2010 biele

① Uvažujme jazyk L s dvoma konštantami K, L, jedným unárnym funkčným symbolom f a jedným binárnym predikátovým symbolom p. Nech R je realizácia jazyka L, kde univerzom je množina všetkých bodov guľovej plochy k so stredom O. Symbol f sa realizuje v bode x ako bod jemu protiľahlý. Realizácia konštánt sú 2 vzájomne protiľahlé body $K_R = S$ (severný pól) a $L_R = J$ (južný pól). Realizácia symbolu p na bodoch x, y je $p_R(x,y) \Leftrightarrow x, y$ ležia na rovnakom poludníku.

Uvážme nasledujúce formule:

(1) $\varphi \equiv f(K) = L$

(2) $\chi \equiv p(x, f(x))$

(3) $\psi \equiv p(f(f(x)), x) \Leftrightarrow p(x,x)$

Určite tie z teórií: $A = \{\chi, \psi\}$, $B = \{\varphi, \neg\chi\}$, $C = \{\varphi, \psi\}$, $D = \{\neg\chi, \psi\}$, ktoré sú R modelom.

Riešenie

1, φ -> platí vždy -> vždy je obraz severného pólu južný pól

2, χ -> neplatí vždy (len pre severný a južný pól)

3, ψ -> $f(f(x))$ dá znova x, čiže ~~dk~~ x a x leží na rovnakom poludníku vždy

=> odpoveď je $C = \{\varphi, \psi\}$

(2.) Napíšte dôkaz vety $\vdash \varphi \to \exists x\, \varphi$. V dôkaze je možné užiť tautologické dôsledky predchádzajúcich formúl. Začnite vhodným dosadením do axiómu substitúcie

riešenie

$1,\ \vdash \forall x \neg\varphi \to \neg\varphi$

$2,\ \vdash (\forall x \neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \exists x\, \varphi)$ Axióm 3

$3,\ \vdash \varphi \to \exists x\, \varphi$ MP

(3.) Buď $G = (\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$ Grupa kde $\circ$ je operácia skladania zobrazenia. pre $i = 1, 2 .. 6$ definovaná takto: $f_1(x) = x$ $f_2(x) = \frac{1}{x}$ $f_3(x) = 1-x$

$f_4(x) = \frac{x}{x-1}$ $f_5(x) = \frac{x-1}{x}$ $f_6(x) = \frac{1}{1-x}$

Určite podgrupu H grupy G generovanú prvkami f_2 a f_5

riešenie

$$f_2(f_5(x)) = f_2\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f_4 \in H$$

$$f_5(f_2(x)) = f_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{1} = \frac{1-x}{\cancel{x}} \Rightarrow f_3 \in H$$

$$f_2(f_2(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow f_1 \in H$$

$$f_2(f_4(x)) = f_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow f_5 \in H$$

$$f_2(f_3(x)) = f_2(1-x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f_6 \in H$$

$$\Rightarrow H = (\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ) = G$$

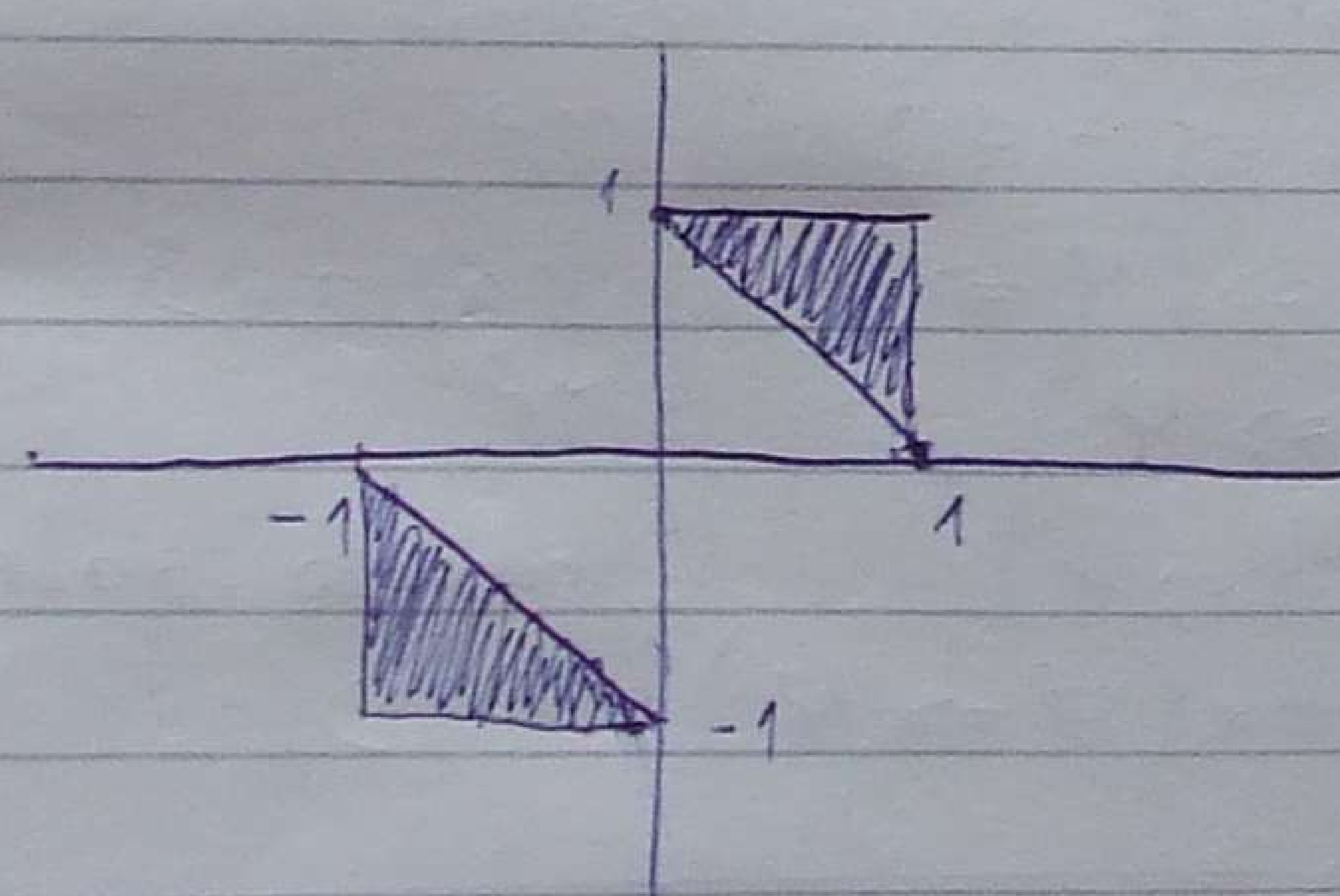
(4.) Uvažujme zobrazenie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definované predpisom $f(a+bi) = a+b$. Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$. Rozhodnite, či f je homomorfizmus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. V kladnom prípade určite jadro homomorfizmu f a jemu odpovedajúci ideál ~~obrazu~~ okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$$f(a+bi+c+di) = \cancel{a+b+c+d}\ a+b+c+d$$
$$f(a+bi) + f(c+di) = a+b+c+d$$

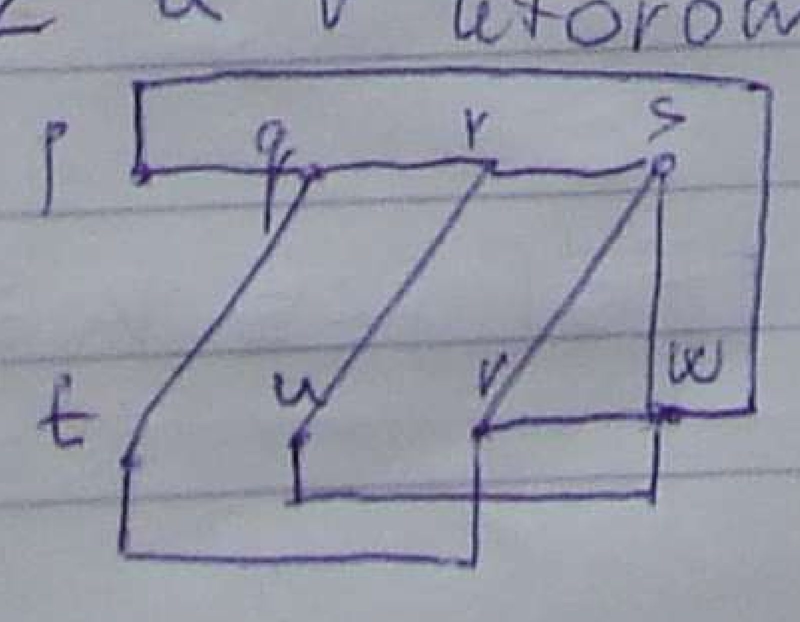
$$f((a+bi)(c+di)) = \cancel{\ldots}\ f(ac+cbi+adi-bd)$$
$$= ac - bd + cb + ad$$
$$f(a+bi) \cdot f(c+di) = ac + bd + cb + ad$$

$\Rightarrow$ nie je homomorfizmus

(5.) Vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^2$ uvažujme normy $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ a $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. Znázornite graficky množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y \geq 0,\ \|(x,y)\|_\infty \leq 1 \leq \|(x,y)\|_1\}$



(6.) Uvažujme graf $K = (V, E)$, kde $V = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ a $E = \{\{p,q\}, \{q,t\}, \{q,r\}, \{r,u\}, \{r,s\}, \{s,u\}, \{s,w\}\}$. Nájdite minimálny (vzhľadom k počtu hrán) graf G neobsahujúci most, ktorého kostrou je graf K a v ktorom platí $st(u) < st(v) < st(w)$



Mat2009 riadny skup 01

① Napíšte dôkaz formule $\vdash \forall x \neg \varphi \Rightarrow \forall x(\varphi \Rightarrow \varphi)$ Návod
a) vezmite $\forall x \neg \varphi$ ako predpoklad, potom použite axiom substitúcie (vo formuli $\neg \varphi$ substituujte x za x) a pravidlo odlúčenia
b) Vezmite axióm A1 výrokovej logiky v tvare $\neg \varphi \Rightarrow (\neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi)$ a aplikujte naňho a na formulu získanú v bode a) pravidlo odlúčenia.
c) Vezmite Axióm A3 výrokovej logiky a aplikujte naňho a na formulu získanú v bode b) pravidlo odlúčenia, na výslednú formulu aplikujte pravidlo zovšeobecnenia
d) Posledná formula je dokázateľná z formule, ktorá bola ako predpoklad. Teraz použite vetu o dedukcii.

a) $\forall x \neg \varphi \vdash \forall x \neg \varphi$
$\vdash \forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi$ // subst.
$\forall x \neg \varphi \vdash \neg \varphi$ // MP
b) $\vdash \neg \varphi \Rightarrow (\neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi)$ // axiom 1
$\forall x \neg \varphi \vdash (\neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi)$ // MP
c) $\vdash (\neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ // axiom 3
$\forall x \neg \varphi \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi)$ // MP
$\forall x \neg \varphi \vdash \forall x(\varphi \Rightarrow \varphi)$ // pravidlo zovšeobecnenia
d) $\vdash \forall x \neg \varphi \Rightarrow \forall x(\varphi \Rightarrow \varphi)$ // VD

---

② Buď φ nasledujúca formula: $\exists x \forall y (y > x \Rightarrow \exists z (y > z \wedge z > x))$. Bez použitia spojky $\neg$ napíšte negáciu formule φ. Určite, či je pravdivá formula φ, alebo jej negácia, ak ~~množina~~ univerzom je množ. N

negácia: $\forall x \exists y (y > x \wedge \forall z (y \leq z \vee z \leq x))$
Negácia je nepravdivá.

