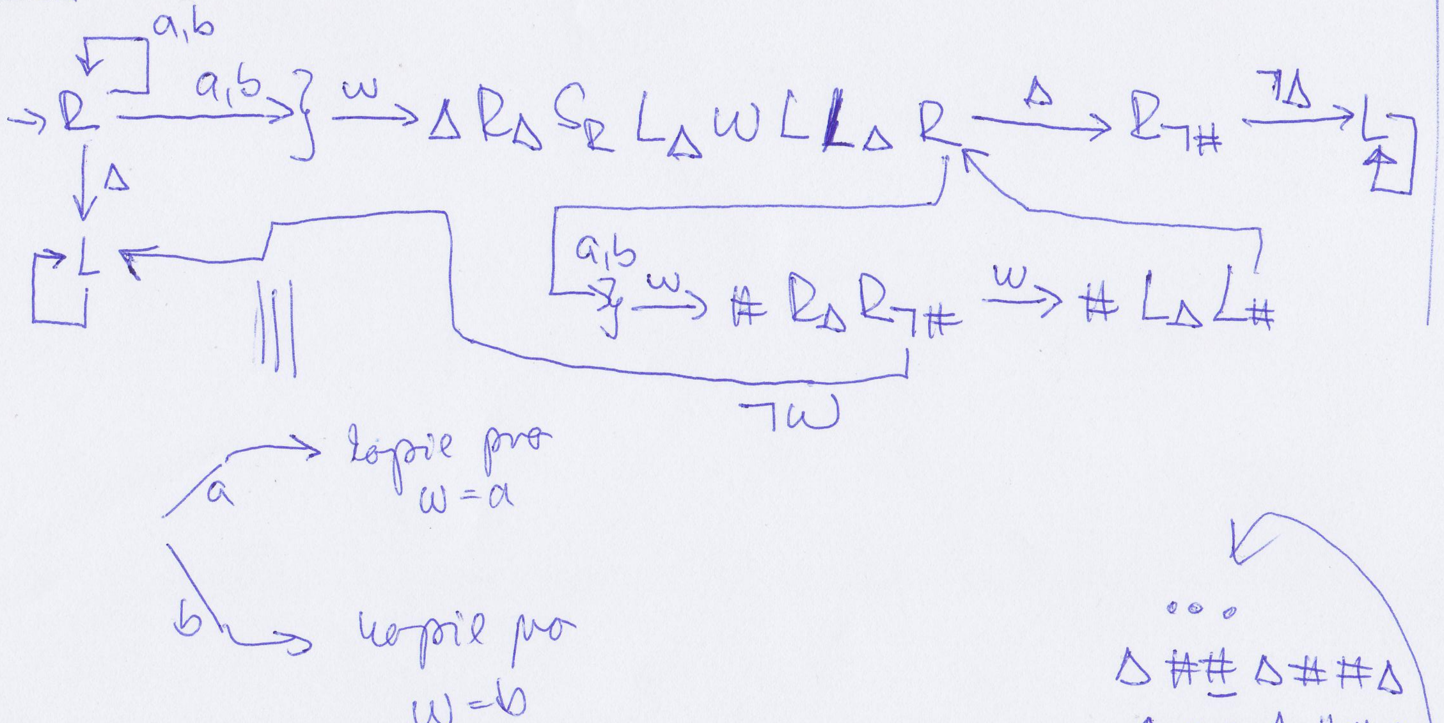
– Sestrojte a zapište komponentním diagramem NTS, který přijímá jazyk $L = \{ ww \mid w \in \{a,b\}^+ \}$.



Δ ababb Δ

Δ ~~ab~~ Δ ~~abb~~ Δ

⋮

Δ ##Δ##bΔ

Δ ##Δ##bΔ

Δ abab Δ ...

Δ ababΔ ...

Δ ababΔ

Δ aba bΔ

Δ abΔ bΔ

Δ abΔ bΔ

Δ abΔ Δb

Δ abΔ Δb Δ ...

Δ abΔ ab Δ ...

