9. OBYČEJNÉ GRAFY

– může mít graf více koster s minimální cenou?

– minimální kostry používáme v sítích pro směrovací protokoly

– jak reprezentujeme graf v algoritmech? násobné pole

Obyčejný graf

– dvojice $G = (U, H)$ – nebo také $G = (V, E)$

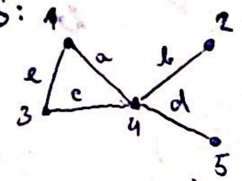
– U je konečná množina uzlů

– H je konečná množina hran $H = \{\{u, v\} \mid u, v \in U \wedge u \neq v\}$

↳ platí tedy, že hrany vedou mezi rozdílnými uzly – ne z uzlu do stejného uzlu

hrana $\{a, b\}$ znamená neorientovaná hrana mezi a a b (uzly)

G:



$\Rightarrow G = (\{1,2,3,4,5\}, \{\overset{a}{\{1,4\}}, \overset{c}{\{3,4\}}, \overset{e}{\{1,3\}}, \overset{b}{\{2,4\}}, \overset{d}{\{5,4\}}\})$

Obecný graf (multigraf)

$G = (U, H, \varepsilon)$ kde $\varepsilon : H \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in U \wedge u \neq v\}$ je zobrazení které každé hraně udává dvojici uzlů (jako dvouprvkovou množinu) které propojuje

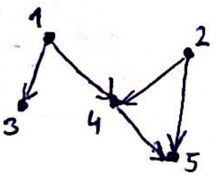
Orientovaný graf

– pouze dvojice $G = (U, H)$ kde $H = \{(a, b) \mid a, b \in U\}$

↳ a a b se mohou rovnat

↳ množina dvojic – orientovaných hran

G:



– u obyčejného grafu to byla množina množin přičemž $\{a, b\}$ a $\{b, a\}$ znamenalo stejné hrany

– zde (a, b) a (b, a) neznamená stejné hrany

Průchod grafem:

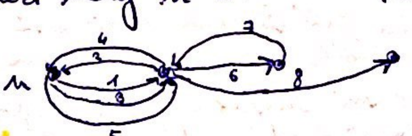
- **Sled**

– posloupnost uzlů a hran, kde platí že mezi každými po sobě jdoucími uzly posloupnosti je hrana

– sled mezi u a v je posloupnost kde prvním vrcholem (uzlem) je u a posledním je v a jinak se mohou hrany a uzly libovolně opakovat

– délka sledu je n a každý uzel $u \in U$ je zároveň sled délky 0

$u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n$ kde $u_0 = u$ a $u_n = v$ je sled délky n mezi uzly u a v $\quad u_0, u_1, \dots, u_n \in U$ a $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$



je sled mezi u a v délky 8 $\rightarrow n = 8$

- **Tah**

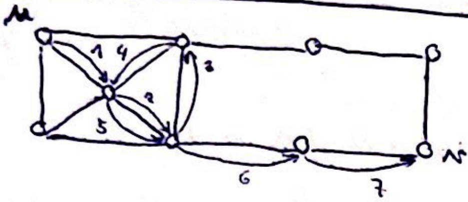
– je sled, ve kterém je však každá hrana pouze 1x. – body mohou být vícekrát

– $u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n$ kde $u_0 = u$ a $u_n = v$ je tah mezi u a v jestliže $\forall i, j \in N : i \neq j \rightarrow h_i \neq h_j \quad i \geq 1, j \leq m$

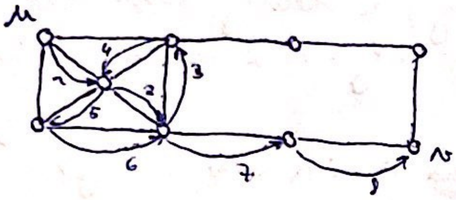
Cesta

– je tah kde se neopakují ani uzly

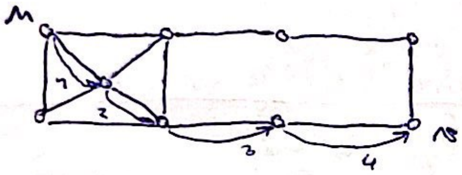
– $u_0, h_1, u_2, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n$ kde $u_0 = u$ a $u_n = v$ je cesta mezi u a v jestliže $\forall i,j \in N$ kde $i \geq 1, j \leq n$: $i \neq j \rightarrow u_i \neq u_j$



