8. NORMOVANÉ A UNITÁRNÍ PROSTORY

Lineární (vektorový) prostor

- prvky jsou body nebo lépe vektory
- L - je neprázdná množina prvků (vektorů)
  - je definováno sčítání vektorů +
  - je definováno násobení vektoru skalárem •
  - (L, +) je Abelovská grupa
    - platí: 1) uzavřenost + na L : $\forall a, b \in L : a + b \in L$
      2) komutativita + : $\forall a, b \in L : a + b = b + a$
      3) asociativita $\forall a, b, c \in L : a + (b + c) = (a + b) + c$

$+ : L \times L \to L$

$\bullet : L \times T \to L$

4) existuje neutrální prvek vzhledem k + který je také z L
   - v tomto případě je to nulový vektor (pro dvojrozměrný prostor (0,0), pro trojrozměrný (0,0,0) atd.)
   - značí se O
   - $\forall a \in L : a + O = O + a = a$

5) ke každému prvku z L existuje inverzní prvek z L

$\forall a \in L : a + (-a) = O$

- značí se $-a$

- • je násobení vektoru skalárem kde pro všechny skaláry nějakého jiného tělesa T a pro všechny vektory z L platí že součin toho skaláru a vektoru je zase z L

$\forall \alpha \in T \; \forall x \in L : \alpha x \in L$ — uzavřenost • na L

také platí: 1) asociativita $\forall \alpha, \beta \in T \; \forall x \in L : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$
2) identita $\forall x \in L : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- 1 je neutrální prvek vzhledem k násobení vektoru skalárem a 1 je skalár

- mezi + a • platí distributivní zákony:

$\forall x, y \in L \; \forall \alpha, \beta \in T$:

$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \longrightarrow + \text{ na } L$

$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \longrightarrow + \text{ na } T$

- těleso T obsahuje libovolné skaláry a lineární (vektorový) prostor L obsahuje vektory $\Longrightarrow$ pak říkáme že L je lineárním (vektorovým) prostorem nad číselným tělesem T   T může být třeba $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Lineární závislost prvků

- prvky (vektory) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in L$ jsou lineárně závislé jestliže pro ně existují skaláry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in T$ kde platí

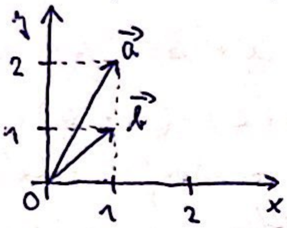
$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = O$$

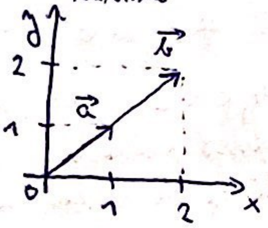
kde alespoň jeden skalár z $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ není 0 → nulový vektor $(0, 0, \dots, 0_n)$

(kdyby byly všechny 0 tak jsou závislé všechny vektory na světě)

- lineárně závislé vektory leží v jedné přímce

$\vec{a} = (1,2)$ $\vec{b} = (1,1)$ nejsou lin. závislé ale $\vec{a} = (1,1)$ $\vec{b} = (2,2)$ jsou lin. závislé





Dimenze prostoru

- číslo n udávající maximální možný počet lineárně nezávislých vektorů prostoru
- v podstatě se ale dá říct že i n-tice prvku udávají dimenzi n

Báze prostoru

- systém n lineárně nezávislých vektorů n-dimenzionálního prostoru

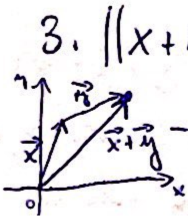
⇒ prostor čtveřic (x_1, x_2, x_3, x_4) je 4-dimenzionální a báze obsahuje vektory $(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0)$

- neexistují skaláry kterými bychom vynásobili vektory báze a po součtu dostali $(0,0,0,0)$

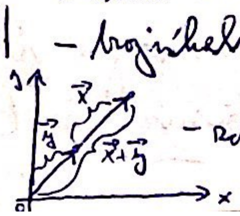
Normovaný lineární (vektorový) prostor

- je takový lineární (vektorový) prostor, kde každý prvek z L značený $\forall a \in L$ má normu značenou $\|a\|$ která v podstatě představuje velikost toho vektoru a (délku)
- je to zobrazení $f: L \to \mathbb{R}_0^+$ nebo také $\forall x \in L: x \to \|x\|$
- pro normu platí pravidla:

