Vyčíslitelné f-ce

- **počáteční** f-ce : ↙ syntax ↓ sémantika
  - $\xi : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^1$, $\xi() = 0$
  - $\sigma : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}^1$, $\sigma(x) = x+1$
  - $\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $\pi^n_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$
    $(1 \leq k \leq n)$
- **kombinace** : pro $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ umožní sestavit f-ci $f \times g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{m+n}$ takovou, že
  $f \times g(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$, kde
  $f(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_m)$
  $g(x_1, \dots, x_k) = (z_1, \dots, z_n)$
- **kompozice** : pro $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ umožní sestavit f-ci $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takovou, že
  "g po f"
  $g \circ f(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ pro $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$

- primitivní rekurze: pro $g: \mathbb{N}^{k} \to \mathbb{N}^{\boxed{m}}$ a $h: \mathbb{N}^{k+1+\boxed{m}} \to \mathbb{N}^{\boxed{m}}$ umožní sestavit $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{\boxed{m}}$ takovou, že

$$\boxed{\begin{aligned} f(\overline{x},0) &= g(\overline{x}) \\ f(\overline{x},y+1) &= h(\overline{x},y,f(\overline{x},y)) \end{aligned}}$$

$\overline{x}$ je $\mathbb{N}^{k}$

Uvedená syntax je fixní až na jména f-cí a jejich parametrů!

- minimalizace: z funkce $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ umožňuje vybudovat f-ci $f: \mathbb{N}^{n} \to \mathbb{N}$ takovou, že

$$f(\overline{x}) = \mu y\,[g(\overline{x},y)=0] \quad \text{pro } \overline{x} \in \mathbb{N}^{k},$$

pevná syntax

nejmenší y

přičemž $\forall z<y:\ g(\overline{x},z)$ je definované.

- Nalezněte hodnoty uvedených f-cí pro uvedené argumenty

a) $((\langle 1, 0 \rangle \times \xi)\,() = (1,0)$

b) $\Pi^3_2 \times \Pi^3_3 \times \Pi^3_2\,(5,6,7) = (6,7,6)$

c) $(\sigma \times \sigma) \circ \pi_2^2 \ (4,7) = (8,8)$

d) $f(5,4)$ pro $f(x,0) = \sigma(x)$

$f(x,y+1) = \pi_3^3(x,y,f(x,y))$

$$f(5,4) = f(5,3+1) = \pi_3^3(5,3,f(5,3)) = \pi_3^3(5,3,6) = 6$$
$$f(5,3) = f(5,2+1) = \pi_3^3(5,2,f(5,2)) = \pi_3^3(5,2,6) = 6$$
$$f(5,2) = f(5,1+1) = \pi_3^3(5,1,f(5,1)) = \pi_3^3(5,1,6) = 6$$
$$f(5,1) = f(5,0+1) = \pi_3^3(5,0,f(5,0)) = \pi_3^3(5,0,6) = 6$$
$$f(5,0) = \sigma(5) = 6$$

- Ukažte, že f-ce přiřazující každé trojici (x,y,z) dvojici (u,v), která vznikne z-násobnou záměnou x a y je primitivně rekurzivní.

$$f(x,y,0) = \pi_1^2 \times \pi_2^2 (x,y)$$
$$f(x,y,z+1) = (\pi_5^5 \times \pi_4^5)(x,y,z,f(x,y,z))$$

Např. $f(1,2,3) = f(1,2,2+1) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,2,f(1,2,2)) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,2,1,2) = (2,1)$

$f(1,2,2) = f(1,2,1+1) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,1,f(1,2,1)) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,1,2,1) = (1,2)$

$f(1,2,1) = f(1,2,0+1) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,0,f(1,2,0)) = \Pi_5^5 \times \Pi_4^5 (1,2,0,1,2) = (2,1)$

$f(1,2,0) = \Pi_1^2 \times \Pi_2^2 (1,2) = (1,2)$

– Ukažte, že f-ce $even(x) = \begin{cases} 1 & \text{, je-li } x \text{ sudé} \\ 0 & \text{, je-li } x \text{ liché} \end{cases}$ je prim. rekurzivní.

Je přitom možné užít známých f-cí plus, mult, monus, quo, eq, konstanty K_m^n (pro vstupní n-tici vrací hodnotu m).

