7. Metrické prostory (příklady, konvergence posloupností, spojitá a izometrická zobrazení, úplnost, Banachova věta o pevném bodu)

Metrický prostor

***Metrickým prostorem** $\mathcal{X}=(X,\rho)$ budeme nazývat libovolnou množinu X* prvků, které nazýváme body, pokud na množině X je dána tzv. **vzdálenost**, což je jakákoliv jednoznačná nezáporná reálná funkce $\rho(x,y)$, která je definována pro každou dvojici $x,y \in X$ a která splňuje tyto tři podmínky:

1. $\rho(x,y) = 0$, když a jen když $x = y$;
2. $\forall x,y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x)$ (symetrie);
3. $\forall x,y,z \in X : \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Příklady metrických prostorů:

- **prostor izolovaných bodů**: $\rho(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ když } x = y \\ 1 \text{ když } x \neq y \end{cases}$
- **množina D^1**: $\rho(x,y) = |x,y|$ je např. číselná osa oboru hodnot jako $\mathbb{Z}$ či $\mathbb{R}$;
- **množina D^n uspořádaných *n*-tic**: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$ (Euklidovská metrika).

Konvergence posloupností, hromadné body

Otevřenou koulí $S(x_0,r)$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ se středem x_0 a poloměrem r budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, která vyhovuje podmínce:

$$\rho\,(x,x_0) < r$$

Uzavřenou koulí S x_0,r v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, která vyhovuje podmínce:

$$\rho(x,x_0) \leq r$$

Otevřenou kouli poloměru ε se středem x_0 budeme nazývat ***ε*-okolím bodu** x_0 a značit $O_\varepsilon(x_0)$.

Bod x nazýváme **bodem uzávěru množiny** M, jestliže jeho libovolné okolí obsahuje alespoň jeden bod z M. Množina všech bodů uzávěru množiny M se označuje M a nazývá **uzávěrem** této množiny.

Protože každý bod, který náleží M, je bodem uzávěru množiny M (tento bod totiž leží v každém svém okolí), platí, že $M \subseteq M$. Množinu M, pro kterou platí $M = M$, nazýváme **uzavřenou**.

Bod x se nazývá **hromadným bodem množiny** M, jestliže jeho libovolné okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z M.

Nechť $x_1, x_2, \ldots$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru $\mathcal{X}$. Říkáme, že tato **posloupnost konverguje k bodu** $x \in \mathcal{X}$, jestliže každé ε-okolí $O_\varepsilon(x)$ bodu x obsahuje všechny body x_n počínaje od některého indexu $N(\varepsilon)$, tj. jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje všechny body x_n, kde $n \geq N(\varepsilon)$. Bod x se nazývá limita posloupnosti $\{x_n\}$.

Předchozí definici lze vyslovit také tak, že posloupnost $\{x_n\}$, konverguje k bodu x, jestliže:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$$

Spojité zobrazení

Nechť $\mathcal{X}$ = (X; ρ) a Υ = (Y; ρ^*) jsou dva metrické prostory.
Zobrazení f : $\mathcal{X} \to \Upsilon$ prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru Υ se nazývá **spojité** v bodě $x_0 \in X$,
jestliže k libovolnému ε > 0 lze najít takové δ > 0, že:

$$\varrho^*(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Pro všechny body x takové, že

$$\varrho(x, x_0) < \delta.$$

Jinými slovy, zobrazení f : $\mathcal{X} \to \Upsilon$ je spojité v bodě x_0, jestliže k libovolnému okolí $O_\varepsilon(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ lze najít takové okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0, že jeho obraz leží uvnitř $O_\varepsilon(f(x_0))$.

Zobrazení f : $\mathcal{X} \to \Upsilon$ se nazývá spojité, jestliže je **spojité** ve všech bodech prostoru $\mathcal{X}$.

Izometrické zobrazení

Říkáme, že vzájemně jednoznačné zobrazení $y = f(x)$ metrického prostoru $\mathcal{X}$ = (X; ρ) na metrický prostor Υ = (Y; ρ^*) je izometrické, jestliže

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho^*(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a Υ, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají izometrickými mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a Υ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. V dalším proto budeme považovat izometrické prostory za totožné.