1. $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ – x je nulový vektor
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ – je jedno jestli vektor vynásobím skalárem a zjistím normu nebo jestli zjistím normu a pak ji vynásobím skalárem
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – trojúhelníková nerovnost



– zde platí <



– zde platí =

– z uvedených pravidel pro normu vyplývá, že každý lineární (vektorový) prostor je také metrický prostor kde platí

$$\forall x,y \in L: \rho(x,y) = \|x-y\| \longrightarrow$$ pozor! není to to samé jako $\|x\|-\|y\|$ a ani to nedává stejné výsledky

Norma

– norma může být téměř cokoliv, třeba L obsahuje zboží a norma je cena zboží atd.

– v reálném lineárním (vektorovém) n-dimenzionálním prostoru můžeme mít následující normy:
↳ prostor L nad tělesem T kde $T=\mathbb{R}$

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- $\|X\|_0 = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$ – : $\vec{a}=(3,5)$ $\|\vec{a}\|=5$; $\vec{a}=(3,-5)$ $\|\vec{a}\|=5$
- $\|X\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ – lineární norma : $\vec{a}=(3,5)$ $\|\vec{a}\|=8$; $\vec{a}=(-3,5)$ $\|\vec{a}\|=8$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ – Eukleidovská norma, kvadratická norma : $\vec{a}=(3,5)$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

– je to metrický prostor, takže zde musí platit $\rho(x,y)$ a to platí následovně: $\Rightarrow$ EUKLEIDOVSKÁ VZDÁLENOST

$$\rho(\vec{X},\vec{Y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \leftarrow \text{tedy } \rho(X,Y)=\|X-Y\|$$

$\vec{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$
$\vec{Y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

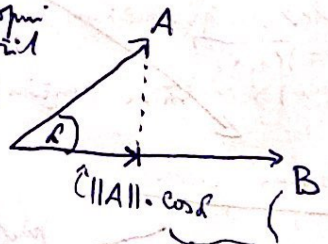
Př.: $x=(3,6)$, $y=(7,1)$ $\quad \rho(x,y)=\sqrt{(3-7)^2+(6-1)^2} = \sqrt{41}$

Skalární součin vektorů

! – normu je často dobré definovat pomocí skalárního součinu – třeba v unitárním $\sqrt{(x,x)}$ (skalární součin)

– je zobrazení $L\times L \to \mathbb{R}$ pokud $\mathbb{R}$ je těleso T nad kterým je dán vektorový prostor L

– např. v Eukleidovském prostoru je dán: (dvourozměrný prostor nebo dvojrozměrný ale jsme schopni jej rozšířit i na více dimenzí)



$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$
$B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ > jsou vektory

→ přilehlá ku přeponě

$$A\cdot B = \|A\|\cdot\|B\|\cdot\cos\alpha = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \dots + a_n\cdot b_n$$

skalární součin $(A,B)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k$

↳ α je úhel který A a B svírají

Př.: $a = (1,2,3)$ $b = (4,5,6)$

$$a \cdot b = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Př.: $a = (1,2)$ $b = (3,4)$

$$a \cdot b = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11$$

→ skalární součin se používá jako norma v unitárních prostorů a má podobu $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ kde (x,x) je skalární součin vektoru se sebou samým

- pokud má lineární (vektorový) prostor dánu nějakou normu, (je tedy i normovaný) která je shodná s normou danou skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{(x,x)}$), pak je to Unitární prostor
- pokud je unitární prostor zároveň úplným metrickým prostorem, pak je to Hilbertův prostor (všechny Cauchyho posloupnosti k něčemu konvergují)
- normovaný lineární (vektorový) prostor, který je zároveň úplným metrickým prostorem je i Banachovým prostorem

SCHÉMA:

lineární (vektorový) prostor L (vektory) nad T ($\mathbb{R}$ tělesa – skaláry)

$+$ – Abelovská grupa (sčítání vektorů) $+: L \times L \to L$

$\cdot$ – asociativita a identita (násobení vektoru skalárem) $\cdot: L \times T \to L$

