Vyčíslitelné f-ce

- **počáteční f-ce**

$\xi : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^1$, $\xi() = 0$

$\sigma : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}^1$, $\sigma(x) = x+1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^1$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n : \pi^n_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$

$(1 \le k \le n)$

- **kombinace**: $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$

$f \times g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{m+n}$,

$\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k : f \times g(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$, kde

$(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_k)$

$(z_1, \dots, z_n) = g(x_1, \dots, x_k)$

- **kompozice** $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$,

$g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k :$

"g po f"

$g \circ f(x_1, \dots, x_k) = g(f(x_1, \dots, x_k))$

- <u>primitivní rekurze</u>

z $g: \mathbb{N}^{k} \to \mathbb{N}^{m}$, $h: \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}^{m}$ a dostaneme $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{m}$

def. takto

$$\boxed{\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \quad \text{pro } \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^{k} \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}} \quad \text{pro } \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^{k}\ \forall y \in \mathbb{N}$$

- <u>minimalizace</u>

z $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ vytvoří $f: \mathbb{N}^{n} \to \mathbb{N}$ def.

takto $f(\bar{x}) = \mu y\, [g(\bar{x}, y) = 0]$ a $\forall z < y: g(\bar{x}, z)$ je def.

nejmenší   pro libovolné $\bar{x} \in \mathbb{N}^{n}$

- Nalezněte hodnoty f-cí:

a) $((S \circ \{\}) \times \{\})\,() = (1, 0)$

b) $\pi^{3}_{2} \times \pi^{3}_{3} \times \pi^{3}_{2}\,(5, 6, 7) = (6, 7, 6)$

c) $((\sigma \times \sigma) \circ \Pi^2_2)(4,7) = (8,8)$

d) $f(5,4)$ pro $f(x,0) = \sigma(x)$

$f(x,y+1) = \Pi^3_3(x,y,f(x,y))$

$f(5,4) = f(5,3+1) = \Pi^3_3(5,3,f(5,3)) = \Pi^3_3(5,3,6) = \underline{6}$

$f(5,3) = f(5,2+1) = \Pi^3_3(5,2,f(5,2)) = \Pi^3_3 = (5,2,6) = 6$

$f(5,2) = f(5,1+1) = \Pi^3_3(5,1,f(5,1)) = \Pi^3_3(5,1,6) = 6$

$f(5,1) = f(5,0+1) = \Pi^3_3(5,0,f(5,0)) = \Pi^3_3(5,0,6) = 6$

$f(5,0) = \sigma(5) = 6$

- Ukažte, že f-ce f přiřazující každé trojici (x,y,z) dvojici (u,v), která vznikne z-násobnou záměnou x a y, je prim. rel.

$(1,2,3)$
$2,1$
$1,2$
$(2,1)$

$f(x,y,0) = \cancel{(x,y)}$ $(\Pi^2_1 \times \Pi^2_2)(x,y)$

NENÍ v syntaxi

$f(x,y,z+1) = (\Pi^5_5 \times \Pi^5_4)(x,y,z,f(x,y,z))$

např. $f(1,2,3) = f(1,2,2+1) = (\Pi^5_5 \times \Pi^5_4)(1,2,2,f(1,2,2)) = \Pi^5_5 \times \Pi^5_4(1,2,2,1,2) = (2,1)$

$f(1,2,2) = f(1,2,1+1) = (\Pi^5_5 \times \Pi^5_4)(1,2,1,f(1,2,1)) = \Pi^5_5 \times \Pi^5_4(1,2,1,2,1) = (1,2)$

$f(1,2,1) = f(1,2,0+1) = (\Pi^5_5 \times \Pi^5_4)(1,2,0,f(1,2,0)) = \Pi^5_5 \times \Pi^5_4(1,2,0,1,2) = (2,1)$

$f(1,2,0) = (\Pi^2_1 \times \Pi^2_2)(1,2) = (1,2)$

$\cancel{(1,2,0,(1,2))}$

z def. prim. rek.