(3) Rozhodnite, či množina $\left\{ \begin{pmatrix} a & 4b \\ 2c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in Z \right\}$ je podokruh okruhu $Mat_2(Z)$.

riešenie

a) $(R, +)$ musí byť abelovská grupa

$(M, +)$ je grupoid?

$$\begin{pmatrix} a & 4b \\ 2c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 4b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 4.(2b) \\ 2.(2c) & 2d \end{pmatrix}$$

=> zachováva => je grupoid

$(M, +)$ je pologrupa?

=> maticové + je asociatívne => je pologrupa

$(M, +)$ je monoid?

=> matica so samými 0 je neutrálny prvok

=> je monoid

$(M, +)$ je grupa?

=> inverzné prvky - opačné znamienka => je grupa

$(M, +)$ je abelovská grupa?

-> maticové sčítanie je komutatívne

b) $(M, *)$ je pologrupa

$(M, *)$ je grupoid?

$$\begin{pmatrix} a & 4b \\ 2c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 4b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+8bc & 4b^2 + 4bd \\ 2c^2 + 2cd & 4bd + d^2 \end{pmatrix}$$

=> je grupoid

$(M, *)$ je pologrupa?

-> maticové $*$ je asociatívne

c) maticové násobenie je distributívne nad sčítaním

=> je podokruhom!

(4.) Na multiplikatívnej grupe $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ všetkých nenulových komplexných čísel nech sú 2 prvky v relácii $\sim$ práve vtedy, ak majú rovnaký argument. Dokážte, že relácia $\sim$ je kongruencia na uvedenej grupe a graficky znázornite triedy kongruencie a tiež normálnu podgrupu určenú kongruenciou $\sim$

a) je ekvivalencia?

reflexívna?

$a \sim a$? → je má rovnaký argument

Symetrická?

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$? → platí, ak a má rovnaký argument ako b, tak to platí aj naopak.

tranzitívna?

$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ → platí

⇒ je ekvivalencia

b) kongruencia?

$a \sim b \wedge c \sim d \Rightarrow a.c \sim b.d$

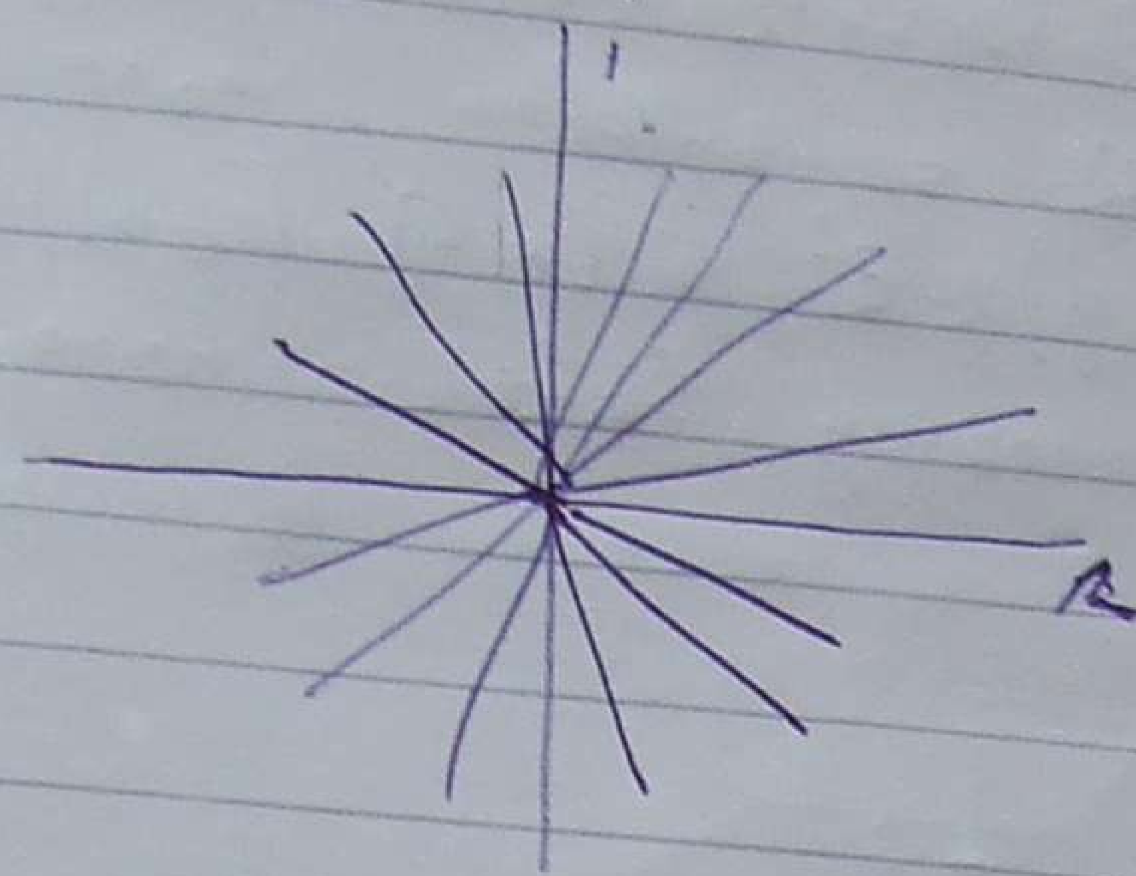
$(ai+b) \sim (ci+d) \wedge (ei+f) \sim (gi+h) \Rightarrow (ai+b)(ei+f) \sim (ci+d)(gi+h)$

$a\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) \sim b(\cos\varphi + i\sin\varphi) \wedge c(\cos\psi + i\sin\psi) \sim$
$d(\cos\psi + i\sin\psi) \Rightarrow ac(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \sim$
$\underbrace{bd}_{\text{veľkosť}}\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)}_{\text{argument}}$

majú rovnaký argument

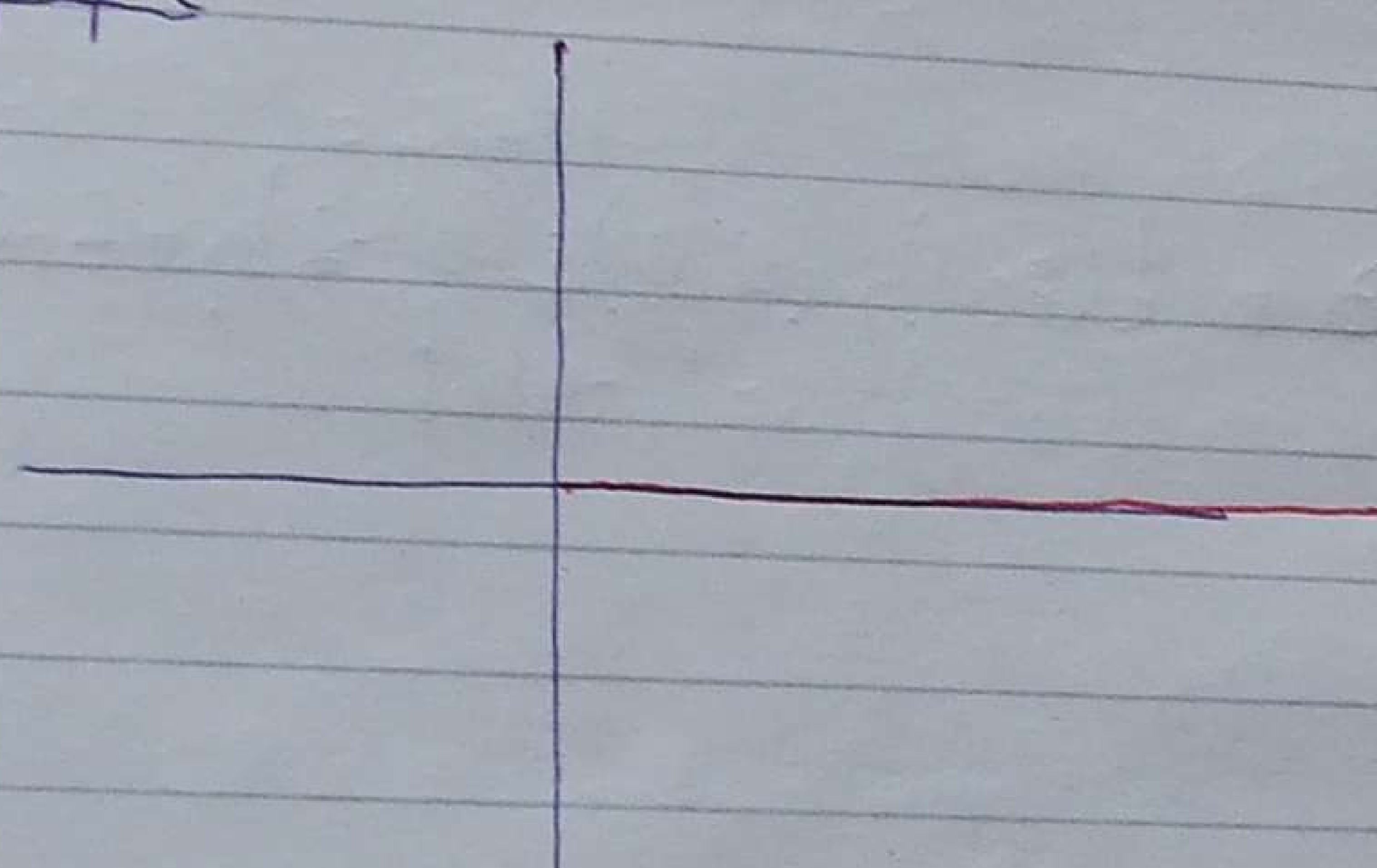
⇒ je to kongruencia 1

triedy kongruencie



polpriamky

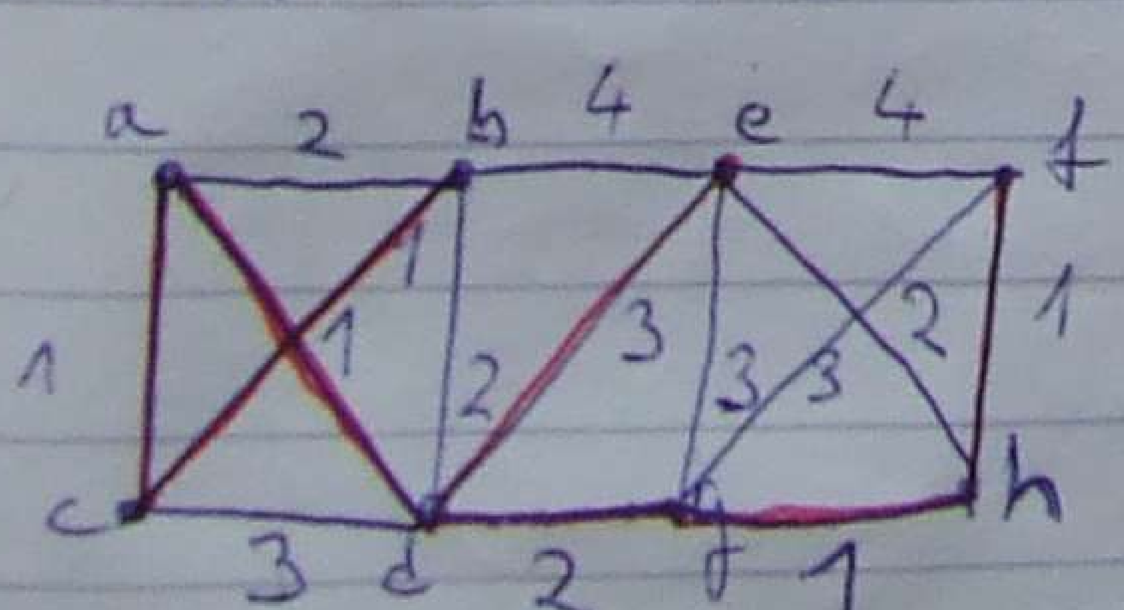
normálna podgrupa



– obsahuje neutrálny prvok (jednotku)