→ platí distributivita $+$ a $\cdot$ na L i T

↓ + **Norma** $L \to \mathbb{R}_0^+$, $x \to \|x\|$

$\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|k \cdot x\| = |k| \cdot \|x\|$

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

normovaný lineární (vektorový) prostor

– je to i metrický prostor položíme $\rho(x,y) = \|x - y\|$

– např.: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

– normy jsou třeba: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ } n je dimenze prostoru

norma je dána skalárním součinem $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ kde (x,x) je skalární součin → Unitární prostor

+ metrický prostor je úplný (všechny Cauchyovské posloupnosti v něm konvergují k nějakým x) → Banachův prostor

Unitární prostor → metrický prostor je úplný → Hilbertův prostor

Normované prostory konečné dimenze

- každý normovaný prostor konečné dimenze je úplným metrickým prostorem
- je to prostor který má normu a zároveň má konečnou dimenzi – třeba 2, 10, 100 atd.
- je izomorfní s Euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$ kde n je právě ta dimenze kterou známe
- značí se $X(n)$ kde n je ta dimenze
- e_1, e_2 až e_n (dle n té dimenze) jsou báze toho vektorového prostoru
- každý vektor x toho konečného $X(n)$ lze vyjádřit jako

$$x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$$ kde α jsou skaláry

Př.: $a = (1,2,3)$ lze vyjádřit jako

$$a = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) + 3 \cdot (0,0,1) = (1,2,3)$$

a tedy souhrnně

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_k$$ (α – skaláry) kde e_k jsou dimenze

a ten vektor je tedy

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

Euklidovský prostor

- klasický náš prostor s kartézským souřadným systémem
- přirozeně 3 a 2 rozměrný (dimenzionální) ale lze i více
- značí se E_n kde n je dimenze – $E_2, E_3, \dots$
- $\rho(x,y)$ je právě ta kvadratická $\Rightarrow$ euklidovská

vektory $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

- Euklidovská norma zde platí

$$\forall x \in L: \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$ kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$

Př.: $x = (3,5)$

$$\|x\| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

- platí zde ale i norma daná skalárním součinem $\Rightarrow$ je to unitární prostor

$$\forall x \in L: \|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

$x = (3,5)$

$$\|x\| = \sqrt{\underbrace{(x,x)}_{x \cdot x}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 5 \cdot 5} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

Unitární prostory

- prostor ve kterém je dán skalární součin
- norma je dána skalárním součinem

$$\forall x \in L : \|x\| = \sqrt{(x,x)}$$ kde (x,x) je skalární součin prvku (vektoru) x sám se sebou

$$(x,x) = X \cdot X = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots x_n \cdot x_n$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$ kde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

a tedy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$

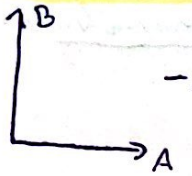
- pravidla skalárního součinu:
  1) $(x,y) = (y,x)$
  2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
  3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ to samé i pro $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$
  4) $(x, \cancel{y}) \geq 0 \wedge \left((x, \cancel{y}) = 0 \Leftrightarrow x = 0\right)$
- je to samozřejmě lineární (vektorový) prostor
- unitární prostor je takový lineární prostor, ve kterém je definován skalární součin
- v unitárním prostoru je norma daná jako $\sqrt{(x,x)}$ nebo tomu ekvivalentní norma

$R^2_{\cancel{x}}, R^3_{\cancel{x}}, R^4_{\cancel{4}}$ atd jsou unitární prostory

$R^n_{\cancel{xx}}$ je unitární prostor kde n značí dimenzi a $\mathbb{R}$ reálná čísla

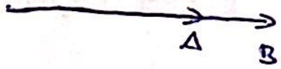
Ortogonální vektory

- dva vektory jsou ortogonální jestliže jsou na sebe navzájem kolmé a tedy jejich úhel je $\frac{\pi}{2}$ nebo také 90°



- jsou ortogonální

nejsou



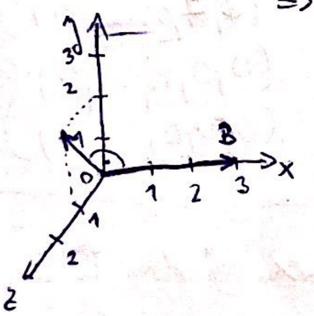
nejsou

- pro dva ortogonální vektory a a b tedy platí, že jejich skalární součin je 0 pokud $a \neq b$

