L ji lineární prostor nad tělesem T $\iff$

- $(L, +)$ ji komutativní grupa
- $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$ ~~$\alpha \in L$ $\beta \in L$ $x \in T$~~ $\alpha, \beta \in T$ $x \in L$
- $1 \cdot x = x$ $1 \in T$ $x \in L$
- distributivní zákony

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta x$$

„+ na T" „+ na L"

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$x, y \in L$
$\alpha, \beta \in T$

L je normovaný $\iff$ ②

$\| \ \| : L \to \mathbb{R}_0^+$

* $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ ... θ je neutrální prvek $(L,+)$
* $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

KAŽDÝ NORMOVANÝ PROSTOR L s normou $\| \ \|$ JE METRICKÝM PROSTOREM S METRIKOU

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

$\mathbb{R}^n$: KLASICKÁ NORMA

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

③

* Nechť X je množina zboží
* c je cenová funkce $c: X \to \mathbb{R}^+$

$$L = \{ k \mid k: X \to \mathbb{N}_0 \}$$

$$k_1 + k_2 (x) = k_1(x) + k_2(x)$$

uvažujme těleso $T = \mathbb{Z}$

---

1) uzavřené

$k_1 \in L \quad k_2 \in L$

$k_1 + k_2 \overset{?}{\in} L$ ANO

2) ASOCIATIVITA – platí
3) KOMUTATIVITA – platí

$\}$ + je def. na základě + v $\mathbb{N}_0$

4) $\Theta = k_0$: $k_0(x) = 0$ pro $\forall x \in X$.

INVERZNÍ PRVKY
— NEJSOU

$\Rightarrow L, +$ není lin. prostor

$L' = \{ k \mid k : X \to \mathbb{Z} \}$

$L', +$ je komutativní grupa

$\alpha \in \mathbb{Z}$ a $x \in L'$ definujeme operaci

$\cdot : \mathbb{Z} \times L' \to L'$

$(\alpha \cdot k)(x) = \alpha \cdot (k(x))$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$ ✓

$1 \cdot x = x$

$$\boxed{\|k\| = \sum_{i \in X} |k(i) \cdot c(i)|}$$

(5)

$\|k\| = 0 \iff k = \circledcirc$

„$\Leftarrow$"

$k = \circledcirc \Rightarrow \|k\| = \sum_{i\in X} |0 \cdot c(i)| = 0$

„$\Rightarrow$" $\|k\| = 0 \Rightarrow \sum_{i\in X} |k(i)\cdot c(i)| = 0 \iff \forall i \in X.\ k(i) = 0 \iff k = \circledcirc$

2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\|\alpha \cdot k\| = \sum_{i\in X} |\alpha \cdot k(i) \cdot c(i)| = \sum_{i\in X} |\alpha| \cdot |k(i)\cdot c(i)| = |\alpha| \cdot \sum_{i\in X} |k(i)\cdot c(i)| =$

$|\alpha| \cdot \|k\|$

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|k_1 + k_2\| = \sum_{i\in X} |(k_1(i) + k_2(i)) \cdot c(i)| = \sum_{i\in X} |k_1(i)\cdot c(i) + k_2(i)\cdot c(i)| \leq$

$|A+B| \leq |A| + |B|$

$\sum_{i\in X} |k_1(i)\cdot c(i)| + |k_2(i)\cdot c(i)| = \sum_{i\in X} |k_1(i)\cdot c(i)| + \sum_{i\in X} |k_2(i)\cdot c(i)| =$

$= \|k_1\| + \|k_2\|$

Dokažte, že pro $V = \mathbb{R}^2$ je funkce $\|(a,b)\| = \max\{|2\cdot a|, |3\cdot b|\}$ je NORMOU.

(6)

1) $\forall x \in V. \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$

$\Theta = (0,0)$

„$\Leftarrow$"

$\|(0,0)\| = \max\{|2\cdot 0|, |3\cdot 0|\} = \max\{0\} = 0$

„$\Rightarrow$"

$\|(a,b)\| = 0 \Rightarrow \max\{|2\cdot a|, |3\cdot b|\} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

2) $\forall x \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\|\alpha\cdot x\| = \|\alpha\cdot(a,b)\| = \max\{|\alpha\cdot 2\cdot a|, |\alpha\cdot 3\cdot b|\} = |\alpha|\cdot \max\{|2\cdot a|, |3\cdot b|\}$

$= |\alpha| \cdot \|(a,b)\|$

3) $\forall x,y \in V : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|(a,b)+(c,d)\| = \|(a+c, b+d)\| = \max\{|2\cdot(a+c)|, |3\cdot(b+d)|\} =$

