– Máme KA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$

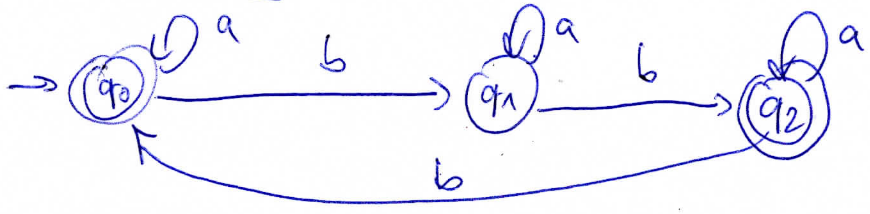
δ: $\delta(q_0, a) = q_0$ $\quad \delta(q_0, b) = q_1$

$\delta(q_1, a) = q_1$ $\quad \delta(q_1, b) = q_2$

$\delta(q_2, a) = q_2$ $\quad \delta(q_2, b) = q_0$

a) Formálně zapište $L(A)$. b) Sestrojte gr. $G : L(G) = L(A)$.

ad a)



$L(M) = \{ \{a\}^* (\{b\}\{a\}^*)^k \mid k \bmod 3 \neq 1, k \geq 0 \}$

$= \{ w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) \bmod 3 \neq 1 \}$

ad b)

$G = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, P, q_0)$

P:
$q_0 \to a q_0 \mid b q_1 \mid \varepsilon$

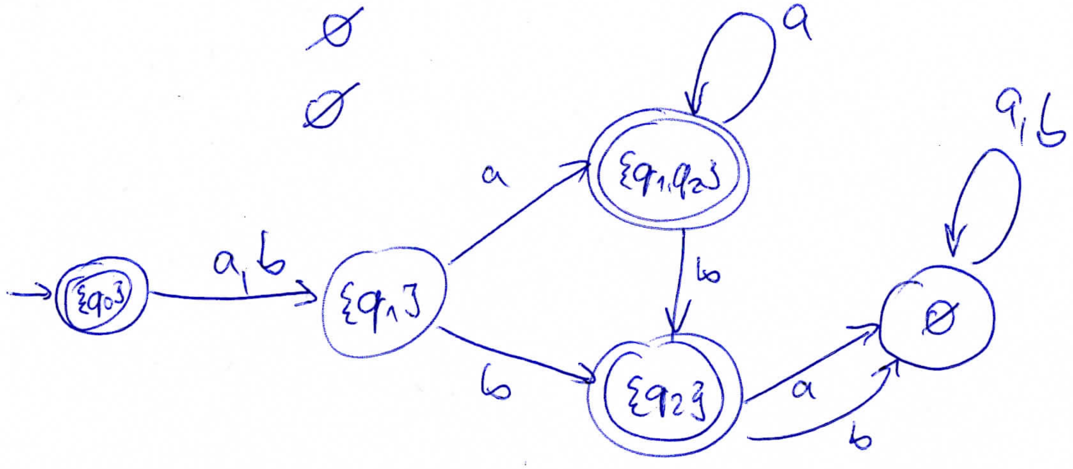
$q_1 \to a q_1 \mid b q_2$

$q_2 \to a q_2 \mid b q_0 \mid \varepsilon$

- Máme NKA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$,
  kde $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$ $\delta(q_0, b) = \{q_1\}$
  $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$ $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$
  $\delta(q_2, a) = \emptyset$ $\delta(q_2, b) = \emptyset$

Převeďte alg. na úplný DKA.

	a	b
$\rightarrow$ [$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
[$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
[$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



