Nedeterm. syntaktická analýza shora dolů

- Uvažujme bezk. gr. s pravidly

$$E \to E+T \mid T$$
$$T \to T*F \mid F$$
$$F \to i \mid (E)$$

, kde $S = E$.

Vytvořte ZA přijímající vyprázdněním zásobníku jazyk uvedené gr. a modelující synt. analýzu shora dolů:

$Q = \{q\}$

$\Sigma = \{i, +, *, (,)\}$

$\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F\}$

δ: $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, E+T), (q, T)\}$

$\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, T*F), (q, F)\}$

$\delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, i), (q, "(E)")\}$

$\forall a \in \Sigma: \delta(q, \underline{a}, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$q_0 = q$

$z_0 = E$

$F = \emptyset$ (přijímá vyprázdněním zás.)

Nedeterm. synt. analýza zdola nahoru

Pro výše uvedenou gramatiku sestrojte DZA modelující synt. analýzu zdola nahoru.

$$\begin{aligned} E &\to E+T \mid T \\ T &\to T*F \mid F \\ F &\to i \mid (E) \end{aligned}$$

- Použijeme DZA, kde vrchol zásobníku je vpravo, ale čte se zleva doprava.

- $Q = \{q, r\}$

  $\Sigma = \{i, +, *, (,)\}$

  $\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F, \#\}$

  δ: - $\forall a \in \Sigma: \delta(q, a, \varepsilon) = \{(q, a)\}$ shift

  - $\delta(q, \varepsilon, i) = \{(q, F)\}$

    $\delta(q, \varepsilon, \text{"("}E\text{")"}) = \{(q, F)\}$

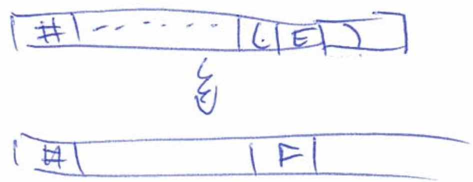
    $\delta(q, \varepsilon, T*F) = \{(q, T)\}$

    $\delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, T)\}$

    $\delta(q, \varepsilon, E+T) = \{(q, E)\}$

    $\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, E)\}$

    reduce



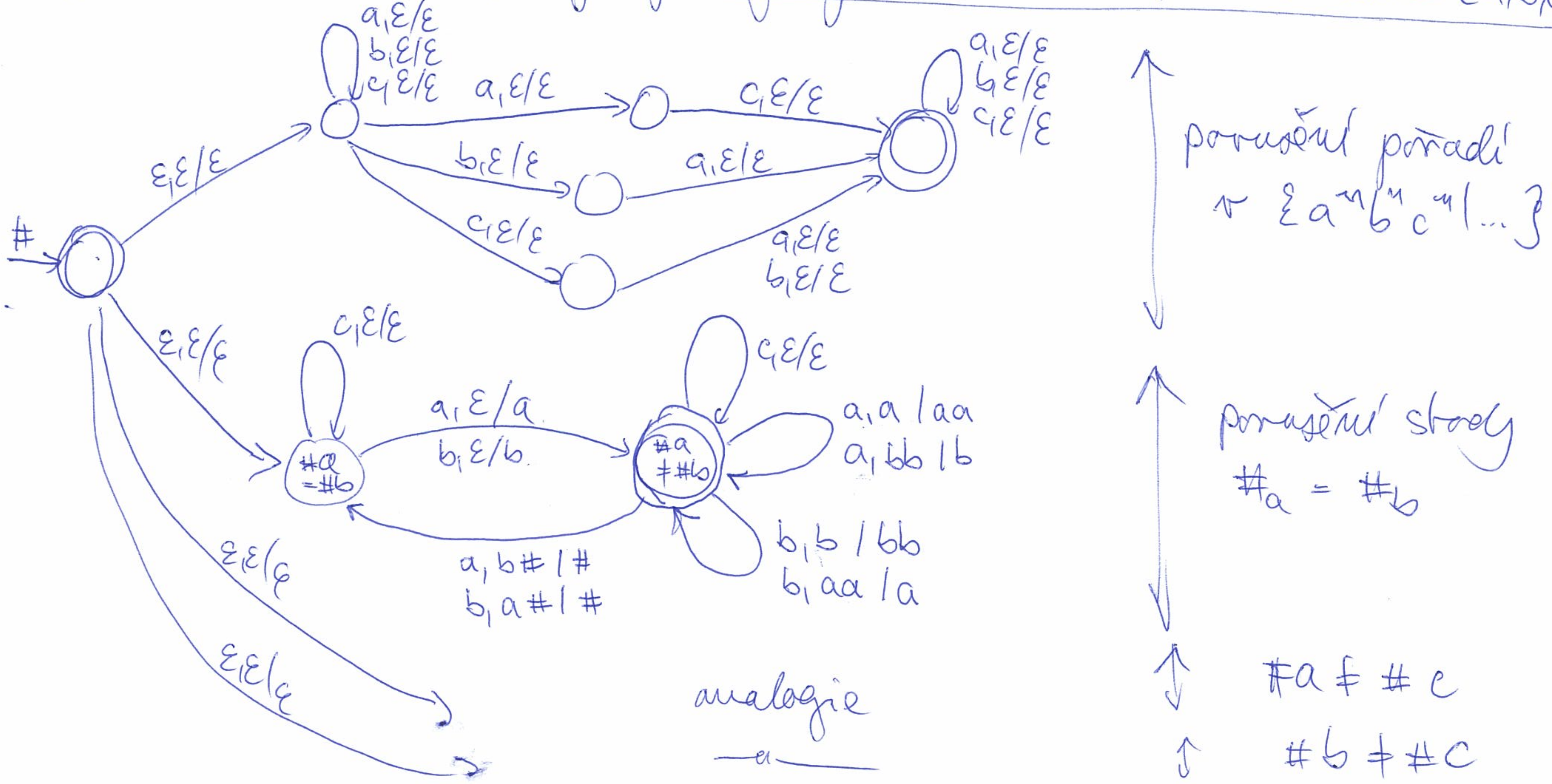
- $\delta(q, \varepsilon, \#E) = \{(r, \varepsilon)\}$ | accept.

