8. Normované a unitární prostory (základní vlastnosti a příklady, normované prostory konečné dimenze, uzavřené ortonormální systémy a Fourierovy řady)

Lineární normované prostory

V celém textu budeme číselným tělesem rozumět těleso reálných nebo komplexních čísel.

Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků *x, y, z, ...* a nechť je splněno těchto osm podmínek:

I. $\mathcal{L}$ je komutativní grupa, tj. ke každým dvěma prvkům $x, y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich součet a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:

   1. $x + y = y + x$ (komutativnost),
   2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativnost),
   3. v $\mathcal{L}$ existuje takový prvek (značíme jej θ), že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \subset \mathcal{L}$ (existence nulového prvku),
   4. Ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ existuje prvek, který značíme $-x$, takový, že $x + (-x) = \theta$ (existence opačného prvku).

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha\, x \in \mathcal{L}$ (tzv. součin prvku x a čísla α), přičemž platí tyto dva axiomy:

   1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x\ \alpha; \beta \in T; x \in \mathcal{L}$,
   2. $1 \cdot x = x; 1 \in T; x \in \mathcal{L}$:

III. Obě operace (tj. sčítání prvků a násobení prvku číslem) jsou svázány těmito *dvěma distribučními zákony:*

   1. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x; \alpha, \beta \in T; x \in \mathcal{L}$,
   2. $\alpha(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y; \alpha \in T; x; y \in \mathcal{L}$.

Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme lineárním nebo vektorovým prostorem nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly *α, β, ...* rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o komplexním, resp. reálném lineárním prostoru. Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme body nebo vektory, kdežto čísla *α, β, ...* nazýváme skaláry. Všude, kde nebude uvedeno něco jiného, budou naše úvahy platit pro reálné lineární prostory.

V lineárním prostoru kromě operace sčítání prvků a operace násobení prvku skalárem se zavádí ještě nějakým způsobem operace limitního přechodu. Nejvhodnější způsob, jak to udělat, je zavést v lineárním prostoru normu.

Lineární prostor $\mathcal{L}$ se nazývá normovaný, jestliže každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je přiřazeno reálné nezáporné číslo $||x||$, které se nazývá norma prvku x, přičemž platí:

1. $||x|| = 0$, když a jen když $x = \theta$;

2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;

3. $||x+y|| \leq ||x||+||y||$ (trojúhelníková nerovnost).

Protože se zabýváme pouze lineárními prostory, budeme lineární normované prostory stručně nazývat normovanými prostory.

Snadno je vidět, že každý lineární normovaný prostor i každá jeho podmnožina je současně metrickým prostorem; stačí položit $\rho(x, y) = ||x - y||$. Platnost axiomů metrického prostoru bezprostředně vyplývá z první a třetí vlastnosti normy.

Příklady:

- Číselné těleso T je normovaný prostor (nad T) s normou danou absolutní hodnotou. Např. reálná osa $\mathbb{R}^1$, tj. množina všech reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi sčítání a násobení, je lineárním prostorem. Prostor $\mathbb{R}^1$ se stane normovaným prostorem jestliže pro každé číslo $x \in \mathbb{R}^1$ položíme $||x|| := |x|$.
- Množina všech uspořádaných n-tic reálných, popř. Komplexních čísel x = (x1, x2, ... , xn), kde sčítání n-tic a násobení n-tic konstantou je denováno vztahy

  $$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$
  $$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n);$$

  je lineárním prostorem, který budeme nazývat n-rozměrným prostorem. Jde-li o n-tice reálných čísel a jsou-li multiplikativní konstanty také reálná čísla, budeme mluvit o **reálném n-rozměrném prostoru** a používat označení $\mathbb{R}^n$ (nebo R^n).

  Jde-li však o *n*-tice komplexních čísel a jsou-li skaláry také komplexní čísla, budeme mluvit o **komplexním n-rozměrném prostoru** a používat označení $\mathbb{C}^n$. Reálný n-rozměrný prostor je tedy reálným lineárním prostorem a komplexní n- rozměrný prostor komplexním lineárním prostorem.

  Normu v reálném *n*-rozměrném prostoru R^n s prvky $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme předpisem

  $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

  Vztah

  $$\varrho(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$$

  definuje v prostoru R^n tutéž metriku, kterou jsme zavedli v otázce 7.

  V lineárním prostoru R^n lze denovat normu také předpisem

  $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

  nebo

  $$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

  V komplexním *n*-rozměrném prostoru $\mathbb{C}^n$ lze zavést normu vztahem

Prvky x, y, ... ,w lineárního prostoru se nazývají **lineárně závislé**, jestliže existují takové konstanty $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, že

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = \theta$$

V opačném případě se tyto prvky nazývají **lineárně nezávislé**.