- Pro bezk. jazyk

$$L = \{ a^i b^j a^j b^i c^k \mid i,j>0,\ k \geq 0 \}$$

např. $a^3 b^4 a^4 b^3 c^5 \in L$

$a^3 b^4 a^3 b^4 c^5 \notin L$

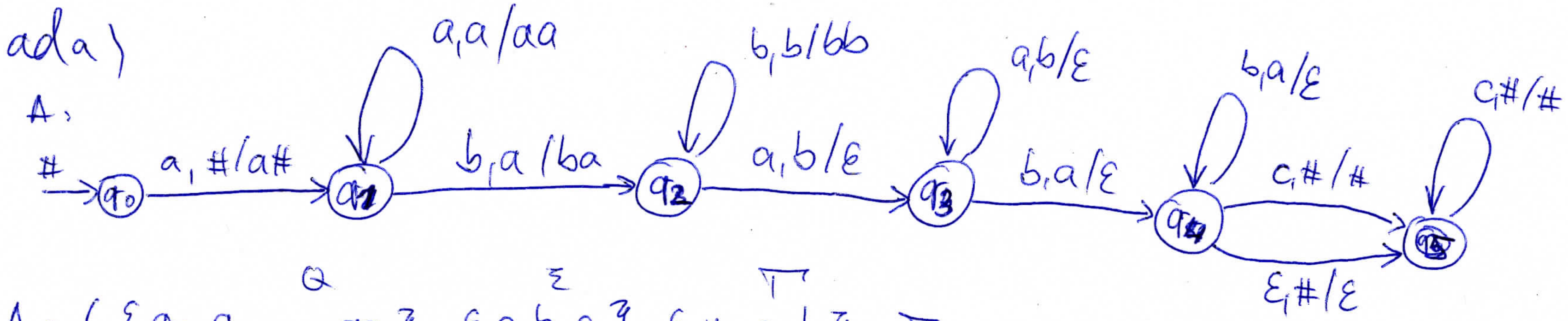
sestrojte a ve shodě s definicí zapište

a) ZA A takový, že $L(A) = L$, a

b) bezk. gr. G takovou, že $L(G) = L$.

ad a)

A:



$$A = (\overset{Q}{\{q_0, q_1, \dots, q_5\}}, \overset{\Sigma}{\{a,b,c\}}, \overset{\Gamma}{\{\#, a, b\}}, \delta, q_0, \#, \{q_5\})$$, kde

δ: $\delta(q_0, a, \#) = \{(q_1, a\#)\}$

$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, aa)\}$

$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, ba)\}$

$\vdots$

$\delta(q_5, c, \#) = \{(q_5, \#)\}$

ad b) $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

P: $S \to aAbC$

$A \to aAb \mid bBa$

$B \to bBa \mid \varepsilon$

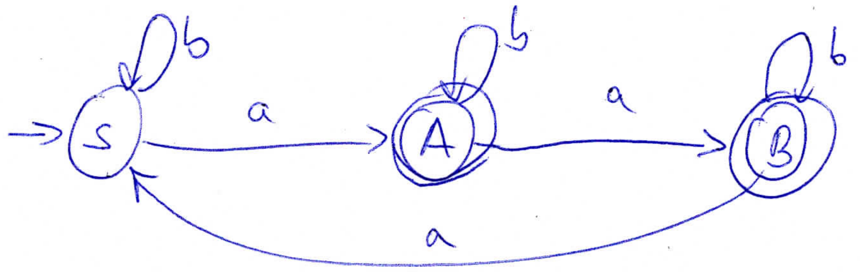
$C \to cC \mid \varepsilon$

- Máme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

P: $S \to aA \mid bS$
$A \to aB \mid bA \mid \varepsilon$
$B \to aS \mid bB \mid \varepsilon$

a) Určete a formálně zapište $L(G)$. b) Sestrojte a ve stručné sdef. zapište KA A takový, že $L(A) = L(G)$.

ad a)



$$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 \neq 0 \}$$
$$= \{ \{b\}^* (\{a\}\{b\}^*)^k \mid k \bmod 3 \neq 0 \}$$

ad b) DKA $M = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \delta, S, \{A, B\})$

δ: $\delta(S, a) = A \quad \delta(S, b) = S$
$\delta(A, a) = B \quad \delta(A, b) = A$
$\delta(B, a) = S \quad \delta(B, b) = B$