- Ukažte, že f-ce

$$even(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \text{ sudé (vč. 0)} \\ 0 & \text{je-li } x \text{ liché} \end{cases}$$

je primitivně rekurzivní. Můžeme užít známé def-ce f-cí plus, mult, monus, quo, eq, K^n_m — $K^n_m(x_1,\dots,x_n) = m$ pro $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$.

$$quo(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \text{pro } y \neq 0 \\ 0 & \text{pro } y = 0 \end{cases}$$

$$monus(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{pro } x \geq y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$even = eq \circ (mult \circ ((quo \circ (\Pi^1_1 \times K^1_2)) \times K^1_2) \times \Pi^1_1)$$

např. $even(5)$

$quo(5,2) = \boxed{2}$

$mult(2,2) = 4$

$(4,5)$

0

Zjednodušený zápis rek. f-cí:

- zanořené volání ~ kompozici ($g \circ f \rightsquigarrow g(f(-))$)
- zřetězení arg. ~ kombinaci
- konstanty ~ literálů
- explicitně lze užít jména parametrů (pojmenujte vst. parametry a použijte je v def. fce).

- even ve zjednodušené syntaxi:

$$even(x) = eq(mult(quo(x,2),2),x)$$

- Ukažte, že f-ce

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{je-li } z \text{ sudé} \\ y, & \text{je-li } z \text{ liché} \end{cases}$$

je primitivně rekurzivní. Lze užít mult, add, even, monus.
Jako pomocnou f-ci použijte dále f-ci $neg(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x > 0 \\ 1, & \text{je-li } x = 0 \end{cases}$)

Kterou zkonstruujte jako prim. rek.

Lze užít zjednodušenou syntaxi.

- $neg(x) = monus(1,x)$

[ve striktní syntaxi
$neg = monus \circ (K_1^1 \times \Pi_1^1)$]

- $f(x,y,z) = add(mult(x, even(z)),$
$mult(y, neg(even(z))))$

např. $f(2,3,5) = add(mult(2, even(5)),$
$mult(3, neg(even(5)))) =$

$= add(mult(2, 0),$
$mult(3, neg(0))) =$

$= add(0, mult(3,1)) =$

$= add(0, 3) = \underline{\underline{3}}$

- Dokažte, že pro parc. rek. f-ce $f: N \to N$ a $g: N \to N$ není f-ce $h: N \to N$ def. níže obecně parc. rek.:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{je-li } f(x) \text{ definované} \\ g(x) & \text{je-li } g(x) \text{ def. a } f(x) \text{ není def.} \\ \text{nedef.} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz sporem:

- Předp., že f-ce h je parc. rek. pro libovolné parc. r. f a g.
- Pak to platí i pro $h(x)$ vybudovanou z následujících f-cí:

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \text{ přir. číslem, jehož binární zápis odpovídá } \langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle \text{, kde } \langle . \rangle \text{ je kód. f-ce pro TS, oddělovač "\#" a vstup TS a platí, že } w \in L(M). \\ \text{nedef} & \end{cases}$

- $g(x) = K^1_0(x)$

- Obě uvedené f-ce jsou s ohledem na to, že parc. rek. f-ce mají stejnou vyj. sílu jako TS, parc. rekurzivní.
- Výsledná f-ce $h(x)$ ovšem rozhoduje členství v jazyce TS!

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \text{ číslo kódující řetězec } \langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle \text{ takový, že } w \in L(M) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato f-ce tedy rozhoduje nerozhodnutelný problém! SPOR $\square$

- Máte k dispozici f-ce $f(x,y)$ a $neg(x,y)$ implementované v C/C++ vybavené neomezenými čísly. Implementujte v C/C++ f-ci $g(x) = \mu y[neg(f(x,y),1) = 0]$.

```
int∞ g( int∞ x ) {
   for (int∞ y=0, f(x,y)!=1, y++) ;
   return y ;
}
```

parc. rek., celoč. dělení

$$div(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & y>0 \\ nedef & y=0 \end{cases}$$

- S využitím f-cí add, monus, null, div, eq, neg zapište f-ci gcd (x,y). [gcd = greatest common divisor] Lze užít zjednodušenou notaci. F-ce gcd je nedef. pro nulové argumenty.

$z = 0\ 1\ 2\ \dots$

$monus(x,z):\ x,\ x-1,\ x-2,\ x-3,\ \vdots$

$$gcd_{y\neq 0}(x,y) = monus(x,\ \mu z[add(neg(null(div(x, monus(x,z)), monus(x,z)), x),$$
$$neg(null(div(y, monus(x,z)), monus(x,z)), y)) = 0])$$

? $gcd(2,0) \to 0$ ✗

$gcd(0,2) \to div(\quad , 0)$ — nedef ✓

$$gcd(x,y) = add(null(div(x,y), 0), gcd_{y\neq 0}(x,y))$$