Δ abΔ ab Δ

Δ abΔab Δ

Δ ab Δ abΔ

Δ #b Δ abΔ

Δ #b Δ abΔ

Δ #b Δ abΔ

Δ #bΔ #bΔ

Δ #bΔ #bΔ

Δ #bΔ #bΔ

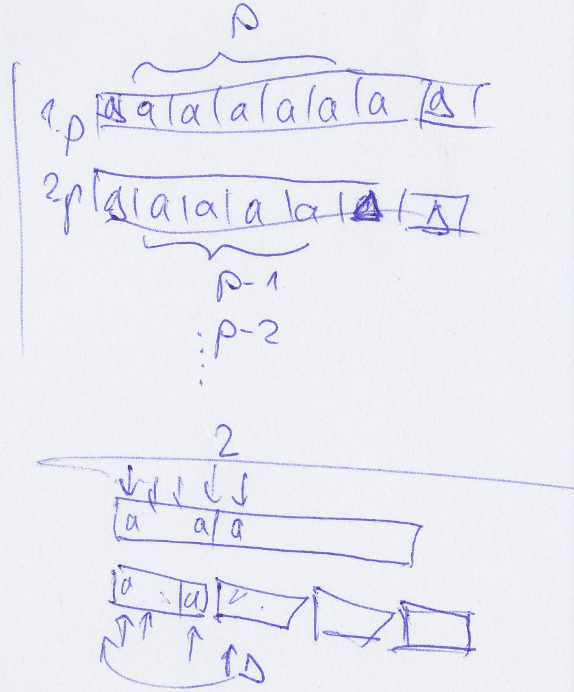
∘∘∘

Δ ##Δ##Δ

Δ ##Δ##Δ

Δ ##Δ##Δ

Sestavte případně vícepáskový TS M takový, že $L(M) = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$. Popište nejprve princip a následně popište komponentním diagramem.



- Princip činnosti:

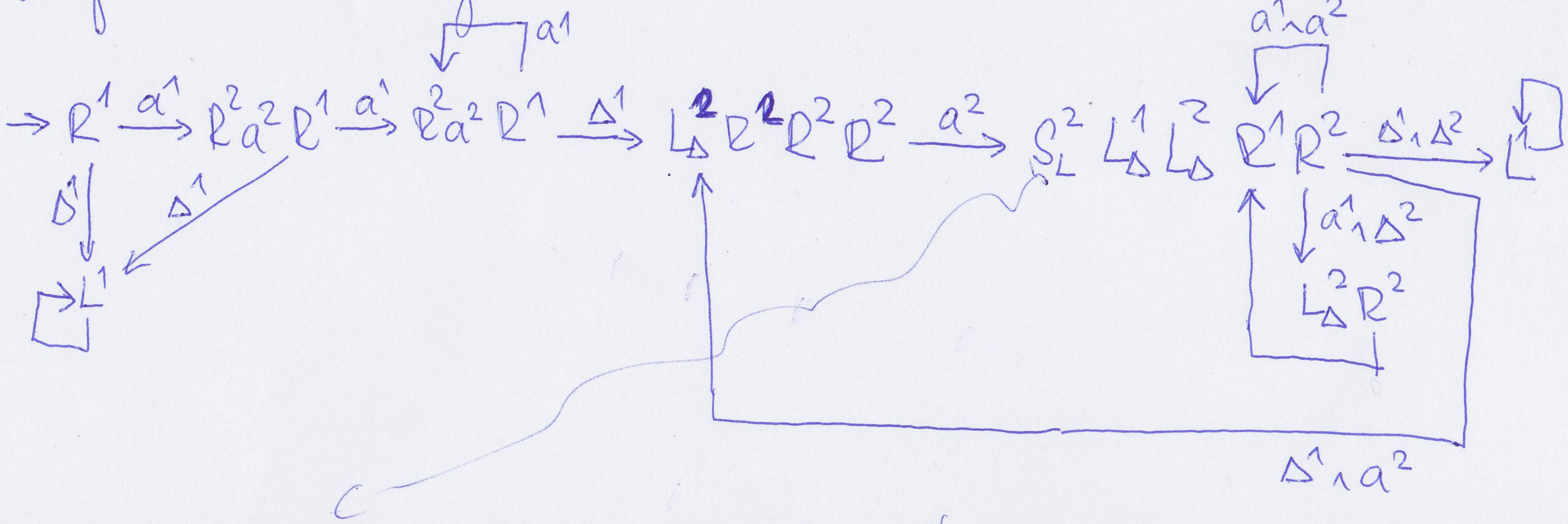
Použijeme 2-páskový TS pracující následovně:

1. Je-li 1. páska prázdná nebo obsahuje-li právě jedno "a", stroj odmítne.
2. Nakopíruje obsah 1. pásky na 2. pásku.
3. Jsou-li na 2. pásce právě 2 symboly "a", přijme.
4. Umaže na 2. pásce jeden symbol "a".
5. Posune obě hlavy na 1. symbol "a" zleva.
6. Synchronizovaně posouvá obě hlavy, dokud obě čtou symbol "a".
7. Pokud na obou páskách čte "Δ", odmítne.
8. Jinak, pokud na 1. pásce čte "a" a na 2. pásce čte "Δ", posune hlavu na 2. pásce na 1. symbol "a" zleva

a pokračuje bodem 6.