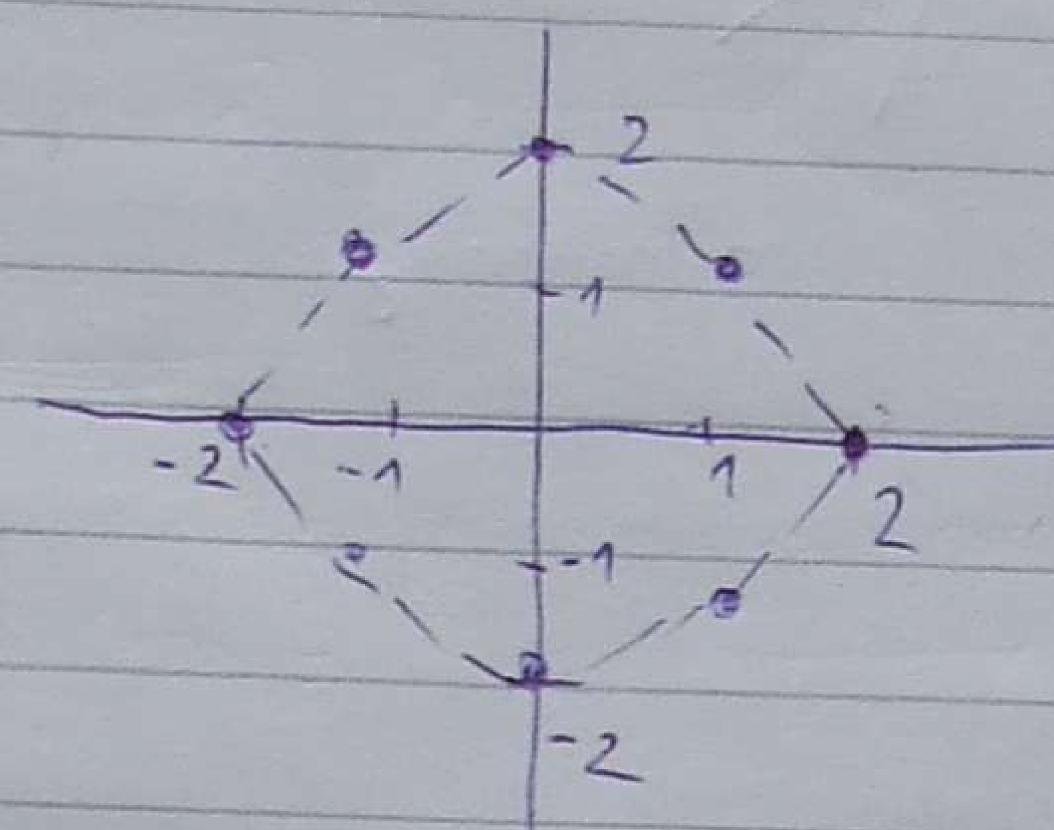
---

⑤ Je daný graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvkov s ocenením $v: H \to N$ takým, že $v\{a,b\}=2$, $v\{a,c\}=1$, $v\{a,d\}=1$, $v\{b,c\}=1$, $v\{b,d\}=2$, $v\{c,d\}=3$, $v\{b,e\}=4$, $v\{d,e\}=3$, $v\{d,g\}=2$, $v\{e,f\}=4$, $v\{e,g\}=3$, $v\{e,h\}=2$, $v\{f,g\}=3$, $v\{f,h\}=1$, $v\{g,h\}=1$. Nakreslite tento graf, určte cenu min. kostry a kostru nakreslite



cena kostry $= 1+1+1+2+2+1+1 = \underline{9}$

6. Na Z^2 definujeme metriku σ nasledovne: $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. Zakreslite kružnicu určenú touto metrikou a polomere 2 so stredom v bode $(0,0)$, t.j množinu $S_\sigma(2)=\{(x,y)\in Z^2;\ \sigma((x,y),(0,0))=2\}$
Určite počet prvkov množiny $S_\sigma(2)$ a tieto prvky vypíšte



Počet prvkov = 8 = $\{(0,2);(2,0);(0,-2),(-2,0),(1,1),(-1,1),$
$(1,-1),(-1,-1)\}$

$a\%(b+1) = \quad 2\%3 =$

MAT 2009 1 opravný

① Uvažujme jazyk L s jediným binárnym predikátovým symbolom p a jediným binárnym funkčným symbolom f

(1) Napíšte nejakú realizáciu jazyka L na množine $\{0,1,2\}$

(2) Nech φ je nasledujúca formula jazyka L

$$\forall x \forall y \exists z\, p(f(x,z),y)$$

Uvažujme realizáciu R jazyka L s univerzom N, kde p_R je relácia usporiadania $\leq$ a f_R je násobenie prirodzených čísel. Rozhodnite, či R je modelom teórie $\{\varphi\}$.

1) Nejaká realizácia:

Univerzum $= \{0,1,2\}$

$f_R(a,b) = a\%(b+1)$ // %-modulo

$p(a,b) \Leftrightarrow a > b$

2) $\forall x \forall y \exists z\, p(f(x,z),y)$

Ak $0 \in N$ tak je modelom, inak nie.

---

② Preveďte negáciu nasledujúcej formule do prenexného tvaru

$$\forall x(\phi(x) \Rightarrow \forall y\, \psi(x,y)) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, \psi(x,y)$$

negácia:

$$\cancel{\neg(\forall x(\phi(x) \Rightarrow \forall y\, \psi(x,y)) \wedge \neg(\forall x\, \exists y\, \psi(x,y)}$$

$$\forall x(\phi(x) \Rightarrow \forall y\, \psi(x,y)) \wedge \exists x \forall y\, \neg\psi(x,y)$$

$$\forall x_1(\neg\phi(x_1) \vee \forall y_1 \psi(x_1,y_1)) \wedge \exists x_2 \forall y_2 \neg\psi(x_2,y_2)$$

prenex. tvar:

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 ((\neg\phi(x_1) \vee \psi(x_1,y_1)) \wedge \neg\psi(x_2,y_2))$$

3. Uvažujme aditívnu grupu reálnych čísiel $(R,+)$ a grupoid $(R,\oplus)$, kde operácia $\oplus$ je daná predpisom

$$a \oplus b = a+b-1$$

(1) rozhodnite, či grupoid $(R,\oplus)$ je monoid

(2) rozhodnite, či zobrazenie $f: R \to R$ dané predpisom $f(x) = 2x+1$ je homomorfizmom grupoidov $(R,+) \to (R,\oplus)$

1, $(R,\oplus)$ ~~grupoid~~ monoid?

~~monoid~~ grupoid?

$a \oplus b$ zachováva operáciu => je ~~monoid~~ grupoid

pologrupa?

$$(a \oplus b) \oplus c = (a+b-1) \oplus c = a+b-1+c-1$$
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c-1) = a+b+c-1-1$$

=> je pologrupa

monoid?

$$a \oplus e = a$$
$$a + e - 1 = a$$
$$e = 1$$

=> je to monoid

2, $f(x) = 2x+1$

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$

$$2a+2b+1 = (2a+1) \oplus (2b+1)$$
$$2a+2b+1 = 2a+1+2b+1-1$$
$$2a+2b+1 = 2a+2b+1$$

je homomorfizmus!

grupoid

$f(x) =$

2, 4, 8, 16, 32

(4) Uvažujme univerzálnu algebru $A = (N, \cdot, p, 2)$, kde $\cdot$ je binárna operácia násobenia prir. čísiel, p je unárna operácia daná vzťahom $p(x) = x^2$ a 2 je nulárna operácia. Popíšte podalgebru $(\{4\})$

podalgebra $H = \{x \mid x = 2^n, n \in N - \{0\}\}$

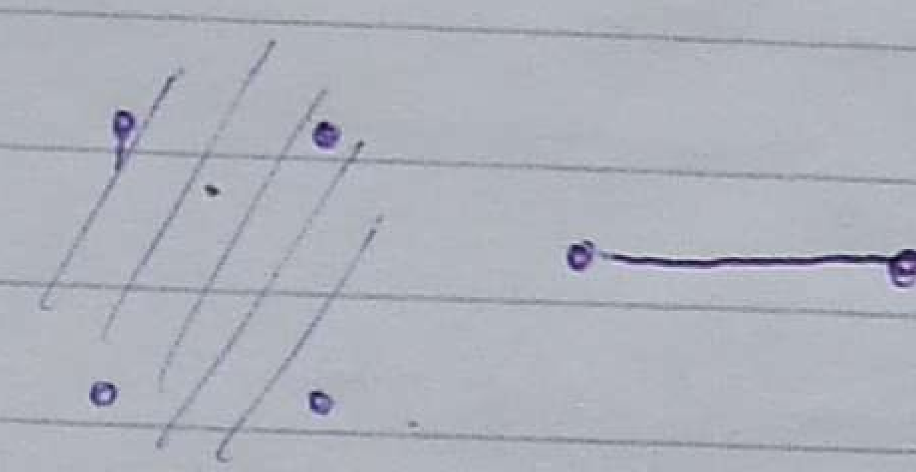
(5.)

6. a) Nakreslite strom, ~~jeho~~ ktorého všetky uzly majú nepárny stupeň alebo rovný 3 a súčet všetkých stupňov uzlov je 10

b) Nakreslite graf, ktorý má most a nemá artikuláciu

a)

b)



$A \to B = A' \vee B$

2008 riadny termín skup. A.

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE - SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA ZA 80 BODŮ (1. term., sk. A)

1) Dokažte, že platí $\vdash (\varphi \wedge \exists x\, \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Návod:

1. Vezměte formuli $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$ jako předpoklad a upravte ji tak, aby z logických spojek obsahovala pouze implikaci a negaci, pak užijte
2. axiom kvantifikátoru $(\forall x(\alpha \Rightarrow \beta)) \to (\alpha \to \forall x \beta)$
3. pravidlo odloučení
4. získanou formuli převeďte do tvaru negace (formule)
5. poslední formule je dokázána z formule předpokládané v 1. proto aplikujte na obě formule větu o dedukci
6. užijte třetí výrokový axiom $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
7. opět aplikujte pravidlo odloučení.

1) $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \vdash \neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$

$\forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\forall x(\varphi \to \neg\psi) \vdash \forall x(\varphi \to \neg\psi)$

2) $\vdash (\forall x(\varphi \to \neg\psi)) \to (\varphi \to \forall x \neg\psi)$ // axióm kvant

3) $\forall x(\varphi \to \neg\psi) \vdash (\varphi \to \forall x \neg\psi)$ // MP

4) $\forall x(\varphi \to \neg\psi) \vdash \neg(\varphi \to \forall x \neg\psi)$

$\neg(\cancel{\varphi \to \forall x \neg\psi}) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \forall x \neg\psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$

5) $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$

6) $(\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\varphi \wedge \psi)))$

7) $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$.