$= \max\{|2\cdot a + 2\cdot c|, |3\cdot b + 3\cdot d|\} \leq$ $|A+B| \leq |A| + |B|$

$$\leq \max\{|2a|+|2c|,\ |3b|+|3d|\} \leq \max\{|2a|, |3b|\} + \max\{|2c|+|3d|\}$$

$$= \|(a,b)\| + \|(c,d)\|$$

Ukažte, že pro lineární prostor V spojitých funkcí

je $\|f\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)|$ je norma

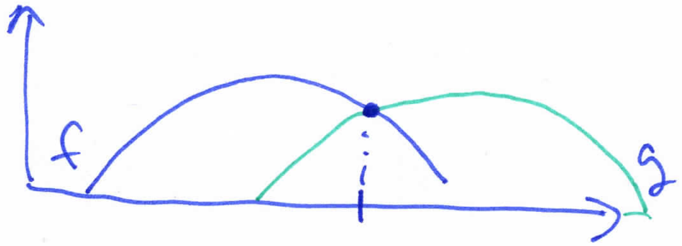
1) $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0$

„$\Rightarrow$" $\|f\| = 0 \Rightarrow \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pro $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$

„$\Leftarrow$" $f(x) = 0 \Rightarrow \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| = 0 \Rightarrow \|f\| = 0$

2) $\|\alpha \cdot f\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |\alpha \cdot f(x)| = |\alpha| \cdot \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\|$

3) $\|f + g\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) + g(x)| \le \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| + |g(x)| \le \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| + \max\limits_{0 \le x \le 1} |g(x)|$



$= \|f\| + \|g\|$

~~Podprostor~~ L' ~~ta~~ je podprostorem lin. prostoru L $\Leftrightarrow$

1) $(L', +)$ je podgrupa $(L, +)$

2) $\forall \alpha \in T \; \forall x \in L' : \alpha \cdot x \in L'$

- uvažujme lin. prostor $\mathbb{R}^4$
- ukažte, že $L' = \{(a, b, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podprostor $\mathbb{R}^4$

1) L' je uzavřený na $+$

$$(a_1, b_1, c_1, 0) + (a_2, b_2, c_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, 0) \in L'$$

uzavřené ✓

2) NEUTRÁLNÍ PRVEK JE V L'
$(0, 0, 0, 0) \in L'$

3) EXISTUJÍ INV. PRVKY V L'

$$(a_1, a_2, a_3, 0)^{-1} = (-a_1, -a_2, -a_3, 0) \in L'$$

4) $\forall \alpha \in T \ \forall x \in L' : \alpha \cdot x \in L'$

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, a_3, 0) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3, 0) \in L'$$

L' je podprostorem L

10

MNOŽINA VEKTORŮ $\{x_1, \dots, x_n\}$ je lin. závislá $\Leftrightarrow$ 11

$\exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in T$ t. ž. alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$

a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0$

$$x_1 = -\frac{\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Prostor je dimenze alespoň n

$\Leftrightarrow$ existuje ~~m~~ alespoň n lin. nezávislých vektorů

SKALÁRNÍ SOUČIN V REÁLNÉM LINEÁRNÍM PROSTORU R JE ZOBRAZENÍ

$$(-,-) : R \times R \to \mathbb{R}$$

* $(x,y) = (y,x)$
* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
* $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$
* $(x,x) \geq 0$
* $(x,x) = 0 \iff x = \theta$

LINEÁRNÍ PROSTOR SE SKALÁRNÍM SOUČINEM JE UNITÁRNÍ PROSTOR

- NORMA JE DEF. JAKO $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

13

Nechť P_2 je VP všech polynomiálních funkcí stupně nejvýše 2.

Rozhodněte, zda
$$[f,g] = f(1)\cdot g(1) + f(3)\cdot g(3) = f(5)\cdot g(5) = \sum_{i=1}^{3} f(2i-1)\cdot g(2i-1)$$
je skalární součin.

