Petriho sítě

PES 2007/2008

Prof. RNDr. Milan Češka, CSc.

ceska@fit.vutbr.cz

Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

vojnar@fit.vutbr.cz

Sazba: Ing. Petr Novosad, Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

(verze 27.2.2008)

FIT, VUT v Brně, Božetěchova 2, CZ-612 66 Brno

Vlastnosti C/E systémů

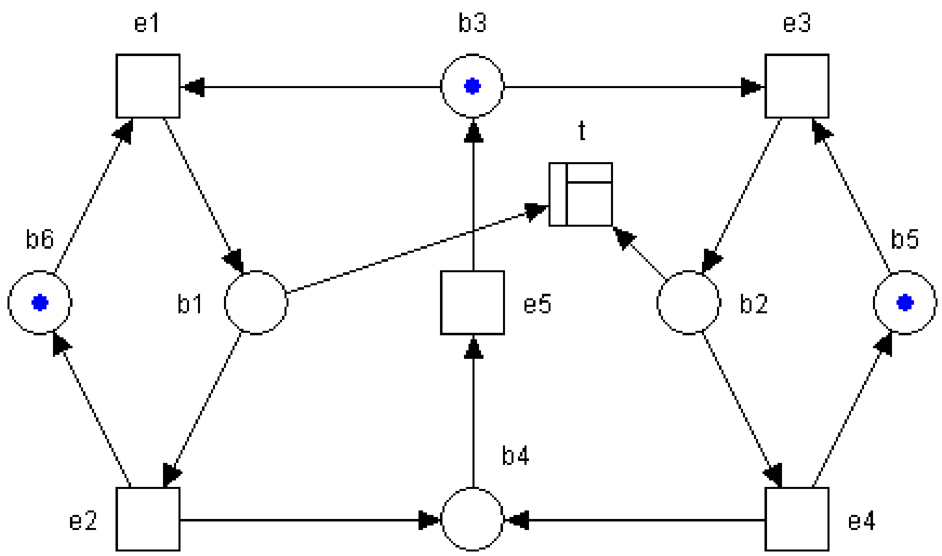
5. Fakta (facts)

S využitím podmínek C/E systému je možno konstruovat formule výrokové logiky (Co je výroková logika?). Tyto formule budou pravdivé, či nepravdivé v závislosti na tom, ve kterém případu se systém nachází. Zvláštní zájem zaslouží “tautologie” (kontradikce), které popisují invariantní vlastnosti systému. Ukážeme, jak lze reprezentaci a vyhodnocení těchto formulí začlenit do “síťového kalkulu”.

Uvažujme C/E systém Σ_1 z příkladu 7. Přidejme navíc požadavek, aby podmínky b_1 a b_2 nikdy neplatily současně. Toho lze dosáhnout konstrukcí systému Σ_2 v témže příkladě. Tato nová vlastnost systému může být vyjádřena zavedením nového přechodu t takového, že

$$^\bullet t = \{b_1, b_2\}, \quad t^\bullet = \emptyset$$

který není proveditelný v žádném případu systému Σ_2.



Nejprve budeme studovat vztahy mezi formulemi obsahujícími podmínky (například $\neg(b_1 \wedge b_2)$) a prováděním událostí. K tomu účelu uvažujme b jako prvotní (atomickou) formuli, která je pravdivá v daném případu c, právě když b patří do c. Pak můžeme konstruovat formule výrokové logiky a vyhodnocovat jejich pravdivostní hodnoty.

❖ **Definice 5.1**: Nechť Σ je C/E systém.

1. Množina A_Σ *formulí* (výrokové logiky) nad B_Σ je nejmenší množina, pro kterou
   (a) $B_\Sigma \subseteq A_\Sigma$
   (b) $a_1, a_2 \in A_\Sigma \Rightarrow (a_1 \wedge a_2) \in A_\Sigma, (a_1 \vee a_2) \in A_\Sigma, (a_1 \rightarrow a_2) \in A_\Sigma, (\neg a_1) \in A_\Sigma$
2. V každém $c \in C_\Sigma$ přísluší každé formuli $a \in A_\Sigma$ hodnota $\hat{c}(a)$ definovaná valuací $\hat{c} : A_\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$:
   - $b \longmapsto 1$, jestliže $b \in c$
   - $b \longmapsto 0$, jestliže $b \notin c$
   - $(a_1 \wedge a_2) \longmapsto \min(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))$
   - $(a_1 \vee a_2) \longmapsto \max(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))$
   - $(a_1 \rightarrow a_2) \longmapsto \hat{c}((\neg a_1) \vee a_2)$
   - $(\neg a_1) \longmapsto 1 - \hat{c}(a_1)$
3. Dvě formule $a_1, a_2 \in A_\Sigma$ jsou *ekvivalentní* v Σ, jestliže pro všechny $c \in C_\Sigma : \ \hat{c}(a_1) = \hat{c}(a_2)$

