VUT, Brno

- 29 - Životní cyklus projektu z hlediska projektového řízení (1x)
- 31 - Management času a nákladů v rámci projektů (1x)
- 32 - Management rizik v rámci projektů (5x)
- 33 - Management kvality v rámci projektu (2x)

Hruška Tomáš, prof. Ing., CSc. UIFS FIT VUT, Brno

- 01 - Jazyk a sémantika predikátové logiky (2x)
- 11 - Klasifikace gramatik, formálních jazyků a automatů přijímajících jazyky (2x)
- 14 - Regulární množiny, regulární výrazy a rovnice nad regulárními výrazy (1x)
- 21 - Lambda kalkul (1x)

- 23 - Prolog - způsob vyhodnocení (1x)
- 31 - Management času a nákladů v rámci projektů (0.5x)

Beran Vítězslav, Ing., Ph.D. UPGM FIT VUT, Brno

- 43 - Obrazová data, jejich pořizování a možná poškození (1x)
- 44 - Transformace obrazu (2x)
- 45 - Filtrace obrazu (3x)
- 46 - Detekce hran, segmentace (2x)

Češka Milan, prof. RNDr., CSc. UITS FIT VUT, Brno

- 02 - Formální systém predikátové logiky (1.5x)
- 03 - Algebraické struktury (5x)
- 04 - Základní algebraické metody (3x)
- 05 - Obory integrity a dělitelnost (0.5x)
- 09 - Obyčejné grafy (3.5x)
- 11 - Klasifikace gramatik, formálních jazyků a automatů přijímajících jazyky (1x)
- 12 - Vlastnosti formálních jazyků (2x)
- 15 - Transformace a normální formy bezkontextových gramatik (1x)
- 17 - Turingovy stroje (1x)
- 19 - Parciální rekurzivní funkce (1.5x)
- 18 - Nerozhodnutelnost (3x)
- 20 - Časová a paměťová složitost (3x)
- 21 - Lambda kalkul (0.5x)

Chudý Peter, Ing., Ph.D. MBA UPGM FIT VUT, Brno

- 25 - Marketingový mix (1x)
- 29 - Životní cyklus projektu z hlediska projektového řízení (1x)
- 36 - Základní typy topologií paralelních a distribuovaných architektur a jejich vlastnosti (1x)
- 55 - Majetková a kapitálová struktura podniku; výnosy, náklady a výsledek hospodaření (1x)
- 60 - Hierarchie firemní strategie - vize, mise, firemní strategie, business strategie, funkční strategie (2x)

Co se naučit?

- MPR - celé, u této komise prý padají všechny MPR otázky
- FLP
- ZPO
- TIN a MAT - Češka
- Chudý zkouší PRL, management a MAR
- Kubíčková Lea - Ústav marketingu a obchodu (PEF)
- Jak to tak vypadá, tak **budu muset umět všechno :-/**

Predikatova logika
Axiom
Dusledek
Symboly
Formule
Odvozovaci pravidla
Dukaz
Dokazatelna formule
Formalizovana axiomaticka teorie

01 - Jazyk a sémantika predikátové logiky

čtvrtek 25. února 2016
21:44

Jazyk a sémantika predikátové logiky (termy, formule, realizace jazyka, pravdivost formulí).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Jazyk_a_s%C3%A9mantika_predik%C3%A1tov%C3%A9_logiky

Pojem **predikátová logika** označuje **formální odvozovací systém**, který se používá k **popisu matematických teorií** a vět.

- PL je **rozšíření výrokové logiky**: tedy ta sranda kde je $A, B, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \equiv$
- Tedy **to co platí ve výrokové logice platí i v predikátové logice**.

Logika pojmy

Axiom je výchozí tvrzení dané teorie, které nedokazujme**, jejich platnost se předpokládá** (zapsány pomocí abecedy jako jisté formule).

- **Bezespornost** (základní požadavek) - důsledkem axiomů nesmí být nějaké tvrzení a současně jeho negace
- **Nezávislost** (vedlejší požadavek) - jeden axiom nesmí být důsledkem jiných axiomů

Důsledek je dedukcí odvozené tvrzení z axiomů
Symboly - speciální znaky, které tvoří abecedu dané teorie
Formule - slova v této abecedě složená ze symbolů, tvoří jazyk teorie
Odvozovací pravidla - manipulace s formulemi, pomocí nichž a axiomů odvozujeme důsledky
Důkaz - posloupnost formulí, která jsou buď **axiomy** nebo jsou důsledkem použití **odvozovacích pravidel** na axiomy

- Jedno z takových odvozovacích pravidel je **Modus ponens** $A, A \rightarrow B$, pak platí B.

Dokazatelná formule - formule A, pro niž existuje důkaz, jehož posledním krokem je A. Značíme $\vdash A$
Formalizovaná axiomatická teorie - je tvořena

- jazykem = množina dobře utvořených formulí
  - abeceda (symboly)
  - gramatika (pravidla pro tvorbu formulí)
- axiomy
- odvozovacími pravidly

Vyrokova logika
Prvotni formule
slozene vyroky
Pravdiva formule
Pravdivostni ohodnoceni
Tautologie
Logicky ekvivalentni

Výroková logika

V matematice a logice se pojmem výroková logika označuje formální odvozovací systém, ve kterém atomické formule tvoří výrokové proměnné

Prvotní formule *p*,*q*,... - jsou jednoduché výroky, které dále neanalyzujeme.

Složené výroky/ Výrokové formule - konstruujeme z prvotních formulí pomocí logických spojek $\neg$ $(!, negace)$, $\wedge$ $(\&, \text{konjunkce})$ $\vee$ $(||, \text{disjunkce})$, $\rightarrow$ $(implikace)$, $\equiv$ (ekvivalence) a závorek ().

Formule A je pravdiva pri ohodnoceni v jestlize v(A)=1

Pravdivostní ohodnocení formulí je zobrazení formulí do množiny $\{0,1\}$, kde 1 znamená pravdivé hodnocení.

Tautologie jsou formule, které jsou *pravdivé při libovolném ohodnocení*, píšeme $\vDash$, např.:

- **zákon vyloučení třetího:** $A \vee \neg A$
- **zákon dvojí negace:** $\neg\neg A \equiv A$
- **zákon vyloučení sporu:** $\neg(A \wedge \neg A)$

Logicky ekvivalentní formule mají stejné pravdivostní ohodnocení při libovolném ohodnocení jejich částí.

Chyby formalni axiomaticky system vyrokove logiky!
MP
Veta o korektnosti, uplnosti, dedukci, neutralni formuli

Axiomy výrokové logiky

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Odvozovací pravidlo **Modus Ponens** (Pravidlo odloučení)

Jestliže platí formule $\mathbf{A}$ a formule $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, tak také **platí** $\mathbf{B}$.

- Neboli jestliže platí "A" a zároveň platí "z A vyplývá B", pak platí i "B".

Věta o korektnosti

Libovolná dokazatelná formule výrokové logiky je tautologie

Postova věta o úplnosti

Dokazatelné formule jsou tautologiemi ($\vDash \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \vdash \mathbf{A}$).

- Tedy formule, které dokážeme, tak jsou vždy pravdivé (tautologie, což dává smysl :-D)

Věta o dedukci

Nechť T je množina formulí, nechť A,B jsou formule. Potom $\mathrm{T} \vdash \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ právě když $\mathrm{T} \cup \{\mathrm{A}\} \vdash \mathrm{B}$.

- Tedy:
  Je-li věta B dokazatelná z vět $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pak věta $A_n \to B$ je dokazatelná z vět $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$(tedy je-li $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash B}$**, pak** $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_{n\ 1} \vdash A_n \to B}$).

Lemma o neutrální formuli

Nechť T je množina výrokových formulí, nechť A, B jsou formule. Jestliže $\mathrm{T}, \mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$ a $\mathrm{T}, \neg \mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$, pak $\mathrm{T} \vdash \mathrm{B}$.

- Tedy pokud B dokáži T a potom je jedno jestli je A nebo ¬A, tak prostě z T dokáži B, tedy $\mathrm{T} \vdash \mathrm{B}$.

Jazyk predikatove logiky - abeceda, gramatika
Volny vazany vyskyt
Otevrena uzavrena formule

Jazyk predikátové logiky 1. řádu

Je formální systém pro **popis matematických teorií** a vět. Oproti jazyku výrokové logiky **umožňuje vyjádřit složitější tvrzení** o matematických strukturách. **Zavádí** **kvantifikátory** (∀, ∃), **funkční** (+,∗, ...) a **predikátové symboly** (≥, =, <, ...) a **proměnné** (x, y, ...) pro objekty daného oboru. Predikátová logika 1. řádu oproti logikám vyššího řádu umožňuje kvantifikovat pouze proměnné pro individua (např. čísla), ne množiny nebo relace.
Jazyk predikátové logiky je obecně definován: **abecedou** (symboly) a **gramatikou** (pravidla pro tvorbu formulí)

Abeceda

Logické symboly

- **Proměnné** označují libovolný prvek z daného oboru objektů (čísla, body prostoru).
- **Logické spojky** jsou definovány stejně jako ve výrokové logice (¬,∧,∨, →, ≡)
- **Pomocné symboly** - závorky (a)
- **Kvantifikátory** označují platnost pro *všechny* objekty oboru, popř. *existenci* požadovaného objektu
  - ∀ - obecný (univerzální) kvantifikátor - "pro všecha..."
  - ∃ - existenční kvantifikátor - "existuje..."
  - (v dalším textu označuje symbol Q predikáty ∀ nebo ∃)
- **Predikátový symbol rovnosti** = (pokud jej jazyk obsahuje mluvíme o jazyku s rovností)

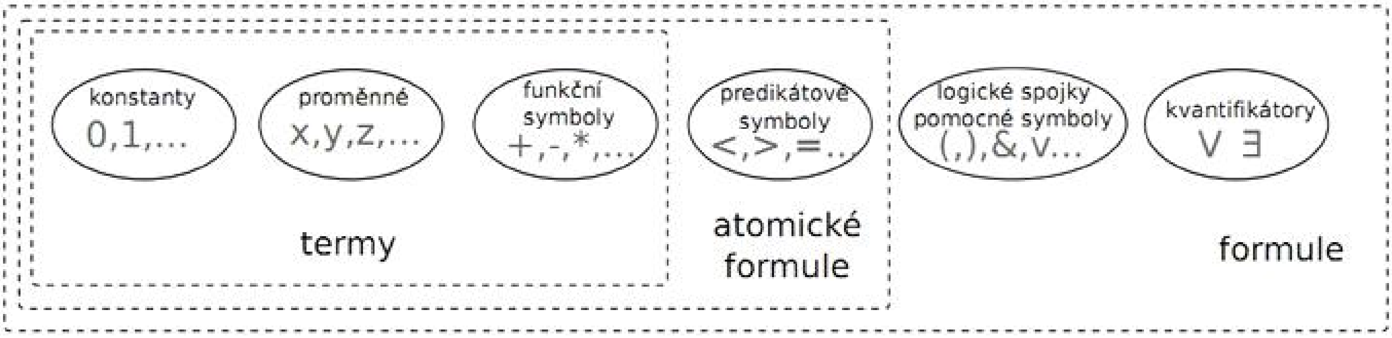
Speciální symboly

- **Funkční symboly** (f, g, ...) označují operace nad objekty. Mají *aritu* (četnost) - celé číslo (nezáporné), které udává počet argumentů.
  - **Konstanty** je možno chápat jako nulární funkční symboly, označují jediný objekt (většinou něčím význačný - 0, neutrální prvek grupy).
- **Predikátové symboly** (p, q, ...) označují vlastnosti objektů (predikáty) a vztahy mezi nimi (je menší než, rovná se,...), také mají aritu (kladné celé číslo).

Gramatika

- **Termy** jsou tvrzení sestavená pomocí **proměnných**, **konstant** a **funkčních symbolů**.

(např. *x.(y + z)*)
- **Atomické formule** jsou tvrzení sestavená pomocí **termů** a **predikátových symbolů**.
  (např. *x*.(*y* + *z*) = (*x*.*y*) + (*x*.*z*))
- **Formule** jsou tvrzení sestavená pomocí **atomických formulí** (termy + predikátové symboly), **logických spojek** a **kvantifikátorů**. (např. $\forall x(x \neq\rightarrow \exists y(x = S(y)))$)



Pojmy
- **Vázaný výskyt proměnné** *x* ve formuli φ (Phi) znamená, že proměnná *x* se nachází v podformuli φ tvaru $\forall x\varphi$ nebo $\exists x\varphi$. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná *x* **volnou proměnnou**.
- **Uzavřená formule/výrok**, neobsahuje žádnou volnou proměnnou.
  - formule $x + y = z$ je **otevřená** ale ne uzavřená
  - formule $(\forall x)(\exists y)(x + y = xy)$ je **uzavřená** ale ne otevřená
  - formule $(\forall x)(x < y)$ není **ani otevřená ani uzavřená**
  - formule $0 + 0 = 0$ je **otevřená i uzavřená**

Sémantika predikátové logiky
Sémantika neboli **význam formulí predikátové logiky 1.** řádu, je dána jejich **interpretací**. Položíme-li si otázku zda daná formule predikátové logiky je pravdivá či ne, pak taková otázka je v podstatě nesmyslná, pokud nevíme, **co formule znamená**, tedy jak je interpretována. Tak např. Formule

$$\forall xp(f(x), x)$$

může "říkat", že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je větší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je starší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě v takových interpretacích pravdivá. Může ale také znamenat, že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je menší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je mladší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě (v takové interpretaci) nepravdivá.

Podobně např. formule, kterými jsme v předchozí kapitole analyzovali věty přirozeného jazyka, mohou být interpretovány tak, aby zachycovaly význam těchto vět ("zamýšlená" interpretace), ale mohou být interpretovány úplně jinak. Například formule, která je analýzou věty *Někteří chytří lidé jsou líní*, tedy
$\exists \boldsymbol{x}[\boldsymbol{Ch}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})]$
může být interpretována jako zachycující význam věty *Některá lichá čísla jsou dělitelná dvěma*, a pak je evidentně (v této interpretaci) *nepravdivá*.

V čem tedy spočívá interpretace formule? Nejprve musíme stanovit, "o čem mluvíme", tedy jaká je předmětná oblast - obor proměnnosti proměnných, tj. zvolíme
jistou *neprázdnou* množinu – **univerzum**, jejíž prvky budou **individua.** Jelikož predikátové symboly mají vyjadřovat vztahy mezi těmito předměty - prvky univerza, přiřadíme každému n-árnímu **predikátovému symbolu** jistou n-ární **relaci** (tj. podmnožinu Kartézského součinu) nad univerzem. Jedná-li se o unární predikátový symbol ($n = 1$), pak přiřadíme podmnožinu univerza. Podobně **funkční symboly** budou vyjadřovat n-ární **funkce** nad univerzem. Teprve poté, co je daná formule interpretována, můžeme **vyhodnotit** její **pravdivost** či nepravdivost **v dané interpretaci.** Je zde však ještě jeden problém, a to jsou proměnné. Proměnným jazyka predikátové logiky přiřazujeme **valuací** individua, tj. prvky univerza. (Proměnným jazyka predikátové logiky druhého řádu pak mohou být přiřazeny také vlastnosti či funkce.) **Pravdivostní hodnota formule nezávisí na hodnotě vázaných proměnných** (pouze volné proměnné jsou "skutečné" proměnné). Obsahuje-li však formule nějaké volné proměnné, můžeme vyhodnotit její pravdivost v interpretaci pouze

v **závislosti na ohodnocení** (valuaci) **volných proměnných**. Při některé valuaci může být formule v dané interpretaci pravdivá, při jiné nepravdivá. Tak např. formule
$\forall x p(f(x), y)$

Zavádí symbolům predikátové logiky význam, interpretaci. V jejím kontextu, pak lze zkoumat pravdivost formulí.

Realizace (interpretace) jazyka *L* je algebraická struktura $\mathcal{M}$, složená z:

- **univerzum** $\mathbf{M}$ - neprázdná množina objektů (tj. množina (obor) hodnot)
  - Například univerzum M může být množina všech nezáporných čísel $\{0,1,2,3,\ldots\}$
- **funkční zobrazení** $\boldsymbol{f_{\mathcal{M}}: M^n \to M}$ (tj. definice funkcí) pro každý symbol *f* četnosti *n*
  - Prostě n-tici se přiřazuje právě jedno individuum: $M \times \cdots \times M$ do M
  - Je-li $\boldsymbol{n = 0}$, pak se jedná o nulární funkční symbol, tedy o individuovou **konstantu**, které je přiřazen prvek univerza - individuum. Například 1,2, true, false, …
  - Je-li $\boldsymbol{n = 1}$, pak se jedná o **unární funkční symbol**, kterému je přiřazena funkce o jednom argumentu (např. nad množinou čísel $\boldsymbol{x^2}$, $x1$, nad množinou individuí otec (x), matka (x), atd.)
  - Je-li $\boldsymbol{n = 2}$, pak se jedná o **binární funkční symbol**, kterému je přiřazena binární funkce se dvěma argumenty (např. nad množinou čísel $\boldsymbol{x + y}$, $x \cdot y$, atd.)
- **predikátová relace** $\boldsymbol{p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n}$ (tj. definice predikátových relací) pro každý **predikátový symbol *p*** četnosti ***n*** (kromě rovnosti)
  - Tedy jedná se o zobrazení:$M \times \cdots \times M$ do $\{0,1\}$
  - Je-li $\boldsymbol{n = 0}$, pak se jedná o **nulární predikátový symbol**, kterému je přiřazena hodnota **1** nebo **0** (**pravda**, **nepravda**) tak, jak to již známe z výrokové logiky.
  - Je-li $\boldsymbol{n = 1}$, pak se jedná o unární predikátový symbol, kterému je přiřazena podmnožina univerza M. (Vlastnosti tedy v predikátové logice vyjadřujeme jako podmnožiny univerza.)
  - Je-li $\boldsymbol{n = 2}$, pak se jedná o **binární predikátový symbol**, kterému je přiřazena binární relace nad univerzem (např. relace **>=**, **<**, apod.)

Výroková logika je tedy specielním (nejjednodušším) **případem predikátové logiky**, a to **0. řádu**, ve které pracujeme pouze s nulárními predikáty a nepotřebujeme proto termy, funkční symboly, individuové proměnné ani univerzum. Nulárním predikátům přiřazujeme pouze hodnoty pravda, nepravda.

(Pro nulární funkční symbol (konstantu) je $M^0 = \{\emptyset\}$ a příslušné zobrazení $M^0 \to M$ lze chápat jako vyznačení určitého prvku z M odpovídající dané konstantě.)

Ohodnocení proměnných je libovolné zobrazení *e* množiny všech proměnných do univerza *M* dané realizace $\mathcal{M}$ jazyka L.

- Jinými slovy: ***Ohodnocení (valuace) individuových proměnných*** je zobrazení e, které každé proměnné x přiřazuje hodnotu $\boldsymbol{e(x) \in M}$ (prvek univerza)

Formule φ je splněna v realizaci $\mathcal{M}$, pokud je pravdivá při každém ohodnocení *e*. Píšeme $\mathcal{M} \models \varphi$. Je-li φ uzavřená, pak říkáme, že φ je pravdivá v $\mathcal{M}$.

Formule φ je logicky platná (tautologie), pokud pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L platí $\mathcal{M} \models \varphi$. Píšeme $\models \varphi$.

Formule φ a ψ (psi) jsou logicky ekvivalentní, pokud při libovolné realizaci $\mathcal{M}$ a libovolném ohodnocení *e* je $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{M} \models \psi[e]$. ($\varphi \equiv \psi$ je logicky platná formule)

Každá formule φ je ekvivalentní nějaké formuli ψ, ve které se nevyskytuje jeden kvantifikátor, popř. takové, ve které se vyskytují pouze spojky ¬ a → a kvantifikátor ∀.

Substituce termů za proměnné: Pokud v termu *t* dosadíme za proměnné další termy, *t* zůstává termem. Dosazením termů za proměnné ve formuli vytvoří opět formuli. Ne vždy je to vhodné, proměnná musí být *substituovatelná*. Značíme $\phi_x[y]$, tedy v ϕ jsou všechna x nahrazena za y.

Substituovatelná proměnná *x* je taková, že *žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru proměnné y*, která je obsažená v substituovaném termu. Např. term *S*(*y*) není substituovatelný za term *x* ve formuli $x \rightarrow \exists y(x = S(y))$.

- Příklad substituce, která nelze provést
  - Mějme: $P(x) \supset \forall y Q(x,y)$, term t = f(y)
  - Provedeme-li sbstituci $A(x/f(y))$ dostaneme
    - $P(f(y)) \supset \forall y Q(f(y),y)$
      - X byla volná proměnná ale po substituci se jedna její část stala vázanou.
    - Term $f(y)$ **není** substitovatelný za x, jelikož bychom změnili smysl formule
    - Je to dáno tím, že term obsahuje proměnnou $\boldsymbol{y}$ a ta **je již ve formuli vázaná**

Příklad s realizací jazyka

http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=zaklady-informatiky-pro-biology--teoreticke-zaklady-informatiky--predikatova-logika--semantika-jazyka-predikatove-logiky-interpretace-formuli

Uvažujme **jazyk** predikátové logiky s následujícími konstantami:

- f_0, f_1 - nulární funkční symboly
- g -unární funkční symbol
- h, k - binární funkční symbol
- p, q - binární predikátové symboly

Pro tento jazyk definujme **interpretaci** následujícím způsobem:

- Univerzum *M* je množina všech nezáporných celých čísel $\{0,1,2,3, \ldots\}$

Realizace funkčních symbolů jsou definovány takto:

- f_0 … předmětová konstanta: číslo 0 /nikoliv pravdiv. hodnota !/
- f_1 … předmětová konstanta: číslo 1 /nikoliv pravdiv. hodnota !/
- g … zobrazení $M \rightarrow M$ definované takto: $g(x) = x + 1$
- h … zobrazení $M \rightarrow$ M definované takto: $h(x,y) = x + y$
- k … zobrazení $M \rightarrow$ M definované takto: $k(x,y) = x \cdot y$

Realizace predikátových symbolů jsou definovány takto:

- p … podmnožina množiny M^2 definovaná jako množina všech dvojic $\langle x,y \rangle$, pro které platí $x = y$
- q … podmnožina množiny M^2 definovaná jako množina všech dvojic $\langle x,y \rangle$, pro které platí $x < y$

Super, takže jsme si nějak definovali sémantiku (realizaci). A teď pomocí standardní formule predikátové logiky zapíšeme skutečnost, pro všechna x, y, z platí $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
$\forall x \forall y \forall z[p(k(h(x,y),z),h(k(x,z),k(y,y)))]$

Logické formule

Výskyty proměnných ve formuli

Vázaný výskyt proměnné x ve formuli φ znamená, že proměnná x se nachází v podformuli φ tvaru ∀xφ nebo ∃xφ. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná x *volnou proměnnou*.