$q_0 = q$

$Z_0 = \#$

$F = \{r\}$

- Sestavte RNZA přijímající jazyk $\overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}$ nad $\Sigma = \{a, b, c\}$.



$$\overline{\overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$$

PL pro $\mathcal{L}_2$

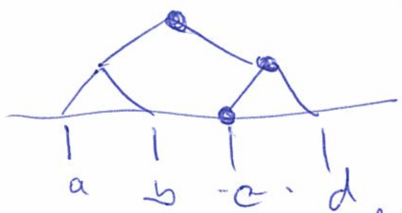
$\forall \Sigma \ \forall L \subseteq \Sigma^*: L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists k > 0 \ \forall z \in L : |z| \geq k \Rightarrow$

$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$

$\forall i \geq 0 : u v^i w x^i y \in L$

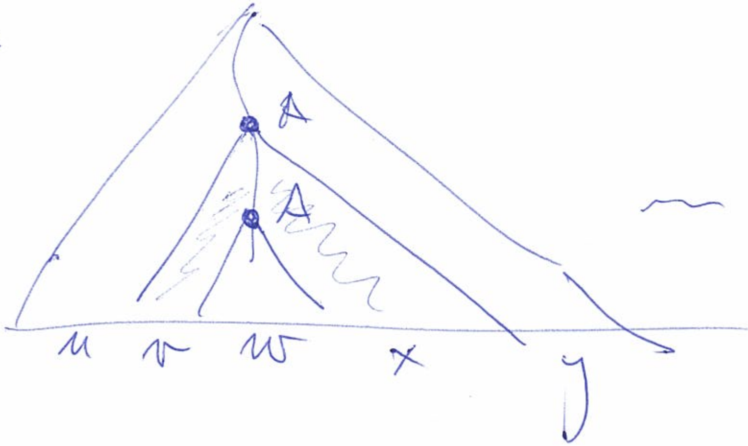
důkaz (idea):

