4. Základní algebraické metody (podalgebry, homomorfismy, přímé součiny, kongruence a faktorové algebry, normální podgrupy a ideály okruhů)

Podalgebry

Buď A množina, pak $\omega: A^n \to A$ je n-ární operace na A ($n \in \mathbb{N}_0$), $T \subseteq A$. Potom množina T **je uzavřená vzhledem k operaci** $\omega \Leftrightarrow \omega\ T_n \subseteq T$ tj. $t_1,\ldots,t_n \in T \Rightarrow \omega t_1 \ldots t_n \in T$.

Buď $\mathfrak{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ je algebra typu $(n_i)_{i\in I}$, $T \subseteq A$. Potom se množina T nazývá uzavřená vzhledem k $(\omega_i)_{i\in I} \Leftrightarrow T$ je uzavřená vzhledem k ω_i, pro $\forall i \in I$. V tomto případě se pomocí vztahu $\omega_i^* x_1 \ldots x_n =: \omega_i x_1 \ldots x_n$, kde $(x_1,\ldots,x_n) \in T_{n_i}$ definuje n_i-ární operace ω_i^* na T. Algebra $(T, (\omega_i^*)_{i\in I})$ se pak nazývá **podalgebra algebry** $\mathfrak{A}$. Stručně řečeno je (T,Ω) podalgebrou algebry (A,Ω), když je T uzavřena ke všem operacím z Ω a $T \subseteq A$.

Pokud je (A,Ω) a $(T_j)_{j\in J}$ je soubor podalgeber, pak jejich průnik $\bigcap_{j\in J} T_j$ je rovněž podalgebra.

Nejmenší podalgebra $<S>$ algebry (A,Ω) a $S \subseteq A$, která S obsahuje, je definována jako:

$$<S> = \bigcap \{T \mid T \supseteq S, T \text{ je podalgebrou algebry } (A,\Omega)\}$$

$<S>$ se nazývá **podalgebra algebry** (A,Ω) **generovaná množinou** S. Množina S se nazývá **systém generátorů podalgebry** $<S>$.

Grupa $(G,\cdot,e,^{-1})$ je **cyklická** $\Leftrightarrow \exists x \in G$: $G = <x>$. Prvek x se pak nazývá **generátor**.

Relace ekvivalence a rozklad na třídy ekvivalence

Je-li M množina, potom se podmnožina R množiny $M\times M$ nazývá **binární relace** nad M. Místo $(x,y) \in R$ obvykle píšeme xRy. Relace všech možných dvojic R se nazývá **univerzální relace** $\alpha_M = M\times M$. **Relace rovnosti** nebo také **identická relace** je relace mezi stejným prvkem $\iota_M = x,x\ x \in M$. Relace $R \subseteq M\times M$ se nazývá:

- **reflexivní** $\Leftrightarrow \iota_M \subseteq R$, $tj. \forall x \in M: xRx$;
- **symetrická** $\Leftrightarrow \forall x,y \in M: xRy \Rightarrow yRx$;
- **antisymetrická** $\Leftrightarrow \forall x,y \in M: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- **tranzitivní** $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in M: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$;

Relace ekvivalence je reflexivní, symetrická a tranzitivní. **Relace (částečného) uspořádání** je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Buď M množina. Pak $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{P}(M) = 2^M$ se nazývá **rozklad na třídy ekvivalence**: ⇔

$M = \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C$;

$\emptyset \in \mathcal{P}$;

$A, B \in \mathcal{P}$: $A = B \vee A \cap B = \emptyset$ tj. každé dvě různé množiny $\mathcal{P}$ jsou vůči sobě disjunktní.

Buď π relace ekvivalence na M, $a \in M$, $[a]_\pi := \{b \in M | b \pi a\}$ je tzv. **třída ekvivalence prvku *a***. Pak $M/\pi := \{ [a]_\pi | a \in M\}$ je tzv. **faktorová množina množiny *M* podle ekvivalence π**.

Homomorfismy

Při bijekci jsou zobrazením pokryty všechny prvky oboru hodnot (surjekce) a obrazy dvou různých vzoru nejsou stejné (injekce). Z toho rovněž vyplývá stejná mohutnost množin. **Bijekce = injekce + surjekce**.

Buďte $\mathfrak{A} = (A, (\omega_i)_{i \in I})$ a $\mathfrak{A}_* = (A^*, (\omega_i^*)_{i \in I})$ algebry téhož typu $n_{i\, i \in I}$. Zobrazení $f: A \rightarrow A^*$ se nazývá **homomorfismem** algebry $\mathfrak{A}$ do algebry $\mathfrak{A}^*$:⇔

pro $i \in I$, kde $n_i > 0$, platí $\forall x_1, \ldots, x_{n_i} \in A$: $f\ (\omega_i\, x_1 \ldots x_{n_i}) = \omega_i^* f\ (x_1) \ldots f\ (x_{n_i})$;

pro $i \in I$, kde $n_i = 0$, platí $f\ (\omega_i) = \omega_i^*$.

Homomorfismus zachovává každou operaci, tzn. zobrazení operace ω_i nad prvky z A je to samé, co provedení operace ω_i nad zobrazením jednotlivých prvků. Klasický příkladem je zobrazení logaritmu z algebry $(R, \cdot, 1, ^{-1})$ do algebry $(R, +, 0, -)$.

