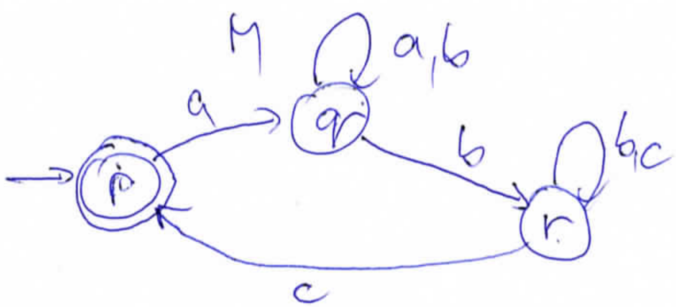
Převody mezi KA a G3

- Mějme následující KA:



Převeďte na G3.

- $G = (\{p, q, r\}, \{a, b, c\}, P, p)$

$P:\quad p \to aq \mid \varepsilon$

$\quad\quad q \to aq \mid bq \mid br$

$\quad\quad r \to br \mid cr \mid cp$

$p \xrightarrow{a} q$

$\Downarrow$

$p \to aq$

$\to (s) \rightsquigarrow s$

$(q) \rightsquigarrow q \to \varepsilon$

- pro slovo $w = abc$ máme

posloupnost konfigurací M vedoucí k přijetí abc

$(p, abc) \vdash (q, bc) \vdash (r, c) \vdash (p, \varepsilon)$

derivace v G vedoucí na abc

$p \Rightarrow aq \Rightarrow abr \Rightarrow abcp \Rightarrow abc$

- Mějme gramatiku $G = (\{A, B\}, \{a, b, c\}, P, A)$, kde

$P:\quad A \to abB \mid bcA$

$\quad\quad B \to bB \mid abb$. Převeďte na KA dle alg. z přednášky.

---

1. Upravíme G na G' s pravidly $A \to aB \mid \varepsilon$

Převod: $A \to \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n B}$ $\rightsquigarrow$ $A \to a_1 A_1$

$A_1 \to a_2 A_2$

$\vdots$

$A_{n-1} \to a_n B$

$A \to a_1 \dots a_n$ $\rightsquigarrow$ $A \to a_1 A_1$

$\vdots$

$A_{n-1} \to a_n A_n$

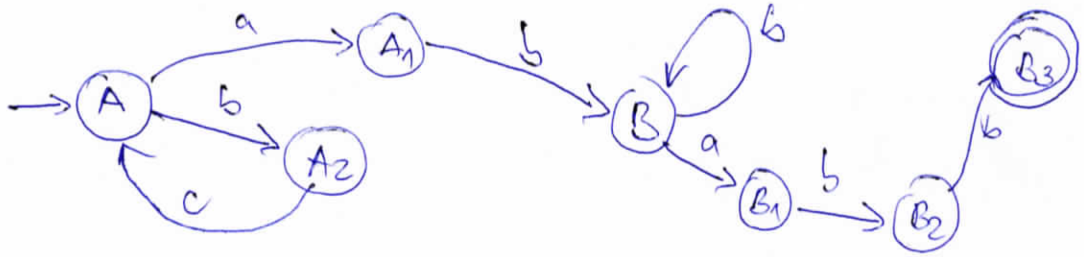
$A_n \to \varepsilon$

Konkrétně na daném příkladu:

P': $A \to aA_1$, $A_1 \to bB$, $A \to bA_2$, $A_2 \to cA$

$B \to bB$, $B \to aB_1$, $B_1 \to bB_2$, $B_2 \to bB_3$, $B_3 \to \varepsilon$

2. KA:



- Sestrojte a formálně popište alg. pro konkatenaci jazyků nad DKA tak, aby výstup byl KA.

vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$,

DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ bez újmy na obecnost takové, že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Výstup: (N)KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $L(M) = L(M_1) \cdot L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ sestavíme tak, že

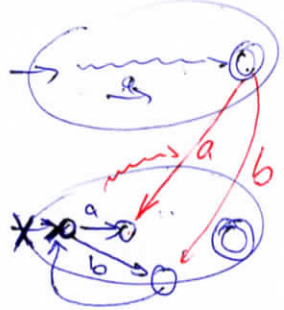
   $\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma$:

   $q_2 \in \delta(q_1, a) \iff$

   $q_2 = \delta_1(q_1, a) \vee$

   $q_2 = \delta_2(q_1, a) \vee$

   $(q_1 \in F_1 \wedge q_2 = \delta_2(q_0^2, a))$
4. $q_0 = q_0^1$
5. Je-li $\varepsilon \in L(M_2)$, pak $F = F_1 \cup F_2$, jinak $F = F_2$.