[POZOR: $\Pi_2^3(7,3,5) = 3$

$K_2^3(7,3,5) = 2$]

vstup (např. 5)

$even = eq \circ ((mult \circ ((quo \circ (\Pi_1^1 \times K_2^1)) \times K_2^1)) \times \Pi_1^1)$

při definici f-ce neuvádím parametry (s výjimkou prim. rek. a minimalizace)

$eq \circ (mult \circ (quo \circ (5,2),2),5)$

2

4

0

- konvence pro tzv. zjednodušený zápis f-cí:
    - kompozice "o" ⤳ zanořené volání
    - kombinace "x" ⤳ zřetězení argumentů / výsl. f-ce
    - konstanty a parametry lze psát explicitně literálem (konstanty) nebo jménem (proměnné)
- výše uvedená f-ce ve zjednodušené notaci:

$$even(x) = eq(mult(quo(x,2),2),x)$$

- Ukažte, že f-ce $neg(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x>0 \\ 1 & \text{je-li } x=0 \end{cases}$ je primitivně rek. Lze užít f-ce monus a konstant. Zapište ve striktní i zjednodušené syntaxi.

    a) zjednodušená syntaxe:

    $$neg(x) = monus(1,x)$$

    b) striktní syntax:

    $$neg = monus \circ (K_1^1 \times \Pi_1^1)$$

- Ukažte, že f-ce $f(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{je-li } z \text{ sudé} \\ y & \text{je-li } z \text{ liché} \end{cases}$

je primitivně rekurzivní. Lze užít zjednodušenou notaci a známé f-ce mult, plus, even, neg.

$$f(x,y,z) = plus(mult(x, even(z)), mult(y, neg(even(z))))$$

if (p)
v_1
else
v_2

$[\![p]\!] \cdot [\![v_1]\!] + [\![v_2]\!] \cdot [\![\neg p]\!]$

- Dokažte, že pro parciálně rek. f-ce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ není f-ce $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovaná níže parc. rek.:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, je-li } f(x) \text{ definovaná} \\ g(x) & \text{, je-li } g(x) \text{ definovaná a } f(x) \text{ nikoliv} \\ \text{nedef.} & \text{, jinak.} \end{cases}$$

<u>Důkaz sporem:</u>

- Předp., že $h(x)$ je parc. rek. pro libovolné f, g parc. rek.
- Pak to platí i pro $h(x)$ vybudované z f-cí:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \text{ číslem jehož binární zápis odpovídá } \langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle \text{, kde } w \in L(M) \text{ pro TS } M. \\ \text{nedef} & \text{jinak} \end{cases}$$

vhodný počet „0"

$$g(x) = K_0^1(x) = 0$$

- Obě uvedené f-ce jsou parc. rek. — víme, že parc. rek. f-ce mají stejnou vyjadřovací sílu jako TS.

- Pak ale $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \text{ v binární podobě } \langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle \\ & \text{pro TS } M \text{ a } w \in L(M) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Neboli $h(x)$ <u>ROZHODUJE</u> (!) členství v jazyce TS, což je spor (parc. rek. f-ce by musely mít vyšší nějakou sílu než TS). $\square$

- Implementujte v jazyce C/C++ f-ci $g(x) = \mu y\,[neg(f(x,y),1) = 0]$. Máte k dispozici f-ce $f(x,y)$ a $neg(x,y)$ zapsané v C/C++. <u>Ignorujte</u> rozdíl mezi <u>int</u> a $\mathbb{N}$.

```
int g(int x) {
   int y;
   for (y = 0; f(x,y) != 1; ++y);
   return y;
}
```

- S využitím známých f-cí plus, monus, mult, div, eq, neg zapište f-ci $gcd(x,y)$ vracející největšího společného dělitele, je-li definován (f-ce je nedef. pro nulové argumenty). Lze užít zjednodušenou notaci.

$$\mathrm{gcd}(x, y) = \mathrm{monus}(x, \mu z\, [\, \mathrm{plus}(\underline{\mathrm{neg}}(\mathrm{mult}(\mathrm{div}(x, \mathrm{monus}(x, z)), \mathrm{monus}(x, z)), x),$$
$$\underline{\mathrm{neg}}(\mathrm{mult}(\mathrm{div}(y, \mathrm{monus}(x, z)), \mathrm{monus}(x, z)), y)) = 0\,])$$