$\Rightarrow$ tedy $(a,b) = 0$ tedy $a_0 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n = 0$

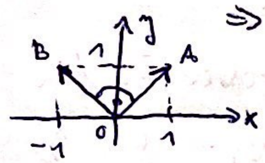
Př.: $A = (0,1)$
$B = (1,0)$ $(A,B) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ jsou ortogonální

Př.: $A = (0,2,1)$
$B = (3,0,0)$ $(A,B) = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ jsou ortogonální



Př.: $A = (1,1)$
$B = (1,0)$ $(A,B) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$
$\Rightarrow$ nejsou ortogonální

Př.: $A = (1,1)$
$B = (-1,1)$ $(A,B) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow$ jsou ortogonální



- soustava nenulových vektorů $\{x_n\}$ dimenze n se nazývá ortogonální jestliže jsou každé dva vektory této soustavy ortogonální – navzájem kolmé
  $\{(3,0,0),(0,1,0),(0,0,10)\}$ – je ortogonální soustava
- jestliže je ortogonální soustava úplná pak je to ortogonální báze
  $\{(3,0,0),(0,1,0),(0,0,10)\}$ je ortogonální báze
  $\{(3,0,0),(0,1,0)\}$ není ortogonální báze – není úplná

v ortonormální a ortogonální bázi není žádný vektor lineární kombinací jiných – tedy $e_1 \neq e_2 \cdot 5 + e_3 \cdot 2$ třeba

Ortonormální vektory

- rozšíření ortogonálních vektorů – jsou kolmé a zároveň pokud se rovnají a a b tak jejich $(a,b) = 1$
- tedy $(a,b) \begin{cases} 0 & \text{jestliže } a \neq b \\ 1 & \text{jestliže } a = b \end{cases}$ – tedy jsou ortogonální ale vždy jsou délky 1
  – $(0,0,1)$ a $(1,0,0)$ jsou ortonormální
- ortonormální báze je soustava vektorů která je úplná
  $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ je ortonormální báze ale $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ není

Př.: máme prostor $\mathbb{R}^n$ který je lineárním (vektorovým) prostorem s operacemi
$+$ sčítání vektorů a $\cdot$ násobení vektoru skalárem

– každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lze tedy vyjádřit jako

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_k$$ kde e_k jsou prvky ortonormální báze

– je zde definován skalární součin vektorů

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

– je to tedy unitární prostor a báze je zde definována jako

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$ nebo tedy $\sqrt{(x,x)}$ což je to samé

– ta ortonormální báze je tedy

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0), \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0), \\ e_3 &= (0,0,1,\dots,0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,1) \end{aligned}\right\}$$

skalární ~~součet~~ součin každých dvou prvků ortonormální báze je 0 pokud se nerovnají a 1 pokud se rovnají

POZN.: – takhle to mohla být třeba ortogonální báze tak to je:

$$\left.\begin{aligned} &(4,0,0,\dots,0) \\ &(0,7,0,\dots,0) \\ &(0,0,11,\dots,0) \\ &(0,0,0,\dots,1) \end{aligned}\right\} \text{ortogonální báze}$$

Fourierova řada

– $e_1, e_2, \dots e_n$ je ortonormální báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lze tedy vyjádřit (viz výše ale tady místo α_k mám c_k)

! $$x = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k$$ – takhle to mám uvedené i u normovaných lineárních prostorů s konečnou dimenzí

takže máme bázi $\{(1,0),(0,1)\}$ a vektor ~~báze~~ $x = (3,4)$ lze tedy vyjádřit jako

$$x = 3\cdot(1,0) + 4\cdot(0,1) = (3,0) + (0,4) = (3,4)$$

a tedy každý koeficient c_k lze vyjádřit jako $c_k = (x, e_k)$ ↳ skalární součin vektorů

$$c_2 = ((3,4),(0,1)) = 3\cdot 0 + 4\cdot 1 = 4$$

– c_k jsou tedy Fourierovy koeficienty prvku $x \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – HA! to je analogie k GF kde ty vygenerované hodnoty nebo souřadnice nebo vektory jsou taky koeficienty toho daného prvku vzhledem k bázi toho vektorového prostoru