$\vdash (\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$

2) Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu s rovností a jediným binárním operačním symbolem p. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$p(x,x) = x,$

$p(p(x,y), p(z,t)) = p(x,t).$

Uvažujme realizaci $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}^2, p)$ jazyka L, kde binární operace $p = p_{\mathcal{M}}$ na množině $\mathbb{Z}^2$ je definována předpisem $p((a,b),(c,d)) = (a,d)$ pro libovolné prvky $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Dokažte, že

a) $\mathcal{M}$ je modelem teorie T

b) asociativní zákon je důsledkem teorie T (takže T je rozšířením teorie pologrup).

a) $p((a,b),(a,b)) = (a,b) \Rightarrow$ platí

$L = p(p((a,b),(c,d)), p((e,f),(g,h))) = p((a,d),(e,h)) = p(a,h)$

$P_2\ p((a,b),(g,h)) = (a,h) \Rightarrow$ platí

$\Rightarrow$ je Modelom

b) $p(p(a,b),c) = p(a,p(b,c))$

$p(p(a,b),p(c,c)) = p(a,c)$

$p(p(a,a),p(b,c)) = p(a,c)$ > platí

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Pak napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$\forall x A(x) \rightarrow (\forall x B(y) \rightarrow \neg\forall x C(y,x)).$$

$$\forall x A(x) \rightarrow (\forall x B(y) \rightarrow \neg\forall x C(y,x))$$

$$\exists x_1 \neg A(x_1) \vee (\cancel{\forall \exists x} \neg B(y) \vee \neg\forall x_2 C(y,x_2))$$

prenex. tvar

$$\exists x_1 \exists x_2 (\neg A(x_1) \vee (\neg B(y) \vee \neg C(y,x_2)))$$

negácia

$$\forall x_1 \forall x_2 (A(x_1) \wedge (B(y) \wedge C(y,x_2)))$$

4) Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ je surjektivní zobrazení dané vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Dokažte, že f je homomorfismus, a určete (načrtněte) třídy kongruence dané jádrem zobrazení f.

$$f(z) = \frac{z}{|z|}$$

homomorfizmus ?

$$f(a \cdot b) = f(a) . f(b)$$

$$f((ai+b)(ci+d)) = f(ai+b) . f(ci+d)$$

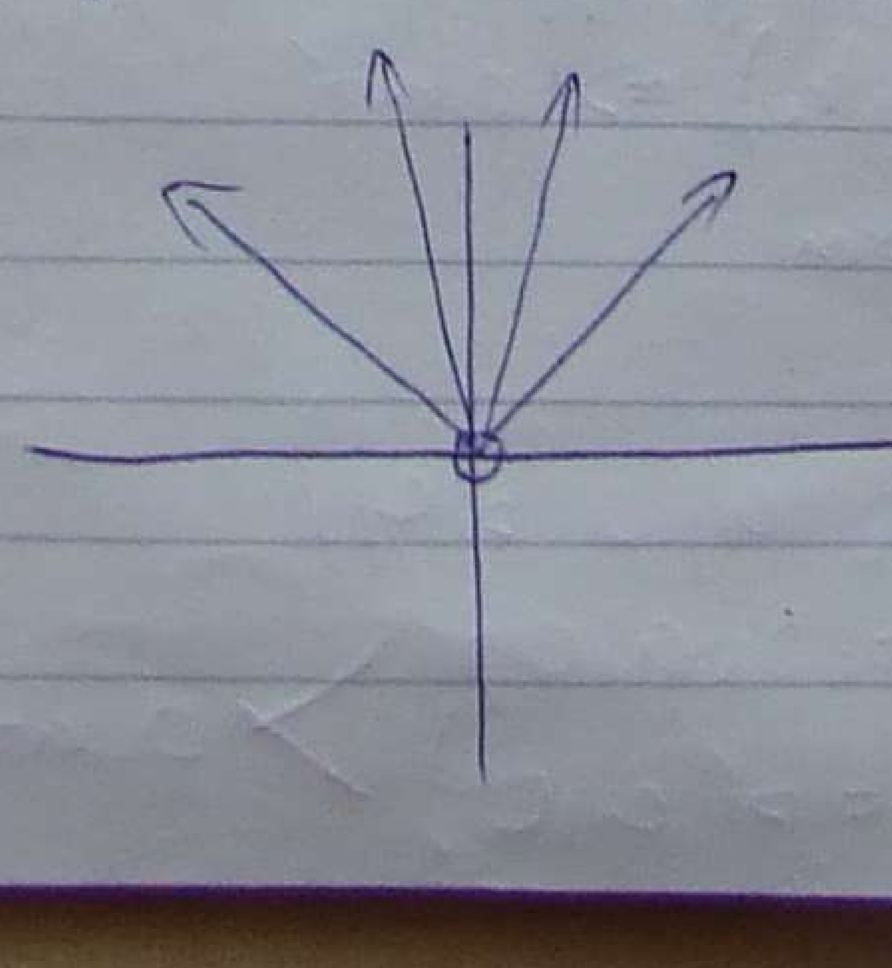
$$f(-ac+bci+dai+bd) = \frac{ai+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ci+d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$f \frac{-ac+bd+i(bc+da)}{\sqrt{(bd-ac)^2+(bc+da)^2}} = \frac{bd-ac+i(bc+da)}{\sqrt{b^2d^2 - \cancel{2bdac} + a^2c^2 + b^2c^2 + \cancel{2bcda} + d^2a^2}}$$

$$\frac{ai+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ci+d}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{-ac+bci+dai+bd}{\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}}$$

$\Rightarrow$ je homomorfizmus

kongruencia



polpriamky - každé komplexné číslo sa zobrazí do jednotkového komplex. čísla na tej istej polpriamke

5) V tělese $\mathbb{Z}_5$, tj. v tělese zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1\right).$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1\right)$$

$$\frac{a}{b} \quad (b.x)\%m=a$$

$$\frac{3}{4}: (4.x)\%5=3 \Rightarrow x=2$$

$$-2(4-4+1)$$

$$=-2=\underline{\underline{3}}$$

$$\frac{2}{3}: (3.x)\%5=2 \Rightarrow x=4$$

$$\frac{3}{2}: (2.x)\%5=3 \Rightarrow x=4$$

6) Je dán obyčejný graf $G=(U,H)$, kde $U=\{1,2,\ldots,n\}$, $n>0$ přirozené číslo, a H má 12 prvků. Pro každé číslo $i=1,2,\ldots,n$ má uzel i tentýž stupeň $n-2$. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

$$\Sigma st(U)=2^*|H|$$

$$\cancel{n.(n-2)=2.24}$$

$$\cancel{n^2-2n=48}$$

$$\cancel{n^2-2n-48=0}$$

$$\cancel{D=4-4.(-48)}$$

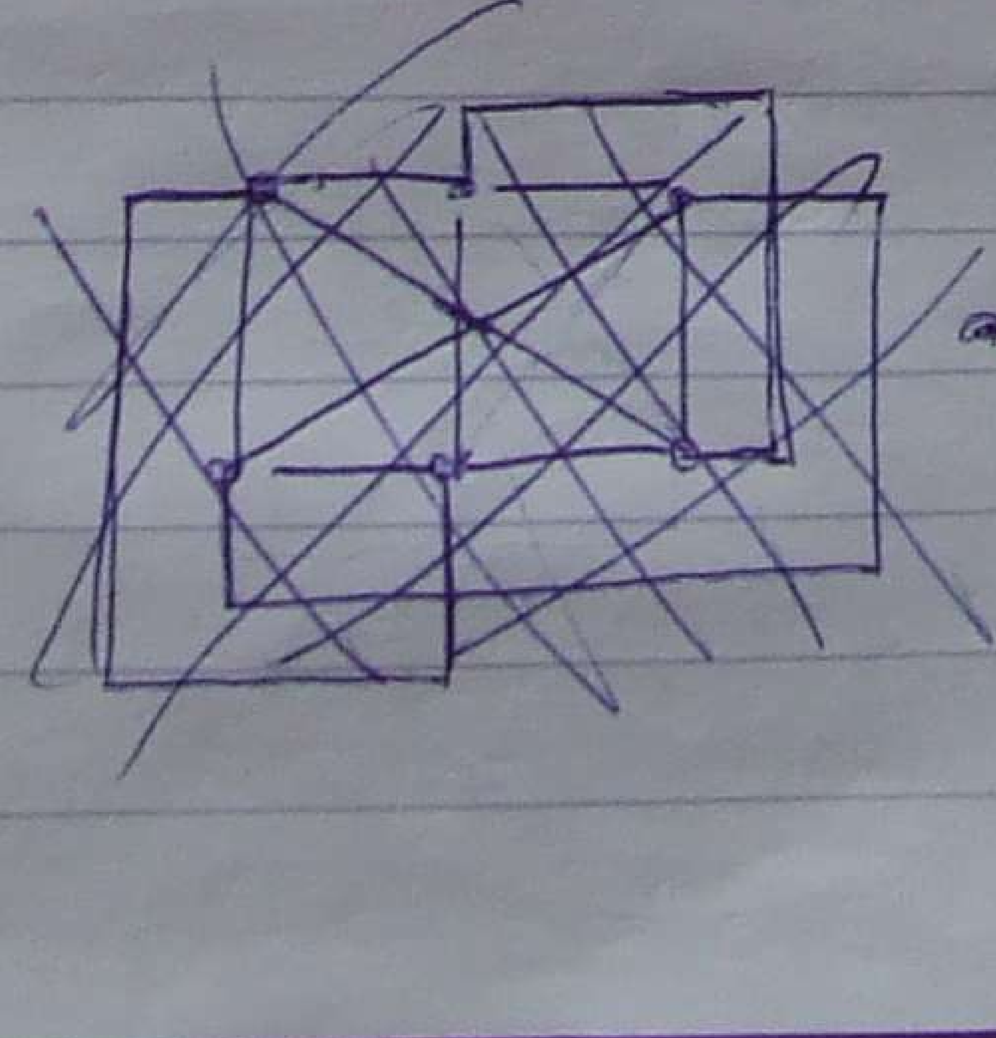
$$D=$$

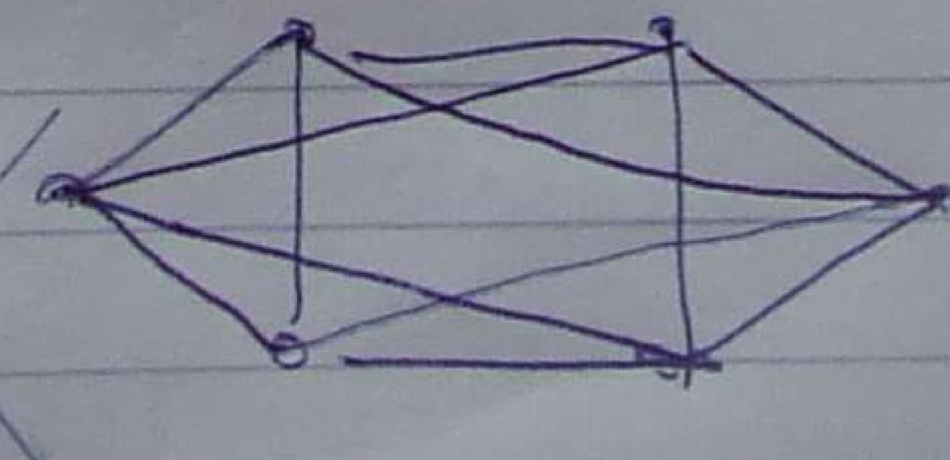
$$n.(n-2)=2.12$$

$$n^2-2n-24=0 \qquad D=4-2(-48)=100$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2} \begin{cases} 6 \\ -4 - \text{nedá sa} \end{cases}$$

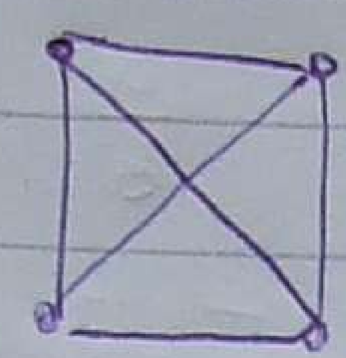
6 uzlov – každý má stupeň 4.