Pozn. pokud $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, pak zavedeme $Q_1' = Q_1 \times \{1\}$, $Q_2' = Q_2 \times \{2\}$ a příslušně upravíme δ_1 a δ_2 na δ_1' a δ_2'

Sestrojte a formálně zapište alg. pro shuffle jazyků dvou DKA, jehož výsledný jazyk reprezentuje KA.

- operace shuffle (||) nad abecedou Σ
  - $\varepsilon \| w = w \| \varepsilon = \{w\}$ pro $w \in \Sigma^*$
  - $aw_1 \| bw_2 = \{a\}(w_1 \| bw_2) \cup \{b\}(aw_1 \| w_2)$; $a, b \in \Sigma$, $w_1, w_2 \in \Sigma^*$

– pro $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 \| L_2 = \bigcup\limits_{w_1 \in L_1,\, w_2 \in L_2} w_1 \| w_2$

$ab \| c = \{cab, acb, abc\}$

– Vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a
DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \| L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. $\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$ sestavíme tak, že:

$\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma$:

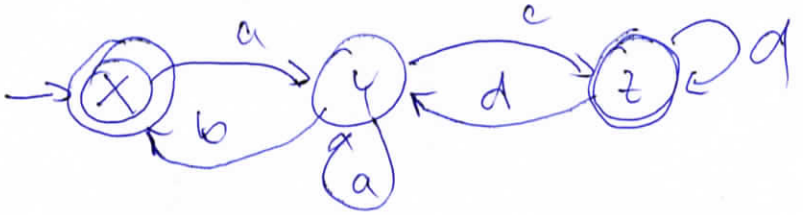
$$(q_2^1, q_2^2) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a) \iff$$
$$(q_2^1 = \delta_1(q_1^1, a) \wedge q_2^2 = q_1^2) \ \vee$$
$$(q_2^1 = q_1^1 \wedge q_2^2 = \delta_2(q_1^2, a))$$

4. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$
5. $F = F_1 \times F_2$

$$\begin{array}{c} (q_1^1, q_1^2) \\ \big\downarrow a \\ (\_, \_) \\ q_2^1 \ q_2^2 \end{array}$$

Převod z KA na RV (řešení rovnic nad RV)

- Převeďte řešením rovnic nad RV následující KA na RV:



1. sestavíme soustavu rovnic pro výše uvedený KA.

$$X = aY + \varepsilon$$
$$Y = bX + aY + cZ$$
$$Z = dY + dZ + \varepsilon$$

2. Vyřešíme sestavenou soustavu

$$X = pX + q \;\Rightarrow\; X = p^*q$$

- rovnici $Z = dY + dZ + \varepsilon$ upravíme na

$$\underbrace{Z}_{\text{"}X\text{"}} = \underbrace{d}_{\text{"}p\text{"}}\underbrace{Z}_{\text{"}X\text{"}} + \underbrace{(dY + \varepsilon)}_{\text{"}q\text{"}}$$

$$Z = d^*(dY + \varepsilon) = d^+Y + d^*$$

- dosadíme do rovnice pro Y:

$$Y = bX + aY + c(d^+Y + d^*) = bX + aY + cd^+Y + cd^*$$
$$Y = (a + cd^+)Y + (bX + cd^*)$$

$$Y = (a+cd^+)^* \cdot (bX + cd^*)$$

- dosadíme do rovnice pro X

$$X = \underline{a\,(a+cd^+)^*}\,(bX + cd^*) + \varepsilon$$

$$X = \underbrace{a\,(a+cd^+)^* b}_{\text{„}p\text{"}}X + \underbrace{a\,(a+cd^+)^* cd^*}_{\text{„}q\text{"}} + \varepsilon$$

$$X = \left(a\,(a+cd^+)^* b\right)^* \cdot \left(a\,(a+cd^+)^* cd^* + \varepsilon\right),$$

což je RV reprezentující jazyk daného automatu.

Kleeneho algebry

množina A, 2 význačné konstanty 0 a 1, operace $+$, $\cdot$, * (bin., bin., un.) nad A je def. $=$, kde uvedené operace a relace $=$ jsou násled. spec. axiomy.

- Dokažte, že pro Kleeneho algebry platí následující lemma (L1): $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$.

Důkaz. „$\Rightarrow$": 1. Předpokládejme, že $a = b$.

2. z 1 a A.3 : $a+a=b$

3. z 2 a 1 : $a+b=b$

4. z 3 a def. $\leq$: $a\leq b$

5. z 1 a A.3 apl. pro b: $a=b+b$

6. z 5 a symetričnosti = : $b+b=a$

7. z 6 a 1 : $b+a=a$

8. z 7 a def. $\leq$: $b\leq a$

9. z 4 a 8 vidíme, že $a\leq b \wedge b\leq a$. $\square$

"$\Leftarrow$"

1. Předpokládejme, že $\overset{(a)}{a\leq b}$ a $\overset{(b)}{b\leq a}$.

2. z 1 a def. $\leq$: $a+b=b$ a $b+a=a$.