- CNF : $A \to BC \mid a$ $(S \to \varepsilon \ldots)$
- vede na bin. der. strom

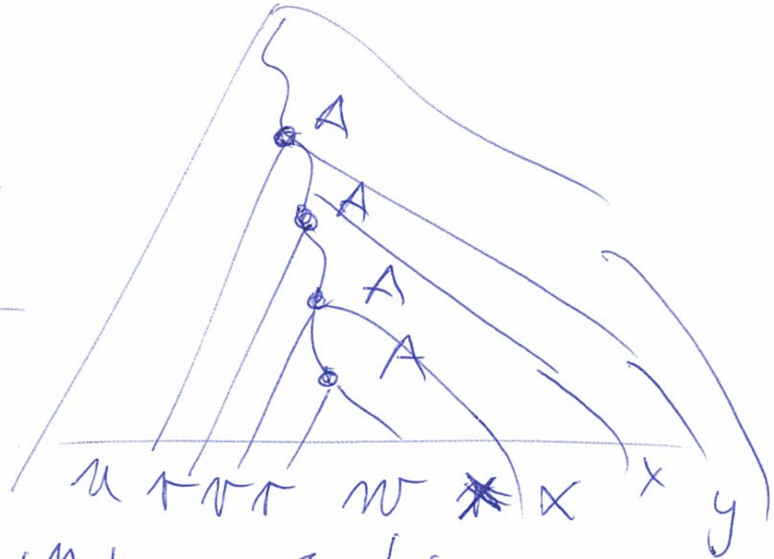


- plné bin. strom s počtem uzlů n na cestě od kořene k listu: cesta $n+1$ uzlů, pak 2^n listů
- pro neplné stromy, abych měl 2^n listů, potřebuji cestu o m uzlech, kde $m \geq n+1$

- uvážíme-li větu o $2^{|N|}$ symbolech, pak v der. stromě musí-mít větev o délce aspoň $|N|+1$:



$\sim$



- <u>Dokažte, že jazyk $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$.</u>

$\Sigma = \{a, b\}$

<u>Důkaz sporem:</u>

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_2$.
- Pak PL říká, že
  $\exists k > 0\ \forall z \in L : |z| \geq k \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*:$
  $vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L.$
- Uvážíme libovolné $k > 0$ a zvolíme $z = a^{k^2} \in L$ a
  $|z| = k^2 \geq k.$
- Dle PL: $\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*: vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L.$

- Uvažme libovolné $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ takové, že
  $vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$.
- Zvolme $i = 2$ a složme řetězec
  $z' = u v^2 w x^2 y$.
  Dle PL: $u v^2 w x^2 y \in L$ a tedy $|u v^2 w x^2 y| = l^2$ pro $l \geq 1$.
- Dále víme, že $|u v^2 w x^2 y| = |uvwxy| + |vx| =$
  $= k^2 + |vx|$.
- Přitom víme, že $vx \neq \varepsilon$. Tedy $|z'| > k^2$ $(|vx| > 0)$.
- Dále $|vwx| \leq k$ a tedy $|vx| \leq k$ a tedy
  $|z'| \leq k^2 + k < \underbrace{k^2 + 2k + 1}_{= (k+1)^2}$, protože $k > 0$
- Tedy $k^2 < |z'| < (k+1)^2$ a současně $|z'| = l^2$ pro $l \geq 1$ $(l \in \mathbb{N})$, což je spor, protože mezi dvěma za sebou jdoucími přir. čísly není žádné další přir. číslo. (nelze $k < l < k+1$ pro $k, l \in \mathbb{N}$). $\square$

- Dokažte, že $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$, $\Sigma = \{a, b\}$

<u>Důkaz sporem</u>:

- předp., že $L \in \mathcal{L}_2$.
- Dle PL: $\exists k > 0\ \forall z \in L: |z| \geq k \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*:$ $z = uvwxy \wedge |vx| > 0 \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.
- uvažme libovolné $k > 0$ a zvolme $z = a^k b^k a^k \in L$, $|z| = 3k \geq k$.
- dle PL: $\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*: z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$ $\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.
- uvažme libovolné u, v, w, x, y splňující výše uvedenou podmínku a zkoumejme jejich strukturu:

$(\#_a(v) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_a(x) > 0 \wedge \#_b(x) > 0)$

a) Pokud v či x obsahuje symboly a i b, pak pro $i \geq 2$ zcela jistě $uv^iwx^iy \notin L$, protože je v něm příliš mnoho alternací pořadí a a b.

$\boxed{v, x \in a^* \vee v, x \in b^*}$

b) Pokud v i x zvolíme čistě ze symbolů a nebo čistě ze symbolů b, pak pro $i \geq 2$ dojde z uv^iwx^iy k porušení stejné délky prefixu, jádra a sufixu a tedy $z' \notin L$.

c) Pokud zvolíme $v \in a^*$ a $x \in b^*$ pak li pro případ $|v| = |x|$) pro $i \geq 2$ $z' = uv^iwx^iy \notin L$, protože dojde k nestodě délky prefixu a sufixu

d) Pokud zvolíme $v \in b^*$ a $x \in a^*$, pak $z' = uv^iwx^iy$ pro $i \geq 2$ nebude patřit do L analogicky jako v bodě c.