Příklad 1

Mějme formuli $\varphi: \exists x \forall y p(x,z)$. Potom:

- y je vázaná v φ*
- z je volná v φ
- x je vázaná v φ
- V opoře je napsáno, že proměnná je vázaná pokud se nachází pouze v kvantifikátoru

Příklad 2

Mějme formuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z)) \rightarrow \forall x S(x,y)$. P, R, S jsou predikáty. Potom

- y je vázaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$
- z je vázaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$
- y je volná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$
- z není (volná) v podformuli $\exists x P(x,y)$
- z je vázaná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$

http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=zaklady-informatiky-pro-biology--teoreticke-zaklady-informatiky--predikatova-logika--semantika-jazyka-predikatove-logiky-interpretace-formuli

Notes

2. Otazka (predmet) (okruh): 11. Jazyk a sémantika predikátové logiky (termy, formule, realizace jazyka, pravdivost formulí).
Kdo me primarne zkousel: **Hruška**
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: To bylo horší. Začal jsem říkat dle mě hodně nepřesně **stavbu jazyka**. Chtěl tím začít. Pořad jsme se patlali v tom co je to **predikát**, **term** a hlavně jestli to jde **vyčíslit** a jestli to jde **rozhodnout**. Moc jsem mu celou dobu nerozuměl, co po mě chce. Stres byl velký, protože jednoduše matika... Pak začaly otázky ano/ne. Většinou jsem netušil co chce. Po tom co jsem tipnul špatně mi řekl ne a větu, po které bylo jasné co chce. Tak jsem se opravoval, např. že jsem uvázal proměnnou a řekl že proměnná je uvázaná když...pak zazvonil budík. Zeptal se mě na binarní spojky či co. A nemyslel or, and, implikaci. Šel jsem ven velmi nervozní z výsledku. Nakonec D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1>

1. Otazka (predmet) (okruh): Jazyk a sémantika predikátové logiky (MAT)
Kdo me primarne zkousel: Smrž
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: No, poté co jsem dostal otázky jsem měl v hlavě najednou úplný prázdno a bylo mi jasný, že to nemůže dobře dopadnout. V tu chvíli bylo úplně jedno, kterou otázku si vyberu první, tak jsem zvolil MAT. I přes to, že se jedná o asi nejjednodušší otázku z MATU (po grafech), tak v tu chvíli mi nic nenaskočilo. Tak se Smrž začal ptát: "Co je to **predikátová logika**?"...ticho, "**Jak se liší od výrokové logiky?**"...ticho, "Dobrá, tak **z čeho se skládá predikátová logika?**". Tak jsem popsal **termy**, **atomický formule**, **formule**. Pak že tam něco chybí. Tak jsem přidal **logický spojky**, načež se zeptal: "Kolik teda vlastně těch spojek doopravdy potřebujeme?". Tak říkám: "Ekvivalenci nepotřebujeme..., implikaci vlastně taky ne...". Načež on: "Jak je to v počítačích, z čeho jsou paměti?". Nějak jsem přesně nechápal, co tím myslí, tak říkám: "No, ANDy a ... a ... OR.". A on: "OR??? Co by tam dělal OR? AND a NAND přece, takže **potřebujeme pouze spojku 'a' a negaci.**" Pak chtěl vědět, co je to **prenexní tvar formulí.** Tak jsem začal psát definici. To mě zastavil a že mám teda nějakou formuli napsat a převést ji. Tak jsem napsal formuli s implikací, načež chtěl, abych tu implikaci přepsal pomocí jiných spojek. Jelikož jsem asi úplně vypatlanej, tak jsem to převedl jako "A a neg B", což je ovšem negace implikace (v tu chvíli mi to nedošlo)
Na to říká: "No, to asi není správně. Napište si pravdivostní tabulku implikace." Na druhej pokus jsem ji napsal správně
"No a teď **vyjádřete tu implikaci pomocí jiné spojky.**" Poté jsem se asi 5 minut snažil tu implikaci převést a naštěstí se mi to nakonec povedlo, jinak bych se F opravdu nevyhnul.
Při ohlášení výsledků mi teda řekl, že ten výkon přisuzují mé nervozitě a nakonec mi dal E, za což jsem byl teda neskutečně rád.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1>

1. Otazka (MAT) (1. Jazyk a sémantika predikátové logiky):
Kdo me primarne zkousel: Steingartner William, Ing., Ph.D.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Rychle jsem ze sebe vychrlil všechno co jsem věděl. Popsal jsem **z čeho jsou složeny termy, atomické formule**, **formule**. Potom jsem řekl, co je to **realizace jazyka** a popsal kdy je formule splněná a kdy platná. - Jako osnovu jsem bral to co bylo u

toho okruhu v závorce. Todle všechno ze mě vypadlo ale tak rychle, že pak nastalo trapné ticho, tím jsem si sám naběhl na další otázky. Padl dotaz na nějakou specifickou definici predikatove logiky, kterou jsme nebrali, coz ostatni clenove komise potvrdili. Jinak byl zkousejici maximalne v pohode a byla moje blbost, ze jsem to vsechno co jsem vedel odvykladal tak rychle.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. MAT 1: Jazyk a sémantika predikátové logiky
Kdo me primarne zkousel: **Hruška**
Absolutně okno, nedokázal jsem se nějak rozmluvit, bylo vidět že společně s Češkou ze mě chcou něco vytáhnout což se nakonec evidentně povedlo, ale nedivil bych se ani za F

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Jazyk a sémantika predikátové logiky

Kdo me primarne zkousel: prof. Sveda

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Chtel hlavne vedet jaky je **rozdil mezi vyrokovou a predikatovou logikou**, pak **splnitelnost formuli** a neco o nejakych modelech, vubec nevim co chtel. Rekl jsem mu na to **realizaci jazyka**, to ho jaks taks uspokojilo, ale porad chtel nejake modely a ja moc netusil. Skrz to jsem se dostal nakonec az k axiomu a defakto k dukazu, coz moc nechtel slyset, ale par minut po budiku rekl, ze mu to staci. Byl hodne vpohode, nechtel nejake velke detaily.
Vysledek: B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Jazyk a semantika predikatovej logiky (MAT)
Kdo me primarne zkousel: Misovic (Externista)

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Na tuto otazku som dostal totalne okno a nevedel som si spomenut skoro na nic. Avsak pytal sa ma na zaklady ktore som ako tak vedel a dost pomahal. Nakoniec za C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): MAT 1. Jazyk a sémantika predikátové logiky (termy, formule, realizace jazyka, pravdivost formulí)

Kdo me primarne zkousel: Květoňová

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Řekl jsem z čeho se skládá (proměnné, symboly, funkce...)
Model - chtěla vědět co je to to **univerzum M**, **definice funkcí a predikátů**, příklad
Celkem jsem se zapotil, ale mluvil jsem a nemyslím si, že špatně.
Ohodnocení nevím, asi B/C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 1. Jazyk a semantika predikatove logiky

Kdo me primarne zkousel: Zboril starsi

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Muze byt jeste lehci otazka ? ano klasifikace gramatik a tu jsem dostal jako druhou. Jenze ale:)

Zacal sem **co obsahuje jazyk.** Po 30 sekundach byl vsak panem slova zboril a ptal se me. Otazky lehke, jasne - obrovske napovedy. Jenom sem asi nemel svuj den, otazku jsem si neozivil v pameti, (ucil jako prvni a pak uz nezbylo casu na opakovani) a nebyl jsem schopny dat dohromady nic

rozumneho. Nemohl jsem se "ustalit" a "myslet", rikal jsem jen veci ktere me zustali v hlave bez premysleni a bylo jich zatracene malo. Absolutni katastrofa pro me. Hruby dodaval dotazy, ptal jestli znam nejaky jazyk na pred. logice, a at napisu neco z nej. (ani sem nebyl schopny aby myslet smysluplny predikat - napsal ho ale). Pak me zboril jeste drtil na **konjuktivni a diskunktivnich a prenexnich formach**, podrtil velmi. Velmi se nemohl smirit s tim jak je mozne ze to nevim. Jeho akcnost stoupala.
A pak se z predesle dizkuse zeptal zda jsem slysel nekdy o **skolezimaci**. Rekl jsem ano ale oba sme v ocnim kontaktu vedeli ze dal se ptat nema (toto podotkl)
Pak udelal gesto lomenou rukou a tim dal signal k prejiti dalsi otazky. To gesto podle me znamenalo useknuti hlavy.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh): Jazyk a semantika predikatove logiky

Kdo me primarne zkousel: Šárka Květoňová

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Chtela vedet, co je to **formule**, neco k **predikatum** a nakonec **relaizaci jazyka**. Ale zacala s formuli a jak se jednotlive symboly matematicky zapisuji (do ted nevim co to vlastne chtela). Najednou zazvonil budik a bylo. Jeste se me Dusan zeptal jestli jsou nejake **konstanty** i **funkcni symboly**, rekl sem ne a pry jo

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

2. Otazka (okruh):1. Jazyk a sémantika predikátové logiky

Kdo me primarne zkousel: Květoňová

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Otázku jsem viděl tak 14 dní zpět a moc jsem ji nepomatoval, spiš vůbec, měl jsem akorát guláš v hlavě. Šárka po mě cosi chtěla, nějaký základní pojem. Plácal jsem všechno co mě napadlo. Ale doteď nevím co vlastně chtěla a nepřišel jsem na to. Na konci se snažil pomoct ještě rychlý, nepodařilo se..F

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh):
Jazyk a semantika predikatove logiky
Kdo me primarne zkousel:
Kvetonova
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Definoval jsem jazyk pred. logiky, **termy**, **formule**, **realizaci**, **priklad realizace**, vse jsem psal na tabuli. Zkousejici jsem moc nepoustel ke slovu, vzdy kdyz me smerovala co by chtela vedet, tak jsem vetu za ni dorekl ja a hned si odpovedel

Nikdo jiny se na nic neptal, trvalo to cca 4min.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

02 - Formální systém predikátové logiky

neděle 28. února 2016
21:51

Formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost, model a důsledek teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti, prenexní tvar formulí).

http://wiki.fituska.eu/index.php/Form%C3%A1ln%C3%AD_syst%C3%A9m_predik%C3%A1tov%C3%A9_logiky

Formální (axiomatický) systém predikátové logiky je tvořen:

- **jazykem predikátové logiky** (zde redukovaný pouze logické spojky negace ¬, implikace → a obecný kvantifikátor ∀)
- **axiomy**
- **odvozovacími pravidly**

Dokazování logických formulí

Axiomy predikátové logiky

Axiomy lze definovat pouze **za použití spojek** ¬ a → a kvantifikátoru ∀. Přepis existenčního kvantifikátoru na univerzální $\exists x\varphi$ je logicky ekvivalentní formule $\neg(\forall \boldsymbol{x}(\neg\boldsymbol{\varphi}))$

- *Není pravda, že by pro všechna x neplatila formule φ*

Axiomy výrokové logiky (predikátová logika je rozšířením výrokové logiky, přejímá i její axiomy)

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \eta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \eta))$
3. $((\neg\psi) \to (\neg\varphi)) \to (\varphi \to \psi)$
   - ? Zda můžu prostřední implikaci otočit? - tipuji, že **ANO**
     - $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi) \to (\neg\varphi))$

$\boldsymbol{\varphi}$	$\boldsymbol{\psi}$	Res
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**1**

Axiom *kvantifikátoru*

- $(\forall x(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to (\forall x\psi))$, x **nemá volný** výskyt v φ

Axiom *substituce*

- $(\forall x\varphi) \to \varphi_x[t]$, kde $\boldsymbol{t}$ je **term substituovatelný** za proměnnou $\boldsymbol{x}$
  - Říkáme, že term *t* je substituovatelný za proměnnou *x* do formule φ, jestliže *x* není volná v žádné podformuli tvaru $(\forall y)\psi$, kde proměnná *y* má výskyt v termu *t*.
    - Například následující substituce neplatí: $(\forall x(\neg\forall y(x = y))) \to (\neg\forall y(y = y))$
  - Tedy, pokud náš term *t* obsahuje proměnnou *y*, která je v místě substituce vázaná, musí tam být i *x* vázaná.
- **Substituovatelná proměnná** *x* je taková, že žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru proměnné *y*, která je obsažená v substituovaném termu. Např. term *S*(*y*) není substituovatelný za term *x* ve formuli $x \to \exists y(x = S(y))$

Axiomy *rovnosti* (je-li L jazyk s rovností)

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ je axiom (x je proměnná)
- $x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (\dots (x_n = y_n \to (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \dots)))$ je axiom (f je **funkční symbol** četnosti n)
- $x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (\dots (x_n = y_n \to (p(x_1, \dots, x_n) = p(y_1, \dots, y_n)) \dots)))$ je axiom (p je **predikátový symbol** četnosti n)

Odvozovací pravidla

- Pravidlo **zobecnění**: Pro libovolnou proměnnou $\boldsymbol{x}$ z $\boldsymbol{\varphi}$ lze odvodit $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varphi})$
    - $Pokud \vdash Z(x), pak \vdash \forall x Z(x)$, kde Z(x) značí pravdivou formuli predikátové logiky a ∀xZ(x) je jeho rozšířením vzhledem k proměnné x.
- Pravidlo **odloučení** (**Modus Ponens**): Z formulí $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\psi}$ (předpoklady) lze odvodit $\boldsymbol{\psi}$ (závěr).

Důkaz - libovolná posloupnost formulí jazyka L, každá formule je buď axiom nebo ji lze odvodit z některých předchozích formulí.

Formule $\boldsymbol{\varphi}$ je dokazatelná z předpokladů T, jestliže existuje důkaz z předpokladů T. Píšeme $T \vdash \varphi$.

Gödelova věta o úplnosti predikátové logiky

Větou o úplnosti se obvykle nazývá následující ekvivalence. Implikace zleva doprava se někdy nazývá **věta o korektnosti**.

! *Formule φ je dokazatelná v teorii T, právě když φ platí v každém modelu T.*

Prenexní tvar formulí

Definice

Formule *A* je v *prenexní formě*, jestliže má **tvar** $\boldsymbol{Q_1 x_1} \dots \boldsymbol{Q_n x_n B}$ a je splněno

1. Q_i je buď ∀ nebo ∃
2. $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$ jsou navzájem různé proměnné
3. B je otevřená vormule (neobsahuje kvantifikátor)

Každou formuli predikátové logiky 1. řádu lze převést na formuli v tzv. **prenexním normálním tvaru**, která je původní formuli ekvivalentní. Formule v tomto tvaru **začíná *kvantifikátory*** (obecné a existenční), které kvantifikují za nimi **následující *jádro***. Jádro je otevřená formule, tj. formule, která **neobsahuje kvantifikované proměnné**. Pro převod formule do prenexního tvaru existuje několik málo pravidel, které formuli rekurzivně převádějí.

From <https://brodec.wordpress.com/2012/05/12/prevod-formule-do-prenexniho-normalni-tvar-a-jadra-do-cnf-ci-dnf/>

Postup

pa) Nahraď podformuli její variantou.
pb) Nahraď podformuli $\neg(Qx)\psi$ za $(Q'x)\neg\psi$.
pc) Nahraď podformuli $(Qx)\psi \lozenge \chi$ za $(Qx)(\psi \lozenge \chi)$, není-li x volná v χ.
pd) Nahraď podformuli $\psi \lozenge (Qx)\chi$ za $(Qx)(\psi \lozenge \chi)$, není-li x volná ve ψ.
pe) Nahraď podformuli $(Qx)\psi \rightarrow \chi$ za $(Q'x)(\psi \rightarrow \chi)$, není-li x volná v χ.
pf) Nahraď podformuli $\psi \rightarrow (Qx)\chi$ za $(Qx)(\psi \rightarrow \chi)$, není-li x volná v ψ.

Q a Q' značí kvantifikátor a jeho inverzi (obecný za existenciální a naopak), $\lozenge$ pak konjunkci či disjunkci.

Jádro lze dále převést do ***konjunktivního***, resp. ***disjunktivního* normálního tvaru** (CNF, resp. DNF). Formule v CNF (DNF) je stručně řečeno **konjunkce disjunkcí ($\neg \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$)** (disjunkce konjunkcí). Opět s pomocí několika jednoduchých pravidel lze ve třech krocích každou otevřenou formuli do normálního tvaru převést.

Řešený příklad

1) Převeďte negaci formule $[\forall x p(x,y) \longrightarrow \exists x \forall y q(x,y)] \wedge \exists y[\forall x p(y,y) \longrightarrow \forall x p(x,y)]$ do prenexního tvaru.

[2008/2009 | půlsemestrálka | skupina A,B | příklad 2]

Řešení:

1. odstranění implikace

$$[\neg(\forall x p(x,y)) \vee \exists x \forall y q(x,y)] \wedge \exists y[\neg(\forall x p(y,y)) \vee \forall x p(x,y)]$$

2. negace formule

$$[\forall x p(x,y) \wedge \neg(\exists x \forall y q(x,y))] \vee \forall y[\forall x p(y,y) \wedge \neg(\forall x p(x,y))]$$

3. odstranění zbytečných kvantifikátorů, přejmenování proměnných

$$[\forall x' p(x',y') \wedge \neg(\exists x'' \forall y'' q(x'',y''))] \vee \forall y[p(y,y) \wedge \neg(\forall x p(x,y))]$$

4. úprava negovaných kvantifikátorů

$$[\forall x' p(x',y') \wedge \forall x'' \exists y'' \neg q(x'',y'')] \vee \forall y[p(y,y) \wedge \exists x \neg p(x,y)]$$

5. přesunutí kvantifikátorů doleva

$$\forall x' \forall x'' \exists y'' \forall y \exists x [p(x',y') \wedge \neg q(x'',y'')] \vee [p(y,y) \wedge \neg p(x,y)]$$

Skolemizace, Skolemova normální forma

http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=zaklady-informatiky-pro-biology--teoreticke-zaklady-informatiky--predikatova-logika--automaticke-dokazovani-v-predikatove-logice-obecna-rezolucni-metoda--skolemizace

Skolemizace je převod formulí na ***formule*** ***bez existenčních kvantifikátorů*** v jazyce, který je rozšířen o tzv. Skolemovy funkce; zachovává splnitelnost.

Skolemova normální forma je ***prenexová*** ***normální forma pouze s*** ***univerzálními*** ***kvantifikátory***.

Ideí je transformace formule $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists y)(P(x_1, \dots, x_n, y))$ na formuli $(\forall \boldsymbol{x_1}) \dots (\forall \boldsymbol{x_n}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}))$

- podmínku na existenci y můžeme chápat jako podmínku na existenci zobrazení f (tzv. výběrové funkce), která pro konkrétní hodnoty $x_1, \dots, x_n$ konstruuje požadované $y = f(x_1, \dots, x_n)$.
- **Například** mějme čísla s + : $\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ převedeme na $\forall \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, kde interpretace funkce *f* je, že vrátí opačné číslo k číslu *x* (unární operátor mínus).

Věty, lemma, definice

Věta o korektnosti: Libovolná formule jazyka L dokazatelná v predikátové logice 1. řádu je logicky platnou formulí, tj. je splněna v každé realizaci jazyka L.

Pravidlo $\forall$: Je-li $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ a proměnná x nemá volný výskyt ve φ, pak $\vdash \varphi \rightarrow (\forall x \psi)$.
Pravidlo $\exists$: Je-li $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ a proměnná x nemá volný výskyt ve ψ, pak $\vdash (\exists x \varphi) \rightarrow \psi$.
Uzávěr formule: Jsou-li $x_1,\dots,x_n$ všechny volné proměnné ve formuli φ, pak formuli $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ nazveme uzávěrem formule φ.
Věta o uzávěru: Je-li T množina formulí, je-li φ' uzávěr formule φ, pak $T \vdash \varphi$ právě když $T \vdash \varphi'$.
Distribuce kvantifikátorů: Je-li $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, potom $\vdash (\forall x \varphi) \rightarrow (\forall x \psi)$, $\vdash (\exists x \varphi) \rightarrow (\exists x \psi)$.
Věta o dedukci: Nechť T je množina formulí jazyka L, nechť φ je uzavřená formule, ψ je libovolná formule jazyka L. Potom $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $T, \varphi \vdash \psi$.

Notes

2. Otazka (predmet) (okruh): MAT - 7. Formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost)
Kdo me primarne zkousel: Šlapal Josef, prof. RNDr., CSc.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Chtěl jsem začít s popisem základních pojmů. To mě ale zastavil a že chce **konkrétně ti axiomy**. Tak

jsem si vzpomněl akorát na ty tři z **výrokové logiky** a na **Pravidlo odloučení**. Pak mi řekl, že tam je ještě **axiom kvantifikátorů** a **substituce**. Na to jsem si ale nemohl vzpomenout, tak jsem něco napsal na tabuli, ale bylo to úplně špatně. Pak se ptal **co je to důkaz** to jsem mu začal vlastními slovy popisovat a zastavil mě s tím, že to chce stručně a jasně. Nakonec zhodnotil, že jsem se na predikátovou logiku moc nepodíval a že mu to stačí. Dohromady jsem teda nedal víc než ty tři axiomy a stejně mi dali za E

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1>

2. Formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost, věty o úplnosti)
Kdo me primarne zkousel:
Šlapal

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Šlapal mi ihned řekl, ať začnu **Výrokovou logikou**.
Napsal jsem tedy: **tři axiomy** a **odvozovací pravidlo MP**.
Pak jsem do začal rozšiřovat o **axiomy predikátové** log. a **odvozovací pravidla**. Zmínil jsem, že **P.L. přidává 2 další axiomy** a jedno odvozovací pravidlo. Načež se Šlapal zamračil a já rychle dodal, že **pokud to není jazyk s rovností**.
Popsal jsem nové axiomy. Pak se mě ptal na "**substituovatelný term**". Chtěl to říci přesně (***Používat spojení jako obor kvantifikátoru***)
Já jsem to spíše popisoval jako v lambda kalkulu. Pak se mne zeptal **co je to důkaz**. Teď ovšem přišel kámen úrazu. Zeptal se mě na **Větu o úplnosti**. Dostal jsem okno. Úplný Windows. Snažil se mě na to navést, mě ale začal vypínat mozek. Nakonec se do toho přidal ještě **Češka** a zeptal se mne na aximon **(-B -> -A) -> (A->B)**. ***Zda můžu prostřední implikaci otočit***. Teď jsem se to snažil odvodit. No nakonec jsme to dali nějak dohromady. Nakonec B

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): MAT - Formální systém výrokové logiky (podtrženo výrokové)
Kdo me primarne zkousel: prof. **Češka**
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: U této otázky jsme se trochu hledali - docela mě to i zaskočilo, protože takhle se ten okruh nejmenoval

Moc ho nezajímal jazyk ani sémantika, ale postupně jsme se dopracovali k tomu, že **chtěl axiomy**, **odvozovací pravidla** (hlavně **MP**). Potom jsme řešili **rozdíly oproti predikátové** - pořád jsem mluvil o jazyku, modelech, ale to nechtěl. Po chvíli jsem se **dopracoval k (beze)spornosti**, **tautologiím**, ke **Gödelovi**. Celkově jsem spíš odpovídal na otázky a chtěl úplně jiný pohled, než jsme řešili v MATu. Musím však říct, že mu moc nevadilo, že jsem nevěděl co myslí.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh): Formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost, model a důsledek
teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti, prenexní tvar formulí).

Kto ma primarne skusal: doc. Horák (FI MUNI)

Co som k tomu povedel/na co sa ma ptali:
Otázky jsem dostal na papírcích a hned mi oznámili, jaké části se přesně věnovat. U této otázky jsem se měl věnovat čistě **formulím v prenexním tvaru**. Něco jsem řekl a pak jsem ho nechal ať se ptá... V podstatě jsem věděl skoro všechno. Chtěl po mě ***převést jednu formuli do prenexního tvaru***, to bylo celkem v klidu. Celkem jsem pletl názvosloví, místo termů jsem říkal proměnné apod. Ale asi pochopil, že vím jak se tomu říká a jen v té rychlosti říkám blbosti.

Chtěl něco o **rezoluci**, něco jsem řekl, nakolik dobře už nevím... Dále se mně zeptal co je **Skolemova normální forma**, bohužel jsem si nevzpomněl... Výsledek - B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

03 - Algebraické struktury

pátek 13. května 2016
9:42

Algebraické struktury (grupy, okruhy, obory integrity a tělesa, svazy a Boolovy algebry, univerzální algebry).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Algebraick%C3%A9_struktury

Algebraická struktura je v matematice **každá množina**, na které jsou **definované nějaké operace** a daná **množina je vzhledem k těmto operacím uzavřená**, tzn. že výsledkem operace nad prvky této množiny je vždy také prvek této množiny.

Příklady algebraických struktur

- (N; +) - množina přirozených čísel s operací sčítání.
- (N; .) - množina přirozených čísel s operací násobení.
- (N; +, .) - množina přirozených čísel s operacemi sčítání a násobení.
- Booleovy algebry, grupy, okruhy, tělesa, vektorové prostory a svazy jsou algebraické struktury.
  Ještě nějaké **protipříklady** - tj. následující struktury **nejsou algebraické**:
- (N; -) - množina přirozených čísel není vzhledem k operaci odčítání uzavřená. Např. 2 ∈ N, 3 ∈ N, ale 2-3 ∉ N.
- (N; :) - množina přirozených čísel není vzhledem k operaci dělení uzavřená. Např. 5 ∈ N, 3 ∈ N, ale 5:3 ∉ N.

Operace

Operace

- Zobrazení $A^n \rightarrow A$ se nazývá n-nární operace (A je množina, 0-nární operace = konstanta)

Parciální operace

- Zobrazení není definováno pro všechny možné hodnoty operandů (např.: ***dělění je parciální operace***, protože není definováno dělění ***nulou***)

Cayleyova tabulka

- Způsob zápisu definice binárních operací s konečným definičním oborem (řádky jsou hodnoty prvního operandu, sloupce hodnoty druhého operandu, příslušná buňka je výsledek operace)

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

Cayleyova tabulka pro binární sčítání

Typy operací

Asociativní

Nezáleží na tom, jestli použijeme závorky a v jakém pořadí budeme daný výraz počítat. Příklady asociativních binárních operací je sčítání (+) a násobení (*) reálných čísel.

- $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Komutativní

U komutativních operací nezáleží na pořadí operandů. Příklady takových operací je zase + a *.
Konkatenace řetězců není komutativní. Stejně tak odčítání.

- $x \circ y = y \circ x$

Distributivní (* distributivní nad +)

Distributivita je **vlastnost** binární operace, **vůči jiné binární operaci**. Tedy distributivní operaci můžeme distribuovat přes jinou operaci (např. roznásobení čísel).

- $x(y + z) = xy + xz$
- $(y + z)x = yx + zx$

Operace s dělením Mzu to/s tim delit

$\forall(a,b) \in A^2, \exists(x,y) \in A^2 : a \circ x = b \wedge y \circ a = b$

Pokud A není prázdná a operace ∘ je asociativní tak platí:

- ∘ je operace s děléním
- existuje neutrální prvek a každý prvek $x \in A$ je invertibilní, tzn.

$$\exists(y) \in A : x \circ y = y \circ x = e$$

Operace s krácením Muzu to vykratit

- $a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
- $x_1 \circ a = x_2 \circ a \Rightarrow x_1 = x_2$

Rovnice $a \circ x = b$ a $y \circ a = b$ mají v operaci s krácením maximálně jedno řešení. Pokud je

operace i asociativní tak mají právě jedno řešení.
Pro konečnou množinu A platí: ∘ je operace s dělením ⇔ ∘ je operace s krácením

Absorpční zákony

(viz Svazy dole)

- $a \cap (a \cup b) = a$
- $a \cup (a \cap b) = a$

Algebry

Speciální prvky algeber

Neutrální prvek (vzhledem k operaci ∘)

- Levý neutrální prvek $e \circ x = x$
- Pravý neutrální prvek $x \circ e = x$
- Neutrální prvek $e \circ x = x \circ e = x$

- Existuje **nejvýše jeden** **neutrální prvek** pro **každou operaci**
- V multiplikativním značení (pro operace značené jako násobení) jej nazýváme jednotkový prvek (1)
- V aditivním značení (pro operace značené jako sčítání) jej nazýváme nulový prvek (0)

Inverzní prvek (k prvku x vzhledem k operaci ∘)

- Levý inverzní prvek $y \circ x = e$
- Pravý inverzní prvek $x \circ y = e$
- Inverzní prvek $y \circ x = x \circ y = e$

- Pokud existuje inverzní prvek k y, tak y nazýváme **invertibilní**
- Pokud je operace asociativní existuje nejvýše jeden inverzní prvek
- V multiplikativním značení jej značíme x^{1}
- V aditivním značení jej značíme $-x$

Univerzální algebra

$U \coloneqq (A, (\omega_i)_{i \in I})$ (množina hodnot, operace, operace, ...)

A je množina hodnot, I je množina indexů, ω_i je n_i-nární operace na A pro $i \in I$

Typ algebry

$U \coloneqq (A, (n_i)_{i \in I})$

Popisuje typy operací v algebře. Např.: (2, 2, 1) je algebra s dvěma binárními a jednou unární operací

Grupy

Grupy jsou algebry s **jednou binární operací** (a případně několika unárními operacemi)

- Grupa formalizuje koncept **symetrie**.