Nekonečný **systém** prvků x, y, ... prostoru L se nazývá **lineárně nezávislý**, jestliže prvky každé konečné podmnožiny množiny *{x, y, ... }* jsou lineárně nezávislé.

Výraz $\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w$ nazýváme **linární kombinací** prvků x,y,..., w.

Jestliže v prostoru L lze najít n lineárně nezávislých prvků, ale libovolné $n + 1$ prvky jsou již lineárně závislé, říkáme, že prostor L má **dimenzi** (rozměr) n. Jestliže v prostoru L lze nalézt nekonečný systém lineárně nezávislých prvků, říkáme, že prostor L má nekonečnou dimenzi. **Bází** v n-rozměrném prostoru L nazýváme libovolný systém n lineárně nezávislých prvků. Prostory R^n v reálném případě a C^n v komplexním případě mají, jak lze snadno ověřit, dimenzi n.

Množina M v metrickém prostoru X se nazývá **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ je možno vybrat podposloupnost, která konverguje k některému bodu $x \in \chi$.

Normované prostory konečné dimenze

Každý lineární prostor $X(n)$ konečné dimenze n je izomorfní s množinou vektorů n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, a proto můžeme považovat prvky uvažovaného prostoru $X(n)$ za n-tice čísel.

Položme

$$e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \text{ (jednička na } k\text{-tém místě).}$$

S užitím tohoto označení můžeme zapsat vektor

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \,,$$

takže

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \cdot \|e_k\| = \sum_{k=1}^{n} a_k |\xi_k| \,,$$

kde $a_k = ||e_k||$ nezávisí na x.

Aby podmnožina E konečnědimenzionálního normovaného prostoru $X(n)$ byla kompaktní, je nutné a stačí, aby byla ohraničená.

Tvrzení lze otočit - Libovolná ohraničená množina je v normovaném prostoru kompaktní pouze tehdy, když má daný prostor konečnou dimenzi.

Každý normovaný prostor konečné dimenze je úplný.

Konečnědimenzionální lineární podprostor X_0 libovolného normovaného prostoru R je uzavřený.

Nechť R je normovaný prostor a X_0 konečně dimenzionální lineární podprostor v R. K libovolnému prvku $x \in R$ existuje prvek $x_0 \in X_0$, který realizuje vzdálenost prvku x od X_0, tj. takový, že $||x , x_0|| = \rho(x,X_0)$.

Jako aplikaci předchozí věty uvažujme prostor $\mathbb{C}^0$<*a, b*> (množina všech spojitých komplexních funkcí na segmentu <a,b>) a jeho *n*-rozměrný podprostor P_n<*a, b*>, který sestává ze všech algebraických polynomů, jejichž stupeň není větší než *n*. Podle předchozího důsledku k libovolné spojité funkci $x \in \mathbb{C}^0$<*a, b*> existuje takový polynom $x_0 \in P_n$ <*a, b*>, že

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_0(t)| = \|x - x_0\| = \varrho(x, \mathcal{P}_n)\,,$$

tj. existuje polynom, který nejlépe aproximuje funkci *x*(*t*) ve srovnání se všemi ostatními polynomy, jejichž stupeň nepřevyšuje *n*.

Nechť R_1 a R_2 jsou dva normované prostory definované na témže lineárním prostoru L normami $|| \cdot ||_1$ a $|| \cdot ||_2$. Říkáme, že tyto normy jsou ekvivalentní, jestliže existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$, že

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{L}\,.$$

Nechť *n* je libovolné přirozené číslo. Dvě libovolné normy $|| \cdot ||1$ a $|| \cdot ||2$ definované na témže lineárním prostoru *X*(*n*) konečné dimenze *n* jsou ekvivalentní, tj. existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$, že

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X(n)\,.$$

Unitární prostory

Skalárním součinem v reálném lineárním prostoru *R* nazýváme reálnou funkci (*x, y*), která je definována pro každou dvojici prvků $x, y \in R$ a splňuje tyto podmínky ($x, x_1, x_2, y \in R$, λ je reálné číslo):

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

Lineární prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá unitární prostor. V unitárním prostoru *R* se norma zavádí vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}\,.$$

Z podmínek 1 - 4 skalárního součinu plyne, že všechny požadavky kladené na normu jsou přitom splněny.