JE SLED (ale není tah ani cesta – opakují se vrcholy ale i hrany)



JE TAH (ale není cesta – opakují se vrcholy)
(každý tah je i sled)

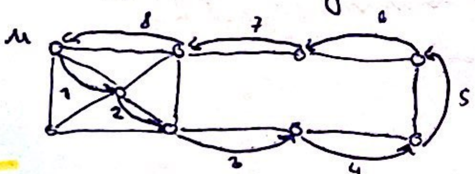


JE CESTA
(každá cesta je i tah a sled)

Kružnice

– je cesta grafem (neopakují se ani hrany ani uzly) kde výchozí a cílový bod jsou shodné – $u = v$

– $u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n$ kde $u_0 = u_n$
$\forall i,j \in N, i \geq 1 \wedge j \leq n : i \neq j \rightarrow u_i \neq u_j$



– jestliže graf obsahuje 2 kružnice které mají 1 společnou hranu, tak po odstranění této hrany se jedná o jednu velkou kružnici

Počet hran grafu

– $G = (U, H)$ kde U je konečná množina uzlů a H je konečná množina hran pak $|U|$ je počet uzlů grafu a $|H|$ je počet hran grafu

– neorientovaný graf: $|H| \leq \frac{|U| \cdot (|U| - 1)}{2}$ ← z každého uzlu maximálně do každého dalšího uzlu ale ne do sebe sama – 1

– orientovaný graf: $|H| \leq |U| \cdot (|U| - 1)$ není orientovaný tak je jeden směr a mezi každými dvěma uzly je max. 1 hrana

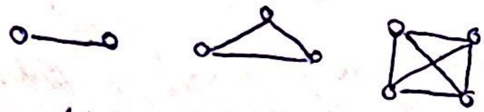
Stupeň uzlu → značí se $Deg(u)$

– počet hran které z uzlu vedou

– součet stupňů uzlů grafu je vždy $2 \cdot |H|$ → každá hrana max. 2 uzly

Úplný graf

- mezi každými dvěma uzly grafu vede hrana
- $\forall u, v \in U : \{u, v\} \in H$
- stupeň každého uzlu je tedy $|U| - 1$ — on sám
- počet hran grafu je $\binom{|U|}{2}$ tedy $\frac{|U|!}{(|U|-2)! \cdot 2!}$



atd...

Hamiltnovský graf

- graf musí být 1 souvislý!
- je graf který obsahuje hamiltnovskou kružnici
- v grafu je kružnice (obsahuje každý bod/uzel i hranu pouze jednou maximálně) která prochází všemi body grafu
- tedy v grafu je kružnice která prochází všemy uzly grafu (a jen jedenkrát každým — je to kružnice přeci)

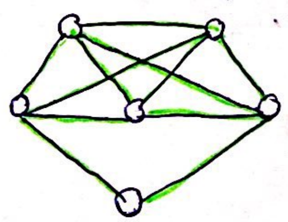
Př.:

- pokud má graf ≥ 3 uzly
  - každý uzel má stupeň alespoň $\frac{|U|}{2}$ DIRACOVA PODM.
  - každá dvojice uzlů, které nejsou přímo propojeny hranou má součet stupňů alespoň $|U|$ OREHO PODM.
  - ....