3. z 2(b) a A.2 : $a+b=a$

4. z 3 a symetričnosti = : $a=a+b$

5. z 2(a) a 4 : $a=a+b=b$

6. z 5 a tranzitivity = : $a=b$ $\square$

- Dokažte, že v Kleeneho algebrách platí Lemma L2:

$a\leq b \wedge b\leq c \Rightarrow a\leq c$.

(Doma.)

– Sjednocení lemmat L1 a L2 dokažte, že v Kleeneho algebrách platí $a^*a^* = a^*$

Důkaz: Dle L1 postačí ukázat, že $a^*a^* \leq a^*$ a $a^* \leq a^*a^*$.

a) ukážeme, že $a^*a^* \leq a^*$:

1. Vyjdeme z axiomu A10: $1 + aa^* = a^*$
2. z 1 (A10) a L1: $1 + aa^* \leq a^*$
3. Ukážeme, že $aa^* \leq 1 + aa^*$
   a) z reflexivity "=": $1 + aa^* = 1 + aa^*$
   b) z 3a a A.3 : $1 + (aa^* + aa^*) = 1 + aa^*$
   c) z 3b a A.1 : $(1 + aa^*) + aa^* = 1 + aa^*$
   d) z 3c a A.2 : $\underbrace{aa^*}_{\text{"a"}} + \underbrace{(1 + aa^*)}_{\text{"b"}} = \underbrace{1 + aa^*}_{\text{"b"}}$
   e) z 3d a def. $\leq$: $aa^* \leq 1 + aa^*$
4. z 2, 3 a L2 : $aa^* \leq a^*$
5. z 4 a A.14 (kde $a = a$, $c = a^*$): $a^*a^* \leq a^*$

b) Ukážeme, že $a^* \leq a^*a^*$

1. A.10: $1 + aa^* = a^*$
2. z reflexivity = : $a^*a^* = a^*a^*$

3. z 1,2 : $a^*a^* = a^*(1+aa^*)$

4. z 3 a A.8: $a^*a^* = a^*\cdot 1 + a^*aa^*$

5. z 4 a A6: $a^*a^* = a^* + a^*aa^*$

6. z 5 a C1: $\boxed{a^* + a^*aa^*} \le a^*a^*$

7. ukážeme, že $a^* \le a^* + a^*aa^*$:

   a) z reflexivity =: $a^* + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$

   b) z 7a a A3: $(a^*+a^*) + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$

   c) z 7b a A1: $\underbrace{a^*}_{\text{„a"}} + \underbrace{(a^* + a^*aa^*)}_{\text{„b"}} = \underbrace{a^* + a^*aa^*}_{\text{„b"}}$

   d) ze 7c a def. $\le$: $a^* \le \boxed{a^* + a^*aa^*}$

8. z 6,7 a C2: $a^* \le a^*a^*$. □

Dokažte, že v algebře reg. množin platí $L^*L^* = L^*$

Důkaz.

$$L^*L^* \underset{\text{def } *}{=} \left(\bigcup_{m\ge 0} L^m\right)\cdot\left(\bigcup_{n\ge 0} L^n\right) \underset{\text{def. } \cup}{=} \{w_1 \in L^m \mid m \ge 0\}\cdot\{w_2 \in L^n \mid n \ge 0\} =$$

$$\underset{\text{def. jazyků}}{=} \{w_1\cdot w_2 \mid w_1 \in L^m, w_2 \in L^n, n,m \ge 0\} =$$

$$\underset{\substack{\text{def.}\\ \text{řetězců}}}{=} \{ w_1^1 \cdots w_1^m \cdot w_2^1 \cdots w_2^n \mid \forall 1 \le i \le m : w_1^i \in \Sigma, \ \forall 1 \le j \le n : w_2^j \in \Sigma, \ n, m \ge 0 \}$$

$$\underset{\substack{\text{def. mocniny}\\ \text{řetězců}}}{=} \{ w \in \Sigma^{m+n} \mid m, n \ge 0 \}$$

- každé přir. číslo k se dá rozložit na součet přir. čísel $m+n$ — stačí zvolit $m=k$ a $n=0$.
- pro libovolné $m+n$ je výsledek nějaké přir. číslo k

$$= \{ w \in \Sigma^k \mid k \ge 0 \} \underset{\text{def. } \cup}{=} \bigcup_{k \ge 0} \Sigma^k \underset{\substack{\text{def.}\\ *}}{=} \Sigma^*$$

Tedy $\Sigma^* \Sigma^* = \Sigma^*$ $\square$