Přehled typů grup

Název	Zápis	Asociativní	Neutrální prvek	Inverzní prvek	Komutativní	Poznámka	Typ
Grupoid	$(A, \circ)$	-	-	-	-	Uzavřenost na nosné množině	(2)
Pologrupa	$(A, \circ)$	Ano	-	-	-	Asociativní grupoid	(2)
Monoid	$(A, \circ, e)$	Ano	Ano	-	-	Pologrupa + neutrální prvek	(2, 0)
Grupa	$(A, \circ, e, ^{-1})$	Ano	Ano	Ano	-	Monoid + všechny prvky invertibilní	(2, 0, 1)
Abelovská grupa	$(A, \circ, e, ^{-1})$	Ano	Ano	Ano	Ano	Komutativní grupa	(2, 0, 1)

Příklad grup

- Celá čísla s operací sčítání $(\mathbb{Z}, +, 0, ^{-1})$.

Okruhy, obory integrity, tělesa, pole

Okruhy atd. jsou algebry s **dvěma binárními operacemi + a *** (a případně několika unárními operacemi)

- Operace + tvoří abelovskou grupu (splňuje axiomy Abelovské grupy)
- nulový prvek = 0 = neutrální prvek pro operaci +
- jednotkový prvek = 1 = neutrální prvek pro operaci *
- Operace * je distributivní nad + (* splňuje axiomy pologrupy)

Název	Zápis	* asociativní	* jednotkový prvek	* inverzní prvek	* komutativní	Poznámka	Typ
Okruh	$(A, +, 0, -, *)$	Ano	-	-	-	(A, +, 0, -) je abelovská grupa, (A, *) je pologrupa, * je distributivní nad +	(2, 0, 1, 2)
Komutativní okruh	$(A, +, 0, -, *)$	Ano	-	-	Ano	$\forall x, y \in R : xy = yx$, okruh s komut. operací *	(2, 0, 1, 2)

Název	Zápis	* asociativní	* jednotkový prvek	* inverzní prvek	* komutativní	Poznámka	Typ
Okruh	$(A,+,0,-,*)$	Ano	-	-	-	(A, +, 0, -) je abelovská grupa, (A, *) je pologrupa, * je distributivní nad +	(2, 0, 1, 2)
Komutativní okruh	$(A,+,0,-,*)$	Ano	-	-	Ano	$\forall x,y \in R: xy = yx$, okruh s komut. operací *	(2, 0, 1, 2)
Okruh s jednotkovým prvkem	$(A,+,0,-,*,1)$	Ano	Ano	-	-	(A, +, 0, -, *) je okruh, 1 je neutr. prvkem pro *	(2, 0, 1, 2, 0)
Komututativní okruh s jednotkovým prvkem	$(A,+,0,-,*,1)$	Ano	Ano	-	Ano	(A, +, 0, -, *) je komutativní okruh, 1 je neutr. prvkem pro *	(2, 0, 1, 2, 0)
Obor integrity	$(A,+,0,-,*,1)$	Ano	Ano, 0 ≠ 1	-	Ano	(R, *, 1) je komutativní monoid; komut. okruh s jedn. prvkem, kde platí $\forall a,b \in R\setminus\{0\}: a \cdot b \neq 0$ (**neexistuje dělitel 0**) a zároveň $R\setminus\{0\} \neq \emptyset$, což nutně znamená, že $0 \neq 1$	(2, 0, 1, 2, 0)
Těleso	$(A,+,0,-,*,^{-1},1)$	Ano	Ano, 0 ≠ 1	Ano	-	(R\{0}, *) je grupa; okruh s jedn. prvkem, $0 \neq 1$	(2, 0, 1, 2, 1, 0)
Pole	$(A,+,0,-,*,^{-1},1)$	Ano	Ano, 0 ≠ 1	Ano	Ano	(R\{0}, *) je abelovská grupa; komutativní těleso	(2, 0, 1, 2, 1, 0)

Příklady

- Okruh - celá čísla s operacemi + a *
- Těleso - množina racionálních čísel

Obor integrity

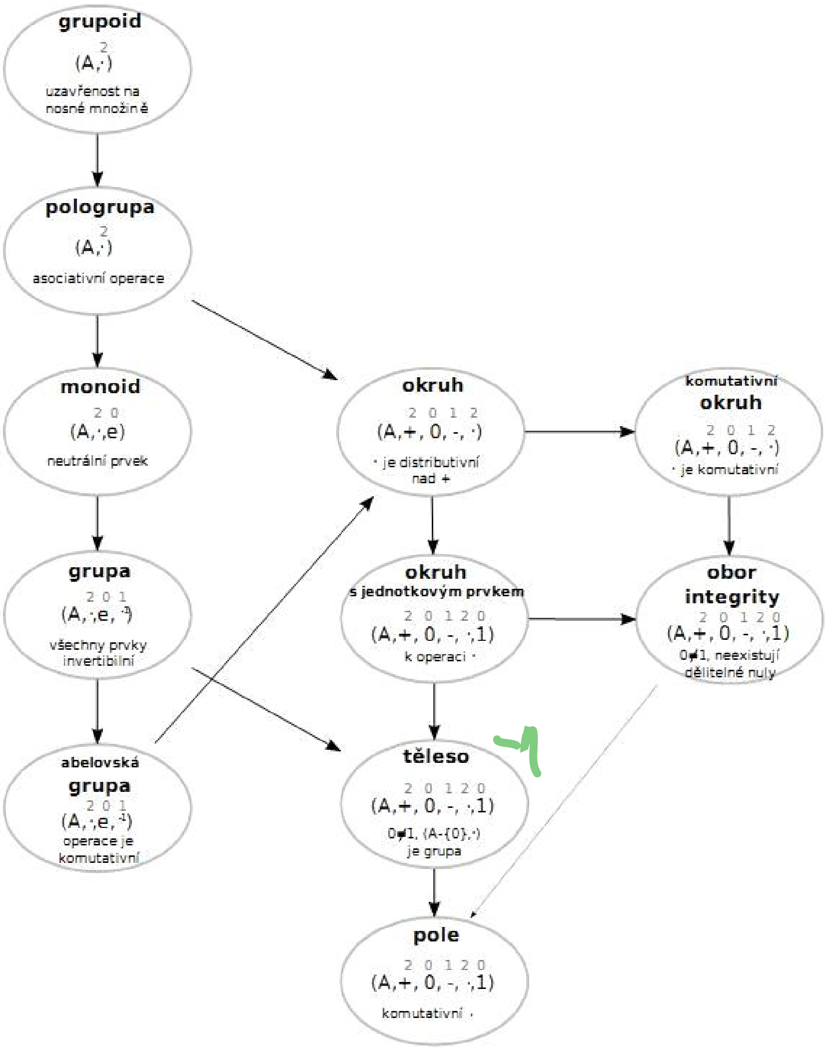
- Obor integrity je komutativní okruh R s jednotkovým prvkem, pro který navíc platí tak podmínka v tabulce, přičemž $R\setminus\{0\}$ značí množinu bez nulového prvku.

Těleso

- Je **rozšířením okruhu**, oproti kterému navíc přináší existenci **inverzního prvku pro obě binární operace** (okruh vyžadoval existenci inverzního prvku jen pro operaci +).

Pole

- Pole (Komutativní těleso, angl. field) **je takové těleso**, jehož **obě operace jsou komutativní.** V tělese (okruhu) se předpokládá komutativita pouze sčítání.



Svazy a Booleovy algebry

Definice č. 1: Svaz je **uspořádaná množina**, která je doplněna o vlastnost, že **pro každé dva prvky z daného svazu musí existovat supremum a infimum**, které také náleží danému svazu.

Definice č. 2: Algebry s **dvěma binárními operacemi** ∩ **a** ∪ (a případně několika unárními operacemi)

- Obě operace mají stejné vlastnosti - binární operace, označují supremum a infimum dvouprvkové množiny.
- nulový prvek = 0 = neutrální prvek pro operaci ∪
- jednotkový prvek = 1 = neutrální prvek pro operaci ∩
- Komplementární prvky: $a \cap a' = 0$ a $a \cup a' = 1$
- Jednotkový prvek a nulový prvek jsou komplementární: $0' = 1, 1' = 0$

Název	Zápis	Asociativní	Komutativní	Absorbční	Distributivní	Neutrální prvky	Komplementární prvky	Poznámka
Svaz	$(V, \cap, \cup)$	Ano	Ano	Ano	-	-	-	
Distributivní svaz	$(V, \cap, \cup)$	Ano	Ano	Ano	Ano	-	-	Svaz, kde operace jsou vzájemně distributivní
Ohraničený svaz	$(V, \cap, \cup, 0, 1)$	Ano	Ano	Ano	-	Ano	-	Svaz s nulovým a jednotkovým prvkem
Komplementární (ohraničený) svaz	$(V, \cap, \cup, 0, 1)$	Ano	Ano	Ano	-	Ano	Ano	Ohraničený svaz s komplementárními prvky
Booleův svaz	$(V, \cap, \cup, 0, 1)$	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Distributivní a komplementární svaz (komplement existuje, ale není uveden jako operace)
Booleova algebra	$(V, \cap, \cup, 0, 1, ')$	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Booleův svaz, kde je komplemet jako unární operace

Příklady

- **Booleova algebra** - Dvouprvková algebra je algebra nad množinou A = {0, 1}, kde operace jsou dány přirozeným způsobem, tj. 0 a 1 jsou vzájemně komplementární a protože platí 0 < 1, **průsek** (*infimum*) je menší z operandů, **spojení** (*supremum*) je větší z operandů:

Booleova algebra

Booleova algebra je algebraická struktura, která **zobecňuje vlastnosti množinových** a **logických operací**.

Je to šestice $(A, \cap, \cup, -, 0, 1)$, kde A je neprázdná množina, 0 ∈ A je nejmenší, 1 ∈ A největší prvek, − je unární operace (doplněk neboli komplement) a ∩, ∪ jsou binární operace (průsek a spojení) na A, splňující následující axiomy.

Komutativita	$x \cup y = y \cup x$	$x \cap y = y \cap x$
Distributivita	$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$	$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
Neutralita 0 a 1	$x \cup 0 = x$	$x \cap 1 = x$
Komplementarita	$x \cup -x = 1$	$x \cap -x = 0$

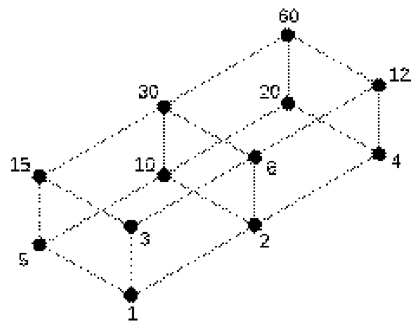
Věta o komplementech v Booleově algebře

- $(a')' = a$
- $(a \cup b)' = a' \cap b'$, $(a \cap b)' = a' \cup b'$ (**DeMorganovy** zákony)

Relace uspořádání a svazy

(Částečně) uspořádaná množina

množina na které je definována **relace** (obvykle značíme ≤) **částečného uspořádání**

- každá podmnožina uspořádané množiny je také uspořádaná
- Sousední prvky - prvky a, b mezi nimiž je relace ≤ a neexistuje žádný prvek c mezi nimi tj. takový, že $a < c < b$
- **Hasseův diagram** - graf, kde uzly jsou prvky množiny a hrany jsou mezi prvky, které jsou sousední dle relace ≤
  - 

Lineárně uspořádaná množina (řetězec)

částečně uspořádaná množina pro kterou platí srovnatelnost (u každých dvou prvků lze rozhodnout, který "je větší")

Nejmenší/největší prvek množiny

všechny ostatní prvky množiny jsou větší/menší než nejmenší/největší prvek množiny

- existuje vždy nejvýše jeden nejmenší/největší prvek

Maximální/minimální prvek množiny

žádný prvek není větší/menší než maximální/minimální prvek

- může jich být více

Dolní/horní závora množiny $M \subset N$

prvek z nad-množiny N, který je menší/větší než všechny ostatní prvky podmnožiny M

- nejmenší/největší prvek je dolní/horní závora
- interval (0,1) má dolní závoru například čísla -2, 0, -88

Infimum *inf*(*M*)

největší dolní závora

  - *Infimum je zaváděno jako alternativa k pojmu nejmenší prvek*

- (0,1), <0,1>, (0,1> - tyto všechny intervaly mají infimum rovno číslu 0.

Supremum *sup*(*M*)

nejmenší horní závora

  - *omezené otevřené intervaly reálných čísel nemají největší prvek, ale mají supremum*

- (0,1), <0,1>, (0,1> - tyto všechny intervaly mají supremum rovno číslu 1.

Notes

2. Otazka (predmet) (okruh): Algebraické struktury (grupy, okruhy, svazy (v závorce psáno že se mám zaměřit na ně zaměřit)).
Kdo me primarne zkousel: Holík
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Začal jsem pěkně postupně **grupou**, vyjemoval ***její vlastnosti***. Pak sem přešel k **okruhu** a za boha jsem si nemohl vzpomenout na jednu z těch ***tří podmínek*** ... po chvíli ale ze mě vylezlo, že samozřejmě - **pologrupa nad násobením**. Pak jsem zmínil **svazy** *z dvou pohledů* : ***částečného uspořádání*** a ***algebraicky***. Popsal jsem podmínky. Holíka zajímal pohled **z pohledu uspořádání**. Tak jsem mu povykládal co je **závora** (*horní*/*dolní*) a že svaz musí mít **infimum** a **supremum**. Trochu sme se v začátku nerozuměli, ale cajk. Přetáhl jsem budík asi jen o 2 minutky.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): Algebraické struktury (grupy, okruhy, obory integrity a tělesa, svazy a Boolovy algebry, univerzální algebry)
Kdo me primarne zkousel: Ing. Zdeněk Vašíček, Ph.D.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Začala jsem obecně, že algebra je ***(A, w_i)*** a že jsou na nich **binární**, **unární** a **další operace**. Následně jsem popsala, že **algebry nad grupama** mají ***jednu binární operaci*** a algebry nad **okruhy** dvě ***binární operace***. Pak chtěl nějaké **konkrétní příklady**, tak jsem definovala **grupoid**, **grupu** a **abelovskou grupu**. Dále jsem se měla přesunout k **algebrám se dvěma binárními operacemi**, tak jsem popsala ***okruh*** a ***obor integrity*** a byl konec. Vašíček byl moc hodný a snažil se mě vždy navést na téma, o kterém mám mluvit. Mluvila jsem lehce zmateně, ale výsledná za A.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): MAT Algebraicke struktury
Kdo me primarne zkousel: Externista - Šaloun Petr, doc. RNDr., Ph.D.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Zacal som rovno s **grupami**, zadefinoval ***asociativny zakon***, ***neutralne prvky***. Externista sa cely cas usmieval a pritakaval, zabudol som do definicie asociativneho zakonu vlozit formalizmy ako "pre kazde a,b,c z nosnej mnoziny". Ku okruhom, zvazom som sa nedostal. Asi za tie formalizmy mi dali B

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

2. Otazka (predmet) (okruh): 3. Algebraické struktury (měl jsem se zaměřit na grupy, okruhy, obory integrity a tělesa)
Kdo me primarne zkousel: Steingartner William, Ing., Ph.D. (vlastně jenom on)
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Začal jsem tím, **co je to algebra**, pak řekl, že s jednou operací to může bát **grupoid**, pokud je asociativní. Z grupoidu jsem šel klasicky (a zapisoval na tabuli) **pologrupu -> monoid -> grupu** (tady jsem zapomněl, čím se vyznačuje, ale když řekl, což tam dát nějakou operaci, tak jsem si vzpomněl na invertibilní prvky). Pak jsem šel na okruhy, kde jsem řekl, že ta množina s + a 0 je **komutativní grupa** (a zadefinoval komutativitu) a že s * a 1 je to pologrupa. Pak jsem zapomněj ještě na **distributivitu**, ale připomněl mi ji a zapsal jsem ji. Stačilo jim a poslali me ven. Výsledek A.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

2. Otazka (predmet) (okruh): 3. Algebraické struktury (Booleovy svazy a algebry)
Kdo me primarne zkousel: **Češka**
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Definoval jsem **svaz jako algebraickou strukturu**, a postupně jsem se dostal až k **Booleově svazu**. Češka se pak zeptal jestli lze definovat svaz i jinak, řekl jsem, že přes poset a zbytek zkoušení byla rozprava na toto téma. Sem tam jsem věděl, sem tam mi Češka pomohl. Bylo vidět, že mi chybí spojitosti. Známka C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 1. (MAT) Algebraické Struktury - Zaměření na Svazy a Boolovy algebry.
Kdo me primarne zkousel: **Češka**
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Začal jsem hned motivací, kde se svazy používají (statická analýza), nadefinoval jsem **obě možnosti zápisu** a možnosti převodu, párkrát jsem se zasekl, ale Češka nijak nepotápěl. Pak se ptal na velikost svazu (řekl jsem, že 2^(počet atomů)) a pak se zeptal na **nejmenší svaz** (chtěl slyšet **Boolův**, že má dva prvky **1** a **0**), k tomu mě nakonec navedl a jak souvisí tento svaz s ostatními svazy, chvíli jsem nechápal, ale nakonec sem odpověděl, že se používá **součin svazů**, což chtěl slyšet. Nakonec otázka Tomáš V., že mám říct nějakou větu o svazích, tak jsem mu odvyprávěl Knaster Tarski Teorém, z čehož byl spokojen. Ještě jeden menší dotaz ohledně ordinál, ale to jsem věděl a určitě byl trochu nad rámec této problematiky

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): 3 Algebraické struktury - svazy

Kdo me primarne zkousel: prof. **Češka**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Absolutně jsem netušil co to jsou svazy. Nakreslil jsem hasseův diagram a tím to skončilo. Potom jsem dostal pár dotazů na ano/ne a pokaždé jsem odpověděl špatně. Na závěr se zeptal co je to grupa. Před zkouškou jsem to věděl, ale tam se mi to úspěšně vykouřilo z hlavy. Známka: F.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): 3. Algebraické struktury (na štítku bolo len "Grupy, Okruhy") (MAT)

Kdo me primarne zkousel: Rogalewicz

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Len som zadefinoval **Grupu**, opýtal sa ma, či (N, +) je grupa, povedal som, že nie (niesú inverzné prvky), tak či (Z,+) teda je, alebo nieje grupa. Potom chcel len **zadefinovať okruh**. Ešte som sa aj sekol a povedal, že s jednou tou operáciou je to **Abelovska grupa** a s druhou **pologrupa**. Povedal, že tam nemusí byť k tej druhej operácii neutrálny prvok, tak som sa opravil, že teda monoid a povedal, že mu to stačí. Celkovo táto otázka asi dve minúty (nedošlo na budík). Dal mi A.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. otazka (okruh): Algebraické struktury (3)

Kto ma primarne skusal: Vojnar

Co som k tomu povedal/na co sa ma pytali:
Vzhladom na to ze MAT som bol dost biedne nauceny tak to bolo celkom peklo. Nastastie bol Vojnar so mnou celkom trpezlivy. Chcel vediet vsetko o **svazoch**. Na polovicu veci som si vedel spomenut ale zvysok vlastnosti zo mna tahal az z paty. Bola to dost bieda z mojej strany ale oni sa ma snazili dokopat k tomu aby som im povedal to co chceli pocut. Celkovo to trvalo tak cez 10 minut. Musim dat Vojnarovi bludistaka za pevne nervy a dost velku benevolenciu k absencii mojich vedomosti

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh): algebraicke struktury a homomorfizmy

Kdo me primarne zkousel: **Ceska**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: fail fail fail, vsetko som to chapal a nedokazal to zo seba vyklopit, ked sa ceskovi nepodarili zo mna dostat teoriu tak sa zacal pytat na konkretne pripady algebier a homomorfizmov, velmi pomahal a bol prijemny a slusny, zachranila ma diplomka a dostal som za D, inak by som mal urcite E

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh):3: Algebraické struktury

Kdo me primarne zkousel: Rogalewicz

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Byl jsem trošku zmatený. Chtěl po mě jenom **Grupy**. Jsem chtěl říct celou tu hierarchii grupoid->...-> grupy..Ale ho zajimali pouze grupy a jejich vlastnosti. Ale vše jsem věděl, na vše odpovídal. Výsledná B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

2. Otazka (predmet) (okruh): 3. Algebraické struktury (Booleovy svazy a algebry)
Kdo me primarne zkousel: **Češka**
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Definoval jsem svaz jako algebraickou strukturu, a postupně jsem se dostal až k Booleově svazu. Češka se pak zeptal jestli lze definovat svaz i jinak, řekl jsem, že přes poset a zbytek zkoušení byla rozprava na toto téma. Sem tam jsem věděl, sem tam mi Češka pomohl. Bylo vidět, že mi chybí spojitosti. Známka C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

04 - Základní algebraické metody

pátek 13. května 2016
9:44

Základní algebraické metody (podalgebry, homomorfismy, přímé součiny, kongruence a faktorové algebry, normální podgrupy a ideály okruhů).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Z%C3%A1kladn%C3%AD_algebraick%C3%A9_metody

Relace

Relace R na množině M **je podmnožina kartézského součinu** $\alpha_M = M \times M \times \cdots \times M$

Binární relace

- $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{M}$

U binárních relací místo $(x, y) \in R$ píšeme xRy (např.: x=y, x<y, ...).

- **Univerzální** relace: $\alpha_M = M \times M$ (každý s každým).
- **Identická** relace: $i_M = \{(x, x) | x \in M\}$ (relace rovnosti - pouze každá sám na sebe).
- **Reflexivní** relace: $\forall x \in M: xRx$ (každý prvek sám na sebe)
- **Symetrická** relace: $\forall x, y \in M: xRy \Rightarrow yRx$ (všechny vztahy obousměrně)
- **Antisymterická** relace: $\forall x, y \in M: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (žádný vztah obousměrně)
- **Tranzitivní** relace: $\forall x, y, z \in M: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (pokud existuje spojnice spojíme také)
- **Relace ekvivalence** je ***reflexivní***, ***symetrická*** a ***tranzitivní***. (rozdělění na několik ekvivalentních podmnožin) (Pozn. ekvivalenci lze definovat funkcí tak, že prvky jsou ekvivalentní, pokud pro ně daná funkce dává stejný výsledek.)
  - **Kongruence** je speciální případ relace ekvivalence.
- Relace **částečného neostrého uspořádání** ($\leq$) je ***reflexivní***, ***antisymetrická*** a ***tranzitivní***. (prvky lze porovnávat)

Podalgebry

Podalgebra

- Množina hodnot podalgebry je **podmnožinou hodnot nad-algebry**.
- Všechny **operace jsou na množině hodnot podalgebry uzavřené** (tj. jejich výsledky spadají do stejné podmnožiny hodnot jako vstupy)
- Je-li v algebře definována vlastnost nějaké operace pomocí nějakého zákona (distributivní, asociativní, ...) pak má tato **operace v podalgebře tuto vlastnost také**.
- **Průnik podalgeber** je **také podalgebra**

Podalgebra generovaná množinou S (značíme $\langle S \rangle$)

- průnik všech podalgeber, které obsahují množinu S
- S nazýváme systém generátorů

Cyklická grupa

- $\exists x \in G: G = \langle x \rangle$
- tj. **existuje prvek**, který **generuje celou algebru**.

Rozklad na třídy ekvivalence

Množinu M rozdělíme na podmnožiny (třídy ekvivalence) tak, že:

- Jsou po dvou disjunktní (tj., **žádné dvě množiny nemají společný prvek**).
- Jejich **sjednocení tvoří původní množinu** (tj. žádný prvek se neztratí).
- **Prvky každé podmnožiny** jsou **vzájemně ekvivalentní**.

Rozklad na třídy ekvivalence

- rozklad množiny M je **množina** $\boldsymbol{P \subseteq 2^M}$, pro níž platí:
- $\boldsymbol{\emptyset \notin P, \cup P = M}$ a množiny v P jsou po dvou rozdílné.

Třída ekvivalence prvku a (značíme $[\boldsymbol{a}]_\pi$)

je definována jako $\boldsymbol{[a]_\pi = \{b \in M | b\pi a\}}$, kde $\boldsymbol{\pi}$ **je relace ekvivalence na** $\boldsymbol{M}$.

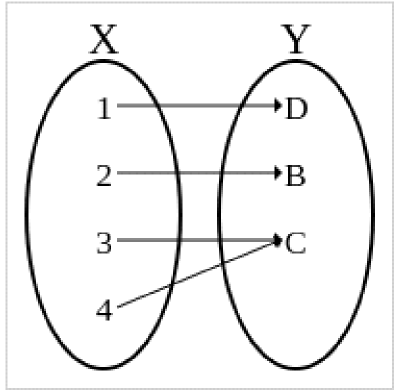
- tj. podmnožina ve které jsou prvky ekvivalentní s a
- Jelikož π je relace ekvivalence, tak může být i kongruence (speciální případ relace ekvivalence)

Faktorová množina množiny M podle π (značíme M/π)

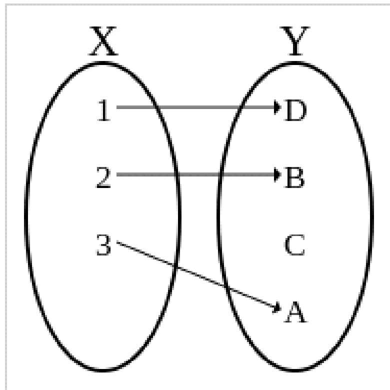
je definována jako $\boldsymbol{M/\pi = \{[a]_\pi | a \in M\}}$. ($M/\pi$ je rozklad na třídy ekvivalence)

- tj. **množina všech tříd ekvivalence**

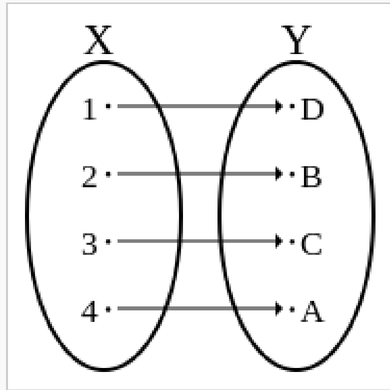
Izomorfismy a homomorfismy



Surjektivní funkce.