} je li něco z tohoto splněno, pak G je Hamiltnovský graf

Eulerovský graf

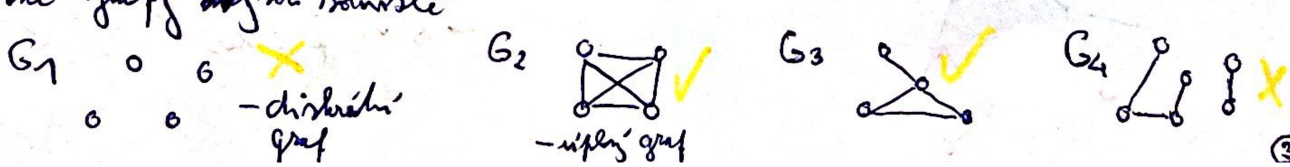
- graf musí být 1 souvislý!
- graf je Eulerovský graf jestliže pro všechny jeho uzly $\forall u \in U$ platí že mají sudý stupeň
- graf obsahuje uzavřený tah který obsahuje všechny hrany grafu a žádnou 2x (jinak tah tohle)



- všechny uzly jsou sudého stupně ⇒ Eulerovský graf
- uzavřený tah obsahující všechny hrany ⇒ Eulerovský graf

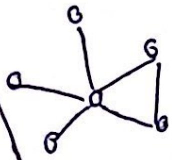
Souvislý graf

- graf je souvislý, pokud mezi jakýmikoliv jeho dvěma uzly existuje sled
- diskrétní grafy nejsou souvislé
- úplné grafy jsou souvislé

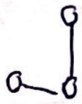


Podgraf

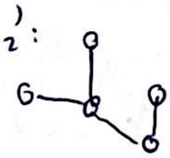
- podgraf grafu $G=(U,H)$ je graf který obsahuje část původního grafu – je to $G'=(U',H')$ kde $U' \subseteq U$ a $H' \subseteq H$
- graf G:



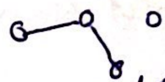
G_1':



G_2':



G_3':



- faktor grafu $G=(U,H)$ je jeho podgraf $G'(U',H')$ kde $U'=U$

⇒ všechny tyto jsou podgrafy ale pouze G_3' je indukovaný a žádný není faktor jelikož žádný neobsahuje všechny původní uzly

Faktor

Indukovaný graf

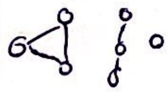
- je podgraf grafu který navíc splňuje že obsahuje-li podgraf nějaké dva uzly původního grafu mezi kterými v původním grafu existovala hrana, tak i v tom podgrafu mezi nimi existuje hrana

$$\forall u,v \in U': \{u,v\} \in H \rightarrow \{u,v\} \in H'$$

Komponenta

- je faktor grafu který je bodově maximální a je souvislý
- původní graf není souvislý a sestává se z několika komponent

G:



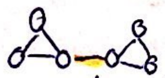
→ jeho komponenty jsou: 1)

2)

3)

Most

- hrana je mostem jestliže jejím odstraněním se zvýší počet komponent grafu



↳ je most

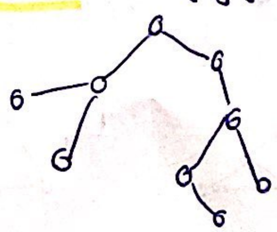
Izomorfismus grafů

G, G' – grafy jsou izomorfní – jeden je izomorfní k druhému jestliže existuje izomorfní zobrazení $f: G \rightarrow G'$

kde platí $$\forall u,v \in U: \{u,v\} \in H \rightarrow \{f(u),f(v)\} \in H'$$
kde $G=(U,H)$ a $G'=(U',H')$

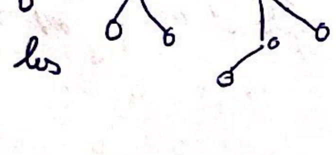
Strom

- souvislý graf který neobsahuje žádnou kružnici (obyčejný souvislý graf bez kružnice)