Uvažujme homomorfismus z předchozí definice, pak existují následující **typy homomorfismů**:

izomorfismus – pokud je f bijektivní (říkáme, že $\mathfrak{A}$ je **izomorfní obraz** $\mathfrak{A}^*$: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^*$);

endomorfismus – zobrazení z algebry do téže algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$;

automorfismus – pokud je endomorfní a navíc f je izomorfní;

epimorfismus – pokud f je surjektivní;

monomorfismus – pokud f je injektivní.

Přímé součiny

Zavádí pravidla pro násobení celých algeber.

Buďte $\mathfrak{A}_k = (A_k, (\omega_i^k)_{i \in I})$, $k \in K$(pole), algebry téhož typu $(n_i)_{i \in I}$ a $A := \Pi_{k \in K} A_k = \{(a_k)_{k \in K} | a_k \in A_k\}$ je kartézský součin všech množin A_k. Pro všechna $i \in I$ buď operace ω_i na A definována vztahem:

$$\omega_i\, (a_k^1)\ k \in K \ldots (a_k^{n_i})_{k \in K} := (\omega_i a_k^1 \ldots a_k^{n_i})_{k \in K}$$

U součinu algeber odpovídá nosná množina, kartézskému součinu nosných množin jednotlivých součinitelů a operace jsou definovány pro všechny operace jednotlivých součinitelů.

Algebra $(A_k, (\omega_i)_{i \in I})$ se nazývá **přímý součin** algeber $\mathfrak{A}_k$ a značí se $\Pi_{k \in K}\, \mathfrak{A}_k$.

Přímé součiny pologrup (grup, vektorových prostorů, okruhů, Booleových algeber) jsou opět pologrupy (grupy, vektorové prostory, okruhy, Booleovy algebry).

Kongruence a faktorové algebry

Buďte $\mathfrak{A}= (A, (\omega_i)_{i\in I})$ algebra typu $(n_i)_{i\in I}$ a π relace ekvivalence na A. π se nazývá **relace kongruence** na $\mathfrak{A}\Leftrightarrow\forall i\in I$,kde $n_i>0$:$a_1,\dots,a_{n_i},b_1,\dots,b_{n_i},\in A$ platí:

$$a_1\pi b_1\wedge\dots\wedge a_{ni}\pi b_{ni}\Rightarrow\omega_i a_1\dots a_{ni}\pi\omega_i b_1\dots b_{ni}$$

Nad oborem integrity $\mathfrak{A}=(\mathbb{Z},+,0,\cdot,1)$ mějme pevný **modul** $n\in\mathbb{N}_0$ a pro $r,s\in\mathbb{Z}$ je $r\equiv s$ mod n (říkáme, že „r **kongruentní s s modulo** n“) $\Leftrightarrow n|(r-s)$ (n dělí $r - s$), pak platí:

1. $r\equiv s$ mod $n\Leftrightarrow r=s+kn$, $k\in\mathbb{Z}$ ⇔ r,s mají stejný zbytek při dělení číslem n;
2. ≡ mod n je relace ekvivalence.

Algebru $\mathfrak{A}/\pi \coloneqq (A/\pi\,, (\omega_i^*)_{i\in I})$ se nazývá **faktorová algebra** algebry $\mathfrak{A}$ podle kongruence π. Často klademe ω_i=ω_i^*.

Normální podgrupy (upralgfin-esf.pdf str.25)

Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa typu (2, 0, 1). $T \subseteq G$ je **podalgebra** ⇔

- $x, y \in T \Rightarrow xy \in T$
- $e \in T$
- $x \in T \Rightarrow x^{-1} \in T$

⇔

- $T \neq \emptyset$
- $x, y \in T \Rightarrow xy^{-1} \in T$

Protože zákony grupy typu (2, 0, 1) plati v G, a tedy také v T, je podalgebra $(T, \cdot, e, ^{-1})$ opět grupou a nazývá se **podgrupa** grupy $(G, \cdot, e, ^{-1})$.

Podgrupa N grupy $(G, \cdot, e, -1)$ se nazývá N **normální podgrupa** grupy G
(fromalně: $N \lhd G$) :⇔ $xNx^{-1} \subseteq N$ pro všechna $x \in G$.

Pro podgrupu N grupy G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- N je normální podgrupa grupy G.
- $\forall x \in G : \varphi_x(N) = N$. (kde φ_x je vnitřní automorfismus grupy)
- $\forall x \in G : xNx^{-1} = N$.
- $\forall x \in G : Nx = xN$, tj. pravá třída rozkladu = levá třída rozkladu.

Ideály okruhů (upralgfin-esf.pdf str.26)

Buď $(R,+, 0,-, \cdot)$ okruh a I podokruh okruhu R. Potom se I nazývá

- **levý ideál** okruhu R :⇔ $\forall r \in R : rI := \{ri \mid i \in I\} \subseteq I$,
- **pravý ideál** okruhu R :⇔ $\forall r \in R : Ir := \{ir \mid i \in I\} \subseteq I$,
- **ideál okruhu** R (formálně: $I \lhd R$) :⇔ $\forall r \in R : rI \subseteq I \wedge Ir \subseteq I$.

$\{0\}$ a R jsou vždy ideály okruhu R, tak zvané **triviálni ideály**.
V $(Z,+,0,-,\cdot)$ je $\{nk \mid k \in Z\}$, $n \in Z$, ideálem. Tím jsou vyčerpány všechny ideály v Z.