Prosté zobrazení



Bijektivní funkce

Homomorfismus

- Je zobrazení jedné algebry na jinou algebru stejného typu, které **zachovává veškerou důležitou strukturu**
- Přeznačení prvků množiny hodnot algebry f: A → A* (zobrazení jedné množiny hodnot na jinou).
    - pro $\forall x_i \in A: f(\omega_i x_1 \dots x_{n_i}) = \omega_i^* f(x_1) \dots f(x_{n_i})$
- Přeznačení operací (změní se symboly operací)
- Pokud přeznačení provedeme před nebo po provedení operace dostáváme stejné výsledky (např.: $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{b})$)

Typy homomorfismů

- **Izomorfismus** - bijektivní zobrazení (jedna jednoznačnost)
- **Endomorfismus** - zobrazuje se na stejnou množinu prvků
- **Automorfismus** - izomorfismus + endomorfismus tj. zobrazení jeden na jeden do stejné množiny - jde tedy jen o přeházení prvků
- **Epimorfismus** - surjektivní (každý prvek cílové množiny má alespoň jeden vzor)
    - **zobrazuje algebru na její faktorovou algebru**
- **Monomorfismus** - injektivní (různé prvky mají různé obrazy, jeden obraz maximálně jeden vzor)

Poznámky

- Jsou-li f a g izomorfismy pak je i $f \circ g$ izomorfismus.
- Algebraické vlastnosti jsou takové vlastnosti, které zůstávají zachovány při izomorfismech
- Každá grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací

Kongruence a faktorové algebry

- Kongruence je taková **relace ekvivalence u které platí**, že ***pokud jsou parametry operace ekvivalentní, jsou i výsledky ekvivalentní***;

Kongruence je algebraický pojem označující **ekvivalenci na algebře**, která je **slučitelná se všemi operacemi** na této algebře

- *(tedy například, pokud jsou tři páry prvků ekvivalentní a výsledky nějaké operace na těchto párech jsou také ekvivalentní, pak existuje pro tyto páry kongruence).*

Kongruence

$g_1 \equiv g_2 \wedge h_1 \equiv h_2 \Rightarrow g_1 \bigstar h_1 \equiv g_2 \bigstar h_2$

- $\bigstar$je libovolná operace ve struktuře
- $\equiv$ znamená kongruence

Pravá kongruence: $g_1 \equiv g_2 \Rightarrow g_1 \bigstar w \equiv g_2 \bigstar w$

Aby to vůbec mohla být kongruence, musí platit **relace ekvivalence**!

1. **Reflexivita**: $a \sim a$
2. **Symetrie**: $a \sim b \wedge b \sim a$
3. **Tranzitivita**: $a \sim b \wedge b \sim c \wedge c \sim a$

From <https://kalabovi.org/pitel:mat:start>

Příklad

*Ekvivalence kladných a záporných **čísel** je kongruence pro **násobení**.* Platí: součin dvou kladných čísel je vždy kladné, součin dvou záporných je kladné, součin kladného i záporného je záporný

Idempotence

Idempotence je v matematice, zejména v abstraktní algebře, vlastnost algebraických operací či prvků nějaké algebry. **Operace je idempotentní, pokud jejím opakovaným použitím na nějaký vstup vznikne stejný výstup, jako vznikne jediným použitím dané operace.** Tato vlastnost se vyskytuje například v lineární algebře u projekcí, je to také jedna z definičních vlastností uzávěrového operátoru.

- $\boldsymbol{f(x) = f(f(x))}$

Příklady idempotence

- A ∪ A = A
  - Pokud bychom tuto operaci opakovali, tak pořád dostaneme A
- A ∩ A = A
  - To stejné v bleděmodrém :-)

Faktorová grupa

Faktorgrupa je v teorii grup grupa odvozená od dvou jiných grup způsobem, který zobecňuje dělení na grupy.
V univerzální algebře je možné definovat faktorovou grupu jako grupu, která je faktoralgebrou jiné grupy.

Faktoralgebra

- Koncept **faktoralgebry** je ***vyrobit z nosné množiny původní algebry hrubší objekt se stejnou strukturou***.
  Formálně **faktoralgebru** tvoří vhodná ekvivalence

Faktorová algebra je algebra odpovídající kongruenci $\boldsymbol{(\mathfrak{A}/\pi = (\mathfrak{A}/\pi, (\omega_i^*)_{i \in I})}$ je faktorová algebra algebry $\mathfrak{A}$ podle kongruence π.

- **prvky** faktorové algebry jsou **faktorovou množinou** původní algebry
- **operace zachovávají kongruenci**
- faktorovou algebru algebry M podle kongruence π značíme M/π

Přirozený homomorfismus

- **surjektivní** homomorfismus, který **zobrazuje algebru na její faktorovou algebru**

Poznámky

- faktorová algebra typických algeber je algebra stejného typu. Výjimkou je obor integrity u kterého to neplatí (0 dělá problémy, protože pro ni není definováno dělení).
- každý homomorfní obraz algebry je izomorfní s nějakou faktorovou algebrou
- Prostá algebra je algebra, která má jen triviální kongruence

2.3 FAKTOROVÉ ALGEBRY

Definice 2.3.1: Buďte X,Y množiny, f:X->Y zobrazení. Relaci k f:=$f^{-1}$of nazýváme **jádrem zobrazení** f.
Věta 2.3.1: Nechť f:X->Y je zobrazení. Pak **Ker f** je ekvivalence.
Poznámka 2.3.1.1: Dva prvky x,y *patřící do* X jsou v relaci ker f na X, právě když mají stejný obraz, tj. když f(x) = f(y).
Poznámka 2.3.1.2: Rozkladu S = $X/_R$ se často říká **faktorová množina** příslušná ekvivalenci R.
Definice 2.3.2: Buď R *podmnožina* X×X ekvivalence na X. Zobrazení g:X->$X/_R$ přiřazující prvku x *patřící do* X třídu ekvivalence $[x]_R$ *patří do* $X/_R$ tj. g(x)=$[x]_R$, říkáme **přirozené** či **kanonické zobrazení**.
Věta 2.3.2: Buď f:X->Y libovolné zobrazení (X do Y), g:X->$X/_{kerf}$ kanonické zobrazení. Pak existuje jediné zobrazení h:$X/_{kerf}$->Y, že diagram

```
 X --(g)--> X/kerf --(h)--> Y
  '----------------(f)-------------/\
```

komutuje, tj. že f =hog, přičemž h je injektivní (a má stejný obor hodnot jako f). Speciálně, je -li f surjekce, je h bijektivní.
Definice 2.3.3: Buď R ekvivalence na A, (A,w_1,w_2,...w_k) algebra nad operacemi w_1,w_2,...w_k s četností n_1,n_2,...n_k. Řekneme, že R je **kongruence na A**, jestliže pro každé i=1,2,...k a x_1,x_2,...x_{ni}, y_1,y_2,...y_{ni} platí indikace: x_1Ry_1 *a zároveň* x_2Ry_2 *a ... a zároveň* x_{ni}Ry_{ni} => w_i(x_1,x_2,...x_{ni})Rw_i(y_1,y_2,...y_{ni}).
Věta 2.3.3: Buď f morfismus algebry (A,a_1,a_2,...a_k) do algebry (B,b_1,b_2,...b_k). Pak je relace R=ker f kongruencí na A.
Definice 2.3.4: Buď (A,w_1,w_2,...w_k) algebra a R kongruence na A. Pro libovolné i=1,2,...k a x_1,x_2,...x_{ni} *patřící do* A klademe $\mathbf{w}_i$($[x_1]_R$,$[x_2]_R$,...$[x_{ni}]_R$):=$[w_i(x_1,x_2,...x_{ni})]_R$. Jelikož R je kongruencí, je konkrétně definovaná nová algebra s nosnou množinou $A/_R$ a operacemi $\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$,...$\mathbf{w_k}$. Tuto algebru ($A/_R$,$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$,...$\mathbf{w_k}$) nazýváme **faktorovou algebrou** původní algebry A, příslušnou kongruenci R.
Věta 2.3.4: Buď f epimorfismus algebry (A,a_1,a_2,...a_k) na algebru (B,b_1,b_2,...b_k). Pak je faktorová algebra ($A/_{ker f}$,$\mathbf{a_1}$,$\mathbf{a_2}$,...$\mathbf{a_k}$) izomorfní s algebrou (B,b_1,b_2,...b_k).

From <http://www.fit.vutbr.cz/~krivka/oldpersonal/algebry_grafy.htm>

Přímé součiny algeber

Přímý součin

- lze provést **pro n algeber** **téhož typu**
- množina hodnot je kartézský součin množin hodnot jednotlivých algeber $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \cdots \times \boldsymbol{A_n}$ (tj. **hodnoty jsou n-tice**, kde n-tý prvek je z množiny hodnot n-té algebry)
- **operace** přímého součinu jsou **definovány nad n-ticemi hodnot** tak, že výsledek operace je n-tice výsledků příslušných operací jednotlivých algeber nad příslušnými prvky n-tic (n-tý prvek výsledku se rovná výsledku provedení příslušné operace n-té algebry nad n-tými prvky vstupu)

Příklad

- $U_1 = (A_1, +), U_2 = (A_2, *)$
- $U_1 \times U_2 = (A_1 \times A_2, \circ)$ kde operace $\circ$ je definována jako $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 * b_2)$

Poznámky

Přímé součiny typických algeber (viz Algebraické struktury) jsou **algebry stejného typu** **kromě oboru integrity**, kde to neplatí, protože (0,1) * (1,0) = (0,0)

Normální podgrupa

Normální **podgrupa** $\mathbb{P}$ grupy $(\mathbb{G}, \cdot)$ je taková její podgrupa, pro kterou navíc platí

- $\forall g \in \mathbb{G} \quad g \cdot \mathbb{P} \equiv \{g \cdot p, p \in \mathbb{P}\} = \{p \cdot g, p \in \mathbb{P}\} \equiv \mathbb{P} \cdot g$

V abstraktní algebře je normální podgrupa podgrupou, která je neměnná ve spojení se členy skupiny, které je součástí. Jinými slovy, **podgrupa $\boldsymbol{H}$** grupy G je v G normální jen potud, pokud $\boldsymbol{gH} = \boldsymbol{Hg}$ pro všechna g v G.

- Na Wiki ještě píší, že "*Évariste Galois byl první, kdo si uvědomil význam existence normální podgrupy.*". Já bužel význam takové kokotiny nechápu :-(

Ideály okruhů

Ideál je matematický pojem z oblasti algebry označující podmnožinu nějakého okruhu s jistými „dobrými“ vlastnostmi.

- Tak jako normální podgrupy jsou speciálními případy podgrup, jsou rovněž ideály **jisté podokruhy daného okruhu**.

Definice

Množina $\emptyset \neq I \subseteq R$, kde R je **okruh**, se nazývá levý resp. pravý ideál, má-li následující vlastnosti:

- pro každé $a, b \in I$ je také $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}$
- pro každé $a \in I$ a každé $r \in R$ je také $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$ resp. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}$
- Je-li ideál zároveň levý i pravý, nazývá se oboustranný ideál, nebo prostě jen ideál.

Nechť $(R, +, \bullet)$ je okruh, M je libovolná podmnožina množiny R. Potom průnik všech ideálů v R, které obsahují množinu M, je ideál v R, který se nazývá ideálem generovaným množinou a značí se $[M]$. Množina M se nazývá systém generátorů ideálu $[M]$ a její prvky generátory tohoto ideálu.

Prázdná množina generuje v libovolném okruhu nulový ideál R.

Příklady

- V každém okruhu R jsou množiny $\{0\}$ a R ideály. Tyto ideály se nazývají **triviální ideály** v R. Ideál, který není triviální se nazývá netriviální nebo také vlastní.
- V okruhu **celých čísel** je množina **všech sudých čísel** ideálem, konkrétně **hlavním ideálem** (2).
  - $\boldsymbol{6 - 2 \in \mathbb{Z}\%2}$, protože prostě 2 je sudé a pokud odečteme sudé číslo od jiného sudého čísla, tak vždy dostaneme sudé číslo.
  - **Hlavní ideál** v teorii okruhů je takový ideál I v okruhu R, který **lze generovat jediným prvkem** a z okruhu R.

TOTO JSOU NEUVĚŘITELNÉ A KARDINÁLNÍ SRAČKY A JÁ SE ODMÍTÁM TAKOVÉTO HOVADINY UČIT. K ČEMU TO PROBOHA JE?

- **Btw: nejhorší je, že oni toto fakt zkouší :-/**

Notes

1. Otazka (předmět) (okruh): 3 - MAT - Algebraické metody - zaměření na grupy, svazy
Kdo me primarne zkousel: Holik
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Popsal jsem operace grupy, pak jsem měl vysvětlit vlastnosti: **Uzavřenost**, **asociativita**, **nulový prvek**, při tom jsem zmínil ty **nižší algebry**. Potom chtěl vědět, co kdyby byly **v grupě dva nulové prvky**. Než jsem pochopil, co chtěl, abych dokázal, tak řekl, že raději půjdeme dál. Dále jsem popsal svaz, uvedl jsem některé varianty a pak chtěl vědět **pravidla, která ve svazech platí**. Nemohl jsem si vzpomenout na význam pojmu **idempotence**, ale nakonec jsem se k ní dostal. Celkově jsem odpovídal nestrukturovaně a někdy zmatečně a svazy jsem neměl úplně naučené. Holik musel usměrňovat. K dokonalosti bych si to musel přeříkat, což jsem neudělal.
Znamka D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&p=335314&hilit=algebraick%C3%A9+metody#p335314>

2. Otazka (okruh): 10 . Faktorove algebry,kongruence

Kdo me primarne zkousel: **Hruska**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Chtel obecny pohled, tj. algebra , operace nad ni. Pak jaka tam **musi platit relace (*ekvivalence*)**. Pak ze mam nejakou operaci, a velmi neformalne jsem mu na tabuli napsal, jak je definovana **kongruence**. Nasledne se zeptal na to, co je **faktorova mnozina**, jak vznikne, jak souvisi s **faktorovou algebrou**. Opet zadne formalismy, stacilo vysvetlit a odpovedet na jeho otazky (typu: je nasobeni kongruence, je scitani kongruence, uvest vlastni priklad kongruence...). B

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): MAT Algebraicke metody (podotazka kongruence)
Kdo me primarne zkousel: **Češka Milan**, prof. RNDr., CSc.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Mal som preskocit vatu okolo a rovno prest k **relacii kongruence**, tak som zapisal formalny zapis na tabulu, na co prof. Ceska ma vyziadal nech moj zapis prevediem do ***infix notacie na vlastnom priklade***. Tak som nadefinoval grupoid s jednou binarnou operaciou (A, kruzok) a prepisal pravu stranu implikacie z f(a,c) na a kruzok c. Potom sa ma pytal na tu samotnu **relaciu ekvivalencie**, **rozklad na tried**, **z coho sa sklada faktorova algebra** a **aky je to morfizmus ked zobrazujeme algebru na jej faktorovu algebru** - ***odpovedal som surjektivny homomorfizmus***. Potom sme presli k **zbytkovym triedam**, kde som nadefinoval **a = b mod n <=> n | (b-a)** a ukazal Z4 ako budu vyzerat jednotlive triedy ekvivalencie. K tomu po mne chcel este zapisat **formalny zapis [a]pi = { b | b pi a, kde b patri A)**. Aj ked budik zazvonil, jemne pretahoval cas ale nevadilo to - davalo to logiku dokoncit myslienku a prednes - potom povedal ze mu to staci. Nakoniec som z tejto otazky dostal za B, kazdopadne po vyhlaseni vysledkov a podani ruky predsed. komisie ma este prof. Ceska zastavil, nech idem k tabuli a ci si teraz v klude spomeniem co mi v tom **formalnom zapise kongruencie chyba**. Povedal som mu, ze mi tam **chyba kvantifikator**, ze to plati pre vsetky prvky z danej mnoziny. On mi podal ruku a povedal, ze to bol jediny dovod preco mi dal B. Mozno to tu v texte posobi neprijemne, ale prave naopak, usmieval sa pri tom a posobil velmi milo. Myslim si, ze za tie roky uz videli vselico a tak chapu ze stres ma velky vplyv na studenta.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh):

MAT, Homomorfizmus

Kdo me primarne zkousel:**Ceska**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:

4 minuty su fakt malo, ked sa clovek nevie vykoktat a dostane trosku blok. Opakoval som si definiciu den pred tym, ale mal som problem si na ten vzorec spomenut, nakoniec to nejak slo. Chcel vediet "konkretny" priklad takze nejaka operacia + na operaciu +*. Nebolo to zlozite, ale stres mi zahltil mozog. Ceska bol naozaj prijemny a pomahal. Prajem

kazdemu, nech ho skusa Prof. Ceska, bolo na nich vidno, ze to chcu dat kazdemu. Nakoniec C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Algebraické metody (podalgebry, homomorfismy)

Kdo me primarne zkousel: Šlapal (občas **Češka** něco řekl)

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:

Přečetl jsem si otázky, které jsem dostal na dvou papírcích a vzal jsem si minutu na "oddych"... dělal jsem, že něco píšu na papír, ale jen tak jsem si bezmyšlenkovitě čmáral. Pak to začalo... ticho..resp. nikdo se mě na nic neptal, tak jsem začal sám s tím, co je algebra, ale jakmile jsem to napsal na tabuli, tak mě šlapal přerušil, že půjdeme rovnou na věc. Vysvětlil jsem mu, **co je to podalgebra**, pak přímo, co je to **podgrupa** (a jaké má podrugpa vlastnosti) a co **musí platit** (***operace v podmnožinách jsou uzavřené***). Jenže jemu to nestačilo vysvětlit, ale chtěl to všechno napsat na tabuli. Přesně jsem nechápal, co tedy na tu tabuli chce napsat, když jsem mu to řekl. Tak mi to upřesnil a řekl, že chce zápis té "uzavřenosti" pomocí predikátové logiky
... Jakmile řekl predikátové logiky, tak mi naskočili první dvě státnicové otázky bez souvislosti s tím co chce a byl jsem v kelu

Nicméně Šlapal byl vytrvalý a chtěl vidět, že to umím, bez toho bychom se nehli dále.... Nakonec se mě k tomu snažil dostat přes různé okliky, stejně tak Češka a já se nakonec nějak rozpomněl, nebylo to těžké.. asi vliv stresu ... nevim, proč to tak hrotil:) Úplně stejně probíhal **homorfismus**, řekl jsem mu, co to přesně je (**definici**), něco jako f(x+y) = f(x) * f(y) z rychlíku s vysvětlením principu mu nestačilo. Nadiktoval mi grupu, pak ještě jednu a chtěl, to ukázat na tabuli, pro všechny jejich operace... binární, unární, nulové... Tím, že jsme hráli na jeho hřišti (neukazoval jsem mu to na grupě, kde jsem to hezky uměl a z které jsem se to naučil), tak to bylo delší a zmatené... Nakonec jsme snad 20min. probírali podrobně jen tyto dvě věci. To všechno jsem nějak odvodil ale museli mě občas nakopnout a mít HODNĚ trpělivosti => D

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

Kdo me primarne zkousel: **Ceska**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: fail fail fail, vsetko som to chapal a nedokazal to zo seba vyklopit, ked sa ceskovi nepodarili zo mna dostat teoriu tak sa zacal pytat na konkretne pripady algebier a homomorfizmov, velmi pomahal a bol prijemny a slusny, zachranila ma diplomka a dostal som za D, inak by som mal urcite E

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

2. Otazka (okruh): 14. - konkretne je zajimala pouze (!!!) "**kongruence a faktorove algebry**"
Kdo me primarne zkousel: **Ceska Milan**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Ceska sel po konkretnich vecech. Obecna (a nutno priznat, ze asi povrchni) znalost kongruence nestacila a chtel toho vedet podstatne vice - **vzorce**, **definice**, **souvislosti**, priklady, **kongruence zbytkovych trid** ... Asi jen diky tomu, ze jsem fakt dobre znal zaklady, tak me nevyhodil.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

05 - Obory integrity a dělitelnost

pátek 13. května 2016
9:46

Obor integrity
Polynom
Okruhy polynomu
Operace s delenim
operace s kracenim

Obory integrity a dělitelnost (okruhy polynomů, pravidla dělitelnosti, Gaussovy a Eukleidovy okruhy).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Obory_integrity_a_d%C4%9Blitelnost

Obor integrity $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$

Obor integrity je komutativní okruh ***R*** s jednotkovým prvkem, pro který navíc platí axiom

- $\forall a \in R, a \neq 0 \quad \forall b \in R, b \neq 0 \quad a \cdot b \neq 0$

Trošku jiný pohled na obor integity je, že se skládá z komutativní (Abelovské) grupy a monoidu: (M, ⊕, ⊗)

- (M, ⊕) je komutativní (**Abelovská**) grupa
- (M, ⊗) je **monoid**
- a ⊗ b ≠ „0“

Okruhy polynomů

Okruh polynomů je takový okruh, který je tvořen **množinou polynomů** s **koeficienty z nějakého jiného okruhu**. Jedná se o důležitý algebraický koncept a lze se s ním setkat například při konstrukci rozkladových těles nebo v Hilbertově větě o bázi.

Mějme komutativní okruh s množinou *M* s „1“. Pak $\boxed{\sum a_k x^k}$ pro *k* od 0 do ∞ je **polynom neurčité**[1] ***x* nad *M*** ($a_k \in M$).

- "neurčitá" == "proměnná" ... zkarátka stupidní názvosloví

Prostě **$4a^3 + 8{,}2a^2 - 5$ je *polynom neurčité* a *nad*$\mathbb{R}$.**

- Polynom ve tvaru *ax* + *b* je to **lineární polynom**.
- Polynom s největším nenulovým koeficientem rovným „1“ (kdyby u příkladu výše nebyla ta 4 na začátku) je **normovaný polynom**.
- **Stupeň polynomu** je mocnina u nejvyššího „nenulového“ koeficientu (v příkladu výše tedy 3). Pokud je polynom jen číslo, tak je stupeň 0 a pokud jen polynom jen „0“, tak je jeho stupeň −1.
- Když položíme polynom rovný „0“ a vyřešíme, tak dostaneme jeho **kořeny**.
    - Tedy: *a* je kořen polynomu *p(x)* práve tehdy, když *p(a) = 0*
    - $\mathrm{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]}$

Dělitelnost

b deli a

Prvek a je dělitelný dělitelem b (značíme $b|a$) právě tehdy pokud platí: $\boldsymbol{\exists c \in I : a = bc}$

Operace s dělením

$$\forall (a, b) \in A^2, \exists (x, y) \in A^2 : \underline{a \circ x = b \wedge y \circ a = b}$$

Pokud A není prázdná a operace ∘ je asociativní tak platí:

- ∘ je operace s dělěním
- existuje neutrální prvek a každý prvek $x \in A$ je invertibilní, tzn.

$$\exists (y) \in A : x \circ y = y \circ x = e$$

Operace s krácením

- $a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
- $x_1 \circ a = x_2 \circ a \Rightarrow x_1 = x_2$

  Rovnice $a \circ x = b$ a $y \circ a = b$ mají v operaci s krácením maximálně jedno řešení. Pokud je operace i asociativní tak mají právě jedno řešení.
  Pro **konečnou množinu A platí**: ∘ *je operace s dělením* ⇔ ∘ *je operace s krácením*

Pravidla dělitelnosti

Prvek *a* je dělitelný *b* (značíme *b*|*a*) pokud existuje nějaké *c* kdy *a* = *b* ⊗ *c*.

- *a*|„0“ („0“ lze dělit čímkoliv)

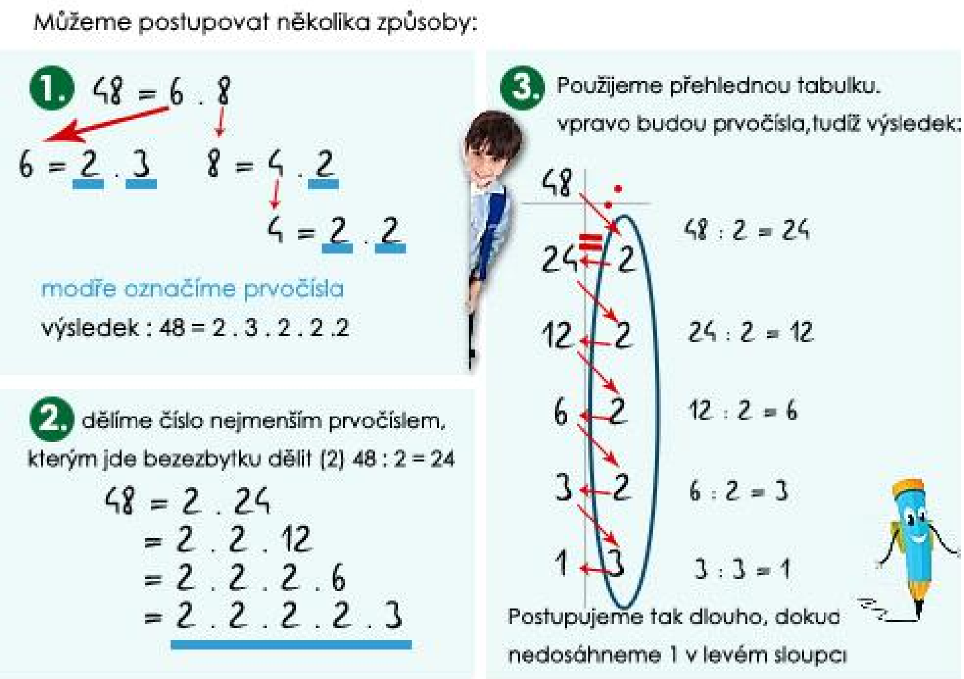
Jednotka
asociovane prvky
Trivialni delitele
Vlastni delitele
Ireducibilni prvek
Prvocinitel

- „1“ | a (cokoli je dělitelné „1“)
- $a | a$ (cokoli je dělitelné samo sebou)
- $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$ (dělitel mého dělitele je i můj dělitel)
- $a | b \Rightarrow a | bc$ (můj dělitel je i dělitel mého násobku)
- $a | b \wedge a | c \Rightarrow a | (b + c)$ (součet je dělitelný společným dělitelem sčítanců)
- $c \neq$ „0“, $a | b \Rightarrow ac | bc$ (vynásobením dělence i dělitele stejným nenulovým číslem se dělitelnost nemění)
- $a | b \wedge c | d \Rightarrow ac | bd$ (vynásobením dělenců mezi sebou a dělitelů mezi sebou se dělitelnost nemění)
- $a | b \Rightarrow a^n | b^n$ (umocnění dělence i dělitele stejným číslem dělitelnost nemění)

Delitel cisla 1

- Dělitel „1“ se označuje jako **jednotka**. Množinu všech jednotek oboru integrity I značíme $E(I)$. 1 , -1
- **Asociované prvky** se liší jen vynásobením některou jednotkou. Asociované prvky jsou navzájem svými děliteli.
- **Triviální dělitelé** prvku a jsou všechny jednotky a všechny prvky asociované s prvkem a. 7 . 1 , -1 , 7 , -7
- **Vlastní dělitelé** jsou všichni netriviální dělitelé.
- **Ireducibilní prvek** má pouze triviální dělitele (*„1“* a *sám sebe*, např. **prvočísla**)
  - Ireducibilní = "nerozložitelný". Platí to i pro polynomy, které nelze rozložit (ireducibilní polynomy).
- Pokud platí: $a | (b \otimes c) \Rightarrow a | b \vee a | c$ pak je a **prvočinitel**.