Les

- obyčejný (nemusí být souvislý) graf který neobsahuje žádnou kružnici



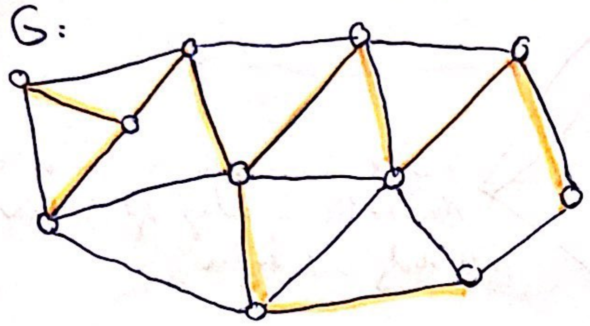
- strom je i les

Kostra grafu

$n-1$ hran
n je počet uzlů

- máme obyčejný graf $G=(U,H)$
- podgraf $G'=(U',H')$ grafu G je kostra grafu G jestliže je to faktor a strom

G:



- každý bod je v — obsažen ⇒ faktor
- není zde žádná kružnice ⇒ strom

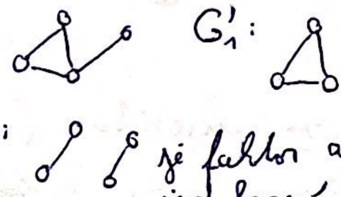
} je to kostra grafu G

- graf je souvislý jestliže má kostru

Faktor – obsahuje všechny původní uzly
- grafu $G=(U,H)$ je jeho podgraf $G'=(U',H')$ kde platí $U'=U$

G: G'_1: není faktor

G'_2: je faktor ale není indukovaný



- platí: obsahuje všechny uzly grafu ke kterým je kostra a neobsahuje kružnice
- nesouvislý graf nemá kostru!

Oceněný graf (ohodnocený)

- je dán obyčejný graf $G=(U,H)$
- je dáno zobrazení $c: H \rightarrow \mathbb{R}$ které každé hraně $h \in H$ přiřazuje reálné číslo $c(h) \in \mathbb{R}$ které udává cenu přechodu hranou – ohodnocení hrany
- trojice $G=(U,H,c)$ je ohodnocený graf

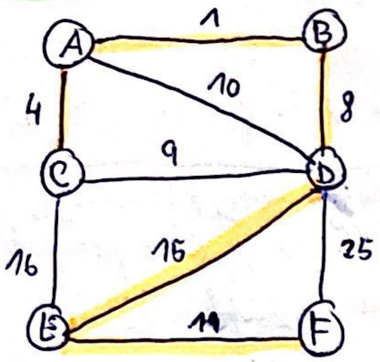
Minimální kostra grafu

- K je kostra grafu $G=(U,H,c)$ který je oceněný (K je faktor a strom)
- jestliže kostra K má nejmenší možnou celkovou cenu, pak je to minimální kostra grafu
- algoritmy pro nalezení:

1) Kruskalův algoritmus
   - vezme všechny hrany grafu a seřadí je dle ceny od nejnižší
   - od nejnižší ceny je prochází a postupně přidává do minimální kostry pokud by přidáním dané hrany nevznikla v kostře kružnice ⇒ už by to nebyl strom a tedy ani kostra
   - končí se chvíli kdy jsou všechny uzly v kostře
   - nevýhodné protože to seřazení na začátku má složitost

2) Primův algoritmus
   - začne libovolným uzlem
   - u uzlu se podívá na jeho hrany a zapamatuje si je
   - ze všech zapamatovaných hran vybere tu s nejnižší cenou a vloží ji do kostry a přejde do toho bodu do kterého vedla a pokračuje zde
   - končí až jsou všechny body v kostře
   - lze i maticově (viz druhá strana)

Kruskalův algoritmus



$c(A,B) = 1$
$c(A,C) = 4$
$c(B,D) = 8$
$c(C,D) = 9$
$c(A,D) = 10$
$c(D,E) = 15$
$c(C,E) = 16$
$c(E,F) = 19$
$c(D,F) = 25$

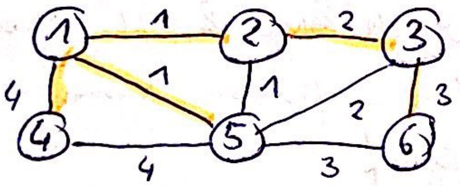
nebrat – vznikla by kružnice na kostře a nebyl by to strom a tedy ani kostra

$\Rightarrow$ min. kostra má cenu: 47

Primův algoritmus (maticově)