– zde tedy $x = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k$ je fourierova řada vektoru/prvku x vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

– obecně každý prvek prostoru lze vyjádřit jako Fourierovu řadu

– je-li báze $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ tak vektor $x=(7,2,1)$ lze vyjádřit fourierovou řadou jako

koeficienty jsou 7,2,1

$$x=\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k \quad \text{tedy} \quad x = 7\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1)=(7,2,1)$$

– je-li báze $\{1, x, x^2\}$ pak polynom $p(x)=2x^2+x-1$ lze vyjádřit fourierovou řadou jako $p(x) = -1\cdot 1+1\cdot x+2\cdot x^2 = 2x^2+x-1$ kde koeficienty jsou $-1,1,2$

$\Longrightarrow$ analogie ke GF

Částečný součet fourierovy řady

– máme nějaký vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kde třeba $\mathbb{R}^5$ tedy dimenze je 5 a ten vektor je třeba $(1,3,4,0,1)$

– a ten vektor je dán Fourierovou řadou následovně

$$x = \underbrace{1}_{c_1}\cdot\underbrace{(1,0,0,0,0)}_{e_1}+\underbrace{3}_{c_2}\cdot\underbrace{(0,1,0,0,0)}_{e_2}+\underbrace{4}_{c_3}\cdot\underbrace{(0,0,1,0,0)}_{e_3}+\underbrace{0}_{c_4}\cdot\underbrace{(0,0,0,1,0)}_{e_4}+\underbrace{1}_{c_5}\cdot\underbrace{(0,0,0,0,1)}_{e_5}$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_5$ jsou koeficienty té fourierovy řady a $e_1, e_2, \dots, e_5$ jsou báze toho vektorového prostoru (no nejsou to báze ale tyto vektory tu bázi tvoří – ortonormální bázi)

– a ten částečný součet je třeba

$$1\cdot(1,0,0,0,0)+3\cdot(0,1,0,0,0)+4\cdot(0,0,1,0,0)$$

– obecně je to

$$c_1\cdot(1,0,0,0,0)+c_2\cdot(0,1,0,0,0)+c_3\cdot(0,0,1,0,0)$$

a ještě víc obecně je to

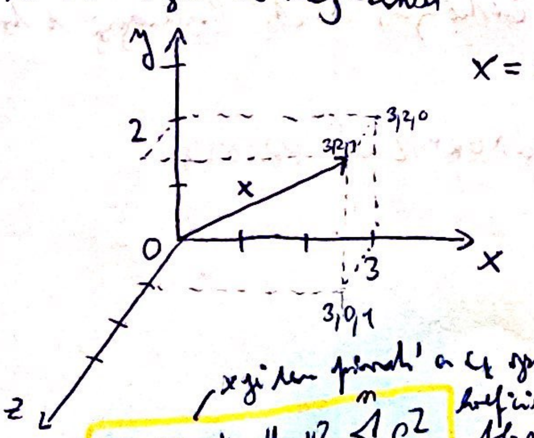
– m je menší než dimenze toho původního vektoru

$$S(m) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot e_k$$ kde m je dimenze toho částečného součtu

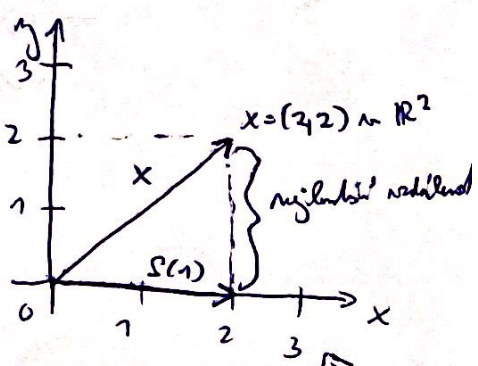
$\Longrightarrow$ částečný součet je taky vektor

– a úkolem je najít takové c_k aby vzdálenost toho částečného součtu od původního vektoru byla co nejmenší