Úplné metrické prostory

Číselná osa je nejjednodušším příkladem tak zvaných úplných metrických prostorů, jejichž základní vlastnosti probereme v této kapitole.

Posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat **cauchyovskou** (nebo **fundamentální**), jestliže splňuje Cauchyovo kritérium, tj. jestliže ke každému ε > 0 existuje takové kladné celé číslo N(ε), že

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.
Skutečně, jestliže $\{x_n\}$ konverguje k x (tj. $\rho(x_n; x) \to 0$), potom ke každému ε > 0 lze najít takové

celé kladné $N(\varepsilon)$, že $\rho(x_n; x) < \varepsilon/2$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$.
Potom

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon).$$

Naopak denujeme:
Jestliže v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ libovolná cauchyovská posloupnost konverguje (tj. existuje $x \in \mathcal{X}$ tak, že $\rho(x_n; x) \to 0$), potom nazýváme tento prostor **úplný**.
Příklad:

- Položíme-li pro prvky libovolné množiny

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{v případě } x = y, \\ 1 & \text{v případě } x \neq y, \end{cases}$$

dostaneme metrický prostor. Lze jej nazvat prostorem izolovaných bodů. V tomto prostoru jsou cauchyovské pouze stacionární posloupnosti posloupnosti, tj. takové, v nichž se od určitého indexu stále opakuje tentýž bod. Každá taková posloupnost ovšem konverguje, tj. tento prostor je úplný.

- Úplnost prostoru R^1, tj. úplnost množiny všech reálných čísel, je známa z matematické analýzy.
- Úplnost euklidovského prostoru R^n plyne snadno z úplnosti prostoru R^1:

Nechť $\{x^{(p)}_n\}$ je cauchyovská posloupnost bodů

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}) \in R^n, \quad p = 1, 2, \ldots$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\sum_{k-1}^{n} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$$

pro všechna přirozená čísla *p; q* větší než *N(ε). Odtud dostáváme pro k-té souřadnice*
(k = 1; 2; ... ; n) tyto nerovnosti:

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon,$$

platné pro všechna přirozená čísla p; q > $N(\varepsilon)$; je tedy $\{x^{(p)}_n\}$ cauchyovská posloupnost reálných čísel. Položme

$$x_k = \lim_{p \to \infty} x_k^{(p)}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Potom zřejmě je

$$\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = x.$$

Tím je úplnost prostoru R^n dokázána.

- Úplnost prostoru R^n_0 lze ukázat obdobně.

Banachova věta o pevném bodu

Řadu problémů souvisejících s existencí a jednoznačností řešení rovnic různého typu lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení odpovídajícího metrického prostoru do tohoto prostoru. Mezi různými kritérii existence a jednoznačnosti pevného bodu zobrazení tohoto druhu můžeme za jedno z nejjednodušších a zároveň nejdůležitějších kritérií považovat tzv. **Banachův princip pevného bodu** (stručně BPPB); někdy též nazývaný **princip kontraktivních zobrazení**.

Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Zobrazení *A* prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá **kontraktivní** (nebo **kontrakce**), existuje-li takové číslo $\alpha < 1$, že pro libovolné dva body $\forall x, y \in \mathcal{X}$ platí nerovnost:

$$\rho(Ax,Ay) \leq \alpha\rho(x,y)$$

Bod x se nazývá **pevný bod zobrazení** A, jestliže $Ax = x$. Jinak řečeno, pevné body jsou řešení rovnice $Ax = x$.

Banachova věta o pevném bodu (BPPB) říká, že každé kontraktivní zobrazení definované v úplném metrickém prostoru $\mathcal{X}$ má právě jeden pevný bod.

BPPB lze použít k důkazu vět o existenci a jednoznačnosti řěšení pro rovnice různých typů. Kromě důkazu existence a jednoznačnosti řešení rovnice $Ax = x$ dává BPPB také praktickou metodu přibližného výpočtu tohoto řešení (nazývanou **metoda postupných aproximací**).