- Tedy neexistuje žádná volba u, v, w, x, y takovou, aby platilo výše uvedení, což je spor. $\square$

- Dokažte, že $L = \{ w \in \{a,b,c,d\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge \#_c(w) = \#_d(w) \} \notin \mathcal{L}_2$

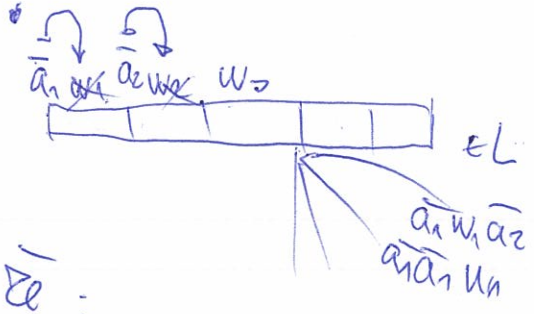
<u>Důkaz sporem.</u> (idea)

- Podobně jako výše, nelze ale volit např. $z = a^k b^k c^k d^k$. Lze "pumpovat" na rozmezí a^k a b^k.

- Vhodná volba např. $z = a^k c^k b^k d^k$ při uvážení, že $|vwx| \leq k$. Nelze tedy $\underset{v}{a^k}\underset{w}{c^k}\underset{x}{b^k} d^k$.

Uzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči inverznímu morfismu

- Mějme abecedy Σ a Δ.
  Zobrazení $h: \Sigma^* \to \Delta^*$ nazveme morfismem, když
  $\forall w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*: h(w) = h(a_1) \dots h(a_n)$.
- Morf. jazyka: $h(L) = \{ h(w) \mid w \in L \}$.
  $(L \subseteq \Sigma^*)$
- Inv. morfismus: $h^{-1}(L) = \{ w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L \}$.
  $(L \subseteq \Delta^*)$
- Uzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči h^{-1} pro $h: \Sigma^* \to \Delta^*$:
  - Uvažme libovolný bezk. jazyk $L \subseteq \Delta^*$.



  - $h^{-1}(L) = h_1(\sigma(L) \cap L_1^*)$
    kde:
    - σ je substituce definovaná tak, že:
      $\forall c \in \Delta: L_c = (\overline{\Sigma})^* c (\overline{\Sigma})^*$
    - $L_1 = \{ \bar a w \mid h(a) = w \wedge a \in \Sigma \} \in Fin$, předp. že $\overline{\Sigma} \cap \Delta = \emptyset$.

- $h_1 : (\overline{\Sigma} \cup \Delta)^* \to \Sigma^*$ tak, že

$$\forall a \in \Sigma : h(\overline{a}) = a$$
$$\forall c \in \Delta : h(c) = \varepsilon .$$

- Ilustrace výše uvedené konstrukce na příkladu.

Uvažme: $\Sigma = \Delta = \{a, b\}$, $L = (ab)^* (ba)^*$,

$$h : \begin{array}{l} a \mapsto ab \\ b \mapsto ba \end{array}$$

sestrojte $h^{-1}(L)$ dle výše uvedené konstrukce:

- σ : $L_a = \{\overline{a}, \overline{b}\}^* a \{\overline{a}, \overline{b}\}^*$
  $L_b = \{\overline{a}, \overline{b}\}^* b \{\overline{a}, \overline{b}\}^*$
- $\sigma(L) = (\{\overline{a}, \overline{b}\}^* a \{\overline{a}, \overline{b}\}^* b \{\overline{a}, \overline{b}\}^*)^* (\{\overline{a}, \overline{b}\}^* b \{\overline{a}, \overline{b}\}^* a \{\overline{a}, \overline{b}\}^*)^*$
- $L_1 = \{\overline{a}ab, \overline{b}ba\}$
- $\sigma(L) \cap L_1^* = (\overline{a}ab)^* (\overline{b}ba)^*$
- h_1 : $\overline{a} \mapsto a$, $\overline{b} \mapsto b$
  $a \mapsto \varepsilon$, $b \mapsto \varepsilon$
- $h_1(\sigma(L) \cap L_1^*) = (a\varepsilon\varepsilon)^* (b\varepsilon\varepsilon)^* = a^* b^*$

