Petriho sítě

PES 2007/2008

Prof. RNDr. Milan Češka, CSc.

ceska@fit.vutbr.cz

Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

vojnar@fit.vutbr.cz

Sazba: Ing. Petr Novosad, Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

(verze 06.04.2010)

FIT, VUT v Brně, Božetěchova 2, CZ-612 66 Brno

Jazyky Petriho sítí

1. Základní pojmy

Formálně lze pojem jazyka Petriho sítě zavést s využitím zobecněné přechodové funkce Petriho sítě:

❖ **Definice 1**: Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť a $[M_0\rangle$ její množina dosažitelných značení. *Přechodovou funkcí* Petriho sítě N nazveme funkci δ:

$$\boxed{\begin{array}{c}\delta\colon [M_0\rangle \times T \rightarrow [M_0\rangle, \text{ pro kterou} \\ \forall t \in T\colon\ \forall M, M' \in [M_0\rangle\colon\ \delta(M,t) = M' \overset{def.}{\Longleftrightarrow} M[t\rangle M'\end{array}}$$

Přechodová funkce δ může být zobecněna na posloupnosti přechodů:

$$\boxed{\delta\colon [M_0\rangle \times T^* \rightarrow [M_0\rangle}$$

takto:

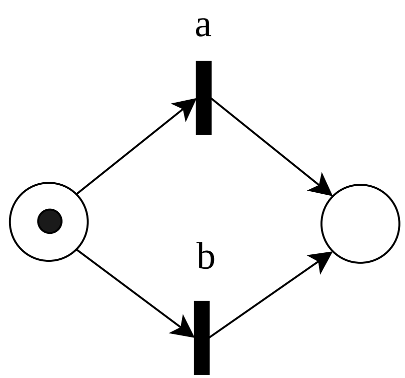
$$\boxed{\begin{array}{l}\delta(M, t\tau) = \delta(\delta(M,t),\tau), \tau \in T^*, t \in T \\ \delta(M, \varepsilon) = M, \text{ kde } \varepsilon \text{ je prázdný řetězec}\end{array}}$$

Posloupnost (řetězec) $\tau \in T^+$ nazveme *výpočetní posloupností* sítě N, je-li definována hodnota $\delta(M_0, \tau)$.

Množina všech výpočetních posloupností Petriho sítě N je základem pro definici *jazyka Petriho sítě*.

❖ **Příklad 1**:

N:



$L(N) = \{\varepsilon, a, b\}$

Definice jazyků Petriho sítí

Vedle množiny přechodů T zavedeme *abecedu Petriho sítě* Σ a zobrazení $\lambda\colon T \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, které každému přechodu sítě přiřadí symbol abecedy Σ nebo prázdný symbol ε. Zobrazení λ budeme nazývat *ohodnocením přechodů* (labeling) a příslušnou Petriho síť *ohodnocenou Petriho sítí* .

Podle tvaru zobrazení λ rozlišujeme 3 typy ohodnocených Petriho sítí:

1. Nejomezenější typ je dán injektivním ohodnocením $\lambda\colon T \to \Sigma$:

   $$\forall t, t' \in T\colon\ \lambda(t) = \lambda(t') \quad \Rightarrow \quad t = t'$$

   Tyto sítě jsou označované jako *free-labeled Petri nets*.
2. Druhý typ nepřipouští ohodnocení prázdným symbolem ε:

   $$\lambda\colon T \to \Sigma$$
3. Třetí typ připouští libovolné ohodnocení:

   $$\lambda\colon T \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

Počáteční stav a počáteční místo Petriho sítě

Dosud jsme za počáteční stav Petriho sítě považovali libovolné značení M_0. Pro operace nad jazyky Petriho sítí je vhodné, aby počáteční stav byl spojen se značkou v jediném speciálním místě - *počátečním (startovacím) místě* p_s:

$$M_0(p_s) = 1 \quad \wedge \quad \forall p \in P \setminus \{p_s\} : \; M_0(p) = 0$$