- Pro bezkontextový jazyk

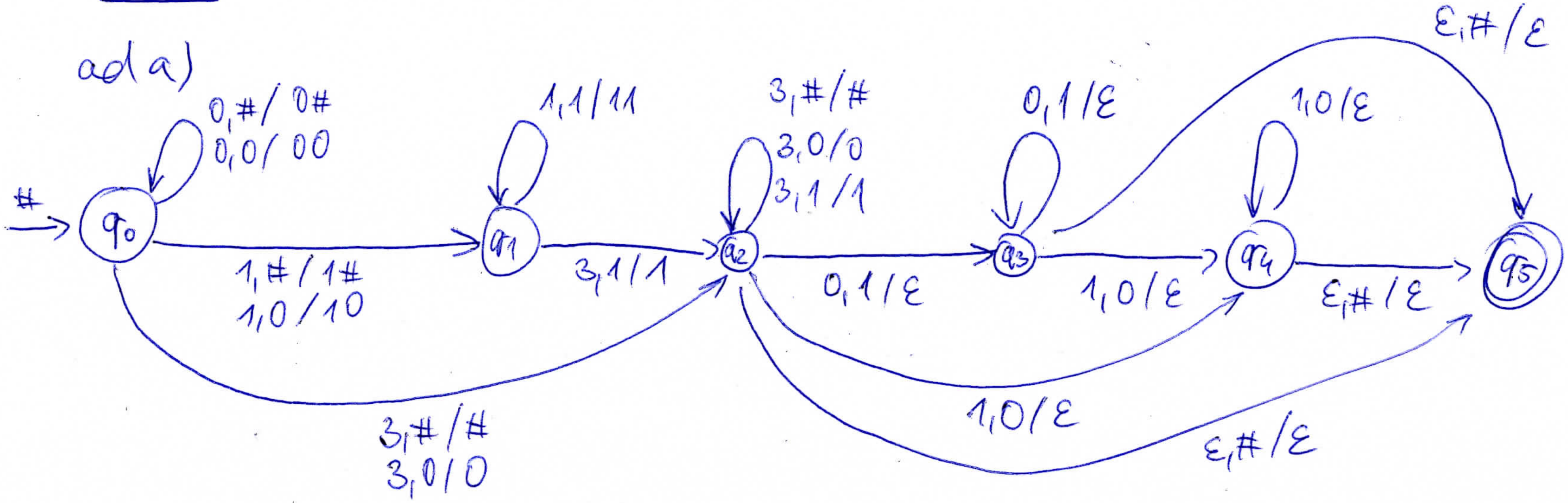
$$L = \{ 0^i 1^j 3^k 0^j 1^i \mid i, j \geq 0 \wedge k > 0 \}$$

sestavte a formálně zapište ZA A takový, že $L(A) = L$,

a bezk. gr. G takovou, že $L(G) = L$.

---

ad a)



$A = (\{q_0, \ldots, q_5\}, \{0, 1, 3\}, \{\#, 0, 1\}, \delta, q_0, \#, \{q_5\})$

δ: $\delta(q_0, 0, \#) = \{(q_0, 0\#)\}$

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$

$\vdots$

$\delta(q_4, \varepsilon, \#) = \{(q_5, \varepsilon)\}$

$G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$

P: $S \rightarrow 0S1 \mid A$

$A \rightarrow 1A0 \mid B$

$B \rightarrow 3B \mid 3$

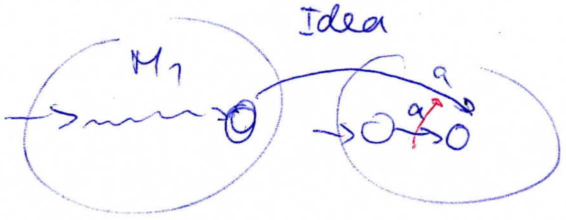
- Sestavte a formálně zapište algoritmus pro konkatenaci nad DKA.

Vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a

DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ bez újmy na obecnosti takové, že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \cdot L(M_2)$.

Metoda:



1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. δ: $\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma : q_2 \in \delta(q_1, a) \Leftrightarrow$

   $q_2 = \delta_1(q_1, a) \vee q_2 = \delta_2(q_1, a) \vee$

   $\vee \ (q_1 \in F_1 \wedge q_2 = \delta_2(q_0^2, a))$
4. $q_0 = q_0^1$
5. $F = \begin{cases} F_2 & \text{pokud } \varepsilon \notin L(M_2) \\ F_1 \cup F_2 & \text{jinak} \end{cases}$

- Sestavte a formálně zapište alg. pro operaci shuffle nad jazyky DKA, kde:
  - $\varepsilon \parallel w = w \parallel \varepsilon = \{w\}$
  - $aw_1 \parallel bw_2 = \{a\}(w_1 \parallel bw_2) \cup \{b\}(aw_1 \parallel w_2)$

$- L_1 \| L_2 = \bigcup\limits_{\substack{w_1 \in L_1, \\ w_2 \in L_2}} w_1 \| w_2$

Vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a

DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \| L(M_2)$.

Metoda:

~~δ: $[\forall q_1^1, q_1^2 \in Q_1 \ \forall q \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma$ $(q_1^2, q) \in \delta((q_1^1, q), a)$ $\Leftrightarrow q_1^2 = \delta_1(q_1^1, a)]$ $\vee$ $[\ ]$~~

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. δ: $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma$:

$$(q_2^1, q_2^2) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a) \Leftrightarrow$$

$$(\ \delta_1(q_1^1, a) = q_2^1 \ \wedge \ q_1^2 = q_2^2 \quad q_1^2\ )$$

$$\vee$$

$$(\ q_1^1 = q_2^1 \ \wedge \ \delta_2(q_1^2, a) = q_2^2\ )$$

$x = x$

4. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$
5. $F = F_1 \times F_2$.