Prvočinitel - po lopatě

  - Název prvočinitel vznikl z názvů **prvočíslo** a **činitel**. Prvočinitel je **prvočíslo, které dělí nějaké číslo**. Každé *složené číslo jde napsat jako součin prvočinitelů.*
  - 

Gausovy a euklidovy okruhy

Gaussovy okruhy

Příklady Gaussových okruhů: celá čísla, reálná čísla, racionální čísla, komplexní čísla, všechna tělesa, …

Gaussův obor integrity neboli **obor integrity s jednoznačným rozkladem** je v algebře, volně řečeno, takový okruh, ve kterém platí analogie Základní věty aritmetiky, totiž že **každý jeho prvek** (*až na určité výjimky*) je **možno** v jistém smyslu **jednoznačně vyjádřit jako součin prvočinitelů**.

V Gaussově okruhu platí:

- každý **ireducibilní** prvek je **prvočinitel**
- každý neprvočinitel je tvořen součinem určitých počtů (mocnin) různých (neasociovaných) prvočinitelů a jednotky

- a|b ⇔ a se skládá ze stejného nebo menšího počtu výskytů jednotlivých prvočinitelů

Největší společný dělitel (NSD)

vezmu všechna prvočísla, která se vyskytují **v obou** prvočíselných rozkladech (pokud žádné takové není, je největší společný dělitel 1) a u každého použiji ***minimální mocninu***, ve které se vyskytuje. Získávám tím prvočíselný rozklad největšího společného dělitele.

- Například největšího společného dělitele čísel 136 a 204 lze nalézt tak, že zjistíme, že **136 = 2^3×17 a 204 =2^2× 3×17**. V rozkladech se vyskytují prvočísla 2, 3 a 17 s exponenty 3, 0, 1 u menšího čísla a 2, 1, 1 u většího čísla. Výsledné NSD pak je součin prvočísel vyskytujících se v obou rozkladech umocněných na příslušné nejmenší exponenty, tedy **2^2×17 = 68**.

Nejmenší společný násobek(NSN)

vezmu všechna prvočísla, která se vyskytují v rozkladu prvního **nebo** druhého čísla a u každého z nich použiji ***maximální mocninu***, ve které se vyskytuje. Získávám tím prvočíselný rozklad nejmenšího společného násobku

1. Zadaná čísla: 15, 20, 90
2. 15 = 3 × 5
3. 20 = 2 × 2 × 5
4. 90 = 2 × 3 × 3 × 5
5. n(15, 20, 90) = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 180

Normované prvky

množinu I rozdelíme na triedy podľa relácie asociácie (~) a z každej triedy vybereme jedného zástupcu

príklad: celé čísla: triedy sú {0}, {+-1}, ... {+-n} a ako normované prvky vyberieme len kladné (použijeme absolútnu hodnotu)

normované prvočinitele: zástupcovia tried, ktoré obsahujú prvočinitele

Svaz dělitelů

je svaz nad množinou I/~ (faktorová množina asociovaných prvků) kde je relace uspořádání definována jako $[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a|b$

Eukleidovy okruhy

Okruhy na kterých **je definováno dělení se zbytkem**. Každý *Eukleidův okruh je Gaussův okruh*.

Dělení se zbytkem:

- $\forall\, a \in I \setminus$ „0“ (dělitel)
- $\forall\, b \in I$ (dělenec)
- $\exists\, q \in I$ (výsledek)
- $\exists\, r \in I$ (zbytek)
- $b = aq + r$
- $r < a$

Eukleidův algoritmus pro NSD

function nsd(a, b) // a > b !
  if b = 0
    return a
  else
    return nsd(b, a **mod** b)

Notes

2. Otazka (předmět) (okruh): 5. Obory integrity a delitelnost

Kdo me primarne zkousel: Rogalewicz

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Tuto otazku som si nechal ako druhu, pretoze som vedel, ze k nej moc neviem. Nastastie som si predtym pozrel co je to obor integrity a aspon to vedel s istotou **zadefinovat**. Stacilo neformalne povedat, co to je. Potom hned padla otazka **co je** to **delitelnost**. To som si tiez presne nepamatal, ale stacilo, ked som na tabulu napisal ax=b (Rogalewicz povedal, ze to takto staci, ze predpokladajme, ze je to komutativne) a hned sa spytal kedy je b delitelne a-ckom. To som mu povedal a stacilo mu to. Potom sa pytal na **Gausov okruh**. Ten som si pomylil s **Euklidovym**, tak ma opravil. Dalej chcel vediet co je to **okruh polynomov** nad x a ze sa tam **zachovavaju vztahy** (ak je to nad oborom itegrity, tak aj to je obor integrity alebo nieco take. Tu uz som vobec nevedel a len prikivoval. Potom povedal, ze mu to staci. Rogalewicz celu dobu pomahal a napovedal. Bol som rad, ze ma tento okruh skusa zrovna on. Mam to za D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): MAT 5 - Obory integrity a dělitelnost
Kdo me primarne zkousel: Hrdina
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Nejprve jsem začal tím co to je **obor integrity** (algebra, dvě bin operace), tak mě zastavil a řekl že to chce **zadefinovat pomocí okruhu**, to jsem řekl (už teď to bylo určitě na E

). pak se zeptal na **operace** s **dělením** a s **krácením**, chtěl vysvětlit co platí. To už bylo horší, nějak ne a ne naskočit, plantal jsem tam nějaké blbosti, až mi nakonec nadiktoval:
a*x1 = a*x2 =>
a zbytek už jsem dopsal
x1 = x2
pak se ptal jak je to s těma operacema u těles a která je "silnější", chtěl slyšet něco jako když je to operace s dělením, pak je to operace s krácením (nebo naopak), no řekl jsem to přesně naopak, řekl že teda blbě a že mu to stačí. V tu chvíli sem myslel že amen, nakonec dali D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): MAT Obor integrity a dělitelnost
Kdo me primarne zkousel: Vojnar Tomáš, prof. Ing., Ph.D. UITS FIT VUT, Brno
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Hned ze startu mi oznámil, že ho bude zajímat právě ten **obor integrity**. Na začátek jsem mu popsal klasické vlastnosti (**asoc., komut., 0!=1**). Pak se zeptal na **operaci krácení**, kterou jsem při učení tak trochu přeskočil. Nakonec mi to prakticky nadiktoval a pak jsem to měl dokázat. Občas jsem asi vypadal, že nerozumím česky. ale nakonec jsme se nějak dobrali k cíli. **Češka** měl ještě kontrolní otázku: **jaktože můžu mluvit o dělení**, když není tahle **operace definována** (stačilo říct, že ***máme inverzní prvky***).

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

06 - Teorie polí

pátek 13. května 2016
9:49

Teorie polí (minimální pole, rozšíření pole, konečná pole a jejich konstrukce).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Teorie_pol%C3%AD

Pole

2012 0

Pole je komutativní okruh $(R, +, 0, -, *, 1)$ s inverzním a jednotkovým prvkem kde $0 \neq 1$ a $(R \backslash \{0\}, *)$ je abelovská grupa.

Příklady:

- Množina **racionálních čísel** $\mathbb{Q}$
- Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a její největší algebraické komutativní nadtěleso, množina komplexních čísel $\mathbb{Q}$

Podpole

Pokud omezíme nosnou množinu pole a pořád to zůstane pole, je to **podpole**.

Minimální pole

Pole $(K, +, 0, -, *, 1)$ se nazývá minimální, pokud **nemá žádná jiná podpole než sebe sama**.

- Pole, ze kterého když cokoliv odebereme tak už to nebude pole.

Každé pole má **vždy jediné podpole**, které **je minimální**.

Rozšíření pole

Pokud do pole **něco přidáme**, a **stále to bude pole**. Vlastně by se to dalo nazvat **nadpole**.

- Buďte K,L pole a K podpole pole L. Potom se L nazývá nadpole nebo rozšíření pole K.
- Je-li L nadpole pole K a $S \subseteq L$, pak definujeme rozšíření K(S) pole K takto:
  - $K(S) \coloneqq \bigcap\{E \subseteq L | E \text{ je podpole pole } L, \text{které obsahuje } K \cup S\}$
- Je-li $S = u1, \ldots, ur$ konečné, pak píšeme $K(S) =: K(u1, \ldots, ur)$. Je-li speciálně $S = \alpha$ jednoprvkové, pak píšeme $K(S) =: K(\alpha)$ (jednoduché rozšíření pole K).

Konečné pole (***Galoisovo*** pole; $\boldsymbol{GF(p^k)}$)

https://cs.wikipedia.org/wiki/Kone%C4%8Dn%C3%A9_t%C4%9Bleso

Pole, které **obsahuje konečný počet prvků** je konečné pole.

Charakteristika okruhu *char K* je velikost množiny obsahující výsledky násobení všech celých čísel jedničkou (pokud je množina konečná, jinak 0).

- *char* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ = 0 (není konečné)
- *char* $\mathbb{Z}_n$[1)] = *n*, když *n*-krát přičtu „1" dostanu „0".

Charakteristika: nejmensi cilo n, kde pro kazde a z mnoziny plati, ze n.a = 0. Pokud neexistuje tak 0.

Napr kdyz v Z6 vynasibim jakekoli a cislem 6, tak dostanu nulu.

Vlastnosti **konečného tělesa** (pole)

- **Počet prvků** konečného tělesa je roven $\boldsymbol{p^k}$, kde $\boldsymbol{p}$ **je prvočíslo** a $\boldsymbol{k}$ **je kladné přirozené číslo**.
- Charakteristika tělesa $GF(p^k)$ je rovna právě prvočíslu p.
- **Konečná tělesa** jsou **komutativní** (Wedderburnova věta).
  - **Wedderburnova věta** je matematická věta z oboru algebry, která říká, že neexistuje žádné těleso, které je konečné a nekomutativní, jinými slovy každé konečné těleso je komutativní a naopak, je-li nějaké těleso nekomutativní, nemůže být konečné.
- Konečná tělesa lze klasifikovat podle velikosti; platí totiž, že až na izomorfismus existuje vždy jen jediné konečné těleso o daném počtu prvků.
- Žádné **konečné těleso není algebraicky uzavřené** neboť označíme-li prvky konečného tělesa po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_k$, můžeme zkonstruovat mnohočlen $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_1})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_2}) \cdots (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_k}) + \boldsymbol{1}$, který je zřejmě stupně alespoň 1 a přitom žádný z $a_1, a_2, \ldots, a_k$ není jeho kořenem.

Konecne teleso = pole, protoze je komutativni

0

$x^0 = 1$
$x^1 = x^1$
$x^2 = x^2$
$x^3 = x^3 = \frac{x^3}{\text{mod polynom}}$

Kontrukce konečných polí - příklad

Je potreba generator - iredicibilni polynom
To k rika, na kolik bitu se to bude kodovat

X^3 + x + 1 .. Toto vybrat pro GF (2^3)

GF(2) GN(n) ... N udava pocet prvku

Okay, so we have a finite field on two elements. What's that mean? Well a field is a set of elements with an addition and a multiplication satisfying some rules:

1. Addition is defined on every element in the field. Multiplication is defined on everything except the zero element (more on him later).
2. Closure of addition and multiplication. This just means if you add two elements of your field, you get an element in the field (we never stray outside). Same goes for multiplication.
3. Associativity. Namely $a+(b+c)=(a+b)+c$ and $a(bc)=(ab)c$. It's something nice and familiar.
4. Commutativity. Namely $a+b=b+a$ and $ab=ba$. This is nice.
5. Additive identity (aka zero). There's a single element denoted 0 such that $a+0=a$ for all a. Seems like a dumb thing to have until you get to…
6. Additive inverses. For every element a there is an element denoted $(-a)$ such that $a+(-a)=0$. That is, we can cancel in addition. We use the negative sign to make the analogy with normal negative numbers. You can think of the negative sign as being a function that takes an element to its additive inverse, if you like. Note that the additive inverse *need not be a different element*. It just has to satisfy $a+(-a)=0$.
7. Multiplicative identity. This is a similar deal. There is an element, denoted 1, such that for every element a, we have $a\cdot 1=a$.
8. Multiplicative inverses. This is also a similar deal, but for multiplication. Every element a (except zero) has a multiplicative inverse, denoted a^{-1} such that $a\cdot(a^{-1})=1$.
9. Distributivity. Addition and multiplication work together in the way you think, namely: $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$.

Phew! That's a fair bit of stuff to remember. Actually, all you have to do is expect everything to work how you expect it to work with normal numbers, but the actual “addition” and “multiplication” might be a little weird.

So let’s create

$GF(2)$

. Well we have two elements and we have to have 0 and 1. We’re pretty much done and dusted, except if in this field

$0 = 1$

. But if that were the case and we had some other element

a

, then

$a \cdot 0 = 0$

but

$a \cdot 0 = a \cdot 1 = a$

, which we said wasn’t 0 or 1! Therefore they have to be different.

Notice this logic forbids a field from having exactly 1 element. Therefore we are constructing the smallest example possible.

We can specify the addition and multiplication by lookup tables:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

We can also simplify it by setting

$GF(2) := Z_2$

with the usual addition and multiplication modulo 2. Easy!

GF(5)

Let’s try for a slightly bigger example. This field has 5 elements in it. Two of them have to be 0 and 1, and we’ll call the other three

a, b, c

. Now, following the lead of the previous example, we could just say

$GF(5) := Z_5$

and

$a, b,$

and

c

are just 2, 3, and 4 respectively. This is fine and convenient. Here's the addition and multiplication tables:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

There's a nice symmetry to the tables, which is because addition and multiplication are abelian groups.

From <http://mathblog.brettwitty.net/2011/01/how-to-construct-finite-fields/>

Notes

2. Otazka (predmet) (okruh): Teorie polí, ..., konečná pole a jejich generování.
Kdo me primarne zkousel: doc. Drábek
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Začal jsem tím, co **je to pole,** jaké jsou na něm nastavené **operace** a jaké splňují **vlastnosti** (komutativita, asociativita). Doc. Drábek si přešel blíž, aby viděl, co píšu. Chvilku jsem ještě povídal, ale on chtěl, abych se zaměřil na **konečná pole**, vysvětlit, co **znamená jejich konečnost**, a abych to ukázal na příkladu GF(2) a GF(2^m). Tam jsem si vzpomněl na PDS a kódy, začal jsem s **ireducibilním polynomem x^3 + x + 1** a z něj jsem vygeneroval celou algebru. Ještě se ptal, kolik bitů je potřeba na reprezentaci té algebry a pak mě propustil. Celkově se šikovně ptal a byl velmi milý a nápomocný.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otázka (předmět) (okruh): 6. Teorie polí (zaměřit se na konečná pole)
Kdo mě primárně zkoušel: Švéda
Co jsem k tomu řekl/na co se ptali/co mne vytkli:
Začal jsem tím, že je to **algebraická struktura typu** (2,0,1,2,0) popsal jsem jednotlivý **operace**. Švéda se pak zeptal jaké jsou ty dvě algebry, tak jsem řekl, že obě abelovské grupy, což prý nejsou, ale že ta **aditivní část je abelovská grupa souhlasil**. Pak se došlo ke **GF(2),** kdy jsem mu řekl něco o **ireducibilních polynomech** a už nic moc víc jsem nevěděl, tak jsem přímo řekl, že si nějaké to GF zkonstruujeme (zazvonil budík). Vybral jsem si polynom a začal konstruovat. U řekl, že to stačí a k čemu se to **používá**. Řekl jsem, že pro **lineární zabezpečovací kódy**, on mě usměrnil že to taky, ale že chce **cyklické kódy**. Tak jsem mu tam vysypal **zbytek po dělení polynomem** a to mu stačilo.
Celkem za C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): Teorie polí (6 - MAT)

Kdo me primarne zkousel: Švéda Miroslav, prof. Ing., CSc.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Pro mě jedna z nejhorších otázek, co jsem mohl dostat. Zachránilo mě to, že přede dveřmi toto téma rozebírali další kolegové. Naštěstí jsem si to vše zapamatoval a to jsem tam vše také řekl. Začal jsem tím, co jsem věděl sám. Řekl jsem, že **Pole** je vlastně **abelovská grupa** a **pologrupa**. Hned jsem ho

napsal na tabuli a Švéda chtěl, abych detailně **popsal ten zápis (K, +, 0, -, ., 1) -2,0,1,2,0** -- následně chtěl **vztahy** a **vlastnosti**. Popsal jsem vztahy, binární operace, asociativitu a vše kolem atd. (v tuto chvíli už jsem tušil, že to musí být na E). Snažil jsem se pořád mluvit. (No a to bylo tak vše, na co jsem si vzpomněl. Teď jsem říkal to, co jsem slyšel od kolegů na chodbě a měl v živé paměti) Tak jsem hned navázal na **minimální pole,** co to je. Švéda pak chtěl vědět, co je to **GF**. Chtěl abych mu napsal **GF2**. Jelikož už jsem nějak nevěděl, tak mě navigoval. Ať udělám nějaký vektor. Pak chtěl **vztahy mezi vektory a polynomy**. Pak ať ten vektor reprezentuju polynomem. (CRRR -- teď zazvonil budík, ale zkoušelo se furt dál) Pak prof. Švéda říkal, že se to **používá v cyklických kódech**, čehož jsem se hned chytl a něco k tomu řekl, ale po chvíli jsme přešli zase zpět. Řekl jsem o generování toho **pole, kořeny, ireducibilní polynom**, ... Dost mi v tom ale pomáhal a navigoval mě. Když viděl, že nevím, tak buď pomohl anebo jsme přešli jinam. Důležité bylo ale MLUVIT. Když jsem nevěděl, tak jsem to vyplnil větou typu "no, cyklické kódování ... další jsou konvoluční a lineární"...atd. Každopádně jsem při této otázce propotil sako.
Pak pronesl "má někdo doplňující otázku? ... (5s ticho) ... OK, to mi stačí".

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

Metricky prostor + priklady

07 - Metrické prostory

pátek 13. května 2016
9:51

Metrické prostory (příklady, konvergence posloupností, spojitá a izometrická zobrazení, úplnost, Banachova věta o pevném bodu).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Metrick%C3%A9_prostory

Metrický prostor

Metrický prostor je matematická struktura, pomocí které **lze formálním způsobem definovat pojem vzdálenosti**. Na metrických prostorech se poté definují další topologické vlastnosti jako např. otevřenost a uzavřenost množin, jejichž zobecnění pak vede na ještě abstraktnější matematický pojem topologického prostoru.

Definice metrického prostoru

Metrický prostor je dvojice $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\varrho})$, *kde* X je libovolná neprázdná množina a ρ (*"rho"*) je tzv. **metrika**, tj. Vzdalenost což je zobrazení

- $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
  - Je to prostě funkce vzdálenosti, která **definovaná pro všechny dvojice** bodů x, y ∈ X

Axiomy metrického prostoru

1. Axiom **nezápornosti**: $\varrho(x,y) \geq 0$
2. Axiom **totožnosti**: $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. Axiom **symetrie**: $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$

- **Trojúhelníková nerovnost**: $\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$

Příklady metrických prostorů

Prostor izolovaných bodů (diskrétní)

- X - libovolná neprázdná množina
- $\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & pokud\ x = y \\ 1 & pokud\ x \neq y \end{cases}$
  - Když jsou body identické vzdálenost je 0, když nejsou, vzdálenost je 1).

Metrický prostor R1 (1-rozměrný)

- $X = \mathbb{R}$
- $\varrho(x,y) = |x - y|$

EUKLIDOVSKÁ VZDÁLENOST

$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

$\sum |y_i - x_i|$

Metricky prostor R^n - priklady v nasem pdf

Uplny metricky posloupnost
cauchyovska posloupnost
Konvergence
limita

Úplné metrické prostory

Úplný metrický prostor je metrický prostor, v němž **každá cauchyovská posloupnost** je **konvergentní**. Prostor je úplný, právě když je absolutně uzavřený.
Dále uvažujeme označení $\chi = (X, \varrho)$

- χ ("chi")

Cauchyovská (neboli fundamentální) posloupnost x_n (Cauchy se čte *koši*, byl to Francouz)

- členy posloupnosti se k sobě čím dál více blíží na libovolně malou vzálenost
- $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{Z} : \varrho(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m,n \geq N(\epsilon)$
  - (tj. pro libovolně malou vzdálenost ε lze najít místo v posloupnosti od kterého dále jsou každé dva body posloupnosti k sobě blíže než ε)
- pozn. pro představu: máme metrický prostor izolovaných bodů (tj. když jsou body identické vzdálenost je 0, když nejsou, vzdálenost je 1). V tomto prostoru je postupnost bodů Cauchyovská jedině když se od určitého indexu opakuje jeden bod.
  - **Příklad postupnosti**: ABBADCDDDDDDD --> ε zvolíme např. 1 (co nejmenší), potom existuje *N*(ε) (v tomto případě 7 (index členu)), od kterého bude pro všechny vyšší indexy m a n platit, že body s těmito indexy budou mít menší vzdálenost než ε (v tomto případě 0).

Cauchyovská ["košiovská"] posloupnost

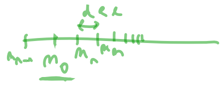
Cauchyovská posloupnost (také **bolzanovská posloupnost**) je taková [posloupnost](#) prvků [metrického prostoru](#), **jejíž členy se k sobě blíží libovolně blízko**. **Každá [konvergentní posloupnost](#) je** nutně **cauchyovská**. Pomocí cauchyovské posloupnosti se definuje [úplný metrický prostor](#). V něm *cauchyovské posloupnosti* a *konvergentní posloupnosti splývají*. To pak přináší výhodu při **určování, zda posloupnost má [limitu](#)**, neboť stačí ověřit, zda je cauchyovská, bez nutnosti samotnou limitu zjišťovat, jako např. u [Banachovy věty o pevném bodě](#).

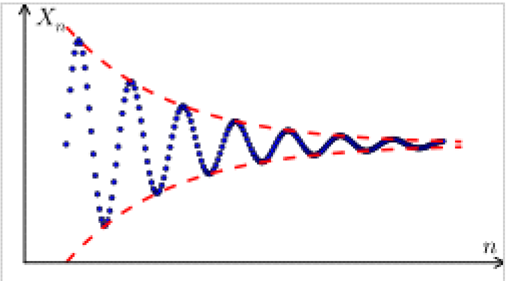
Definice Cauchyovské poslopnosti

V metrickém prostoru M s metrikou d je posloupnost $(x_1, x_2, \dots)$ cauchyovská, pokud pro ni platí tzv. Bolzanova-Cauchyho podmínka:

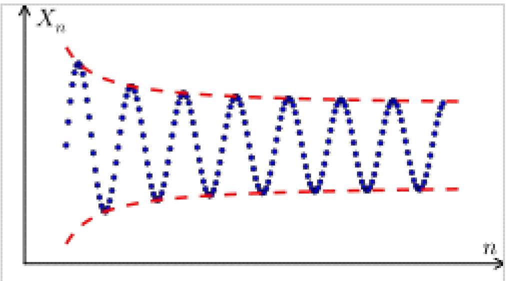
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\boldsymbol{n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon})$

- Tedy od určitého bodu se k sobě členy posloupnosti blíží čím dál více na libovolně malou vzdálenost.
  - Alternativní zápis: $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{Z} : \varrho(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N(\epsilon)$



- 

  (a) The plot of a Cauchy sequence (x_n), shown in blue, as x_n versus n. If the space containing the sequence is complete, the "ultimate destination" of this sequence (that is, the limit) exists.

  (b) A sequence that is not Cauchy. The elements of the sequence fail to get arbitrarily close to each other as the sequence progresses.

Příklady

- [Harmonická posloupnost](#) $\frac{1}{n}$ je cauchyovská.

Konvergence posloupností

Posloupnost (x_1,x_2,x_3,...,x_n) v metrickém prostoru M

Konvergence posloupnosti

- posloupnost konverguje k bodu x ∈ M jestliže každé okolí bodu x obsahuje všechny body posloupnosti od nějakého indexu výše
  - tj. pokud se body **posloupnosti se zvyšujícími indexy čím dál víc blíží k bodu x** (nebo se alespoň nevzdalují)
- pokud posloupnost konverguje k X pak libovolná pod-posloupnost vybraná z této posloupnosti také konverguje k x

Limita posloupnosti

Limita posloupnosti je [matematická](#) konstrukce, vyjadřující, že se hodnoty zadané [posloupnosti](#) blíží libovolně blízko k nějakému bodu. Právě tento bod je pak označován jako [limita](#).

- Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu $\boldsymbol{x}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{0}$

Pojem **limity posloupnosti** lze definovat na libovolném metrickém prostoru.
- Platí, že každá **posloupnost** má **nejvýše jednu limitu**.

Banachův princip pevného bodu

- Aneb **věta o kontrakci**.

Banachova věta o pevném bodě (nebo také Banachova věta o kontrakci) říká, že v neprázdném **úplném metrickém prostoru** **existuje pro danou kontrakci právě jeden pevný bod**.

Proč se tímto vůbec zabýváme? Protože řadu problémů souvisejících s **jednoznačností řešení rovnic** lze **převést na otázku existence** a **jednoznačnosti pevného bodu** nějakého zobrazení metrických prostorů.

Pevný bod

Jako pevný bod označujeme bod, který se v **daném zobrazení zobrazí sám na sebe**. Označuje se také jako samodružný bod.
Například pevnými body funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$, jsou čísla 2 a 3.

Definice pevného bodu

Nechť $f: M \to M$ je zobrazení. Prvek $x \in M$ nazveme pevným bodem zobrazení f, pokud $\boldsymbol{f(x) = x}$.