- matice C – c_{ij} udává cenu hrany mezi i a j prvkem c_{34} mezi 3. a 4. prvkem
- vymažeme první sloupec a označíme nejmenší prvek v prvním řádku a hvězdičkou označíme první řádek
- ten prvek je nějaké c_{ij} (i je řádek a j je sloupec)
- všechny prvky ve sloupci j kromě označených vymažeme a do známých prvků přidáme j-tý řádek
- ze známých prvků vybereme prvek s nejmenším ohodnocením pokud tedy ještě nějaké neoznačené prvky máme a ten označíme a jdeme sem / když nemáme tak konec

Př.:



$$C_1 = \begin{bmatrix} - & 1 & - & 4 & 1 & - \\ 1 & - & 2 & - & 1 & - \\ - & 2 & - & - & 2 & 3 \\ 4 & - & - & - & 4 & - \\ 1 & 1 & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & 3 & - \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & 1 & - \\ - & - & 2 & - & 1 & - \\ - & 2 & - & - & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 4 & - \\ - & 1 & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & 3 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow C_3 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & 2 & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 4 & - \\ - & - & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & 3 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow C_4 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & - & - \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ * \\ \\ \\ * \\ \\ \end{matrix} \rightarrow C_5 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & \underline{3} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 4 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ \\ * \\ \\ \end{matrix}$$

podtržený byl c_{12} a tak sloupec? vymažeme kromě podtržených a známe i řádek 2 (*)

- podtržené jsou v kostře

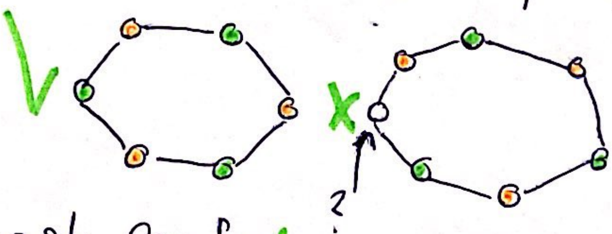
$$\rightarrow C_6 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & \underline{4} & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & \underline{3} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 4 & - & \cancel{3} \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \rightarrow C_7 = \begin{bmatrix} - & \underline{1} & - & \underline{4} & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & \underline{3} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Obarvitelnost grafu

- graf $G=(U,H)$ je obarvený jestliže každému jeho uzlu jde přiřadit barva tak, že žádné dva uzly mezi nimiž vede hrana nemají stejnou barvu
- pokud lze graf obarvit pomocí k barev, tak je k obarvitelný
- nejmenší možné k pro které lze graf obarvit k barvami se jmenuje chromatické číslo grafu G — $X(G)$
  ↳ tzn. je to chromatické číslo k

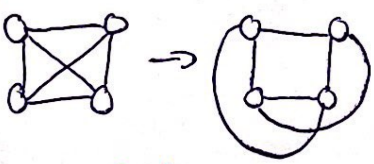
- diskrétní graf D lze obarvit s chromatickým číslem $X(G)=1$

- úplný graf s n uzly má $X(G)=n$ — potřebujeme barev kolik je uzlů
- kružnice je 2-obarvitelná jestliže počet jejích uzlů je sudý

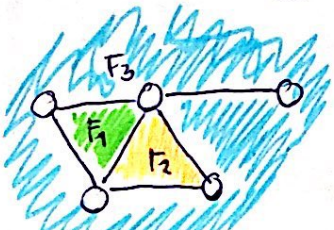


Planárnost grafu

- graf G je planární (rovinný) lze-li jej zakreslit tak že žádné jeho hrany se nebudou křížit
- oblasti vymezené hranami jsou stěny (vždy je 1 vnější) a ty vymezující hrany jsou hranice



- není planární



- je planární a stěny jsou F_1, F_2 a vnější F_3

p – počet stěn
n – počet uzlů
m – počet hran
G je planární souvislý graf

$$\boxed{n - m + p = 2}$$

- každý planární graf je 4 – obarvitelný / viz mapa světa a států

7