1) $[f,g] = [g,f]$

· je komutativní na $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ platí

2) $(x_1+x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$

$$[f_1+f_2,g] = \sum_{i=1}^{3}\left(f_1(2i-1)+f_2(2i-1)\right)\cdot g(2i-1) =$$
$$\sum_{i=1}^{3} f_1(2i-1)\cdot g(2i-1) + \sum_{i=1}^{3} f_2(2i-1)\cdot g(2i-1) =$$
$$= [f_1,g] + [f_2,g]$$

$[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$

$[\lambda \cdot f, g] = \sum_{i=1}^{3} \lambda f(2i-1) \cdot g(2i-1) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{3} f(2i-1) \cdot g(2i-1)$

$= \lambda \cdot [f, g]$

$[x, x] \geq 0$

$[f, f] = \sum_{i=1}^{3} f(2i-1) \cdot f(2i-1) = \sum_{i=1}^{3} [f(2i-1)]^2 \geq 0$

"$\Leftarrow$"

"$f = 0$"

$[f, f] = \sum_{i=1}^{3} 0 \cdot 0 = 0$

$[x, x] = 0 \Leftarrow x = \Theta$

15

"$\Rightarrow$" $[f,f]=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} f(2i-1)^2 = 0 \Rightarrow f^2(1)=0 \wedge f^2(3)=0 \wedge f^2(5)=0$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$0 = f(1) = a_0 + a_1 + a_2$$
$$0 = f(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2$$
$$0 = f(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2$$

POKUD ŘEŠENÍ JE JEDINNÉ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ TAK $[f,f]=0 \Rightarrow f = \Theta$

V TOMTO PŘÍPADĚ JE JEDINNÉ ŘEŠENÍ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$\Rightarrow [f,g]$ je skalární součin.

BÁZE VP L je $\{x_n\}$ t. ž.

- lin. nezávislá
- $\forall x \in L \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n . \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$

POKUD L je UNITÁRNÍ PROSTOR TAK BÁZE $\{x_n\}$ JE ORTOGONÁLNÍ

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 \iff i \neq j \\ k,\ \underline{k > 0} \quad i = j \end{cases}$$

BÁZE JE ORTONORMÁLNÍ

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 \iff i \neq j \\ \boxed{1} \iff i = j \end{cases}$$

Na prostoru $\mathbb{R}^4$ s kanonickým skalárním součinem

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_i x_i y_i$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (3,3,-1,-1)$, $u_3 = (-2,0,6,8)$

1) NAJDEME ORTOGONÁLNÍ BÁZI
2) ZKRÁTÍME / PRODLOUŽÍME VEKTORY ORTOGONÁLNÍ BÁZE

$$B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$[b_1, b_2] = 0 \wedge [b_2, b_3] = 0 \wedge [b_3, b_1] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= u_1 = (1,1,1,1) \\ b_2 &= u_2 - \lambda b_1 \end{aligned}\right\} \quad 0 = [b_1, b_2] = [b_1, u_2 - \lambda b_1] = [b_1, u_2] - \lambda \cdot [b_1, b_1]$$

$$\lambda = \frac{[b_1, u_2]}{[b_1, b_1]}$$

$$[b_1, u_2] = 3 + 3 - 1 - 1 = 4$$

$$[b_1, b_1] = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\lambda = \frac{4}{4} = 1$$

$$b_2 = (3, 3, -1, -1) - (1, 1, 1, 1) = (2, 2, -2, -2)$$

$$b_3 = ?$$

$$b_3 = u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1$$

$$0 = [b_1, b_3] = [b_1, u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1] = [b_1, u_3] - \overbrace{\lambda_2 [b_1, b_2]}^{=0} - \lambda_1 [b_1, b_1]$$

$$0 = [b_2, b_3] = [b_2, u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1] = [b_2, u_3] - \lambda_2 [b_2, b_2] - \underbrace{\lambda_1 [b_2, b_1]}_{=0}$$

$$\lambda_1 = \frac{[b_1, u_3]}{[b_1, b_1]} = \frac{12}{4} \qquad \lambda_2 = \frac{[b_2, u_3]}{[b_2, b_2]} = \frac{-32}{16}$$

DOSAZENÍ KONKRÉTNÍCH VEKTORŮ

~~18~~ 19

$$\boxed{\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2}$$

$$b_3 = u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1 = (-2, 0, 6, 8) + 2 \cdot (2, 2, -2, -2) - 3(1, 1, 1, 1) =$$
$$= (-1, 1, -1, 1)$$

MÁME ORTOGONÁLNÍ BÁZI

$$b_1 = (1, 1, 1, 1)$$
$$b_2 = (2, 2, -2, -2)$$
$$b_3 = (-1, 1, -1, 1)$$

$$\overline{b_1} = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{[b_1, b_1]}} = \frac{b_1}{2}$$

$$\overline{b_2} = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{b_2}{\sqrt{[b_2, b_2]}} = \frac{b_2}{4}$$

$$\overline{b_3} = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{b_3}{\sqrt{[b_3, b_3]}} = \frac{b_3}{2}$$

$$\overline{b_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \overline{b_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad b_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$