Příklad

Někdy je výhodné rovnici $f(x) = 0$ přepsat do tvaru $g(x) = x$ a hledat tedy bod, který se při zobrazení funkcí $g(x)$ zobrazí sám na sebe. Například rovnici:
- $cos(x) - x = 0$

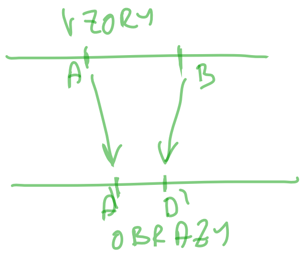
můžeme přepsat do tvaru:
- $cos(x) = x$

Problém najít bod, ve kterém funkce $f(x) = cos(x) - x$ protíná osu x se tím modifikuje na problém najít bod, který se po aplikaci funkce $g(x) = cos(x)$ zobrazí sám na sebe.

Kontraktivní zobrazení (kontrakce)

Kontraktivní zobrazení je takové zobrazení, kde **vzdálenost obrazů** je ***menší*** **než vzdálenost vzorů**.

Pokud (P, d) a (Q, g) jsou metrické prostory a pro zobrazení $f: P \to Q$ existuje číslo $\alpha \in (0,1)$ takové, že pro všechny $x, y \in P$ platí $\boldsymbol{g(f(x), f(y)) \le \alpha d(x, y)}$, pak zobrazení f nazveme **kontrakcí**.
- každé kontraktivní zobrazení je spojité



Spojitá izometrická zobrazení

Zobrazení spojité v bodě $x_0 \in X$

- *Když mají dva body nenulovou vzdálenost, tak i po zobrazení do jiného prostoru budou mít stále nenulovou vzdálenost*

Spojité zobrazení

- zobrazení spojité ve všech bodech

Homeomorfismus (homeomorfní zobrazení)

= bijektivni

Homeomorfismus je vzájemně **jednoznačné zobrazení** mezi topologickými prostory, které **zachovává topologické vlastnosti**. Homeomorfismus je tedy jiný název pro izomorfismus topologických prostorů.
- **Homeomorfní prostory** - metrické prostory mezi nimiž existuje homeomorfní zobrazení.

Izometrické zobrazení

Speciální případ homeomorfismu ve kterém se **vzdálenost vzorů rovná vzdálenosti obrazů**.
- **Izometrické prostory** - prostory jsou navzájem izometrické pokud mezi nimi existuje izometrické zobrazení.

Izometrické prostory lze považovat za **totožné** - ***liší se*** jen ***kvalita elementů***.

Notes

2. Otazka (predmet) (okruh): 3. Metrické prostory (podtržena Banachova věta nebo něco s ním)
Kdo me primarne zkousel: Vojnar
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
No a věděl jsem, že tohle bude boj... Navíc Vojnar řekl že chce jen **shrnout metrické prostory** a pak se budeme **věnovat tomu Banachovi**. Kromě **definice metrického prostoru** jsem upřímně nic moc neřekl, moc sem si zbytek nepamatoval, v hlavě mi lítaly nějaké eps-okolí a limity a konvergence, ale nic smysluplného, natož formálního, ale snažil sem se usmívat a dělat že aspoň malinko tuším. Pak nastala trapná situace když se mi VOjnar snažil hodně pomoct, vysvětlil mi zhruba **princip Banacha** a řekl že to je nějaká **kontrakční funkce** nebo co - chtěl to se mnou rozebrat, ale nevěděl sem, tak se mě ptal co to znamená kontrakce v češtině... v nervech a s krůpějemi potu na čele sem nevěděl, což komisi pobavilo (došlo mi to až pak), tak po asi 3 minutách snah ze mě něco vytáhnout mě poslali pryč... Vydřená E, velmi oprávněně, ale nevím jestli by se za tohle dalo/mělo vyhazovat - nechám na čtenářích.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): 7. Metrické prostory - Banachova věta (MAT)
Kdo me primarne zkousel: Vojnaro
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Věděl jsem, že **Vojnar tuto otázku rád zkouší** a tak jsem si ji prošel abych všemu rozuměl. Chtěl abych nejdřív řekl **Banachův princip pevného bodu**, potom se ptal na **jednotlivé části té věty**. Co **znamená ta úplnost** (*každá Cauchyovská posloupnost konverguje*), jaká má **Cauchyovská posloupnost vztah k té konvergenci** (to jsem moc nevěděl, tak jsem se snažil říct, že je to velice podobné té definici konvergence k bodu, načež mi řekl že **jak se v Cauchyovské posloupnosti k sobě ty body přibližují tak to vlastně znamená konvergenci**), co je to **pevný bod**, taky se mě ptal na aplikaci té věty (řekl jsem že podle toho můžeme dokazovat určité vlastnosti, ale asi čekal něco konkrétnějšího). Potom řekl, že přeskočí do jiného předmětu, ale vzhledem k tomu že jsem zatím odpovídal rozumné tak si to snad může dovolit. Samozřejmě se začal ptát na jeho předmět FAV a využití pevných bodů, ve kterých větách se vyskytly. Tak jsem řekl že Knaster-Tarski a Kleene fixpoint theorem. Potom se zeptal na Knaster-Tarski, což jsem mu zodpověděl a bylo po zkoušení.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): 7. Metrické prostory (úplnost, Banachova věta o pevném bodu).

Kdo me primarne zkousel: Vojnar Tomáš, prof. Ing., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Mal som tú otázku presne takto na papieriku napísanú, tak som sa ho spýtal, či sa mám naozaj zamerať len na **úplnosť a Banachovu vetu**. Vraj ak viem tak áno. Za tú minútu na prípravu som si teda stihol napísať na papier, čo je to **kontrakcia**, aby som to potom pri odpovedi aj tak zle prečítal

No o úplnosti som toho veľa nevedel. Hovoril som niečo o **konvergujúcej a Cauchyovskej postupnosti**, ale bol som z toho veľmi mimo. Bola to hotová tragédia. Potom naštastie som tú Banachovu vetu povedal celkom ok, opäť som, ale nevedel na čo sa vlastne používa.
Nakoniec mi teda dal asi z ľútosti napísať na tabuľu **metrické priestory, definíciu a 3 vlastnosti**, ktoré patria pre tieto funkcie + ešte funkciu **Euklidovského priestoru**. Toto som naštastie vedel a napísal som to všetko správne tak ma poslali von.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): (MAT) Metrické prostory (příklady, konvergence posloupností, spojitá a

izometrická zobrazení, úplnost, Banachova věta o pevném bodu)

Kdo me primarne zkousel: Vojnar Tomáš, prof. Ing., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
K otázce mi bylo explicitně řečeno, že se nemám zabývat obecnými **vlastnostmi metrických prostorů**, ale že mám svůj výklad soustředit k **Banachovu principu pevného bodu**. Jelikož jsem nechtěl tak z ničeho začít **konvergencí posloupností**, tak jsem stejně začal, že **metrické prostory mají nějakou tu metriku**, načež mi profesor Vojnar řekl, že když už jsem do toho šlápl, tak ať mu ty **vlastnosti metriky popíšu**. V to jsem tak trochu doufal, takže minutka za mnou. Pak jsem přešel ke **konvergentním** a **Cauchyovským posloupnostem**. Nebylo třeba psát žádné vzorce, jen lidsky popsat princip, Vojnar velice pomáhal, u BPPB jsem zapomněl dodefinovat kontraktivní zobrazení, na což jsem byl mile upozorněn, zkrátka k této fázi zkoušky nemám co dodat, pěkně jsme si popovídali, skončil jsem zněním **BPPB**, na co se používá a jak se počítá metodou postupných aproximací a byl jsem propuštěn.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh):
Metricke Prostory
Kdo me primarne zkousel:Vojnar

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
tak metricke prostory by som vedel vymenovat, no chcel odomna **3 zakladne vzorce k metrickym prostorom**. prve dve sme spolu odvodili ale ten treti sa nepodarilo


From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

Linearni prostor
Linearni zavislost
Dimenze
Baze prostoru

08 - Normované a unitární prostory

pátek 13. května 2016
9:54

Normované a unitární prostory (základní vlastnosti a příklady, normované prostory konečné dimenze, uzavřené ortonormální systémy a Fourierovy řady).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Normovan%C3%A9_a_unit%C3%A1rn%C3%AD_prostory

Základní pojmy

Lineární prostor (nebo také vektorový prostor)

Vektorový prostor (též **lineární prostor**, angl. *vector space*) je ústředním **objektem studia** **lineární algebry**, v jehož rámci jsou definovány všechny ostatní důležité pojmy této disciplíny. V jistém smyslu můžeme vektorový prostor chápat jako **zobecnění množiny** **reálných**, potažmo komplexních, čísel. Podobně jako v těchto množinách je i ve vektorovém prostoru definována **operace** **sčítání** a **násobení** s jistými přirozenými omezeními jako **asociativita** **apod**. Prvek vektorového prostoru se nazývá **vektor** (angl. *vector*). Na vektorovém prostoru je důležité, že má **lineární matematickou strukturu**, tzn. **dva vektory lze sečíst**, přičemž tento *součet je opět prvkem vektorového prostoru*, a totéž **platí i pro** **násobek** vektoru.

- $\mathcal{L}$ - neprázdná množina prvků (nazývaných body nebo vektory)
- **operace +** (sčítání prvků) - ***komutativní/abelovská grupa*** (komutativní, asociativní, neutrální prvek (θ - nulový vektor), inverzní prvek)
- **operace *** (násobení vektoru skalárem) - α - skalár - číslo z nějakého číselného tělesa T
  - ke každému skaláru α a vektoru x $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen vektor $\alpha x \in \mathcal{L}$
  - α(βx) = (αβ)x (asociativní)
  - 1x = x (identita)
- distribuční zákony
  - (α + β)x = αx + βx
  - α(x + y) = αx + αy

Lineární závislost

prvky (vektory) x,y,...,w jsou lineárně závislé pokud existují (skalární) konstanty $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ takové, že součet prvků vynásobených konstantami (z nichž alespoň jedna není 0) je nulový vektor

- $\boldsymbol{\alpha x + \beta y + \cdots + \lambda w = \theta}$
- tj. **prvky** jsou lienárně závislé pokud **se mohou navzájem vyrušit**.

Dimenze

Maximální **počet lin. nezávislých prvků**, které lze v **prostoru** nalézt.

Normalni linearni prostor
Banachuv prostor
Normovany prvek
Ekvivalentni normy
Podprostor linearniho prostoru
Nulovy prostor
Vlastni prostor

Báze prostoru

Libovolný systém n lin. nezávislých prvků v n-dimenzionálním prostoru.

Normovaný lineární prostor

Normovaný lineární prostor nebo **normovaný vektorový prostor** je v matematice takový **lineární prostor, ve kterém je každému vektoru x přiřazeno reálné číslo - norma** - vyjadřující délku vektoru x, t. j. na daném lineárním prostoru je definováno zobrazení $x \to \|x\|$. Pro normu vektoru x, označovanou $\|x\|$, musí platit následující 3 vlastnosti: R^+

$\rho: A \to R^+$

1. $(\forall x: \|x\| \geq 0) \wedge (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogenita)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Norma je v klasickém vektorovém prostoru = délka vektoru

- $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Každý normovaný prostor je metrický ($\varrho(x, y) = \|x - y\|$)

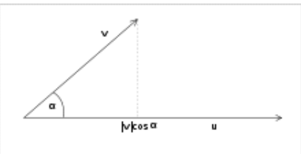
$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ Linearni norma

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ Kvadraticka norma

Skalární součin (to je ta věc, co se učí ve fyzice)

https://www.youtube.com/watch?v=KDHuWxy53uM

Často je výhodné definovat normu pomocí **skalárního součinu**.

- zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí číslo (skalár)
- Mějme dva trojrozměrné vektory **a** = (1,2,3), **b** = (4,5,6). Potom jejich skalární součin je
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a||b| \cos \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$
- z geometrického hlediska představuje skalární součin vektorů u, v součin velikosti vektoru u a velikosti průmětu v do směru vektoru u, tzn. - $\boldsymbol{u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha}$
  - Kde α je úhel, který svírají vektory u a v.
  - 

Geometrická interpretace skalárního součinu.

V případě, že je na lineárním prostoru definována norma shodná s normou definovanou pomocí skalárního součinu, nazývá se daný lineární prostor **prostorem unitárním**. Pokud je metrický prostor odpovídající danému normovanému lineárnímu prostoru úplný, nazývá se daný normovaný lineární prostor jako Banachův prostor. Pokud je úplný metrický prostor odpovídající danému unitárnímu prostoru, nazývá se daný unitární prostor jako Hilbertův prostor.

Normovane prostory konecne dimenze
Reiszova veta
Kvazikomlnice

M ože

Unitarni prostor
Ortogonalni soustava vektoru
Ortonormalni soustava vektoru
Ortonormalizace
Ortonormalni baze
schmidtova veta o ortogonalizaci
Uplne unitarni prosotory
Furierovy rady

Příklad: reálný n-rozměrný lineární prostor

- $\mathcal{L}$ - n-tice reálných čísel
- T - reálná čísla

a) Lineární norma

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

b) Kvadratická norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Normovaný prvek (normovaný vektor)

Prvek pro který platí $\|x\| = 1$

Každý vektor lze normovat jeho vynásobením $\frac{1}{\|x\|}$

Unitární prostor

V případě, že je **na lineárním prostoru** definována **norma shodná** s **normou** definovanou pomocí **skalárního součinu**, nazývá se daný lineární prostor prostorem **unitárním**

$\| x \| = \sqrt{(x,x)}$

Úplný unitární prostor se nazývá Hilbertův.

- Nezapomenout, že na **úplném** metrickém prostoru **konverguje Cauchyovská posloupnost**.

Reálný unitární prostor bývá také označován jako *prostor se skalárním součinem.*

Prostory se skalárním součinem, které mají konečnou dimenzi, bývají označovány jako euklidovské prostory.

Side notes

Eukleidovský prostor

Eukleidovský prostor je, historicky vzato, prostor splňující Eukleidovy axiomy. Laicky řečeno **jedná se o běžný prostor, v kterém jsme zvyklí vytvářet si svoje geometrické představy**. Pojem eukleidovského prostoru tak přešel z geometrie do fyziky i do algebry.

V lineární algebře se obvykle definuje jako **konečněrozměrný unitární prostor nad množinou reálných čísel.**

Vlastnosti

Eukleidovský prostor dimenze *n* se obvykle značí E_n.

Eukleidovský prostor je **unitární prostor**, a proto **je na něm definován skalární součin**.

Zavedeme-li v *n*-rozměrném eukleidovském prostoru kartézskou soustavu souřadnic, pak vzdálenost *d* mezi dvěma body *X* a *Y* o souřadnicích $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je určena vztahem

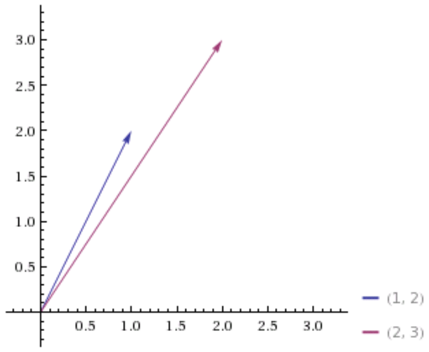
- $d = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Euklidovská norma

Je odmocnina ze součtu druhých mocnin souřadnic vektoru:

- $\|\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\| = \sqrt{\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$
- Př.: mějme vektory $a = (1,2)$ a $b = (2,3)$
  - $\|a\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.236 \dots$
  - $\|b\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.606 \dots$
  - $\boldsymbol{\varrho(a, b)} = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1.414} \dots$
    - Btw: tento výsledek není to co $\|a\| - \|b\|$!!!
    - https://www.wolframalpha.com/input/?i=VectorAngle%5B%7B1,2%7D,+%7B3,4%7D%5D
  - Skalární součin
    - $a \cdot b = 1 * 2 + 2 * 3 = 8$
    - $a \cdot b = |a| * |b| * \cos\alpha = \sqrt{1^2 + 2^2} * \sqrt{2^2 + 3^2} * \cos \mathrm{VectorAngle}[\{1,2\},\{2,3\}] = 8$
    - https://www.wolframalpha.com/input/?i=sqrt(5)*sqrt(13)*cos(VectorAngle%5B%7B1,2%7D,+%7B2,3%7D%5D)

Result:



Vector lengths:

(1, 2)	$\sqrt{5}$
(2, 3)	$\sqrt{13}$

Normalized vectors:

(1, 2)	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
(2, 3)	$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

distance	point	coordinates (1, 2)
	point	coordinates (2, 3)

Result:

$\sqrt{2} \approx 1.41421$

Úplné unitární prostory, Fourierovy řady

Zobecnění vyjádření prvku unitárního prostoru v prostorech s nekonečnou dimenzí

Fourierovy koeficienty

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je **ortonormální systém** v unitárním proostru **nekonečné dimenze**.
- Každý prvek f lze vyjádřit jako řadu Fourierových koeficientů c tak, že platí
  - $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \, , kde \; c_k = (x, \varphi_k)$

n-tý fourierův polynom

- Je n-tý částečný součet fourierovy řady
- $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

Fourierova řada

- Řada fourierových polynomů (posloupnost částečných součtů)

------------------**BULLSHIT** ALERT---------------------------------

Besselova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq ||f||^2$$

tj. součet druhých mocnin velikostí průmětů vektoru f do vzájemně ortogonálních směrů není vetší než druhá mocnina délky vektoru f

ide o nerovnosť, ktorá musí platiť, aby fourierova rada konvergovala k hodnote prvku f, pre ktorý bola vytvorená

Keďže sa počíta súčet nekonečného počtu prvkov, rada musí konvergovať, aby sa rovnala prvku f

v sume sú len koeficienty a nie prvky báze preto, lebo sa jedná o otronormálnu bázu, teda norma prvkov báze je rovná 1 (jednotkový prvok) a násobenie 1 nič nemení, takže sa môže vynechať (aspon predpokladam :))

Uzavřený ortonormální systém

platí v něm Parsevalova rovnost:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = ||f||^2$$

tj. součet druhých mocnin velikostí průmětů vektoru f do vzájemně ortogonálních směrů je roven druhé mocnině délky vektoru f

- v separabilním unitárním prostoru je každý úplný ortonormální systém uzavřený a obráceně

Notes

1. Otazka (předmět) (okruh): 8. Normované a unitární prostory.

Kdo me primarne zkousel: Vojnar

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Chcel len **základné definície + príklady**. Na začiatku blackout, Vojnar to zo mňa ťahal ako z chlpatej deky, dosť pomáhal, zaslúžené E.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

2. Otazka (okruh): Normované a unitární prostory

Kdo me primarne zkousel: Vojnar Tomáš, prof. Ing., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Tak toto uz nebola sranda. MAT som sa ucil, ale z tejto otazky som fakt vela nevedel. Povedal som nejaky uplne najzakladnejsi zaklad a aj tam som sa zmylil, takze to prebral pevne doruk Vojnar. Pomahal mi ako sa dalo, v urcitom momente mi diktoval, co mam napisat na tabulu. Fakt bol skvely a popri tom ako ma navadzal mi vela veci aj doslo. Konkretne chcel z **akych algebier sa skladaju normovane priestory**, **pravidla**, ktore platia pri **operaciach nasobenia** a **scitania**, **norma** a pravidla, ktore platia u nej, **normovany prvok** a ako by som **vypocital normu** v **eukleidovskom pristore**. Nakoniec uzasne D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

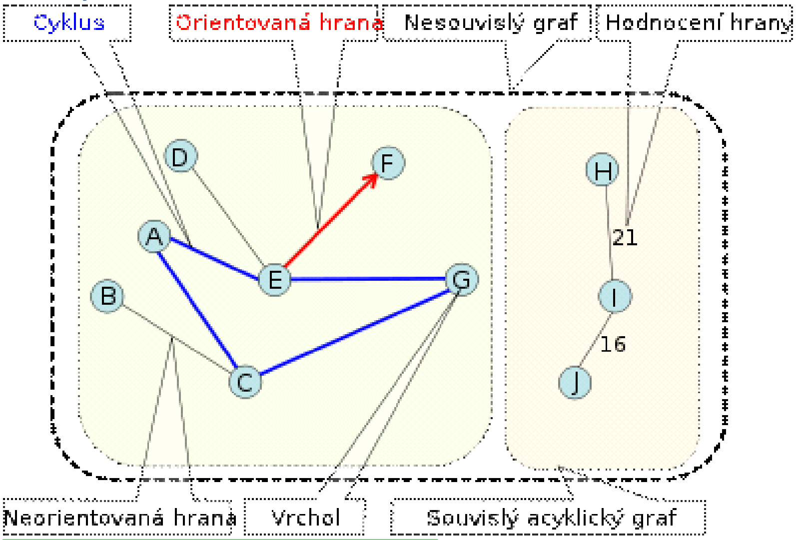
U techto dvou otazek prochazet i nasi pripravu

09 - Obyčejné grafy

pátek 13. května 2016
9:55

Obyčejné grafy (stupně uzlů, cesty a kružnice, souvislost grafu, stromy, kostry, Kruskalův a Primův algoritmus pro hledání minimální kostry ohodnoceného grafu, eulerovské a hamiltonovské grafy, obarvitelnost a planarita).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Oby%C4%8Dejn%C3%A9_grafy

Grafy



Obyčejný neorientovaný graf

V teorii grafů se termínem **obyčejný graf** označuje takový graf, jenž neobsahuje smyčky ani rovnoběžné hrany.

Definice

Graf je dvojice $G = (U, H)$, kde:

- ***U*** je konečná množina uzlů (vrcholů)
- ***H*** je konečná množina hran (dvouprvkových množin), $\boldsymbol{H} \subseteq \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \mid \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}\}$
    - U **orientovaného** grafu to není množina $\{u, v\}$, ale dvojice $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

Obecný graf (multigraf)

Může mít **více hran** mezi stejnými uzly.
Je to trojice $G = (U, H, \epsilon)$, kde

- U je konečná množina uzlů (vrcholů)
- H je konečná množina hran
- $\epsilon: H \to \{\{u, v\} | u, v \in U \wedge u \neq v\}$ je **zobrazení přiřazující** každé hraně dvojici uzlů (U={1,2,3,4}, H={a,b,c,d}, ε(a)={1,3}, ε(b)={1,3}, ...)

Pojmy

Počet hran

Označme si písmenem u počet uzlů v grafu. Obyčejný **neorientovaný graf** může obsahovat maximálně $\frac{\boldsymbol{u} * (\boldsymbol{u}-1)}{2}$ **hran**.

Orientovaná verze obyčejného grafu může obsahovat maximálně $\boldsymbol{u} * (\boldsymbol{u}-1)$ **hran**.

Ohodnocený graf

Graf ve kterém je každé hraně přiřazena její cena (číslo) Pribyde zobrazeni: c:H->R

Stupně uzlů Pocet uzlu s nim incidentnich

~~Stupeň uzlu je počet hran které z něj **vycházejí**.~~ Deg(u)

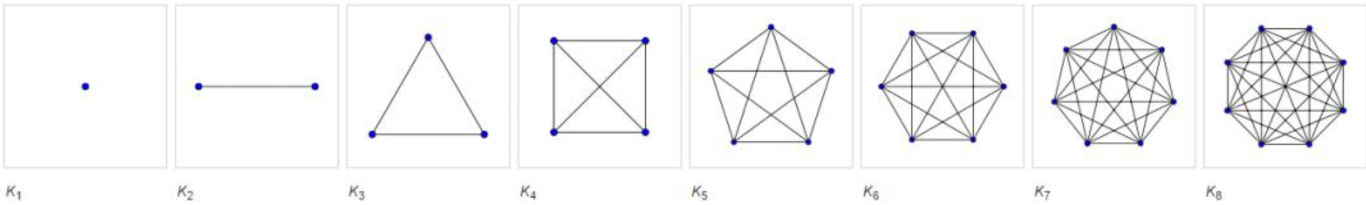
- Suma stupňů všech uzlů je $2|\boldsymbol{H}|$, protože každá hrana má 2 konce.

Souvisly graf - mezi kazdymi dvema uzlyexistuje cest

Úplný graf

Graf, v němž **každé dva vrcholy** $u, v \in U, u \neq v$ jsou **spojeny hranou**.
Počet hran v tomto grafu je počet 2 členných kombinací n prvků, kde n je počet uzlů grafu. Tento počet lze vyjádřit kombinačním číslem $\binom{n}{2}$.

- Stupně vrcholů $n - 1$



Sledy v grafu

Sled

$s = v_0, h_1, v_1, h_2 \quad h_m v_m = v$

- Sled v grafu je **posloupnost vrcholů** taková, že **mezi každými dvěma po sobě jdoucími je hrana.**
- Mohou se **opakovat uzly i hrany**

Tah

$i \neq j \Rightarrow h_i \neq h_j$

- Tah v grafu je sled, ve kterém se **neopakují hrany**.

Cesta

$i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$

- Cesta je sled, ve kterém se **neopakují vrcholy**, tedy každý vrchol se v cestě objevuje nejvýše jednou. Existuje-li mezi dvěma vrcholy sled v grafu, existuje mezi nimi i cesta (protože každý úsek mezi dvěma výskyty stejného vrcholu se dá „vystřihnout“).
- Na všechny tyto pojmy se dá také nahlížet jako na podgraf.

Kružnice

$i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j \mid 0 \leq i, j \leq \underline{n-1} \wedge v_0 = v_m$

V teorii grafů se termínem **kružnice** (též **cyklus**) označuje takový graf, který se skládá z jediného *cyklu* – tedy **uzavřenéposloupnosti propojených vrcholů**. Kružnice může být orientovaná i neorientovaná.

Graf, který jako podgraf obsahuje kružnici, se nazývá **cyklický**. V opačném případě se nazývá **acyklický** (viz strom).

- sled, ve které jsou první a poslední uzly totožné
- ze dvou kružnic se společnou hranou lze udělat velkou kružnici bez této společné hrany

Hamiltonovká cesta (kružnice)

- Je taková kružnice, která **obsahuje všechny uzly** grafu.
- Hamiltonovský graf - v grafu existuje hamiltonovská kružnice

Eulerovský graf

- Existuje uzavřený tah, který **obsahuje všechny hrany**.
- **Souvislý neorientovaný** graf, který má všechny **uzly** **sudého** **stupně**.