9. Final pokračuje bodem 3.

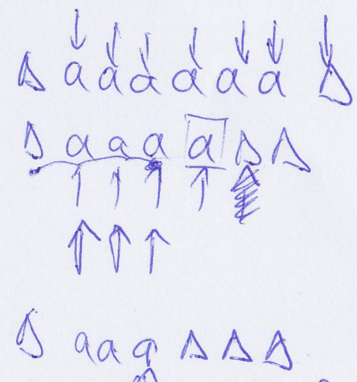
– komponentní diagram:



např. z.p.: $\Delta a a a \underline{a} \boxed{a} \Delta$

S_L: ↓

$\Delta a a a \Delta \Delta$



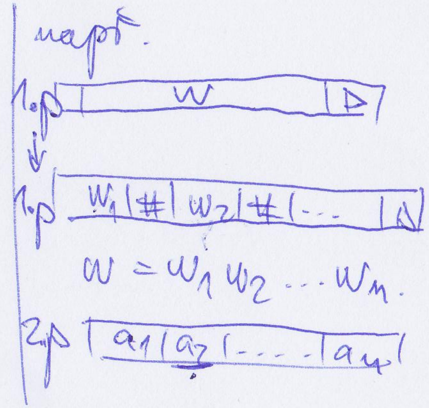
– Ukažte, že třída rek. vyč. jazyků je uzavřená vůči morfismu.

Důkaz (idea):

– Buďiž dán rek. vyč. jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ a morfismus $h: \Sigma^* \to \Delta^*$.

– Víme, že $\exists$ TS M takový, že $L = L(M)$.

- Víme, že $\exists$ konečná f-ce $h_0 : \Sigma \to \Delta^*$ taková, že
  $\forall a \in \Sigma$: $h_0(a) = h(a)$, a pro $\forall$ $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$:
  $h(a_1 \dots a_n) = h_0(a_1) \cdots h_0(a_n)$.
- Ukážeme, že lze sestavit NTS M' takový, že $L(M') = h(L)$.
- NTS M' musí pracovat následovně:
  1. M' projde svou vstupní pásku a nedeterministicky ji rozdělí na $n \geq 0$ podřetězců $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Delta^*$ vložením vhodného symbolu $\# \notin \Delta$, tedy $w = w_1 \cdots w_n$, kde w je vstupní řetězec M'.
  2. M' na druhou pásku zapíše n náhodně zvolených symbolů $a_i \in \Sigma$ $(1 \leq i \leq n)$.
  3. M' projde 2. pásku a pro každé a_i, kde $1 \leq i \leq n$, zkontroluje, zda odpovídající w_i je takové, že $w_i = h_0(a_i)$. To může snadno udělat, protože h_0 je konečná f-ce, kterou M' může mít uloženou v konečném stavovém řízení. Pokud někde dojde k neshodě, odmítne.



4. M' odsimuluje s využitím UTS TS M na své 2. pásce. Pokud M řetězec $a_1 \dots a_n$ přijme, M' přijme, jinak odmítne (příp. cyklí). $\square$

- Je-li $R \in \mathcal{L}_3$ a $L \in \mathcal{L}_0$, je $R \cap L \in \mathcal{L}_3$? Dokažte!

  ($\equiv \forall R \in \mathcal{L}_3 \, \forall L \in \mathcal{L}_0 . \, R \cap L \in \mathcal{L}_3$)

  Neplatí. Důkaz:
  - Zvolme $L \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$. Takový jazyk zcela jistě existuje.
  - Nechť Σ je abeceda L, tedy $L \subseteq \Sigma^*$.
  - Zvolme $R = \Sigma^* \in \mathcal{L}_3$
  - $L \cap R = L \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$, tedy $L \notin \mathcal{L}_3$. $\square$

- Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

  $\forall L \in \mathcal{L}_0 \, \forall R \in \mathcal{L}_3 : L \cup R \in \mathcal{L}_3$.

  Neplatí. Lze ukázat analogicky jako výše, zvolíme-li $L \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}_3$ a $R = \emptyset$.

(NE)ROZHODNUTELNOST

- Dokažte, že pro libovolný TS M je rozhodnutelné, zda má definovány přechody z alespoň 2018 řídících stavů.