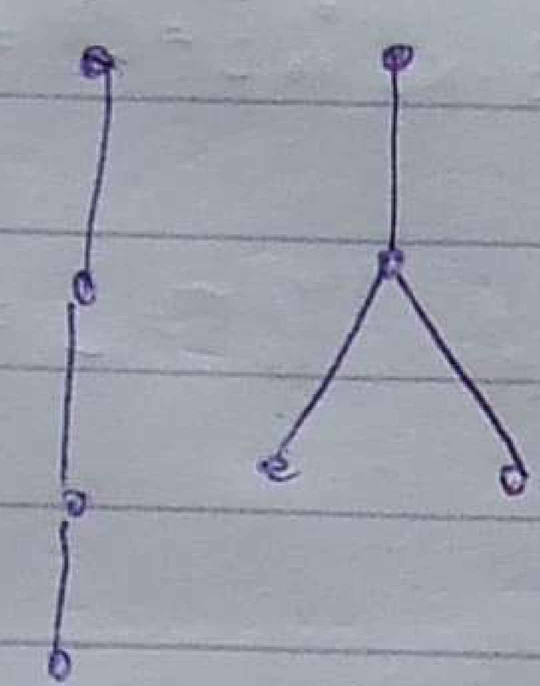


7) Nakreslete úplný graf se čtyřmi uzly a pak určete (nakreslete) všechny jeho kostry.

graf:

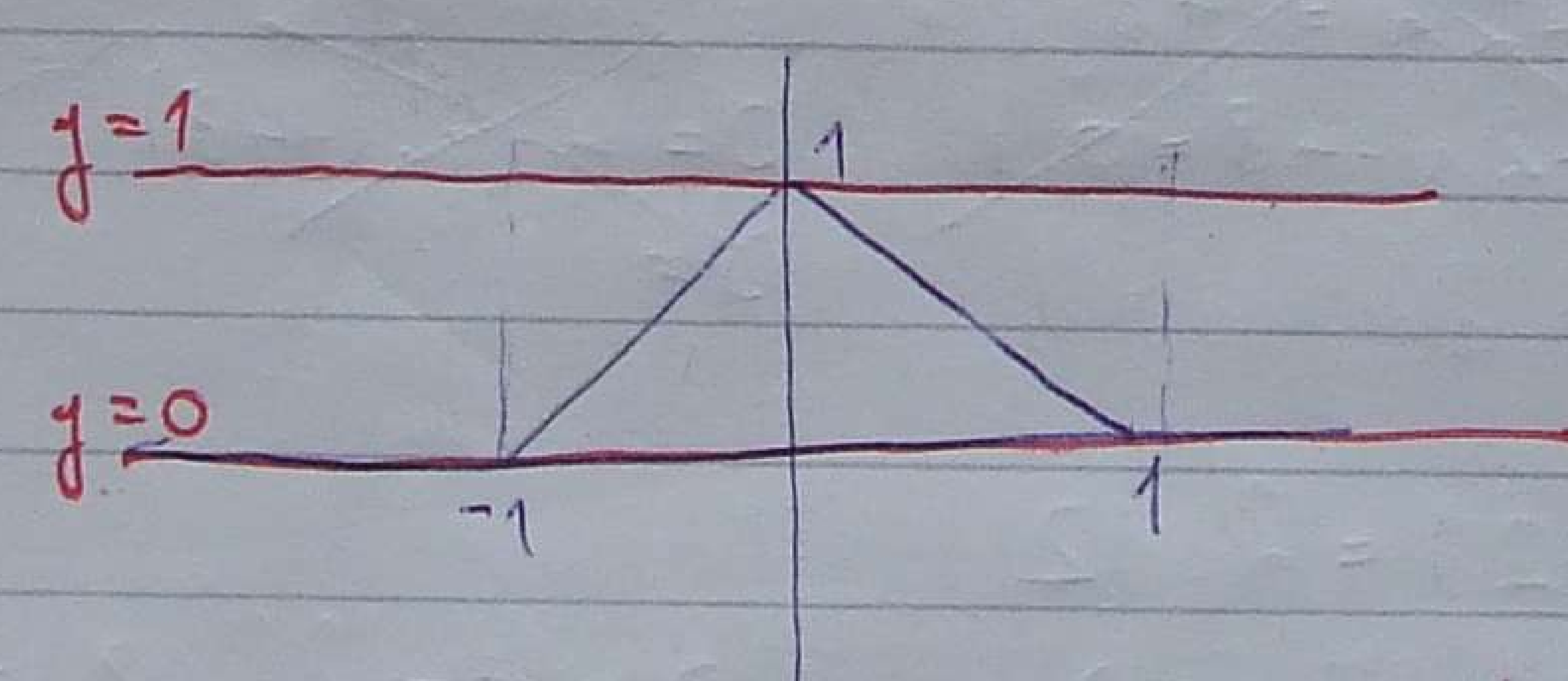


kostry



8) V lineárním prostoru $C[-1,1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1,1]$ uvažujme normu $\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in [-1,1]\}$ a funkci $h \in C[-1,1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1,1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C[-1,1]$ s vlastností $\rho(g,h) = 1$, kde ρ je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řešte graficky.)

$\rho(g,h)=1$ znamená, že vzdálenost (metrika) daných dvoch funkcií je max. 1 (indukovaná normou f)



2008 riadny termín skup B

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE - SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA ZA 80 BODŮ (1. term., sk. B)

1) Dokažte, že platí $\vdash \forall x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \forall x \varphi$.

Návod:

1. Formuli $\forall x \forall y \varphi$ vezměte jako předpoklad, pak užijte
2. axiom substituce ($\forall x \alpha \Rightarrow \alpha$)
3. pravidlo odloučení
4. axiom substituce
5. pravidlo odloučení
6. pravidlo zobecnění ($\alpha \vdash \forall x \alpha$)
7. pravidlo zobecnění
8. větu o dedukci.

1, $\forall x \forall y \varphi \vdash \forall x \forall y \varphi$

2, $\vdash \forall x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \varphi$ //axióm subst

3, $\forall x \forall y \varphi \vdash \forall y \varphi$ //MP

4, $\forall y \varphi \Rightarrow \varphi$

5, $\forall x \forall y \varphi \vdash \varphi$

6, $\forall x \forall y \varphi \vdash \forall x \varphi$

7, $\forall x \forall y \varphi \vdash \forall y \forall x \varphi$

8, $\vdash \forall x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \forall x \varphi$

---

2) Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu s rovností a jediným binárním operačním symbolem p. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$p(x,y) = p(y,x)$,

$p(p(x,y),z) = p(p(y,z),x)$.

Uvažujme realizaci $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}^2, p)$ jazyka L, kde binární operace $p = p_{\mathcal{M}}$ na množině $\mathbb{Z}^2$ je definována předpisem $p((a,b),(c,d)) = (a+c, bd)$ pro libovolné prvky $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Dokažte, že

a) $\mathcal{M}$ je modelem teorie T

b) asociativní zákon je důsledkem teorie T (takže T je rozšířením teorie pologrup).

a) $p(x,y) = p(y,x)$

L: $p((a,b),(c,d)) = (a+c, bd)$ => platí

P: $p((c,d),(a,b)) = (c+a, db)$

$p(p(x,y),z) = p(p(y,z),x)$

L: $p(p((a,b),(c,d)),(e,f)) = p((a+c,bd),(e,f)) = (a+c+e, bdf)$ => platí

P: $p(p((c,d),(e,f)),(a,b)) = p((c+e,df),(a,b)) = (c+e+a, dfb)$

b) $p(p(x,y),z) = p(x,p(y,z))$

$p(p(y,z),x) = p(x,p(y,z))$ //axiom 2

$p(x,p(y,z)) = p(x,p(y,z))$ //axiom 1

3) Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$(\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(y)) \Rightarrow \neg \forall x C(y,x).$$

$$(\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(y)) \Rightarrow \neg \forall x C(y,x)$$

$$(\forall x_1 A(x_1) \wedge \exists x \neg B(y)) \vee \neg \forall x_2 C(y,x_2)$$

prenex tvar: $\forall x_1 \exists x_2 ((A(x_1) \wedge \neg B(y)) \vee \neg C(y,x_2))$

negácia $\exists x_1 \forall x_2 ((\neg A(x_1) \vee \neg\neg B(y)) \wedge \neg\neg C(y,x_2))$

4) Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a $\mathbb{R}^+$ její podgrupu všech kladných reálných čísel. Nechť $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ je surjektivní zobrazení dané vztahem $f(z) = |z|$. Dokažte, že f je homomorfismus, a určete (načrtněte) třídy kongruence dané jádrem zobrazení f.

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

$$f((ai+b)(ci+d)) = f(ai+b) \cdot f(ci+d)$$

$$f(-ac+bci+dai+bd) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

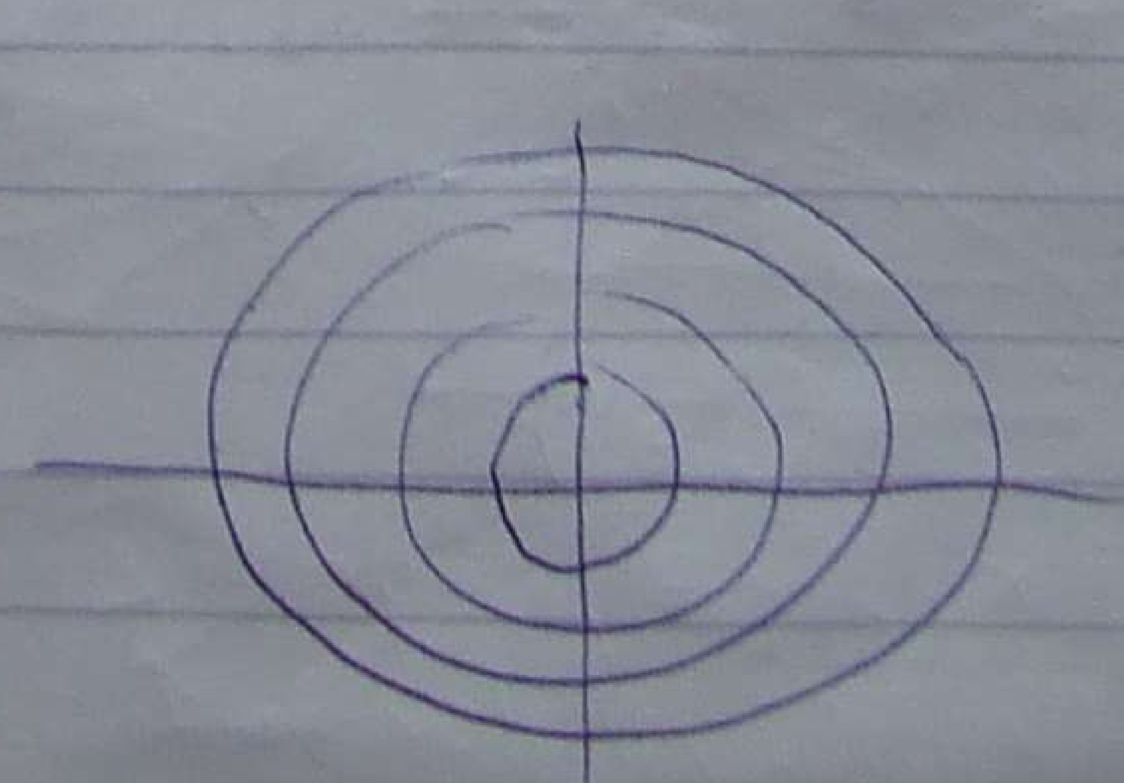
$$\sqrt{(-ac+bd)^2+(bc+da)^2} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$$

$$\sqrt{b^2d^2 - \cancel{2acbd} + a^2c^2 + b^2c^2 + \cancel{2bcda} + d^2a^2} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$$

$$\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$$

$\Rightarrow$ je homomorfismus

triedy kongruencie:



5) V tělese $\mathbb{Z}_5$, tj. v tělese zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$\frac{4}{3}(2-\frac{3}{4}-\frac{3}{3}).$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

$$\frac{4}{3}\left(2-\frac{3}{4}-\frac{3}{3}\right)$$

$\frac{a}{b}: (b\cdot x)\%_m = a$

$\frac{4}{3}: (3\cdot x)\%5 = 4$

$x = 3$

$3(2-2-1) = 3\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$

$\frac{3}{4}: (4\cdot(x))\%5 = 3$

$x = 2$

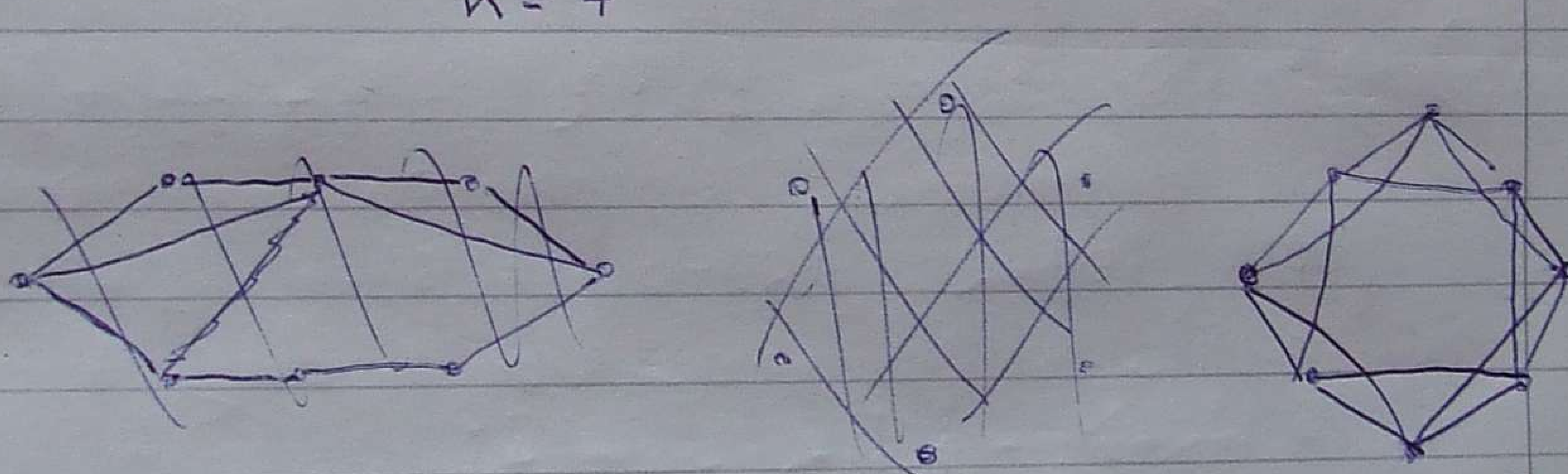
6) Je dán obyčejný graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a H má 16 prvků. Nechť všechny vrcholy jsou téhož stupně δ. Určete hodnotu δ a graf G přehledně nakreslete.

$H = 16$

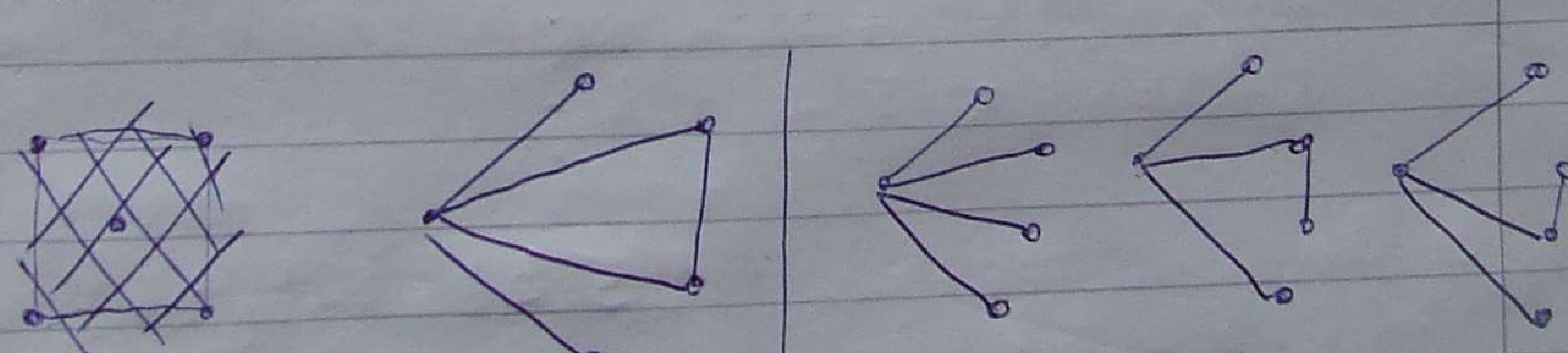
$\sum st(U) = 2 * |H|$

$8\cdot n = 32$

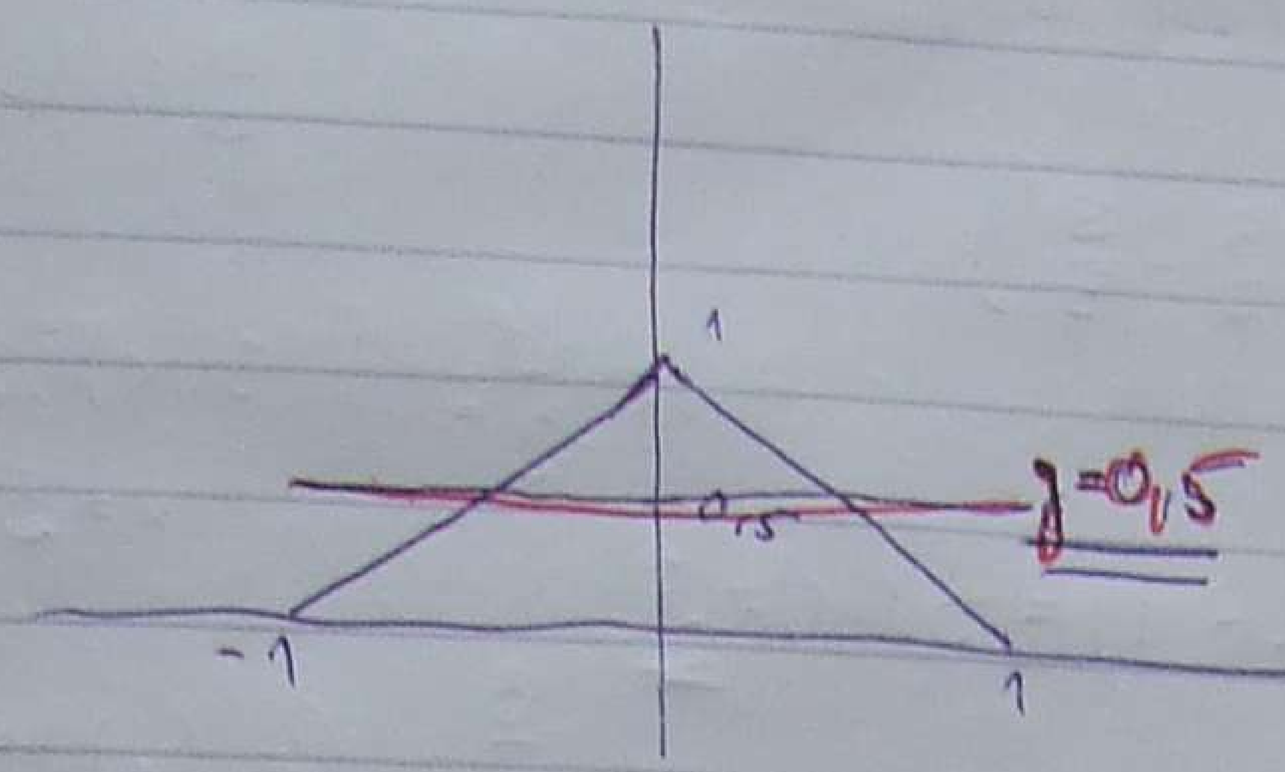
$n = 4$



7) Nakreslete graf s pěti uzly, který má právě 3 různé kostry. Tyto kostry vypište.



8) V lineárním prostoru $C[-1,1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1,1]$ uvažujme normu $\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in [-1,1]\}$ a funkci $h \in C[-1,1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1,1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C[-1,1]$ s vlastností $\rho(g,h) = \frac{1}{2}$, kde ρ je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řešte graficky.)



2008 opravný

(1) Buď L jazyk predikátovej logiky 1. rádu s rovnosťou, jediným predikátovým symbolom p arity 3 a jediným binárnym symbolom s. Uvažujme realizáciu M na množine $N(\mathbb{N})$ všetkých neprázdnych podmnožín množiny $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísiel. $p_M(A,B,C) \Leftrightarrow A \cap B \cap C \neq \emptyset$ a $s_M(A,B) = A \cup B$ pre ľubovoľné neprázdne $A, B, C \in N(\mathbb{N})$

a) Rozhodnite, či M je modelom teórie danej špeciálnymi axiómami:

1. $p(s(x,u), s(y,u), s(z,u))$,
2. $p(x,y,z) \Rightarrow (\exists u)(x = s(x,u) \wedge y = s(y,u) \wedge z = s(z,u))$

1, $p((A \cup D), (B \cup D), (C \cup D)) \Leftrightarrow (A \cup D) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ platí, lebo D je neprázdne (zadanie)

2, $A \cap B \cap C \neq 0 \Rightarrow \exists D\, (A = (A \cup D) \wedge B = (B \cup D) \wedge C = (C \cup D))$

$\Rightarrow$ platí vždy (ten prienik je to D)

$\Rightarrow$ je modelom

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge A \nsubseteq C$

b) Nájdite realizáciu jazyka L, v ktorej nie je splnená formula $p(x,y,z)$

~~$p_M(A,B,C) \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \wedge A \cap C \neq \emptyset$~~

$p_M(A,B,C) \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge A \nsubseteq C$

② Zostrojením dôkazu dokážte, že vo výrokovej logike platí:

$$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi),\ \psi \vdash \varphi \Rightarrow \chi$$

---

③ Uvažujme algebru $A = (\{1,2,3,4,5\}, f)$ s jednou unárnou operáciou f definovanou nasledovne:

$$f(1) = f(5) = 2,\quad f(2) = 3,\quad f(3) = 4,\quad f(4) = 5$$

a) popíšte všetky podalgebry algebry A

1) $\{\langle 1\rangle\} = \{1,2,3,4,5\}$
2) $\{\langle 2\rangle\} = \{2,3,4,5\}$
3) $\{\langle 3\rangle\} = \{3,4,5,2\}$
4) $\{\langle 4\rangle\} = \{4,5,2,3\}$
5) $\{\langle 5\rangle\} = \{5,2,3,4\}$

b) Uvažujme rozklad $\{1,5,3\}, \{2\}, \{4\}$ množiny $\{1,2,3,4,5\}$. Je príslušná ekvivalencia kongruenciou na algebre A?