Stromy

Les

Les je neorientovaný graf, ve kterém jsou libovolné **dva vrcholy spojeny *nejvýše* jednou cestou**. Ekvivalentní definice zní, že les je množina navzájem nepropojených stromů (odtud tedy jméno).

- Tedy graf bez kružnic se nazývá les.

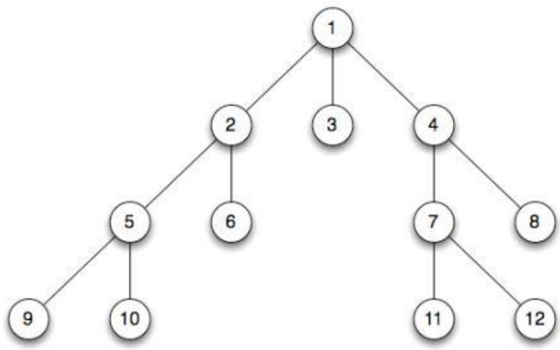
Strom

V teorii grafů se jako **strom** označuje neorientovaný graf, který je **souvislý** a **neobsahuje** **žádnou** **kružnici**.

- ***Tedy souvislý les*** se pak nazývá strom..

Strom je tedy **minimální souvislý graf** bez kružnic.

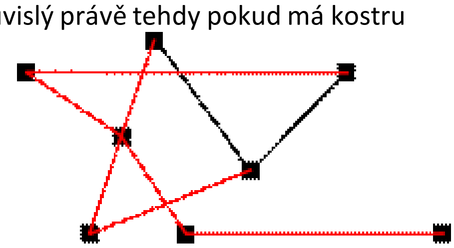
- **Odebráním** libovolné **hrany** se **stane nesouvislým**
- **Přidáním** libovolné hrany **vznikne kružnice**!



Kostra grafu

V [teorii grafů]() je kostra souvislého grafu *G* takový **[podgraf]()** **[souvislého grafu]()** *G* na [množině]() **všech jeho [vrcholů]()**, který **je stromem**.

- Graf je souvislý právě tehdy pokud má kostru



(kostra je červeně, graf černě)

Minimální kostra

Pokud má **graf ohodnocené hrany**, tak má smysl hledat minimální kostru (tj. kostru, kde je **součet ohodnocení hran nejmenší**).

- ***Pokud*** mají všechny ***hrany různé hodnoty*** existuje právě **jedna minimální kostra**.
- Minimální kostru dokáží najít Kruskalův a Primův algoritmus.

Kruskalův ("hladový") algoritmus

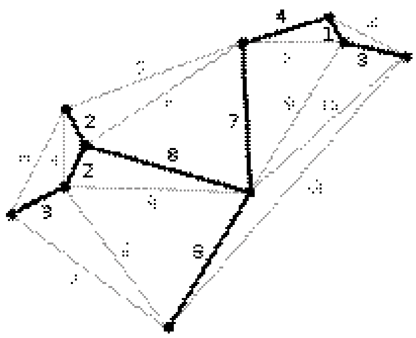
Kruskalův algoritmus nejprve setřídí hrany dle jejich váhy (od nejmenší) a následně přidává hrany do grafu takovým způsobem, aby nevznikl žádný cyklus (tj. procedura terminuje po přidání $|U| - 1$ hran).

https://www.youtube.com/watch?v=71UQH7Pr9kU

1. **Seřadíme hrany podle ceny** od nejmenší po největší
2. Postupně **zkoušíme přidávat hrany** do kostry v tomto pořadí
   - Pokud by vznikla kružnice hranu přeskočíme.
   - Pokud přidáním hrany kružnice nevzniká přidáme ji do kostry.
3. Přidané hrany pak tvoří min. kostru grafu.

Složitost

- $O(|H| * \log|H|)$ //rychlost algoritmu je limitovaná seřazením hran



Primův (Jarníkův) algoritmus

Algoritmus vychází z libovolného uzlu a udržuje si seznam již objevených uzlů a jejich vzdáleností od propojené části grafu. V každém svém kroku připojí ten z uzlů, mezi nímž a projenou částí grafu je hrana nejnižší délky a označí sousedy nově připojeného uzlu za objevené~~, případně zkrátí vzdálenosti od již známých uzlů, pokud byla nalezena výhodnější hrana~~. V okamžiku, kdy jsou propojeny všechny uzly, algoritmus terminuje.

https://www.youtube.com/watch?v=cplfcGZmX7I

1. **Vyjdeme** z **libovolného** uzlu
2. Dokud **nemáme v kostře všechny uzly**:

a. Najdeme všechny hrany vycházející z uzlů, které jsou již součástí kostry
b. Vybereme z nich hranu s nejmenší cenou, která po přidání nevytvoří kružnici
c. Tuto hranu přidáme do kostry vcetne vrcholu

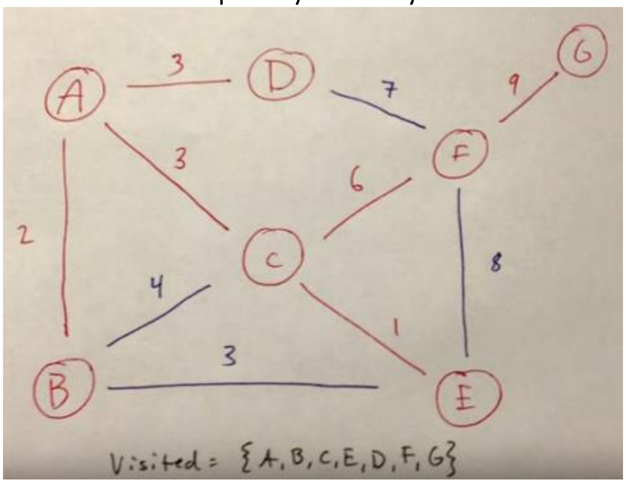
3. Přidané hrany pak tvoří min. kostru grafu

Oproti Kruskalovu algoritmu má tu výhodu , že se **nemusejí** předem **seřazovat** podle vzrůstající ceny **všechny hrany**.

- Při Kruskalově algoritmu se totiž většinou **hrany s vysokými cenami** vůbec **nevyužijí**.

Složitost

- $O(|H| * \log|U|)$ //složitost záloží na použitých datových strukturách



Obarvitelnost a planarita

Obarvitelnost (obyčejné grafy bez smyček)

- Graf je obarvený, když se každému uzlu přiřadí barva tak, že **dvěma uzlům spojeným hranou** jsou přiřazeny **různé barvy**.
- Pokud je možno graf obarvit k barvami, nazývá se ***k*-obarvitelným**.
- **Nejmenší možná hodnota *k***, pro kterou je graf G k-obarvitelným, se nazývá **chromatické číslo** grafu G, formálně X(G).

Planárnost (připouštějí i vícenásobné hrany)

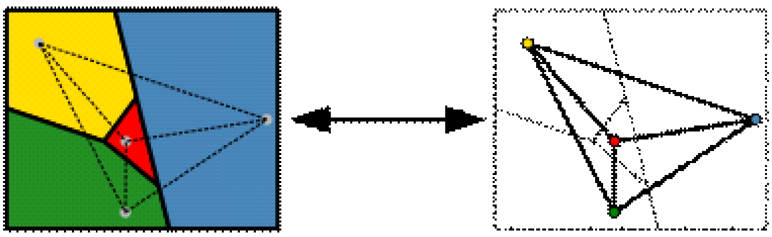
- Graf G se nazývá planární (též rovinný graf), když je možno jej **nakreslit v rovině** tak, aby se jeho **hrany protínaly pouze v** jeho **uzlech**.
- Dvourozměrná oblast ohraničená hranami rovinného grafu se nazývá **buňka**.
- Má-li souvislý graf *n* uzlů a *m* hran a tvoří *p* buněk, platí *n* − *m* + *p* = 2.

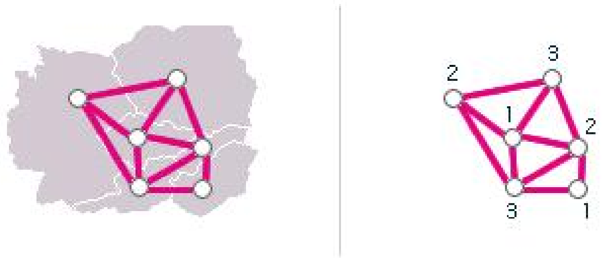
Problém čtyř barev

Problém čtyř barev či také **věta o čtyřech barvách** je (již kladně vyřešený) problém z teorie grafů, který zní: „Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy tak, aby žádné dva sousedící státy nebyly obarveny stejnou barvou?“ (Za sousední státy jsou považovány takové, že mají společnou hraniční čáru tj. nesousedí spolu jen v jednom bodě.)

Formulace v teorii grafů

Formálně se tento problém v teorii grafů podává tak, že cílem je **obarvení vrcholů planárního grafu** tak, aby **žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu**. Formulace s mapou se na tuto verzi převede tak, že **každému státu se přiřadí jeden vrchol** (např. ***hlavní město***) a hranou se spojí ty vrcholy, jejichž státy mají společnou hranici.





Notes

2. Otazka (predmet) (okruh):14. Obyčejné grafy
Kdo me primarne zkousel: Smrž Pavel, doc. RNDr., Ph.D.
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Ptal se na **rozdíl mezi *obyčejnými*** a ***orientovanými grafy***. Pak na kostru a **kolik má kostra grafu hran** (prvně jsem řekl špatně n+1, ale hned jsem se opravil). Pak se ptal na **úplný graf** a opět ***kolik má hran*** (to jsem musel spočítat). Nakonec se zeptal, **jak určujeme nejkratší cestu**, řekl jsem že **Kruskalův** a **Primův algoritmus**. Tak mi řekl, ať si jeden vyberu a ukážu ho. Taky za A.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

2. Otazka (predmet) (okruh): 9. Obyčejné grafy
Kdo me primarne zkousel: Steingartner (externista)
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Na papírku bylo: 9. Obyčejné grafy: definice, cesta, kružnice, kostra, Cayleyho formule (WTF???), strom, les

Napsal jsem **definici** na tabuli, **popsal jsem cestu** (to jsem spletl, že obsahuje všechny uzly právě jednou), tak se doptal, jestli musí obsahovat všechny uzly - tak potom, že je to obecně cesta mezi dvěma uzly. I když jsem měl na papírku ty pojmy, tak už to pak probíhalo jen otázka(pojem)/odpověď. **V čem je specifická kružnice**. Co je **kostra**. Potom se ptal na **Cayleyho formuli**, zda jsem slyšel někdy, to jsem mu řekl, že v životě fakt ne (jinými slovy). Pak se ptal Meduny, jestli nekecám, tak mu řekl, že to možná známe pod jiným pojmem. Pak se ptal na **Hamiltonovskou kružnici**, k ní se ještě doptal na nějakou podrobnost, kterou jsem asi nezmínil předtím. Byl spokojen, na stromy a lesy nedošlo. Pak se ještě Meduna doptal na tu **definici grafu** (měl jsem H = {{u, v} | u, v € U}), jaký je **rozdíl pro orientovaný graf**. Tak že tam místo {,} bude (,) a v pohodě. Tohle taky za B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): 9. Obyčejné grafy.- MAT
Kdo me primarne zkousel: Holík
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
9ka otázka, ale chcel orientované grafy, takže prakticky 9+10

. Začal som orientovanými grafmi - definíciou - je to trojica G = (H, U, epsilon), kde ma Holik prerusil, ze nech poviem co je co.
To som zvladol, potom sa pytal priamo na algoritmy: Povedal som **Dijkstrov**, pytal sa ma este na **Floyd-Warshalov**-vravim, ze vobec neviem. Holik skusal, ze ci aspon nieco, vravim, ze vobec

.
Dalej na algoritmy pre **hladanie minimalnej kostry grafu** - Popisal som **Kruskalov**, ale pri odpovedi som ho uviedol ako **Primov**.
Vysledna D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): Obyčejné grafy (MAT)
Kdo me primarne zkousel: Smrž Pavel, doc. RNDr., Ph.D. UPGM FIT VUT, Brno
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:

V duchu jsem si rikal - pohoda, to umim. Zacal jsem suverene **definici grafu**, jenze pak to zacalo - nadefinoval jsem hrany jako mnozinu dvojic a ne mnozinu mnozin. Tak me upozornili, ze tohle je definice orientovaneho grafu. Absolutne mi to nedoslo, mezitim se ptali **co to je graf a jak vypada**. **Jak vypada orientovany** - chteli me k tomu nejak navest. Ja jsem jim jeste rekl neco o multigrafu. Uz zazvonil budik - ja uz to videl na opravny termin. Nakonec jsme se k tomu nejak dopracovali. Co me zachranilo, ze se ptali dal - co je to **kostra grafu**, to jsem jim rekl. Kolik ma **kostra hran** - (***uzly - 1***). Na zaver **Kruskaluv** algoritmus - samosreme, ze jsem jim ukazoval **Primuv**. Dokoncil jsem jej tedy a pote ukazal i Kruskaluv. Na zaver jsem rekl slozitosti ac se na ne neptali.
(na papirku - obyc. grafy, kostra, kruskaluv alg.)

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (predmet) (okruh): MAT - Obyčejné grafy
Kdo me primarne zkousel: Rogalewicz
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Měl jsem začít **definicí stromu**, pak co je to **kostra** a **kostra s minimální cenou**. Pak chtěl ať **nakreslím** nějáký **jednoduchý graf** a vyznačím tam tu ***kostru*** a pak ať demonstruji jak bych hledal ***minimální kostru*** - ukázal jsem **Kruskalův algoritmus**. Pak se ještě ptal **jak funguje Primův**. Poslední otázka byla jestliže **může mít graf více koster s minimální cenou**. Výsledné hodnocení - A

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 9. Obyčejné grafy (MAT)
Kdo me primarne zkousel: Jen Herout
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Ptal se na **obecnou definici**, pak na **kostru**, **cestu** a **souvislý graf**. Všechno jsem řekl, ale poměrně často mě musel opravit nebo požádat o doplnění (třeba když jsem řekl množina místo uspořádaná dvojice nebo **"Co je to strom?"** **"Graf, jehož žádný podgraf není kružnicí"** "To není všechno!" Já po chvíli ticha: **"Jo, ještě musí být souvislý"**.
Cca po dvou-třech minutách řekl, že mu to stačí. Nicméně celou dobu držel poker face a to nebylo dvakrát příjemné. Ale byl jsem si jistý, že to mám, jen jsem nevěděl, na jakou známku. Nakonec A

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otázka (předmět) (okruh): MAT - Obyčejné grafy (stupně uzlů, cesty a kružnice, souvislost grafu, stromy, kostry, Kruskalův a Primův algoritmus pro hledání minimální kostry ohodnoceného grafu, obarvitelnost a planarita)
Kdo mě primárně zkoušel: myslím, že hlavně Holík a Švéda, ale přesně si to nevybavuji
Co jsem k tomu řekl(a)/na co se ptali/co mně vytkli: Přestože jsem myslel, že u grafů mě nic nepřekvapí, trochu jsem se zamotal hned u **formální definice** a pak už se mě spíš ptali, takže jsem odpovídal na otázky a lezlo to ze mě strašně pomalu, zadrhával jsem se a asi jsme ani vše nestihli. Každopádně i tak jsem měl celkem dobrý pocit a výsledek byl C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Obyčejné grafy

Kdo me primarne zkousel: Křivka Zbyněk, Ing., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Definice grafu, formalne na tabuli. Pak se ptal co to je **kostra grafu**, **souvisly graf** atp. Nakonec chtěl slovy popsat **Kruskalův algoritmus** a jak by se dal **optimalizovat** (pocet hran kostry je pocet uzlu+1) a bylo. B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh):Obyčejné grafy

Kdo me primarne zkousel:Hladká Eva, doc. RNDr., Ph.D. FI MUNI, Brno

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Luxusní otázka nechala mě mluvit **graf**, **multigraf**, komponenty co je to **spojity graf** atd kdyz jsem chtel projit **kruskaluv algoritmus** rekla at ji definuji jeste stream. Naprosto v pohode otazka a zkouseni

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Obyčejné grafy (MAT)

Kdo me primarne zkousel: prof. Šlapal

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
MATu jsem se bál jako čert kříže. V jediné naší komisi byl prof. Šlapal, takže to byl respekt největší. Ikdyž jsme MAT docela poctivě drtili, věděl bych tak k polovině otázek a u zbytku by to bylo na úklon.
Naštěstí padly grafy, což byla moje spása. Úvodní definice ho nezajímaly ("to přece všichni známe") a zaměřil se na **stupně uzlů** (něco v tom smyslu bylo i na papírku - stupně uzlů, cesty, stromy,...) ze všech různých úhlů pohledu. Já jsem v tu chvíli nebyl schopný vymyslet ani základní vztah pro stupně uzlů ve vztahu k hranám. Tak jsem mu to slovně popsal s tím, že vzorec prostě nevypotím, byl jsem úplně mimo. V tu chvíli bych nedal ani vztah pro kvadratickou rovnici, prostě nic.
Prof. Šlapal byl ale super, dost mě naváděl a viděl že tomu docela rozumím, jen se nemůžu vymáčknout. Rozhodně musím říct, že ho jeho pověst předchází, ale až tak strašně zlý určitě není. Klidně mi mohl dát mnohem horší otázku, ale dal grafy a dost pomáhal. Žádný vzorec ve výsledku ani nechtěl, na tabuli jsem taky nekreslil. Rozhodně nevypadal, tak jak někdo strašil loni, že by zkoušel stylem "pokud mi neřeknete tuhle definici, tak se nehneme dál". Nemluvil za mě, musel jsem všechno vymýšlet sám, ale rozhodně nedrtil a zkoušel třeba navést k odpovědi z jiné strany.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. otazka (okruh): Obycejne grafy (9)
- Kdo me primarne zkousel: Strnadel
- Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Chtel co je to graf, podgraf, faktor grafu, nakreslit graf, ukazat podgrafy, faktor grafu a definici kruznice. To je vsechno!

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 9. Obyčejné grafy

Kdo me primarne zkousel: Hladká Eva, doc. RNDr., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Tak som si hovoril, akou lahodnou otázkou sa na úvod zahrejem. Docentka Hladká to však zobrala z úplne iného konca, tak aby som sa pri tom poriadne zapotil. Na začiatku som hneď pokazil multigraf. Potom vraj, akými štruktúrami reprezentujeme grafy v algoritmoch. Vtedy zapol môj mozog na maximum a snažil sa spomenúť na znalosti z Grafových algoritmov spred dvoch rokov

Nakoniec ma to viazané pole aj matica susednosti uzlov napadli. Potom som mal nakresliť maticu a ukázať jej to na príklade. Potom ešte nejaké otázky o cestách, kružniciach, minimálnych kostrách a algoritmoch. To už bolo relatívne v pohode, sem tam som ešte nejakú drobnosť nevedel. Tiež sa ma pýtala, kde používame minimálne kostry v sieťach. Napadli ma smerovacie protokoly, ale vraj aj nižšie v L2 vrstve.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Obyčejné grafy
Kdo me primarne zkousel: Rychlý
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Zeptal se na definici obecného grafu, cesty, kružnice, minimální kostry a Primova algoritmu. Pak ještě Primův algoritmus prakticky. Asi dvakrát jsem mu řekl něco, co se mu nezdálo, tak mě upozornil, ať popřemýšlím a řekl jsem mu, co chtěl slyšet. Splet jsem si Primův a Krusalův algoritmus a u definice obecného grafu jsem zapomněl na to, že u != v. Nevěděl jsem jedinou věc, a to, že u Primova algoritmu po nenalezení vhodné hrany se algoritmus nevrací o jeden uzel na zpět, ale prohledává všechny s minimálním ohodnocením. Celkově - A

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 9. Obyčejné grafy (MAT) - stromy

Kdo me primarne zkousel: **Češka Milan**, prof. RNDr., CSc.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Zameranie otázky na stromy som mal kvôli DP. Začal som trochu kostrbato koktavo **definíciou grafu**, **hrán**, **uzlov** a **obecného grafu**. Potom ma hneď prerušil a chcel odomňa všetko **zapísať formálne**, z čoho som bol v strese tak ma trochu potrápil. Potom sa ma pýtal na vzťah hrán a uzlov... nevedel som čo myslí tak som začal vymenovávať čo mi napadlo po vyše minúte hádania som mu povedal, že je hrán o 1 menej ako uzlov a to on chcel akože počuť, ešte mi to dal zapísať formálne zasa... (nepochopil som tieto maniere, že načo mi dával takéto veci zapisovať ale vyzeral že má toho z tých štátnic už dosť). Potom konečne definícia **súvislého grafu a stromu**. Zazvonil budík, spýtal sa ešte na **kostru**, **minimálnu kostru**. Potom mal ešte Zemčík doplňujúcu otázku kde ma chcel nachytať, že akú kostru má konkrétny graf aký zadal, ten bol ale nesúvislý a došlo mi to hneď takže pohoda.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh):
Obyčejné grafy, kostra, algoritmy pro minimální kostru

Kdo me primarne zkousel:
Křivka

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Chtěl formální definici grafu. Pak co je to kostra a nakonec dva algoritmy pro hledání nejmenší kostry (Kruskalův a Primův). Úplná pohodička, když bylo něco špatně, tak jenom jemně naznačil a nechal mě to opravit.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Neorientovane grafy (9)
Kdo me primarne zkousel: Rychly + Ceska se dost ptal
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Chteli definici, cestu, strom, kostru, algoritmy, vsechno jsem rekl. Chtel formalni zapis ohodnoceni hrany, to jsem nejak zaimprovizoval, ale finalne pro me prekvapive D

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (MAT) (Obyčejné grafy):
Kdo me primarne zkousel: **Češka**, Lucká
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Chtěli to slyšet v podstatě celé od začátku. Češka si mě trošku podal u definic (chtěl to **naprosto přesně a nechtěl srovnání s orientovanými grafy**). Takže ***sled***, ***tah***, ***cesta***, ***kružnice***. Dále **podgraf**, **souvislý**, **les**, **strom**, **kostra**. A pak prý **rozdíl mezi lesem** a **stromem** není to, že *strom je souvislý*, ale že strom je souvislý a les není
. **Kruskalův** a **Primův** algoritmus včetně ***složitosti***. Tvrdě jsem přetáhli čas, už mě zastavovali, klidně bych ještě valil dál. Jo a pak otázka, na **problém 4 barev**, jestli jsem o něm něco slyšel a jak to souvisí s planaritou grafu. Celkově za B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): MAT - Obyčejný graf

Kdo me primarne zkousel: **Češka**

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Byl jsem tak mimo že i u takto lehké otázky jsem se zamotal. Na otázky jsem odpovídal jak jen to bylo možné. Pan Češka je naporostej proík a když viděl že to vím a nemužu si vzpomenotu tak mě navedl k odpovědi, i když mi to někdy krapet trvalo. Nicméně to bylo lepší jak první otázka. Myslím že za tuto jsem dostal D, ale nejsem si jiostej.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

10 - Orientované grafy

pátek 13. května 2016
9:57

Orientované grafy (orientované cesty a kružnice, souvislost a silná souvislost, turnaj, eulerovské a hamiltonovské grafy, Dijkstrův a Floyd-Warshallův algoritmus pro hledání cesty minimální délky).
http://wiki.fituska.eu/index.php/Orientovan%C3%A9_grafy

Orientovaný graf

Pojmem **orientovaný graf** se v teorii grafů označuje takový graf, jehož hrany jsou uspořádané dvojice. Naproti tomu hrany neorientovaného grafu jsou (dvouprvkové) množiny. Hrany orientovaného grafu mají tedy pevně danou orientaci. Tudíž výrazy *(x, y)* a *(y, x)* označují různé hrany. Hrana *(x, x)* se nazývá*smyčka*.
V informatice se orientované grafy často používají například pro znázornění konečného automatu. Vrcholy odpovídají stavům automatu, hrany pak přechodům mezi nimi.

Obyčejný orientovaný graf

Definice

Graf je dvojice $G = (U, H)$, kde:

- $\boldsymbol{U}$ je konečná množina uzlů (vrcholů)
- $\boldsymbol{H}$ je konečná množina orientovaných hran (dvojic), $\boldsymbol{H} \subseteq \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}\}$
  - U NE**orientovaného** grafu to není dvojice $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, ale množina $\{u, v\}$.

Mezi dvěma uzly mohou být dvě hrany v opačných směrech.

~~Obecný orientovaný graf~~

~~Může mít více hran mezi stejnými uzly.~~

Je to trojice $G = (U, H, \epsilon)$, kde

- ~~U je konečná množina uzlů (vrcholů)~~
- ~~H je konečná množina hran~~
- ~~$\epsilon: H \to \{(u, v) | u, v \in U\}$ je **zobrazení přiřazující** každé hraně dvojici uzlů (U={1,2,3,4}, H={a,b,c,d}, ε(a)=(1,3), ε(b)=(1,3), ...)~~

Pojmy

Počet hran

Označme si písmenem u počet uzlů v grafu. Obyčejný ~~ne~~**orientovaný graf** může obsahovat maximálně $\boxed{\frac{u*(u-1)}{2}}$ **hran**. **Orientovaná verze** obyčejného grafu může obsahovat maximálně $\boldsymbol{u * (u - 1)}$ **hran**.

Ohodnocený graf

Graf ve kterém je každé hraně přiřazena její cena (číslo) $d\ H \to R$

Turnaj

Je orientovaný graf, kde mezi **každými dvěma různými uzly** existuje **právě jedna orientovaná hrana**.

Výstupní stupeň uzlu

- Je počet hran, které z uzlu vystupují, $deg_-(u)$.

deg(u) = deg+(u) + deg-(u)

Vstupní stupeň uzlu

- je počet hran, které do uzlu vstupují, $deg_+(u)$.

Koncový uzel

- Pokud $deg_-(u) = 0$, jedná se o koncový uzel.

Počáteční uzel

- Pokud $deg_+ = 0$ jedná se o počáteční uzel.

Eulerovský graf

Je orientovaný graf, kde existuje uzavřený orientovaný **tah**, který obsahuje všechny jeho orientované hrany. (dá se nakreslit jedním tahem)

- Souvislý orientovaný graf je Eulerovský právě tehdy, když platí: $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}: \mathbf{deg}_{+}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{deg}_{-}(\boldsymbol{u})$

Souvislost

Orientovaný sled, tah, cesta a kružnice jsou definovány analogicky k obyčejným.