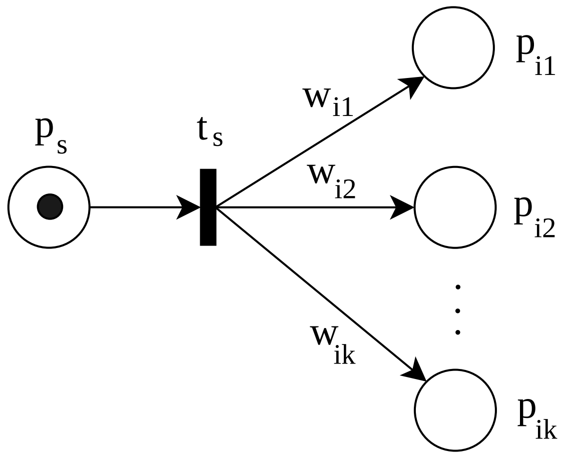
Ukážeme, že tato modifikace fakticky neomezuje výběr počátečního stavu Petriho sítě.

❖ Popis transformace

Uvažujme libovolnou Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$. Ekvivalentní síť $N' = (P', T', F', W', K', M_0')$ s počátečním místem p_s vytvoříme takto:

1. $P' = P \cup \{p_s\}$
2. $T' = T \cup \{t_s\}$
3. $F' = F \cup F_{t_s}$, kde $F_{t_s} = \{< p_s, t_s >\} \;\cup\; \{< t_s, p > \mid M_0(p) \neq 0\}$
4. W' je rozšíření váhové funce W:
   $W'(p_s, t_s) = 1 \;\wedge\; W'(t_s, p) = k \Leftrightarrow M_0(p) = k,\; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
5. K' je rozšíření K: $K'(p_s) = 1$
6. M_0': $P \cup \{p_s\} \rightarrow \mathbb{N},\; M_0'(p_s) = 1 \;\wedge\; \forall p \in P\colon\; M_0'(p) = 0$

❖ **Příklad 2**: Počáteční místo Petriho sítě



Na počátku je proveditelný pouze přechod t_s. Množiny výpočetních posloupností sítí N a N' se liší pouze tím, že každá výpočetní posloupnost sítě N' začíná symbolem t_s. Při ohodnocení $\lambda'(t_s) = \varepsilon$ a $\forall t \in T\colon\ \lambda'(t) = \lambda(t)$ jsou jazyky sítí N a N' shodné.

Koncové stavy a typy jazyků Petriho sítě

V závislosti na konceptu koncového stavu sítě byly definovány 4 typy jazyků Petriho sítí:

$$\boxed{\mathbf{L}, \mathbf{G}, \mathbf{T}, \mathbf{P}}$$

❖ **Definice 2**: Nechť N je Petriho síť s počátečním značením M_0, s ohodnocením přechodů $\lambda\colon T \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, s přechodovou funkcí $\delta\colon [M_0\rangle \times T^* \to [M_0\rangle$ a s množinou koncových stavů (značení) $Q_f \subseteq [M_0\rangle$.

Jazyk $L(N) \subseteq \Sigma^*$ Petriho sítě N definovaný jako

$$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) |\ \alpha \in T^* \quad \wedge \quad \delta(M_0, \alpha) \in Q_f\}}$$

se nazývá *jazykem typu* $\mathbf{L}$.

Tato definice není zcela v souladu se základní filozofií Petriho sítí, speciálně s pravidly provádění přechodů sítě. Je-li přechodová funkce $\delta(M, t)$ definována pro značení M, pak je také definována $\delta(M', t)$ pro každé $M' \geq M$.

❖ **Definice 3**: Nechť N je Petriho síť s počátečním značením M_0, s ohodnocením přechodů λ, s přechodovou funkcí δ a s množinou koncových stavů Q_f. Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

$$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) |\ \alpha \in T^* \quad \wedge \quad \exists M_f \in Q_f :\ \delta(M_0, \alpha) \geq M_f\}}$$

se nazývá *jazykem typu* $\mathbf{G}$.