Pozn. Cauchy-Buňakovského nerovnost $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,,$

Máme-li v prostoru *R* zaveden skalární součin, můžeme v tomto prostoru zavést nejen normu (tj. velikost) vektoru, ale také úhel vektorů; kosinus úhlu ϕ dvou nenulových vektorů *x* a *y* se totiž definuje vztahem

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}\,.$$

Z Cauchy-Buňakovského nerovnosti plyne, že absolutní hodnota výrazu na pravé straně nerovnosti není větší než 1, a tedy vztah skutečně definuje pro libovolné vektory *x* a *y* nějaký úhel φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Jestliže $(x, y) = 0$, potom z dostaneme, že $\varphi = \pi/2$; takové vektory x a y se nazývají **ortogonální**.

Soustava $\{x_\alpha\}$ nenulových vektorů $x_a \in R$ se nazývá **ortogonální**, jestliže

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta\,.$$

Je-li $\{x_\alpha\}$ ortogonální soustava, jsou vektory x_α lineárně nezávislé.

Je-li ortogonální soustava $\{x_\alpha\}$ úplná (tj. nejmenší uzavřený podprostor vytvořený soustavou $\{x_\alpha\}$ je celý prostor R), nazývá se **ortogonální báze**. Soustava nenulových vektorů $x_a \in R$ se nazývá ortonormální, jestliže

$$(x_a, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{pro } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Je zřejmé, že je-li $\{x_\alpha\}$ ortogonální soustava, potom $\{x_\alpha/||x_\alpha||\}$ je ortonormální soustava. Úplná ortonormální soustava se nazývá **ortonormální báze.**

Příklad:

Konečně rozměrný prostor $\mathbb{R}^n$, jehož prvky jsou všechny n-tice reálných čísel

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\,.$$

s obvyklými operacemi sčítání n-tic a násobení konstantou a se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

je dobře známým příkladem unitárního prostoru.(Takto zavedený skalární součin definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ normu

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,,$$

a tedy i euklidovskou metriku.) Ortonormální bázi tohoto prostoru (jednu z nekonečně mnoha možných) tvoří vektory

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_1 &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Fourierova řada

Je-li $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormální báze unitárního n-rozměrného prostoru $\mathbb{R}^n$, potom každý vektor $c \in \mathbb{R}^n$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\,,$$

kde

$$c_k = (x, e_k)\,.$$

Vysvětlíme, jak lze zobecnit předchozí r d unitárního prostoru, který má nekonečnou dimenzi. Nechť

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \tag{83.3}$$

je ortonormální systém v unitárním prostoru *R* a *f* je libovolný prvek prostoru *R*.
Přiřadíme prvku $f \in R$ posloupnost čísel

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

které budeme nazývat **souřadnicemi** nebo **Fourierovými koeficienty** prvku *f* vzhledem k systému $\{\varphi_k\}$, a funkční řadu

$$\sum_k c_k \varphi_k ,$$

kterou nazveme **Fourierovou řadou** prvku *f* vzhledem k systému $\{\varphi_k\}$.

K danému indexu *n* se mají najít takové koecienty α_k ($k = 1, 2, \dots, n$), aby vzdálenost prvků *f* a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{83.6}$$

byla minimální. Vypočtěme tuto vzdálenost. Protože systém (83.3) je ortonormální, platí

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \\ &= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\right) = \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že minima tohoto výrazu se dosáhne tehdy, když

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 = 0,$$

tj. platí-li

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{83.7}$$

V tomto případě je

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 .$$

Ukázali jsme, že při daném přirozeném čísle *n* má ze všech součtů tvaru (83.6) nejmenší vzdálenost od prvku *f* *n*-tý částečný součet Fourierovy řady prvku *f* (tzv. *n*-tý Fourierův polynom prvku *f*).
Geometricky lze tento výsledek interpretovat takto: Prvek

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

je ortogonální ke všem lineárním kombinacím tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k ,$$

tj. je ortogonální k podprostoru vytvořenému prvky $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, když a jen když je splněna podmínka (83.7).

Získaný výsledek je tedy zobecněním známé věty z elementární geometrie: Pata kolmice spuštěné z daného bodu k přímce (resp. rovině) má ze všech bodů přímky (resp. roviny) nejmenší vzdálenost od daného bodu.

Uzavřené ortogonální prostory

Ortonormální systém (83.3) se nazývá **uzavřený**, jestliže mezi každým vektorem $f \in R$ a jeho Fourierovými koecienty c_k platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 .$$

uzavřenost systému (83.4) je ekvivalentní s tím, že pro každý vektor $f \in R$ konverguje posloupnost částečných součtů Fourierovy řady $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ k prvku f.

Pojem uzavřenosti ortonormálního systému úzce souvisí s dříve zavedeným pojmem úplnosti systému:
V separabilním unitárním prostoru R každý úplný ortonormální systém je uzavřený, a obráceně.