Pro připomenutí:

- TS $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$, kde $\Delta \notin \Sigma$, $\Delta \in \Gamma$, $L, R \notin \Gamma$, $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$, $q_F \in Q$

$$\delta : (Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$$

- kódování přechodů TS na řetězce z $\{0,1\}^*$

$$q_1 \xrightarrow{x/y} q_2 \equiv \langle q_1 \rangle 1 \langle x \rangle 1 \langle y \rangle 1 \langle q_2 \rangle,$$

$x \in \Gamma$, $y \in \Gamma \cup \{L, R\}$

kde $\langle q_1 \rangle, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle q_2 \rangle \in \{0\}^*$,

$\langle q_0 \rangle = \varepsilon$, $\langle \Delta \rangle = \varepsilon$

$\langle q_F \rangle = 0$, $\langle L \rangle = 0$

$\langle R \rangle = 00$

- kód TS s přechody $\{t_1, \dots, t_n\}$:

$$1 \langle t_1 \rangle 1 \langle t_2 \rangle 1 \dots 1 \langle t_n \rangle 1$$

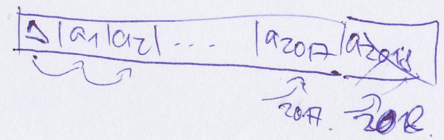
Idea důkazu:

- Uvedený problém lze rozhodovat TS M', který předpokládá, že na vstupu má TS M ve výše uvedeném kódování.
- M' postupuje následovně:

1. Zkontroluje, zda na vstupu je platný kód TS (kontrola odpovídá kontrole členství v reg. jazyce). Pokud ne, odmítne.
2. Prochází vstupní pásku a na ní uvedené kódy přechodů. Pro každý přechod ověří, zda kód výchozího stavu je uveden na 2. pásce. Pokud ne, přepíše ho na 2. pásku, přičemž použije "1" jako oddělovač.
3. Projde 2. pásku, počítá tam uvedený počet stavů (buď na 3. pásce, nebo i v konečném st. řízení) a pokud nalezne 2018 stavů, přijme. Jinak odmítne. □

- Uveďte ideu důkazu, že pro libovolný TS M nad Σ je rozhodnutelné, zda existuje slovo $w \in \Sigma^*$, nad kterým M provede alespoň 2018 kroků.

Idea důkazu:



- Lze užít TS M', který na své pásce postupně systematicky generuje všechna slova $w \in \Sigma^*$ taková, že $|w| \leq 2017$. Na každém z nich přitom M' odsimuluje max 2018 kroků TS M. Pokud M na některém z těchto slov opravdu 2018 kroků provede, M' přijme. Jinak odmítne.
- Tato konstrukce je správná, protože pokud M na žádném ze slov do délky 2017 (včetně) neprovede 2018 kroků, znamená to, že nikdy nenačte 2018. a další symbol pásky. Nemá tedy smysl uvažovat slova délky 2018 a delší. □

- Dokažte, že problém rozhodování, zda jazyk libovolného daného TS M je neprázdný, tedy $L(M) \neq \emptyset$, je částečně rozhodnutelný!

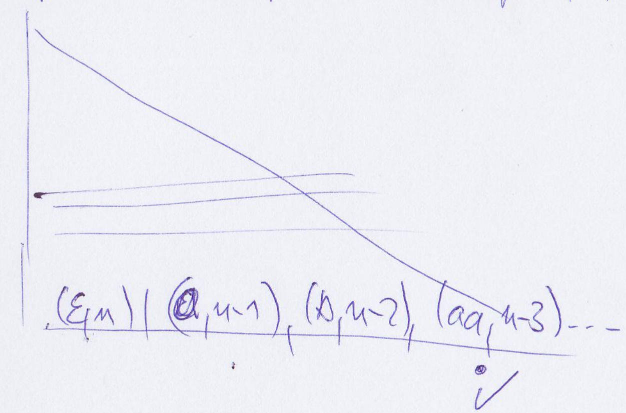
Idea důkazu:

- K částečnému rozhodování uvedeného problému lze užít TS M', který na své pásce simuluje běh TS M pro jednotlivé možné vstupní řetězce např. v lexikogr. usp.
- M' nemůže jen systematicky generovat vstupy M a na nich nechat M neomezeně běžet — hrozí zacyklení.
- M' ale může mít na své pásce současně rozběhnutou simulaci běhu M pro libovolný počet vstupních řetězců, jednotlivé konfig. pásky budou vhodně odděleny.
- M' může vždy projít všechny aktuálně rozběhnuté simulace a u každé provést 1 krok. Pokud v některém případě dojde k přijetí, přijme, jinak přidá počát. konfig. pro další řetězec a celou činnost opakuje.

konfigurace M(ε, 0) #

konf.$_M$(ε, 1) # konf.$_M$("a", 0) #

konf.(ε, 2) # konf.("a", 1) # konf("b", 0)



$\square$