❖ **Definice 4**: Nechť N je Petriho síť s počátečním značením M_0, s ohodnocením přechodů λ a přechodovou funkcí δ.

1. Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

   $$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) |\ \alpha \in T^* \ \wedge \ \delta(M_0, \alpha) \in [M_0\rangle \quad \wedge \quad \forall t \in T :\ \delta(\delta(M_0, \alpha), t) = \underline{\text{nedef.}}\}}$$

   se nazývá *jazykem typu* $\mathbf{T}$.

2. Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

   $$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) |\ \alpha \in T^* \quad \wedge \quad \delta(M, \alpha) \in [M_0\rangle\}}$$

   se nazývá *jazykem typu* $\mathbf{P}$.

Uvažujeme-li nyní,že pro každou ze tříd $\mathbf{L}$ až $\mathbf{P}$ mohou být vymezeny tři třídy jazyků Petriho sítí podle typu ohodnocení λ, dostáváme celkem dvanáct specifických tříd. Mezi těmito třídami existují vztahy vyjádřitelné množinovou inkluzí.

❖ **Příklad 3**: Třídy jazyků Petriho sítí podle typu ohodnocení λ a jejich vzájemné vztahy

$$
\begin{tikzcd}
T^e \arrow[r] \arrow[d, bend right] & T \arrow[r] & T^f \\
L^e \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, bend right] & L \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & L^f \\
G^e \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G^f \arrow[d] \\
P^e \arrow[r] & P \arrow[r] & P^f
\end{tikzcd}
$$

Orientovaná hrana z A do B vyjadřuje inkluzi $B \subseteq A$.

Základní vztahy:

$$L^f \subseteq L \subseteq L^\varepsilon$$

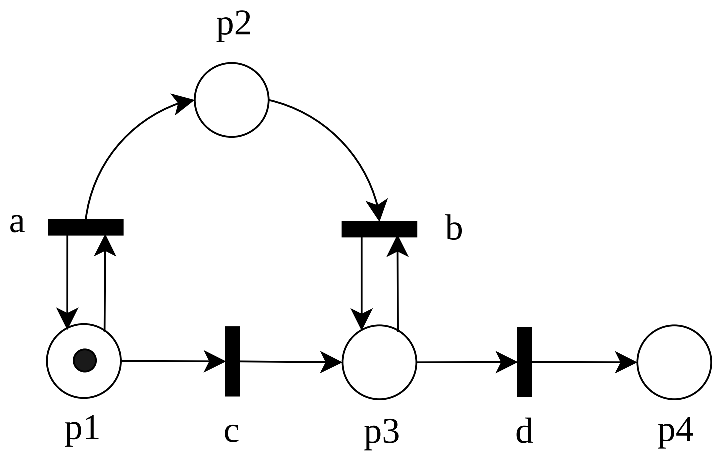
$$G^f \subseteq G \subseteq G^\varepsilon$$

$$T^f \subseteq T \subseteq T^\varepsilon$$

$$P^f \subseteq P \subseteq P^\varepsilon$$

$\mathcal{L}^\varepsilon$, resp. $\mathcal{L}$, resp. $\mathcal{L}^f$ značí třídu jazyků s ohodnocením $\lambda\colon T \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, resp. $\lambda\colon T \to \Sigma$, resp. $\lambda\colon T \to \Sigma$ s injektivním λ (free-labeled).