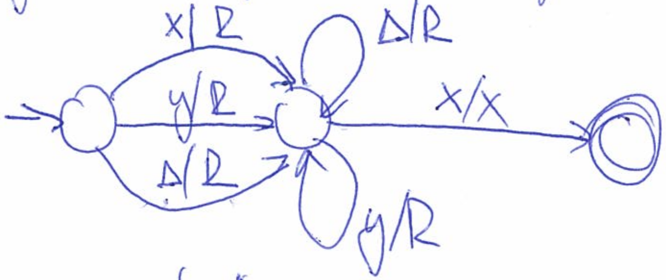
Turingovy stroje

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$

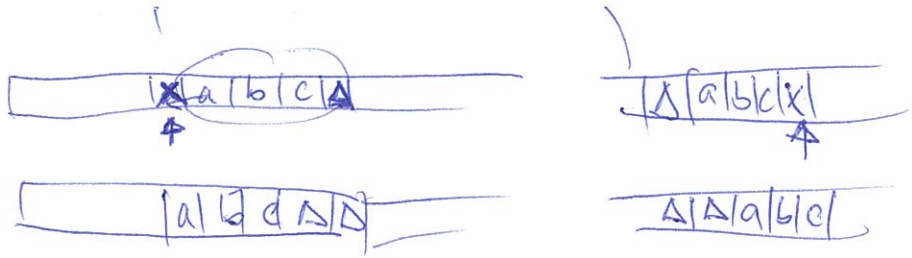
  $\Delta \notin \Sigma$, $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{\Delta\}$ $(L, R \notin \Gamma)$, $q_0 \in Q$, $q_F \in Q$

$$\delta : (Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \longrightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$$

- Přechodový diagram pro stroj R_x, který posune hlavu na nejbližší symbol x vpravo od aktuální pozice $(\Sigma = \{x, y\})$.



- kompoziční diagram:
  - základní komponenty: x $(x \in \Gamma)$, L, R, L_x, R_x, $L_{\neg x}$, $R_{\neg x}$, S_L, S_R —



- sekvence → ABC
- podmíněná sekvence → $A B \xrightarrow{x} C$
  - pokud je pod čtecí hlavou x, pak pokračuje C
  - jinak PŘIJME

- větvení

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "y"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

- použití doplňku $A \xrightarrow{\neg x} B$
- parametrová konvence $A \xrightarrow[w]{x,y,z} \xrightarrow{w} Bw$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"] \arrow[d, "z"] & Bx \\ Bz & By \end{tikzcd}$$

- pokud povoleno, lze užít nedeterm.

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x"'] & \\ & C \end{tikzcd} \quad / \quad \begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C \end{tikzcd}$$

– víc pásek, pořád porovnat : horní indexy
u komponent a symbolů : $\rightarrow A^1 B^2 \xrightarrow{x^3} D^1$

- Jaký je rozdíl mezi TS $\rightarrow R L$ a $\rightarrow L R$?

$\rightarrow L R$ může skončit neúspěšně — přepadnutí úlohy.

- Sestavte TS nad $\Sigma = \{x, y\}$, který změní pásku v konfiguraci $\underline{\Delta} w \Delta \ldots$ na $\underline{\Delta} w \Delta w^R \Delta \ldots$ pro $w \in \Sigma^*$. Zapište komponentním diagramem. (Implementuje tedy f-ci $f(w) = w \Delta w^R$ pro $w \in \Sigma^*$).

$\rightarrow R_\Delta L \xrightarrow{\{x,y\}\ w} \Delta R_\Delta R_\Delta w L_\Delta L_\Delta w$

Δ x x y Δ Δ ...
Δ x x y Δ Δ ...
Δ x x y Δ Δ ...
Δ x x Δ Δ ...
Δ x x Δ Δ Δ ...
Δ x x Δ Δ Δ Δ ...
Δ x x Δ Δ y Δ ...
Δ x x Δ Δ y Δ ...
Δ x x Δ Δ y Δ ...
Δ x x y Δ y Δ ...
Δ x x y Δ y Δ.

Δ x Δ y Δ y Δ ...
Δ x Δ y Δ y Δ ...
Δ x Δ y Δ y Δ Δ ...
Δ x Δ y Δ y x Δ ...
Δ x Δ y Δ y x Δ

Δ x Δ y Δ y x Δ ...
Δ x x y Δ y x Δ ...
Δ x x y Δ y x Δ ...
Δ Δ x y Δ y x Δ ...
Δ Δ x y Δ y x Δ
Δ Δ x y Δ y x Δ ...
Δ Δ x y Δ y x x Δ ...

Δ Δ x y Δ y x x Δ ...
Δ Δ x y Δ y x x Δ ...
Δ x x y Δ y x x Δ ...
Δ x x y Δ y x x Δ.