Souvislost

- Orientovaný graf je souvislý, pokud **symetrizací vznikne souvislý obyčejný graf**.

Silná souvislost

- Orientovaný graf je silně souvislý, pokud pro **libovolné dva uzly existuje orientovaná** cesta.
  - graf je silně souvislý, pokud pro každé dva vrcholy **x, y** existuje cesta z **x** do **y** i z **y** do **x**.

Algoritmy pro nalezení minimální cesty

Dijkstrův algoritmus

bellman forduv umi i zaporne hrany

Na Dijkstrův algoritmus lze pohlížet jako na zobecněné prohledávání grafu do šířky, při kterém se vlna nešíří na základě ***počtu hran od zdroje***, ale ***vzdálenosti od zdroje*** (ve smyslu váhy hran). Tato vlna proto zpracovává jen ty uzly, k nimž již byla nalezena nejkratší cesta.

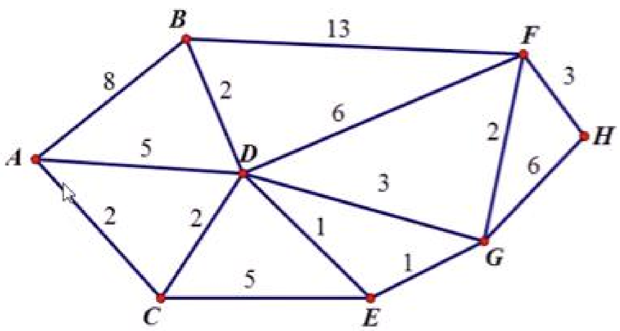
Dijkstrův algoritmus si uchovává všechny uzly v prioritní frontě řazené dle vzdálenosti od zdroje - v první iteraci má pouze **zdroj vzdálenost 0**, všechny ostatní uzly nekonečno. Algoritmus v každém svém kroku **vybere z fronty uzel s** nejvyšší prioritou (**nejnižší vzdáleností** od již zpracované části) a zařadí jej mezi zpracované uzly. Poté projde všechny jeho dosud **nezpracované potomky, přidá je do fronty**, nejsou-li tam již obsaženi, a ověří, zda-li nejsou blíže zdroji, než byli před zařazením právě vybraného uzlu mezi zpracované. To znamená, že **pro všechny potomky ověřuje**:

- $vzalenost_{zpracovavany} + delkaHrany_{zpeacovavanyPotomek} < vzdalenost_{potomek}$

Pokud nerovnost platí, tak danému potomkovi nastaví novou vzdálenost a označí za jeho předka zpracovávaný uzel. Po průchodu přes všechny potomky algoritmus vybere z fronty uzel s nejvyšší prioritou a celý krok opakuje.
Algorimus terminuje v okamžiku, kdy jsou zpracovány všechny uzly (prioritní fronta je prázdná).

Dijkstrův algoritmus je **použitelný jen tehdy**, obsahuje-li graf pouze **nezáporně ohodnocené hrany** - v opačném případě není schopen garantovat, že při zpracování uzlu byla již nalezena nejkratší možná cesta.

- https://www.youtube.com/watch?v=5GT5hYzjNoo



V	A	B	C	D	E	F	G	H
A	$\boxed{0_A}$	8_A	2_A	5_A	∞	∞	∞	∞
C		8_A	$\boxed{2_A}$	4_C	7_C	∞	∞	∞
D		6_D		$\boxed{4_C}$	5_D	10_D	7_D	∞
E		6_D			$\boxed{5_D}$	10_D	6_E	∞
B		$\boxed{6_D}$				10_D	6_E	∞
G						8_G	$\boxed{6_E}$	12_G
F						$\boxed{8_G}$		11_F
H								$\boxed{11_F}$

Složitost

Složitost Dijkstrova algoritmu závisí na **implementaci prioritní fronty**. V případě její implementace pomocí **sekvenčního vyhledávání** je složitost algoritmu $\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{U}|^2)$, při použití **binární haldy** $\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{H}|\log_2|\boldsymbol{U}|)$.

Dva matice - matice sousednosti(vzdalenosti) a matice predchudcu

Floyd-Warshallův algoritmus

Tento algoritmus **funguje i se zápornými hranami**. Při nalezení **kružnice záporné délky** tuto odhalí (**diagonální prvek** matice bude **záporný**).

- Sice má složitost $O(N^3)$, ale najde všechny **nejkratší vzdálenost mezi všemi páry vrcholů**.

https://www.youtube.com/watch?v=KQ9zlKZ5Rzc

Matici sousednosti

Floyd-Warshallův algoritmus má na vstupu ~~matici délek~~, říkejme jí D^0. Pokud mezi dvěma uzly (i, j) vede hrana délky l, tak tato matice obsahuje na indexu (i, j) právě tuto hodnotu. **Na diagonále** má tato matice samé **nuly** a na ostatních indexech, které neodpovídají hraně nekonečno. Jinými slovy tato **matice obsahuje vzálenosti uzlů, které nevedou skrze žádného prostředníka**.

V každé iteraci Floyd-Washallova algoritmu se tato matice přepočítá tak, aby vyjadřovala vzdálenost všech dvojic uzlů skrze postupně se zvětšující množinu přípustných prostředníků. Jednoduše řečeno matice D^1 bude vyjadřovat vzdálenost všech uzlů s možností využití jednoho (daného) prostředníka, D^2 vzdálenost při možném využití dvou (daných) mezilehlých uzlů, D^m při možnosti využití m mezilehlých uzlů.

Tato transformace se dá vyjádřit pro $k \geq 1$ následujícím rekurentním vztahem:

- $D_{ij}^m = \min(D_{ij}^{m-1}, D_{ik}^{m-1} + D_{kj}^{m-1})$

Složitost

- Asymptotická časová složitost algoritmu je $\boldsymbol{O(N^3)}$ a **paměťová** je $\boldsymbol{O(N^2)}$.

Algoritmus

- Vstup (délky hran) je zadán maticí A (řádek a sloupec označuje počáteční/koncový uzel hrany).
- Dále máme matici posloupností P, na počátku obsahuje každý prvek pouze číslo svého sloupce.
- Postupnými iteracemi (n iterací, kde n = | U |) se vypočítávají další kroky matic až se dojde do koncového tvaru a matice vzdáleností obsahuje minimální vzdálenosti.
- V každé iteraci se prvky matic Ai přepočítají:
  - Pokud $a_{ik}^{j-1} \leq a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1}$ pak $a_{ik}^{j} = a_{ik}^{j-1}, a_{ik}^{j} = a_{ik}^{j-1}$
  - Pokud $a_{ik}^{j-1} > a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1}$ pak $a_{ik}^{j} = a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1},\ a_{ik}^{j} = a_{ij}^{j-1}$

Jinak 1

Pro iteraci *j* sledujeme matici A^{j-1} a to **pouze** její *j*-tý řádek a *j*-tý sloupec (tedy takový kříž). Pro všechny prvky z A^{j-1} porovnáváme jejich hodnotu s **průmětem** na tento kříž (tedy se součtem s odpovídajícími prvky na stejném řádku a sloupci v kříži). Pokud je součet větší než hodnota prvku, opíšeme hodnoty obou matic. Pokud je součet menší, v matici A^j zapíšeme součet a v matici P^j zapíšeme hodnotu $j - 1$.

Jinak 2

Máme matici A (řádky a sloupce popsané uzly) určující nejkratší existující cestu mezi příslušnými uzly. Na začátku ji inicializujeme tak, aby na příslušných místech byly zapsány délky hran mezi danými uzly. Pak matici aktualizujeme tolikrát kolik je uzlů grafu. Každá aktualizace probíhá tak, že jedeme postupně po jednotlivých uzlech v pořadí v jakém je jimi popsána matice. Pro všechny dvojice uzlů i, j pak zkontrolujeme zda cesta přes k-tý uzel není kratší než aktuálně zapsaná hodnota. Tj. porovnáme současnou hodnotu a součet cest i do k a k do j a zapíšeme minimum.

Jinak 3

```
// Předpokládáme funkci cenaHrany(i, j) vracející cenu hrany z i do j
// (pokud hrana neexistuje, cenaHrany = nekonečno)
// Dále, N je počet vrcholů a cenaHrany(i, i) = 0

int cesta[][]; // Dvourozměrné pole. V každém kroku algoritmu je cesta[i][j]
          // nejkratší cesta z i do j použitím 1. až k-té hrany.
          // Všechny hrany cesta[i][j] jsou inicializovány funkcí
          // cenaHrany(i,j);

```

k mi udava vrcho ktery pouzivam pro "zastavku" a hledam, zda neni kratsi cesta mezi i a j pres tento crchol nez naprimo

```
procedure FloydWarshall ()
  for k: = 1 to N
  begin
    foreach (i,j) in (1..N)
    begin
      cesta[i][j] = min(cesta[i][j], cesta[i][k] + cesta[k][j]);
    end
  end
endproc
```

A0	1	2	3	4	5
1	0	2	x	x	x
2	1	0	x	-2	x
3	x	6	0	4	x
4	8	4	-3	0	x
5	x	x	9	2	0

P0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	2	3	4	5
3	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	5
5	1	2	3	4	5

A3	1	2	3	4	5
1	0	2	x	0	x
2	1	0	x	-2	x
3	7	6	0	4	x
4	**4**	**3**	-3	0	x
5	**16**	**15**	9	2	0

P3	1	2	3	4	5
1	1	2	3	2	5
2	1	2	3	4	5
3	2	2	3	4	5
4	**3**	**3**	3	4	5
5	**3**	**3**	3	4	5

A1	1	2	3	4	5
1	0	2	x	x	x
2	1	0	x	-2	x
3	x	6	0	4	x
4	8	4	-3	0	x
5	x	x	9	2	0

P1	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	2	3	4	5
3	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	5
5	1	2	3	4	5

A4	1	2	3	4	5
1	0	2	**-3**	0	x
2	1	0	**-5**	-2	x
3	7	6	0	4	x
4	4	3	-3	0	x
5	**6**	**5**	**-1**	2	0

P4	1	2	3	4	5
1	1	2	**4**	2	5
2	1	2	**4**	4	5
3	2	2	3	4	5
4	3	3	3	4	5
5	**4**	**4**	**4**	4	5

A2	1	2	3	4	5
1	0	2	x	**0**	x
2	1	0	x	-2	x
3	**7**	6	0	4	x
4	**5**	4	-3	0	x
5	x	x	9	2	0

P2	1	2	3	4	5
1	1	2	3	**2**	5
2	1	2	3	4	5
3	**2**	2	3	4	5
4	**2**	2	3	4	5
5	1	2	3	4	5

A5	1	2	3	4	5
1	0	2	-3	0	x
2	1	0	-5	-2	x
3	7	6	0	4	x
4	4	3	-3	0	x
5	6	5	-1	2	0

P5	1	2	3	4	5
1	1	2	4	2	5
2	1	2	4	4	5
3	2	2	3	4	5
4	3	3	3	4	5
5	4	4	4	4	5

Nalezení cesty

Pokud už máme vypočítáno tak cestu mezi uzly a a b hledáme tak, že se podíváme na a-tý řádek a b-tý sloupec. Tam vidíme přes jaký uzel musíme jít nejkratší cestou. Pokud tam je b tak jdeme přímo. Pokud tam je jiný uzel c tak si stejným způsobem najdeme jak se nejkratšeji dostat z a->c a c->b.

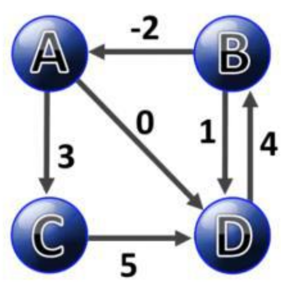
YT video

https://www.youtube.com/watch?v=KQ9zlKZ5Rzc

--- 0. iterace (podíváme se, kam se z vrcholů dostaneme napřímo)

- Tedy z A se dostaneme s cenou 3 do C a s cenou 0 do D
- Z B se dostaneme s -2 do A a s 1 do D
- Atd. atd... je to prostě nultá iterace a nejdeme tu zatím "přes žádný vrchol"

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph



d0	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	∞	1
C	∞	∞	0	5
D	∞	4	∞	0

π0	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	-	B
C	-	-	-	C
D	-	D	-	-

d1	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	∞	1
C	∞	∞	0	5
D	∞	4	∞	0

π1	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	-	B
C	-	-	-	C
D	-	D	-	-

AA + AA < AA ? NO.

--- 1. iterace (začínáme se zastávkou ve vrcholu A)

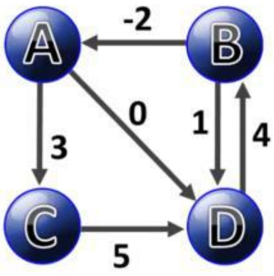
- Jak drahé bude se z vrcholu B dostat do C se zastávkou v A?
  - Z B do A to je -2 a z A do C to je 3, tedy celkově -2+3=1.
- Podobně to je pro cestu do D.

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph

d0	A	B	C	D

π0	A	B	C	D

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph



d0	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	∞	1
C	∞	∞	0	5
D	∞	4	∞	0

π0	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	-	B
C	-	-	-	C
D	-	D	-	-

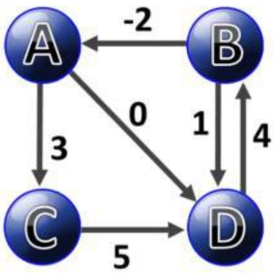
d1	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	∞	4	∞	0

π1	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	-	D	-	-

Zastavka ve vrcholu b

--- 2. iterace (teď pro **vrchol B**)

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph



d1	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	∞	4	∞	0

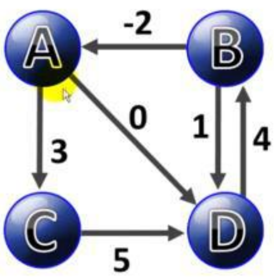
π1	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	-	D	-	-

d2	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	2	4	5	0

π2	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	B	D	B	-

--- 3. iterace (tady se podíváme jestli můžeme cesty vylepšit pokud půjdeme přes **vrchol C**… a ne nemůžeme)

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph



d2	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	2	4	5	0

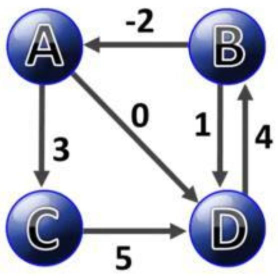
π2	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	B	D	B	-

d3	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	2	4	5	0

π3	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	B	D	B	-

--- 4. iterace (poslední iterace, zastavujeme se ve vrcholu D)

Apply Floyd-Warshall to Directed Graph



d3	A	B	C	D
A	0	∞	3	0
B	-2	0	1	-2
C	∞	∞	0	5
D	2	4	5	0

π3	A	B	C	D
A	-	-	A	A
B	B	-	A	A
C	-	-	-	C
D	B	D	B	-

d4	A	B	C	D
A	0	4	3	0
B	-2	0	1	-2
C	7	9	0	5
D	2	4	5	0

π4	A	B	C	D
A	-	D	A	A
B	B	-	A	A
C	D	D	-	C
D	B	D	B	-

- Tady to ještě trošku dovysvětlím:
  - Průsečík (C|A s hodnotou 7), tedy za kolik se dostaneme **z C do A**
    - V této iteraci **jdeme přes vrchol D**. Tedy podíváme se, kolik stojí dostat se z vrcholu C do D. To je **5** (průsečík C|D). A teď se podíváme, za jak dlouho se dostaneme z vrcholu D do A (průsečík D|A), to je **2**. A teď sečteme cestu z C do D (5) a z D do A (2) a dostaneme **7**.
  - Obdobně to spočítáme pro cestu z C do B.

Notes

1. Otazka (predmet) (okruh): 9. Obyčejné grafy.- MAT
Kdo me primarne zkousel: Holík
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
9ka otázka, ale chcel orientované grafy, takže prakticky 9+10

. Začal som **orientovanými grafmi** - **defíníciou** - je to **trojica G = (H, U, epsilon)**, kde ma Holik prerusil, ze nech poviem co je co.
To som zvladol, potom sa pytal priamo na **algoritmy**: Povedal som **Dijkstrov**, pytal sa ma este na **Floyd-Warshalov**-vravim, ze vobec neviem. Holik skusal, ze ci aspon nieco, vravim, ze vobec

.
Dalej na algoritmy pre hladanie **minimalnej kostry grafu** - Popisal som **Kruskalov**, ale pri odpovedi som ho uviedol ako Primov.
Vysledna D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1418&t=24860&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): Orientované grafy (10)
Kdo me primarne zkousel: Navrat
Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Zacal jsem co je orientovany graf. Potom jsem rekl co je **to orientovana cesta** a **kruznice**. To me zastavil a zeptal se na **ohodnoceni hran**. Pak ze mam prejit na **Dijkstra**. Popsal jsem **minimalni cestu**, **horni odhad**, **predchudce**. Pak chtel vedet ***vystup algoritmu***. Rekl jsem ze minimalni cesta mezi uzly, ale chtel upresneni. Jiny vystup jsem si nevzpomel a zbytek zkouseni se to ze me snazil dostat. Nakonec rekl ze ***vystup jsou vsechny cesty mezi temi uzly***. Pak se me rychle zeptal, jak inicializujem Dijkstra. To jsem rekl a to mu stacilo. Znamka D.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1223&t=24040&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 10 (Orientované grafy)

Kdo me primarne zkousel: doc. RNDr. Smrž

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Toto bola jedna z otázok, ktoré som fakt chcel... tak som ju vzal ako prvú. A potom to prišlo. Žiadne definície, poďme na **Floyd-Warshalla**. Ako, princíp som zhruba vedel, ale mýlil som sa. Dosť. Tak potom ešte teda že nech definujem, ako si predstavujem taký **orientovaný graf**. Tak som s trochou pomoci konečne napísal definíciu, ale už som bol taký na seba nahnevaný, že aj tam boli chyby. Hnevám sa na seba, dobrý okruh to bol, ale začať poslednou podotázkou z grafov mi neurobilo dobre.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): MAT - Orientované grafy.

Kdo me primarne zkousel: Horák Aleš

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Začal jsem popisem **definice orientovaného grafu**. Pak jsem si nebyl moc jistý jesti pokračovat dál definicema jako je orientovaný **sled** atp., tak to mě potom Horák navedl ať přejdu k popisům **těch dvou algoritmů**, tak jsem je více méně slovně popsal chtěl slyšet teda hlavně to v **čem se lyší vstupní grafy v těchto algoritmech** (že **Dijkstrův alg. nesmí obsahovat graf záporně ohodnocenou kružnici**) a následně chtěl napsat ten **vzorec z pro úpravu hodnoty v matici pro Floyd-Warshalla**. Sotva jsem to odvykládal tak už mě Janoušek chtěl poslat za dveře.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

1. Otazka (předmět) (okruh): 10 Orientované grafy (MAT)

Kdo me primarne zkousel: Rychlý Marek, RNDr., Ph.D.

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:

Otázka relativně lehká. Řekl jsem nějaké základy - popsal graf, cestu. Celkem pomáhal, vždy když jsem něco neřekl, tak se zeptal, snažil mě na to navést. Pak jsme se přesunuli na **algoritmy pro hledání cesty minimální délky**. Měl jsem říct **i časovou složitost** a jak by se ty algoritmy implementovaly. A od té doby bych řekl, že se to nějak zvrhlo

. Když jsem si ty algoritmy předem procházel, tak si říkám: "pohoda, to chápu". Jiná věc je ale to někomu dalšímu vysvětlit. Motal jsem to tam úplně všechno dohromady. Nejhorší na tom bylo, že bych si nad tím chvíli popřemýšlel, nakreslil si nějaký příklad (ale řekněte komisi: "já si na 15 min odskočím, promyslím to, vymyslím nějaký příklad a přinesu řešení"). Vždy, když jsem začal přemýšlet, potřeboval jsem přestat mluvit. Nastalo tím pádem úplné ticho, což neznělo dobře. Tak jsem raději mlel a povídal vše, co mě napadlo. Komise hodně v pohodě. Snažili se mi tam všichni maximálně radit. Rychlý už pak přišel i kreslit na tabuli. Ani bych se nedivil tomu, kdyby ztratil nervy a jednu mi tam natáhnul

. **Nakonec tedy D.**

Rada pro další generace: Nacvičte si na tyto algoritmy při učení nějaký příklad, na kterém to pak ukážete.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1010&t=22723&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): Orientované grafy
Kdo me primarne zkousel: Křivka (myslim) a ještě mu někdo přisluhoval

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli:
Opět chtěli nejdřív nějakej obecnej základ. Začal jsem dost nervozně po předchozím výstupu, ale naštěstí tuhle otázku jsem měl naučenou. Vlastnosti grafů jsme přeskočili a hned se šlo na **algoritmy hledání nejkratší cesty**. Ty dva, co jsou uvedeny v otázkách, jsem samozřejmě zaměnil, protože jsem

se je učil podle pořadí na papíru a ne podle názvu.

Naštěstí jsem si to brzo uvědomil a pak už jsem ten princip popsal správně. Chtěli hlavně **Floyd-Warshallův algoritmus**. Padla otázka na **složitost**, ale tu jsem věděl. Pak ještě **jak je to se záporným ohodnocením**. Tam jsem věděl, že ***to Dajkstr nezvládne***, ale u FW jsem musel trochu vařit z vody, protože se začali ptát na to, co by tam mohlo vzniknout za problém s těma zápornýma cestama (snad že se to **může dokonce zacyklit**, ale už si to přesně nepamatuju). Nakonec jsme se k tomu nějak dobrali a propustili mě z pekla ven

...

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

2. Otazka (předmět) (okruh): MAT - Orientované grafy (orientované cesty, Dijkstrův a Floyd-Warshallův algoritmus)

Kdo me primarne zkousel: Rychlý

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: Pohoda. Zadefinoval sem **graf**, **sled**, **tah**, **cestu**. Pak chtěl vědět jak funguje **Floyd-Warshallův algoritmus** a v čem se liší od **Dijkstry**, toť vše. Nakonec B.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

. Otazka (předmět) (okruh): **Orientované grafy (MAT)**
Kdo me primarne zkousel: **Smrž Pavel, doc. RNDr., Ph.D.**

Co jsem k tomu řekl(a)/na co se ptali/co mně vytkli:
Než jsem se nadechl, chtěl po mě **zadefinovat graf** nějakým zápisem na tabuli. Ještě než jsem stihl přiložit fix k tabuli, vypadlo z něj, že vlastně radši **jen jak definujeme množinu hran**. Tu jsem tam v pohodě napsal. Pak se ptal, *co ty hrany musí mít, abychom mohli hledat minimální cesty*. Odpověděl jsem, že samozřejmě nějakou **cenu přechodu** - ale Smrž se divně zatvářil, že to jako není zrovna přesné. To už jsem si začal říkat trochu "WTF".
Pak překvapil, že rovnou od množiny hran přeskočil kdesi na konec a najednou chtěl **Floyd-Warshallův algoritmus**. To mě nechalo klidným, protože jsem si ho zkoušel a uměl ho. Začal jsem víceméně neformálně popisovat algoritmus, kde **využívám dvě matice**.. a pak to začlo. Neustále rýpal, že se mu něco nezdá, že ať to nakreslím, pak dělal že nechápe (jakoby Floyd-Warshalla v životě neviděl), pak že prý jsem něco předtím řekl špatně (WTF, tak proč to neřekl hned, já už samožřejmě prd věděl, co jsem předtím přesně říkal), prostě se mi zdálo, že mě chce pěkně vydusit, ale já byl v klidu a neustále mluvil a vysvětloval. Bohužel jsem si díky stresu nenavrhl zrovna ideálně systém značení v matici posloupností a trochu se do toho zamotal, ale lidsky jsem ten princip vysvětlil správně. Smrž to ovšem proložil **dotazy na složitost jako**: ***"Co myslíte, že má větší složitost - nalezení cesty z konkrétního uzlu do jiného konkrétního nebo mezi všemi?"*** a ***"Jakou byste řekl, že má tento algoritmus složitost?"*** To jsem bohužel nevěděl z hlavy (moje chyba), ale snažil jsem se to odhadnout.. Na nic z toho mi neodpověděl (ani jestli je to špatně), jen se vždycky tvářil, že se mu to nelíbí. Ostatní nic neřikali. Smrž se mě celou dobu vlastně snažil přesvědčit, že tomu nerozumím, ale já jsem byl neoblomný. Celkově jsem z toho měl dobrý pocit, že orientované grafy jsem zvládl dobře, krom těch jeho dotazů na složitost, které jsem zkonil - věřil jsem si tak na B-C.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=792&t=20577&all_posts=1#unread>

1. Otazka (okruh):Orientované grafy
Kdo me primarne zkousel: Smrz

Co jsem k tomu rekl(a)/na co se ptali/co mne vytkli: **Zadefinoval** jsem tam orientovany graf, a hned ze jake znam **algoritmy na hledani nejkratsi cesty** a co je to nejkratsi cesta. Rikam **Dijkstruv** a **Floyd-Warshalluv**, a pry neco o FW. Tak jsem **nakreslil ty 2 matice**, rekl jsem ze je to **iterativni**, chtel jsem prejit k algoritmu kdyz Smrz vypalil pry **jakou to ma slozitost**. Ja byl nachystany na to popsat ten algoritmus a tohle me naprosto vykolejilo, okno, mozek vypnul. Byl jsem schopny si vzpomenout akorat na linearni slozitost, cumeli na me jak na debila (nedivim se). Tezce jsem zpanikaril, koukam na ty matice, rikam si ty pyco, matice musi byt kvadraticke, jsou 2 ale tak to by nemel byt zas takovy rozdil, z toho snad kubicka nebude. Tak jsem rekl kvadraticka, zas na me cumeli, pak neco s Dijkstrovym. Byl jsem uplne v koncich, mozek vyply, tak jsem placl zas linearni. Drtil me takhle docela dlouho, pak to nastesti milosrdne utnuli.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>

Komise 61: Ceska, Peringr, Janousek, Misovic (externi), Bartik, Bidlo
1 otázka: Mišovič (externi ucitel) - Orientovane Grafy
Prvni pocit - jo to musi byt v pohode. Pocit po polozeni otazky ... naprosto sem nechapal co chce

Postupne ze me vypacili co chteli.

From <https://fituska.eu/viewtopic.php?f=569&t=17596&all_posts=1#unread>