❖ **Příklad 4**: Ilustrace různých typů jazyků Petriho sítí



Uvažujme: $Q_f = \{(0,0,1,0)\}$ *a* $M_0 = (1,0,0,0)$

L-typ: $L = \{a^n c\, b^n \,|\, n \geq 0\}$

G-typ: $L = \{a^m c\, b^n \,|\, m \geq n \geq 0\}$

T-typ: $L = \{a^m c\, b^n d \,|\, m \geq n \geq 0\}$

P-typ: $L = \{a^m \,|\, m \geq 0\} \cup \{a^m c\, b^n \,|\, m \geq n \geq 0\} \cup \{a^m c\, b^n d \,|\, m \geq n \geq 0\}$

2. Vlastnosti jazyků Petriho sítí typu L

❖ **Definice 5**: Petriho síť $N = (P, T, F, W, M_0, p_s, \Sigma, \lambda, P_f, Q_f)$ nazveme *ohodnocenou Petriho sítí ve standardním tvaru*, jestliže:

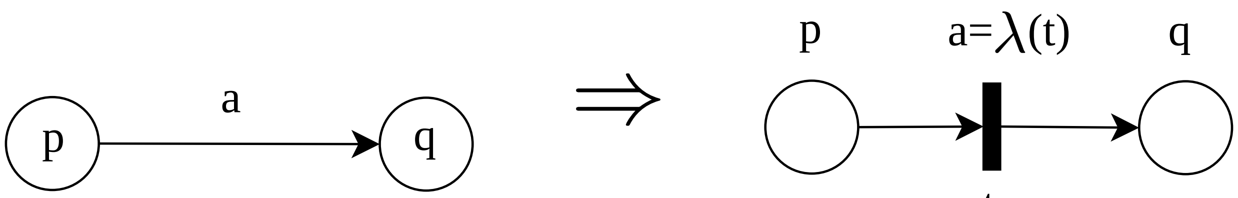
1. Složky $P, T, F, W, M_0, \Sigma, Q_f$ mají dosud užívaný význam
2. $p_s \in P$ je počáteční místo takové, že
   (a) $M_0(p_s) = 1 \quad \wedge \quad \forall p \in P \setminus \{p_s\}\colon\ M_0(p) = 0$
   (b) $\forall t \in T\colon\ < t, p_s > \notin F$
3. $\lambda\colon T \to \Sigma$ je ohodnocení přechodů sítě
4. $P_f \subseteq P$ je množina koncových míst
   (a) $P_f = \begin{cases} \{p_f, p_s\}, \text{ jestliže } \varepsilon \in L(N) \\ \{p_f\}, \text{ jestliže } \varepsilon \notin L(N) \end{cases}$
   (b) $\forall t \in T\colon\ < p_f, t > \notin F$
   (c) Je-li $M(p_f) > 0$ pro nějaké $M \in [M_0\rangle$, pak $\delta(M, t)$ je nedefinována pro všechna $t \in T$

Vztah jazyků Petriho sítí k Chomského hierarchii jazyků

❖ **Věta 11**: Každý regulární jazyk je jazykem generovaným Petriho sítí.

Důkaz:
Je třeba ukázat, že ke každému konečnému automatu M lze sestrojit ohodnocenou Petriho síť N tak, že $L(M) = L(N)$.

Princip konstrukce:

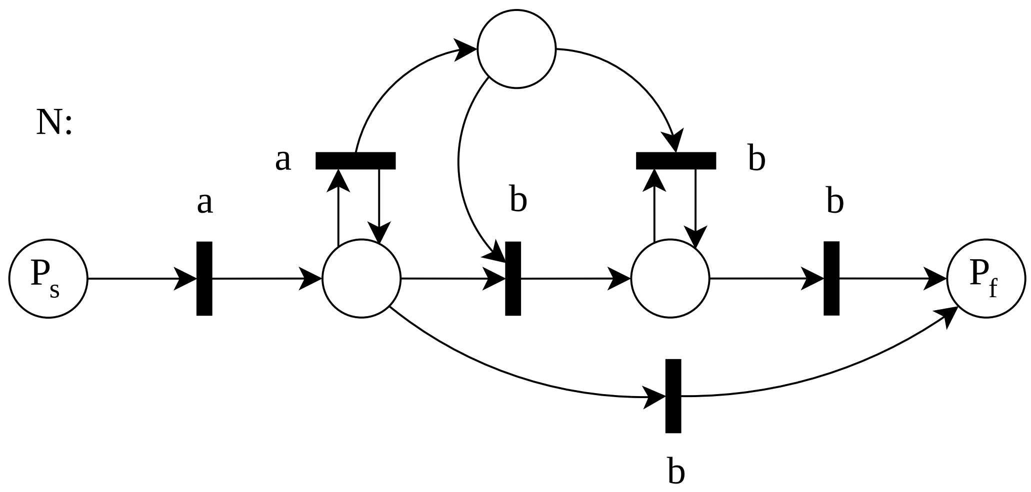


$Konečný\ automat$ $\Rightarrow$ $Petriho\ síť$

$\square$

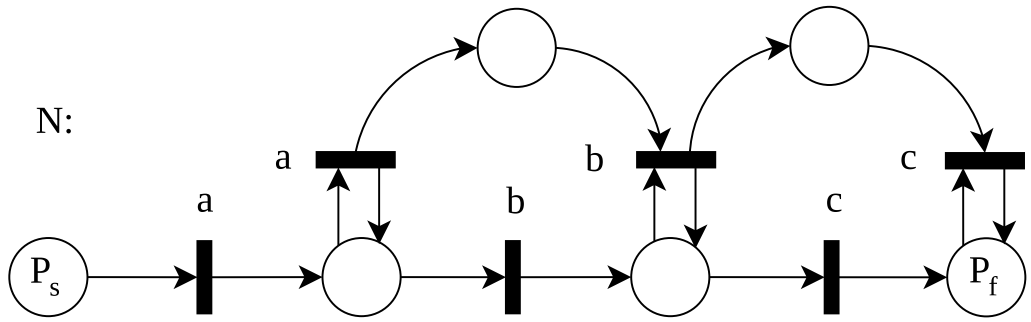
Studujme nyní vztah jazyků Petriho sítí k vyšším třídám Chomského hierarchie.

- **Příklad 11**:



$$L(N) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

- **Příklad 12**:



$$L(N) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

❖ **Lemma 1**: Jazyk $L = \{w\, w^R |\; w \in \Sigma^*\}$ není jazykem Petriho sítí.

Důkaz:
Nejprve odvodíme nutnou podmínku pro mohutnost stavového prostoru Petriho sítě generující jazyk L a pak ukážeme, že tato podmínka nemůže být splněna.

Předpokládejme tedy, že existuje Petriho síť N taková, že $L = L(N)$. Nechť $|\Sigma| = k$, $k > 1$ a uvažujme řetězec $xx^R \in L$, $|x| = r$. Protože existuje k^r různých možných řetězců x, musí stavový prostor Petriho sítě N obsahovat alespoň k^r různých stavů (dostupných značení) tak, aby provedení r přechodů generujících řetězec x vedlo k jednoznačnému "zapamatování" struktury řetězce x. Skutečně, pokud bychom disponovali menším počtem stavů, pak by pro jisté řetězce x_1 a x_2 platilo $\delta(M_0, x_1) = \delta(M_0, x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$. Pak ale

$$\delta(M_0, x_1 x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_1), x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_2) x_2^R) = \delta(M_0, x_2 x_2^R) \in Q_f$$

a tedy by platilo $x_1 x_2^R \in L$ pro $x_1 \neq x_2$, což je spor s definicí jazyka L.

Důkaz: (pokračování)
Nyní však ukážeme, že podmínka, aby provedení výpočetní posloupnosti délky r aktualizovalo libovolný ze stavů množiny o mohutnosti k^r, je nesplnitelná. Uvažujme takovouto výpočetní posloupnost:

$$M_0[t_1\rangle M_1[t_2\rangle \ldots [t_r\rangle M_r$$

a předpokládejme, že množina přechodů T Petriho sítě N má mohutnost $|T| = m$.