$\cancel{\forall}\ a \sim b \Rightarrow f(a) \sim f(b)$

$1 \sim 3 \Rightarrow 2 \sim 4$ - nie je pravda

$\Rightarrow$ <u>nie je</u> kongruenciou

$ax+b=$

④ Nech L je množina všetkých lineárnych reálnych funkcií (jednej premennej definovaných na R. Uvažujme zobrazenie $\varphi: L \to R$, ktoré ľubovoľnej funkcii $f(x) = ax+b \in L$ priradí koeficient a, t.j. $\varphi(ax+b) = a$. Rozhodnite, či je zobrazenie $\varphi: (L, \circ) \to (R, \cdot)$ homomorfizmus grupoidov, prípadne monoidov, prípadne grúp.

$$\varphi(a(cx+d)+b) = \varphi(ax+b) \cdot \varphi(cx+d)$$
$$\varphi(acx+ad+b) = ac$$
$$ac = ac \Rightarrow \text{je homomorfizmus}$$

$(L, \circ)$ grupoid?

$a(cx+d)+b = acx+ad+b \Rightarrow$ zachováva op.

$(L, \circ)$ monoid?

neutrálny prvok $a\cancel{(e)+b} =$

$ax+b$ neexistuje ?

$f \circ e = f$ $\quad e = 1 \cdot x + 0$?

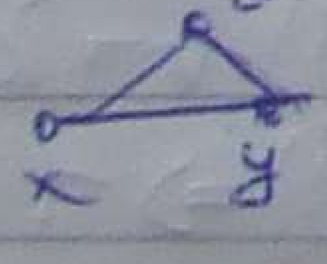
$a(x)+b = ax+b$

⑧ Rozhodnite, či predpis $p(x,y) = \frac{|x-y|}{|xy|}$ definuje na množine $R \setminus \{0\}$ metriku (Nápoveda: Využite známej vlastnosti, že pre každé $x, y \in R$ platí $|x|+|y| \geq |x+y|$, $|x||y| = |xy|$)

1) $p = 0 \Leftrightarrow$ ak $x = x$

$$\frac{|x-y|}{|xy|} = 0 \Rightarrow x = y$$

2) $$\frac{|x-y|}{|x \cdot y|} = \frac{|y-x|}{|y \cdot x|} \Rightarrow \text{platí}$$



3) $$\frac{|x-y|}{|x \cdot y|} + \frac{|y-z|}{|y \cdot z|} \geq \frac{|x-z|}{|x \cdot z|}$$

$$|x-y||x \cdot z||y \cdot z| + |y-z||xy||x \cdot z| \geq |x-z||x \cdot y||y \cdot z|$$

$$|x^2z^2y - y^2z^2x| + |y^2x^2z - z^2x^2y| \geq |x^2y^2z - z^2y^2x|$$

2007 riadny termín

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA ZA 80 BODŮ (2. termín), skupina A

1. **Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu s rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním unárním funkčním symbolem f. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:**

$p(f(x), x)$,

$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y)$.

Uvažujme realizaci $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, \leq, h)$ jazyka L, kde $\leq = p_{\mathcal{M}}$ a operace $h = f_{\mathcal{M}}$ na množině $\mathbb{Q}$ je definována předpisem $h(a) = \frac{a}{2}$ pro libovolné $a \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda

(a) $\mathcal{M}$ je modelem teorie T

$p(h(x), x) \Leftrightarrow h(x) \leq x$, $\frac{x}{2} \leq x$ (ak nie sú záporné č. tak to platí)

$h(h(x)) = h(h(y)) \Rightarrow x \leq y$, $\frac{x}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow x \leq y \rightarrow$ platí vždy

(b) formule $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ je důsledkem teorie T.

$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y)$ //axiom 2

$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ //axiom 1

$a \Rightarrow b = \neg a \vee b$

2. Negaci formule

$$(\exists x(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \wedge (\forall x\chi)$$

převeďte do tvaru (ekvivalentní formule), ve kterém se nebude vyskytovat žádná ze spojek $\vee$ a $\wedge$.

negácia:

$$\forall x_1(\neg\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \vee \exists x_2 \neg\chi$$

prenex tvar:

$$\forall x_1 \exists x_2((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi) \vee \neg\chi)$$

bez $\vee$, $\wedge$

$$\forall x_1 \exists x_2(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\psi \vee \varphi) \vee \neg\chi)$$

$$\forall x_1 \exists x_2(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\psi \rightarrow \varphi) \vee \neg\chi)$$

$$\forall x_1 \exists x_2((\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi)) \vee \neg\chi)$$

$$\forall x_1 \exists x_2(\neg((\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi)) \Rightarrow \neg\chi)$$

rním funkčním

isem $h(a) =$

to platí)

vždy

$\neg x$

)

3. Uvažujme algebru $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, t)$ s jednou unární operací t **definovanou pro libovolné** $x \in \mathbb{Z}$ **předpisem** $t(x) = x + 1$.

(a) Popište všechny podalgebry algebry $\mathcal{A}$.

$t(x) = x+1$

Podalgebry $H = \{ x \mid x \geq n, n \in \mathbb{Z} \}$

(b) Uvažujme rozklad množiny $\mathbb{Z}$, jehož třídy jsou **všechny dvouprvkové množiny tvaru** $\{2k, 2k+1\}, k \in \mathbb{Z}$. Je příslušná ekvivalence kongruencí na algebře $\mathcal{A}$?

~~ak 2k a 2k+1~~

$2k \sim 2k+1 \Rightarrow t(2k) \sim t(2k+1)$

$\Rightarrow 2k+1 \sim 2k+2$

$\Rightarrow$ neplatí $\rightarrow$ nie je kongruencia

4. **Položme** $\mathcal{P} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \exists a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) = ax \}$. Dokažte, že $(\mathcal{P}, \circ)$, kde $\circ$ značí skládání zobrazení, **je grupoid. Zjistěte, zda** $(\mathcal{P}, \circ)$ **je dokonce grupa** (svůj závěr odůvodněte).

grupoid?

$a(bx) = abx \Rightarrow$ je grupoid

pologrupa?

~~a(b(cx))~~

$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = f_1(f_2(f_3))$

$a(b(cx)) = abcx$

$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1(f_2) \circ f_3 = a(bx) \circ cx$

$abx \circ cx = abcx$

$\Rightarrow$ je pologrupa

monoid? neutrálny prvok?

$f_1 \circ e = f_1$

$f_1(e) = f_1$

$a(ex) = ax$

$e = 1 . x$

grupa? inverzné prvky

$b = \frac{1}{a}$

$$f_1 \circ f_1^{-1} = e$$

$$a(bx) = x$$

$$abx = x$$

$$f_1^{-1} = \frac{1}{a} x$$

$\Rightarrow$ je grupa

---

5. V tělese $\mathbb{Z}_7$ vypočtěte $\frac{4}{3}(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3})$.

$$\frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right)$$

$$\frac{a}{b} : (b \cdot x) \% m = a$$

$$\frac{4}{3} : (3 \cdot x) \% 7 = 4$$

$$x = 6$$

$$\frac{3}{4} : (4 \cdot x) \% 7 = 3$$

$$x = 6$$

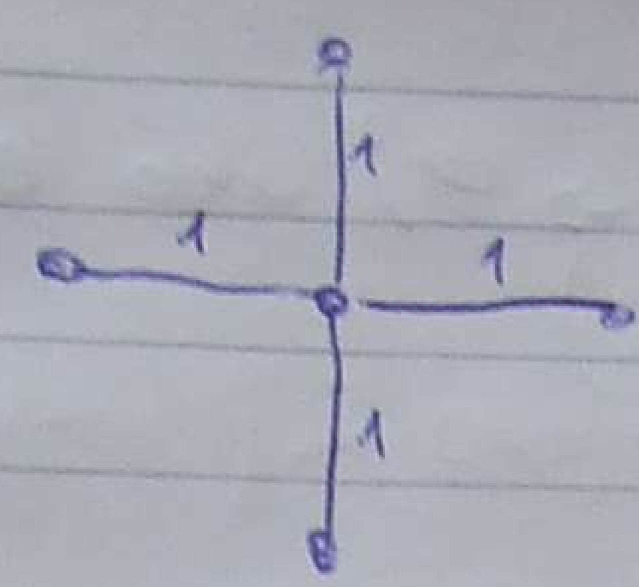
$$\frac{5}{3} : (3 \cdot x) \% 7 = 5$$

$$x = 4$$

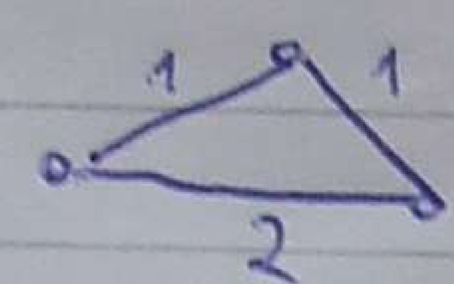
$$6(2 - 6 - 4) = 6 \cdot (-8)$$
$$= 6 \cdot (6)$$
$$= 1$$

6. Obyčejný graf se nazývá ***geodetický***, jestliže v něm pro každé jeho dva uzly existuje právě jedna cesta **nejkratší délky, která j** spojuje. Pokud to jde, **nakreslete geodetický** graf s 5 uzly a graf se 3 uzly, který není geodetický.