Kleeneho algebry

- V Kleeneho algebře dokažte $a^*a^* = a^*$.
- Použijeme dvě pomocné lemmy:

L1. $a = b \iff a \leq b \wedge b \leq a$

L2. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

- Důkaz Lemma 1:

"$\Rightarrow$" 1. - Předpokládáme, že $a = b$.

2. - Dle A.3 z 1. plyne, že $a + a = b$
3. Z 1 a 2 máme, že $a + b = b$
4. Ze 3 a def. $\leq$ máme, že $a \leq b$.
5. Z 1 a symetrie $=$ máme, že $b = a$.
6. Z 5 a A.3 máme, že $b + b = a$
7. Z 6 a 5 máme, že $b + a = a$
8. Ze 7 a def. $\leq$ máme, že $b \leq a$

Tím máme dokázáno, že $a = b \Rightarrow a \leq b \wedge b \leq a$.

"$\Leftarrow$" 1. Předpokládáme, že $a \leq b \wedge b \leq a$, tedy $a \leq b$ a $b \leq a$

2. z def. $\leq$ a 1 máme, že $a+b=b$ a $b+a=a$

3. z A2 a druhé části bodu 2: $a+b=a$

4. z 3 a symetrie $=$: $a=a+b$

5. z první části 2 $(a+b=b)$, z 4 $(a=a+b)$ a tranzitivity $=$: $a=b$.

Tedy víme, že $a\leq b \wedge b\leq a \Rightarrow a=b$.

- Důkaz Lema 2 ponechám laskavému čtenáři.

- Důkaz $a^*a^*=a^*$ provedeme tak, že ukážeme

a) $a^*a^*\leq a^*$ a

b) $a^*\leq a^*a^*$,

což dle L1 stačí.

- ad a: Důkaz $a^*a^*\leq a^*$:

(1) A.10: $1+aa^*=a^*$

(2) z (1) a L1: $1+aa^*\leq a^*$

(3) Ukážeme, že $aa^*\leq 1+aa^*$ (abychom se následně zbavili „$+1$")

(3a) z reflexivity $=$: $1+aa^*=1+aa^*$

(3b) z (3a) a A.3: $1+(aa^*+aa^*)=1+aa^*$

(3c) z (3b) a A.1: $(1+aa^*)+aa^*=1+aa^*$

(3d) z (3c) a A.2: $\underbrace{aa^*}_{“a”} + \underbrace{(1+aa^*)}_{“b”} = \underbrace{1+aa^*}_{“b”}$

(3e) z (3d) a def. $\le$: $aa^* \le 1+aa^*$

(4) z 2 ($1+aa^* \le a^*$) a 3 ($aa^* \le 1+aa^*$) a
Lemmatu 2 (tr, $\le$): $\underbrace{a}_{“a”}\underbrace{a^*}_{“e”} \le \underbrace{a^*}_{“e”}$

(5) z 4 a A.14: $a^*a^* \le a^*$.

- Důkaz $a^* \le a^*a^*$

(1) Axiom A.10: $1+aa^* = a^*$.
(2) z reflexivity $=$: $a^*a^* = a^*a^*$
(3) z (1) a (2): $a^*a^* = a^*(1+aa^*)$
(4). z (3) a A.8: $a^*a^* = a^*\cdot 1 + a^*aa^*$
(5) ze (4) a A.5: $a^*a^* = a^* + a^*aa^*$
(6) z (5) a L1: $a^* + a^*aa^* \le a^*a^*$

Dále směřujeme k ukázání, že $a^* \le a^* + a^*aa^*$

(7) z reflexivity $=$: $a^* + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$
(8) z (7) a A.3: $(a^*+a^*) + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$

Idea:
- Musíme rozložit a^*a^* na $a^* + EXPR$ takový, že $a^* + EXPR \le a^*a^*$
- Pak ukážeme, že $a^* \le a^* + EXPR$.

Abychom toto ukázali, potřebujeme
$\underbrace{a^*}_{“a”} + \underbrace{(a^*+a^*aa^*)}_{“b”} = \underbrace{a^*+a^*aa^*}_{“b”}$
($a \le b \Leftrightarrow a+b=b$)

(9) z (8) a A.1 : $\underset{\text{"a"}}{a^*} + (\underset{\text{"b"}}{a^* + a^* a a^*}) = a^* + \underset{\text{"b"}}{a^* a a^*}$

(10) z (9) a def. $\leq$: $a^* \leq a^* + a^* a a^*$

(11) z bodu (10), který říká $a^* \leq a^* + a^* a a^*$, a bodu (6), který říká $a^* + a^* a a^* \leq a^* a^*$, a Lemy 2 (tranzitivita $\leq$) : $a^* \leq a^* a^*$.

$\square$