Značení M_r můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$M_r = M_0 + \underline{N}.u$$

kde $\underline{N}$ je matice změn Petriho sítě a u je vektor $u: \ T \to \mathbb{N}$ se složkami

$$u(t) = |\ \{i \mid \ t_i = t \ \ \wedge \ \ 1 \leq i \leq r\}\ |$$

Zřejmě platí:

$$\sum_{t \in T} u(t) = r$$

Důkaz: (pokračování)
V nejlepším případě každý z vektorů u splňující tuto podmínku generuje různý stav M_r.
K vyčíslení počtu různých vektorů u použijeme vztah pro počet rozkladů čísla $r \in \mathbb{N}$ na m nezáporných celočíselných členů (dávající v součtu r), který je roven kombinačnímu číslu:

$$\left(\begin{array}{c} r+m-1 \\ m-1 \end{array} \right)$$

Protože

$$\left(\begin{array}{c} r+m-1 \\ m-1 \end{array} \right) = \frac{(r+m-1)\ldots(r+1)}{(m+1)!} < (r+m)^m$$

je počet dosažitelných stavů po provedení r přechodů ostře menší než $(r+m)^m$. Pro dostatečně velké r pak platí $(r+m)^m < k^r$ a nutná podmínka pro generování řetězce xx^R tedy není splněna (spor s požadovanou velikostí stavového prostoru). Jazyk L tedy není jazykem Petriho sítí. $\square$

Důkaz: (pokračování)

Závěr:
Nekompatibilita stavových prostorů Petriho sítí a zásobníkových automatů:

- Petriho sítě - kombinatoricky rostoucí počet dostupných stavů
- Zásobníkové automaty - exponenciálně rostoucí počet dostupných stavů

Na druhé straně *odlišnosti v řízení* :

- Petriho sítě - libovolný čítač (místo)
- Zásobníkové automaty - vrchol zásobníku

❖ **Věta 13**: Všechny jazyky Petriho sítí jsou kontextové jazyky.

Důkaz:
Ukažme, že jazyk L Petriho sítě N může být přijímán lineárně omezeným Turingovým strojem.

Nechť páska Turingova stroje uchovává momentální značení každého místa Petriho sítě N. Po přečtení vstupního symbolu je simulováno provedení příslušného přechodu, tj. změna značení některých míst. Kvantifikujme využívanou část pásky celkovým součtem S všech značek všech míst a zkoumejme, jak se tento součet mění v závislosti na délce vstupního řetězce.
Nechť vstupnímu řetězci délky $k \geq 1$ odpovídá výpočetní posloupnost $t_1 t_2 \dots t_k$ provedených přechodů Petriho sítě N. Označme d_t počet značek, kterým přispívá přechod t (jeho provedení) k celkovému počtu značek sítě. Zřejmě platí:

$$d_t = \sum_{p \in t^\bullet} W(t,p) - \sum_{p \in {}^\bullet t} W(p,t)$$

Důkaz: (pokračování)
Pak počet značek S po provedení výpočetní posloupnosti $t_1 \ldots t_k$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$S = 1 + \sum_{i=1}^{k} d_{t_i}$$

Z definice Petriho sítě plyne existence maxima:

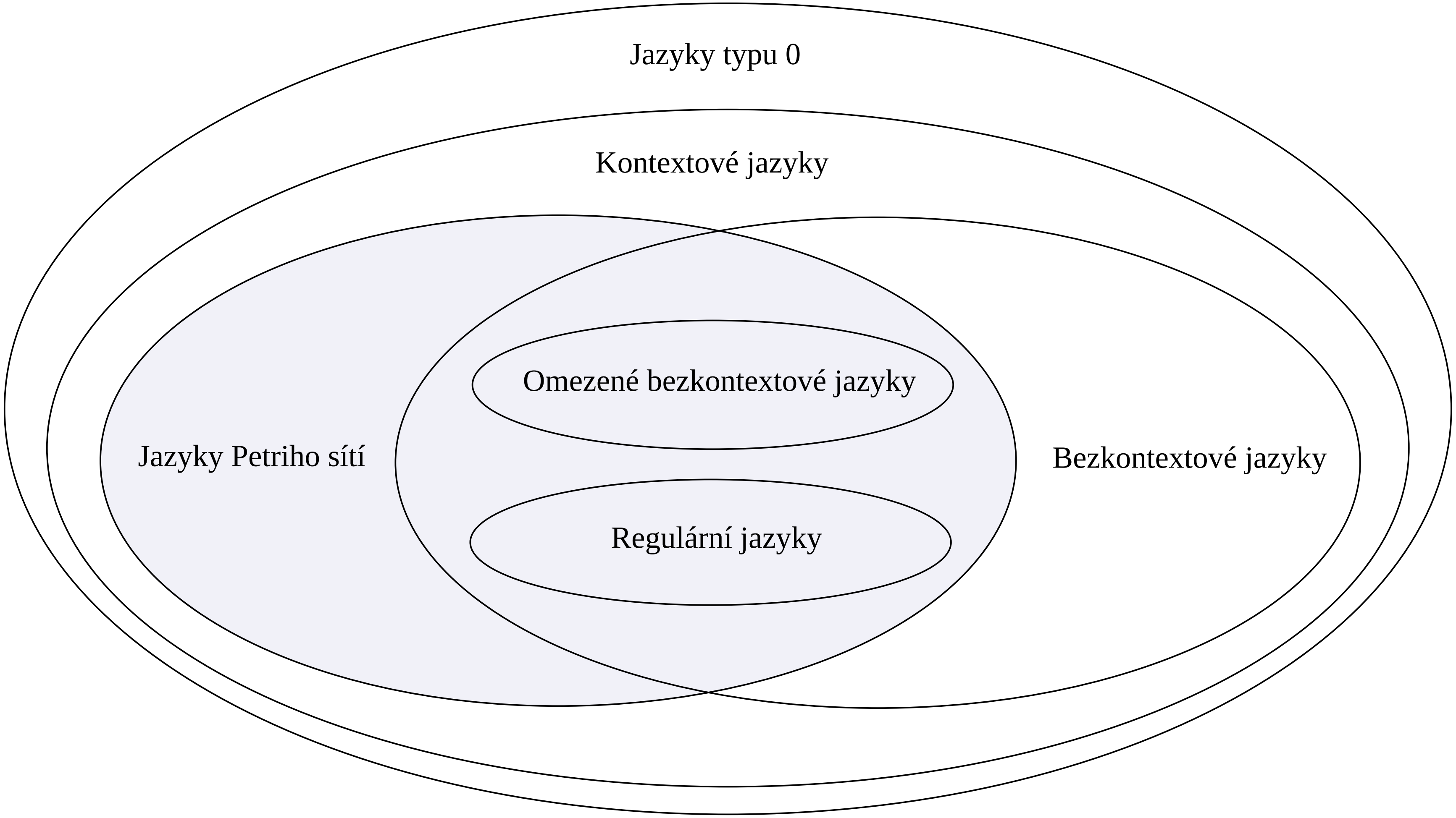
$$m = \max_{t \in T} d_t$$

S jehož využitím lze hodnoty S ohraničit v závislosti na délce výpočetní posloupnosti k a tudíž i vstupního řetězce funkcí:

$$S(k) \leq 1 + k.m$$

Což je lineární funkce nezávislé proměnné k a příslušný Turingův stroj je tedy lineárně omezený. □

❖ **Příklad 14**: Vztah jazyků Petriho sítí a jazyků Chomského hierarchie



Otázka:
Čím lze rozšířit modelovací schopnost Petriho sítí?