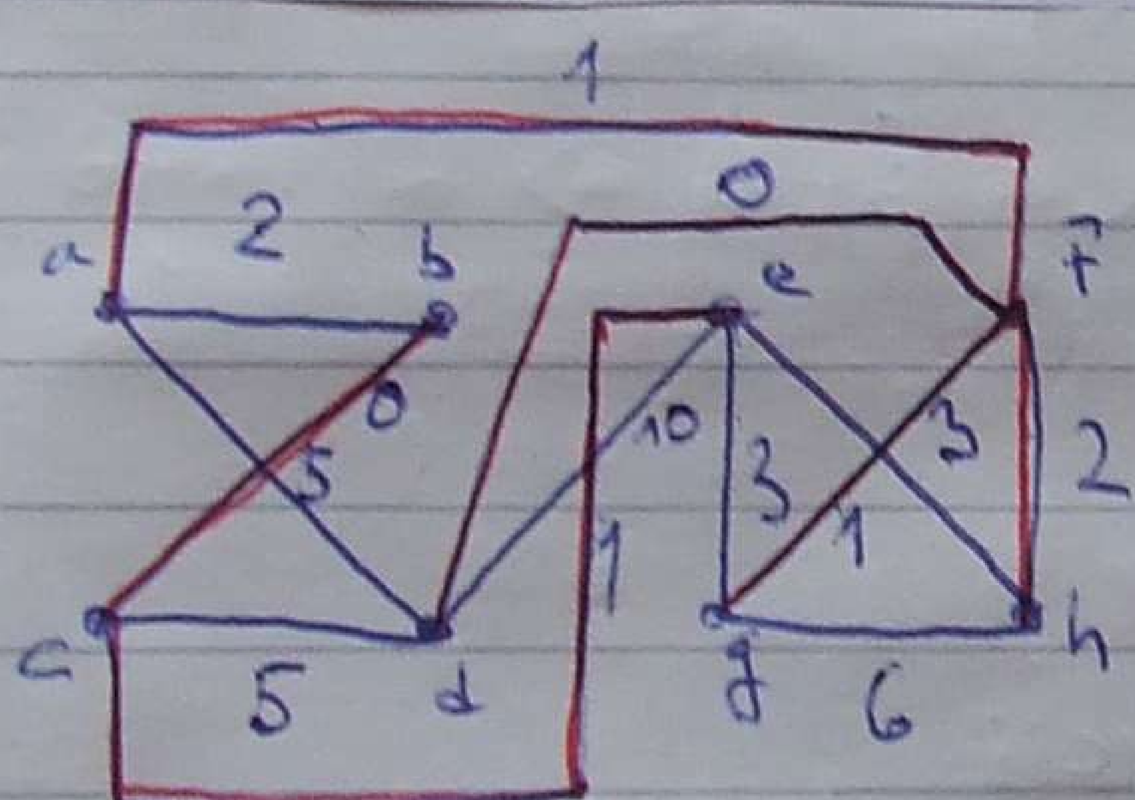
5 uzlový geodetický



3 uzlový negeodetický



7. **Je dán graf** $G = (U, H)$, **kde** $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ **a** H **má 13 prvků, s oceněním** $v : H \to \mathbb{N}$ **takovým, že** $v\{a, b\} = 2$, $v\{a, d\} = 5$, $v\{a, f\} = 1$, $v\{b, c\} = 0$, $v\{c, d\} = 5$, $v\{c, e\} = 1$, $v\{d, e\} = 10$, $v\{d, f\} = 0$, $v\{e, g\} = 3$, $v\{e, h\} = 3$, $v\{f, g\} = 1$, $v\{f, h\} = 2$, $v\{g, h\} = 6$. **Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete**



cena kostry = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 = $\underline{\underline{5}}$

8. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3$ s eukleidovskou **metrikou** ρ **definujeme vzdálenost** libovolných dvou množin A a B vztahem $\delta(A, B) = \inf\{\rho(a, b) | a \in A, b \in B\}$. **Rozhodněte, zda** $(\mathcal{P}(\mathbb{R}_3), \delta)$ **tvoří metrický prostor** (symbol $\mathcal{P}(\mathbb{R}_3)$ značí množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{R}_3$).

eukleidovská metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \dots + (x_n - y_n)^2}$

dvojice : $\sqrt{(x-y)^2}$

1) metrika = 0 $\Rightarrow$ $\sqrt{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow$ platí

2) $\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} \Rightarrow$ platí

3) $\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x-z)^2} \geq \sqrt{(y-z)^2}$

2007 opravný

(1.) Dokážte, že platí $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$

1, Vezmite formulu $\forall x(\varphi \to \psi)$ ako predpoklad
$\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$

2, Axióm substitúcie
$\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$

3, Pravidlo odlúčenia
$\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \to \psi)$

4, Vezmite $\forall x \varphi$ ako predpoklad
$\forall x \varphi \vdash \forall x \varphi$

5, axióm substitúcie
$\vdash \forall x \varphi \to \varphi$

6, pravidlo odlúčenia
$\forall x \varphi \vdash \varphi$

7, Pravidlo odlúčenia na 3, 6
$\forall x(\varphi \to \psi), \forall x \varphi \vdash \psi$

8, pravidlo zovšeobecnenia
$\forall x(\varphi \to \psi), \forall x \varphi \vdash \forall x \psi$

9, 2-krát veta o dedukcii
$\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \forall x \varphi \to \forall x \psi$
$\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$

(2.) Zistite, či je formula $\overbrace{(A \vee \overbrace{(\neg(B \wedge C))}^{P})}^{Q} \to \overbrace{(\overbrace{(A \leftrightarrow C)}^{R} \vee B)}^{O}$ tautológia

A	B	C	P	Q	R	O	celé
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1

=> nie je tautológia

(3) Uvažujme aditívnu grupu reálnych čísiel $(\mathbb{R},+)$ a grupoid na množine $\mathbb{R}$ s operáciou $\oplus$ danou predpisom:

$$a \oplus b = a + b + ab$$

a, rozhodnite, či zobrazenie $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom $\varphi(x) = 2x$ je homomorfizmus grupoidov $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},\oplus)$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$
$$2a + 2b = 2a \oplus 2b$$
$$2a + 2b = 2a + 2b + 4ab$$
$$\Rightarrow \text{nie je!}$$

b, Zistite, či grupoid $(\mathbb{R},\oplus)$ je monoidom, V kladnom prípade určite tie jeho prvky, ku ktorým neexistujú inverzné prvky.

pologrupa?

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b + \cancel{2}ab) \oplus c$$
$$= a + b + ab + c + c(a + b + ab)$$
$$= a + b + ab + c + ac + ab + ab$$
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + bc)$$
$$= a + b + c + bc + a(b + c + bc)$$
$$= a + b + c + bc + ab + ac + bc$$

monoid?

$$a \oplus e = a$$
$$a + e + ae = a$$
$$e = 0$$

Prvky, ku ktorým neexistují inverzné:

$$a \oplus a^{-1} = e$$
$$a + a^{-1} + aa^{-1} = 0$$
$$a + a^{-1}(1 + a) = 0$$
$$a^{-1} = -a \cdot (1 + a)^{-1} \quad a = 1 \Rightarrow \text{delenie } 0$$

c) Zistite, či binárna relácia ρ na množine Z celých čísiel daná vzťahom $x\rho y \Leftrightarrow 2\,|\,(x+y)$ je kongruencia na grupoide $(Z, \oplus)$

ekvivalencia?

reflex.

$x\rho x \Leftrightarrow 2\,|\,(x+x) \Leftrightarrow 2\,|\,2x \Rightarrow$ platí

symetr.

$x\rho y \Leftrightarrow 2\,|\,(x+y) \Leftrightarrow y\rho x \Leftrightarrow 2\,|\,(y+x)$

$\Rightarrow$ platí

tranzitívnosť

$x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

$2\,|\,(x+y) \wedge 2\,|\,(y+z) \Rightarrow 2\,|\,(x+z)$

$\Rightarrow$ platí

kongruencia?

$x\rho y \wedge z\rho w \Rightarrow (x \oplus z)\rho(y \oplus w)$

$2\,|\,(x+y) \wedge 2\,|\,(z+w) \Rightarrow 2\,|\,(x+z+\cancel{x}z+y+w+yw)$

$\Rightarrow$ platí (treba si kuk, ktoré čísla sú párne / nepárne)

4. V telese komplexných čísiel $(R^2, +, \cdot)$ nahradíme operáciu násobenia $\cdot$ operáciou $\times$ danou nasledovne:

$$(a,b)\times(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc-bd)$$

Tým dostaneme teleso $A=(R^2, +, \times)$, ktorá má rovnaký jednotkový aj nulový prvok ako teleso komplexných čísel. Rovnako ako v prípade komplexných čísiel položme $1=(1,0)$ a $j=(0,1)$ a píšme prvky (a,b) telesa A v algebraickom tvare $a+bj$.

a) vypočítajte j^3 a j^2 (preveďte do algebraického tvaru)

$$j^3: (0,1)\times(0,1)\times(0,1) = (0-1,\ 0+0-1)\times(0,1)$$
$$= (-1,-1)\times(0,1)$$
$$= (0+1,\ -1+0+1) = (1,0) = \underline{\underline{1}}$$

$$j^2: (0,1)\times(0,1) = (0-1,\ 0+0-1) = (-1,-1) = \underline{\underline{-1-j}}$$

b) Vyjadrite definíciu operácie $\times$ v algebraickom tvare, t.j. napíšte vzorec pre výpočet $(a+bj)\times(c+dj)$

$$(a+bj)\times(c+dj) = ac-bd+j(ad+bc-bd)$$

c) Definujme unárnu operáciu * nasledovne:

$$(a+bj)^* = a-b-bj$$

Zistite akým prvkom (v algebraickom tvare) sa rovnajú prvky $((a+bj)^*)^*$ a $(a+bj)\times(a+bj)^*$

1, $((a+bj)^*)^* = (a-b-bj)^* =$
$= a-b+b+bj = \underline{\underline{a+bj}}$

2, $(a+bj)\times(a+bj)^* = (a+bj)\times(a-b-bj) =$
$= \underline{a(a-b)+b^2+j(-ab+b(a-b)+b^2)} = a(a-b)+b^2+j(-ab+ba-b^2+b^2)$
$= a^2-ab+b^2 = \underline{(a-b)^2+ab}$

~~dajný prvok~~

~~d) Napíšte v algebraickom tvare sa rovnajú prvky~~

d) Napíšte v algebraickom tvare inverzný prvok k danému prvku $a+b_j$. Nápoveda. Vyjažite výsledok z C a postupujte analogicky ako v prípade komplexných čísel.

neutrálny prvok?

$$(a+b_j) \times e = a+b_j$$

$$= ae - 0 + j(0 + be - 0$$

$$ae + bej \Rightarrow e = 1$$

$$(a+b_j)(a+b_j)^{-1} = e$$

$ac - bd = 1$

$c = \frac{1}{a} \quad d = \frac{1}{b}$

$$ac - bd + j(ad + bc - bd) = 1$$

~~inverzný prvok a-bj~~

$$\cancel{(a+b_j)(c+b_j)}$$

$$ac - bd + j(d(a-b) + bc) = 1$$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{b}{b} \cdot 1 \quad -1 = 1 \qquad = 0 \quad c = \qquad a^2 + b^2 - 1 = 0 \qquad \frac{1}{a-b} ; +\left(-\frac{1}{b}\right) \quad -\frac{a}{b} - \frac{b}{a-b}$

(5) Nájdite najväčší spoločný deliteľ polynómov $p, q \in Q[x]$, kde
$p = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$
$q = x^3 + x^2 - x - 1$

(6) ~~Obyčajný graf má 17~~ V obyčajnom grafe G o 17 hranách majú všetky párne vrcholy rovnaký stupeň väčší ako 1 a nepárne rovnaký stupeň tiež väčší ako 1. Koľko má graf celkom uzlov, ak vieme, že párnych má 6?

$$\sum st(v) = 2 \cdot |H|$$

$$6 \cdot p + |N| \cdot \underbrace{n}_{\text{nepárne}} = 34$$

p - párne číslo tj 2 alebo 4 (6 už nemôže lebo $6 \cdot 6 = 36 > 34$)

1, (2) $6 \cdot 2 + |N| \cdot n = 34$
$|N| \cdot n = 22$
~~[illegible]~~
$\Rightarrow |N| = 2 \quad n = 11$

2, (4) $6 \cdot 4 + |N| \cdot n = 34$
$|N| \cdot n = 10 \Rightarrow |N| = 2 \quad n = 5$

$\Rightarrow$ nepárne uzly sú 2 $\Rightarrow$ dokopy $\underline{8}$

7. V reálnej rovine $\mathbb{R}^2$ uvažujme normu danú vzťahom $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ a symbolom ρ označme metriku indukovanú touto normou. Znázornite v rovine množinu všetkých bodov (x,y), pre platí $\rho((x,y),(0,0)) = 1$

Maximum $|x|, |y|$ od počiatku je jedna!