Nyní ke každé události $e \in E_\Sigma$ přiřadíme formuli $a(e)$ tak, že pro všechny případy c platí: $a(e)$ platí, právě když e není c-proveditelná.

❖ **Definice 5.2**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$. Nechť ${}^\bullet e = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},\ e^\bullet = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$. Pak

$$\boxed{a(e) :\ (b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \rightarrow (b'_1 \vee b'_2 \vee \ldots \vee b'_m)}$$

Je-li ${}^\bullet e = \emptyset$, pak $a(e) :\ (b'_1 \vee \ldots \vee b'_m)$, je-li $e^\bullet = \emptyset$, pak $a(e) :\ \neg(b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n)$.

❖ **Lemma 5.1**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$. Pak pro každé $c \in C_\Sigma$, $a(e)$ platí v c, právě když e není c-proveditelná.

Důkaz: $\hat{c}(a(e)) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$, kde $\hat{c}(b) = 0$ nebo $\exists b' \in e^\bullet : c(b') = 1 \Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$ a $b \notin c$ nebo $\exists b' \in e^\bullet$ a $b' \in c \Leftrightarrow e$ není c-proveditelná. $\square$

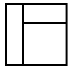
Ukázali jsme, jak spojovat formule s událostmi systému. Teď uvažujme, jak reprezentovat libovolnou pravdivostní formuli sestavenou z podmínek systému.

K tomu účelu obohatíme C/E systém o nové přechody, které nejsou proveditelné v žádném případu systému ("dead" přechody). Proto neovlivní chování systému. S každým novým přechodem spojíme formuli $a(t)$, stejně jako pro události. $a(t)$ pak platí v systému Σ (platí pro každý jeho případ). Takto je možné reprezentovat všechny platné formule pro Σ určitým počtem "mrtvých" přechodů. Tyto přechody nazýváme fakta.

❖ **Definice 5.3**: Nechť Σ je C/E systém.

1. Formule $a \in A_\Sigma$ se nazývá *platnou* v Σ, jestliže $\forall c \in C_\Sigma : \hat{c}(a) = 1$
2. Pro $B_1, B_2 \subseteq B_\Sigma$ nechť $t = (B_1, B_2)$ je nový přechod: ${}^\bullet t = B_1$ a $t^\bullet = B_2$. Přechod t se nazývá *faktem* systému Σ, jestliže t není proveditelný pro žádné $c \in C_\Sigma$.

V grafické reprezentaci je fakt t označen přechodem



F - $False$

Pro t je $a(t)$ definována jako pro e: například jestliže ${}^\bullet t = \{b_1, \ldots, b_n\},\ t^\bullet = \{b'_1, \ldots, b'm\}$, pak $a(t) = (b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \rightarrow (b'_1 \vee b'_2 \vee \ldots \vee b'_m)$

❖ **Theorem 5.2**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $a \in A_\Sigma$. Formule a je platná v Σ, právě když existují fakta $t_1, t_2, \ldots, t_k$ taková, že a je logicky ekvivalentní formuli $a(t_1) \wedge a(t_2) \wedge \ldots \wedge a(t_n)$

Důkaz. (s využitím KNF)

Problém: Jak reprezentovat formule, které platí jen pro některé případy systému. Pro $c \in C_\Sigma$ nechť c' označuje konjunkci všech podmínek tvořících c. Pak a platící pro případy $c_1, \ldots, c_k$ lze popsat formulí $(c'_1 \wedge c'_2 \wedge \ldots \wedge c'_k) \rightarrow a$.

❖ **Příklad 10**: Rozšíření systému z příkladu 2 (kapitola C/E sítě) o dvě fakta t_1 a t_2