$x=(3,2,1)$



– víme že nejkratší vzdálenost je kolmice z toho vektoru na osu toho samého a tak můžeme zjistit c koeficienty pro ten $S(1)$ aby ten $S(1)$ byl přesně vektor jako tam ten obrázek vzdálenost pak je



x je ten původní a c_k jsou koeficienty toho součtu

$$\boxed{\|x-S(m)\| = \|x\|^2-\sum_{k=1}^{m} c_k^2}$$

Parsevalova rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$$

– norma toho vektoru X na druhou je daná součtem druhých mocnin koeficientů té fourierovy řady pro to X

– známe ty částečné součty Fourierovy řady pro každý vektor $X \in \mathbb{R}^3$

– pro $X \in \mathbb{R}^5$ to jsou $S(4), S(3), S(2)$ a $S(1)$

– pro každý vektor $X \in \mathbb{R}^N$ je daná fourierova řada

$$X = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot e_k$$

– pro každý jeho částečný součet té jeho fourierovy řady je daná fourierova řada

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k \quad \text{kde } n < N$$

jestliže
– ta posloupnost těch částečných součtů tedy $(S(1), S(2), S(3), \ldots, S(n))$ konvergují k tomu vektoru X pak je ten systém/prostor

UZAVŘENÝ ORTONORMÁLNÍ PROSTOR

– má danou ortonormální bázi
– každý jeho prvek lze zapsat jako fourierovu řadu s koeficienty c_k
– nalezneme koeficienty pro každý částečný součet té fourierovy řady takové aby vzdálenost původního vektoru (tedy celé té fourierovy řady) byla nejmenší od toho daného konkrétního vektoru pro ten jeden částečný součet
– jestliže posloupnost těchto částečných součtů konverguje k tomu vektoru X

$\Rightarrow$ UZAVŘENÝ ORTONORMÁLNÍ PROSTOR

Ortogonální prostor

- je to prostor který má ortogonální bázi
- tedy ta báze je úplná soustava ortogonálních vektorů
- každý vektor té báze kolmý k ostatním

$$e_1 = (4,0,0) \quad e_2 = (0,2,0) \quad e_3 = (0,0,9)$$

} skalární součin libovolných prvků báze je 0 pokud se nerovnají

Ortonormální prostor

- je to prostor (lineární / vektorový) který má ortonormální bázi
- ortonormální báze je ortogonální báze která je normovaná a tedy jsou její vektory kolmé a zároveň mají hodnoty 0 nebo 1

$$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$$

} skalární součin libovolných prvků báze je 0 pokud se nerovnají a 1 pokud ano

Uzavřený ortonormální prostor

- je to ortonormální prostor který má ortonormální bázi
- víme, že každý vektor lze zapsat jako

$$x = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot e_k$$

a platí zde Parsevalova rovnost (aby to byl uzavřený ortonormální prostor)

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

– tedy norma toho vektoru na druhou se rovná součtu čísla Fourierových koeficientů na druhou

<u>Př.:</u> $x = (\overset{x_0}{5}, \overset{x_1}{7}, \overset{x_2}{1})$

$e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$ – ortonormální báze

$$x = \underset{c_0}{5} \cdot \underset{e_0}{(1,0,0)} + \underset{c_1}{7} \cdot \underset{e_1}{(0,1,0)} + \underset{c_2}{1} \cdot \underset{e_2}{(0,0,1)}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

$$\|x\|^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=0}^{2} x_k^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2}\right)^2 = 75$$

či

$$\sum_{k=0} c_k^2 = 5^2 + 7^2 + 1^2 = 75$$

– dále platí že v uzavřeném ortonormálním prostoru posloupnost daná částečnými součty Fourierovy řady původního vektoru konvergují k tomu původnímu vektoru

$$X = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot e_k \quad \text{– původní vektor}$$

– jeho částečné součty jsou

$$S(m) = \sum_{k=0}^{m} c_k e_k \quad \text{kde } m < n$$

a tímto je dána i posloupnost jeho částečných součtů a tato posloupnost konverguje k X

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k = X \quad \text{v nekonečnu}$$

– respektive rozdílnosti mezi X a prvky posloupnosti konvergují k 0

– ty rozdílnosti jsou

$$\|f - S(n)\| = \|f\| - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S(n)\| = 0$$