

Petriho síť

PES 2007/2008

Prof. RNDr. Milan Češka, CSc.

ceska@fit.vutbr.cz

Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

vojnar@fit.vutbr.cz

Sazba: Ing. Petr Novosad, Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

(verze 27.2.2008)

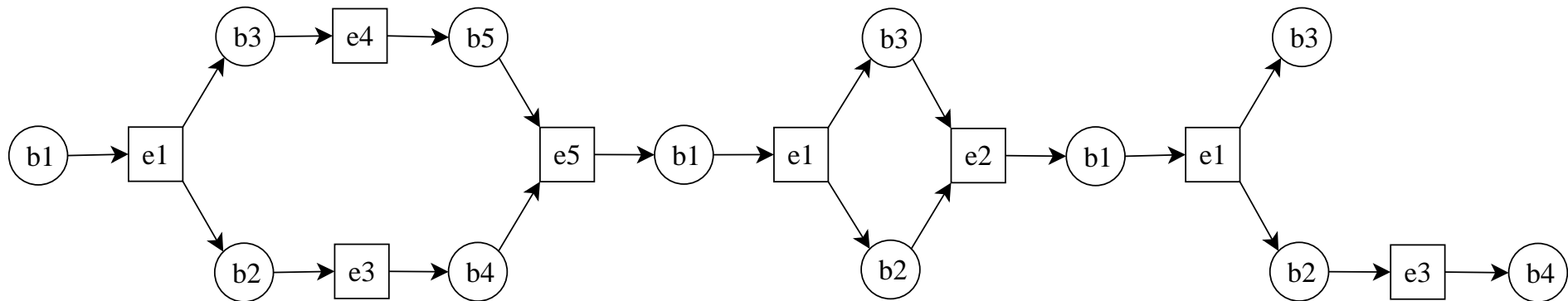
FIT, VUT v Brně, Božetěchova 2, CZ-612 66 Brno

Procesy C/E systémů

Problém reprezentace procesů:

1. Prostřednictvím případového grafu jako cesta v grafu (není zcela adekvátní)
2. Výskytová síť (Occurrence net)
jednoznačný, explicitní záznam výskytů událostí a změn podmínek systému

❖ **Příklad 1: Výskytová síť**



Reprezentace procesu při provádění sítě z příkladu 3 (kapitola C/E Systémy) odpovídající posloupnosti:

$\{b_1\} [e_1] \{b_2, b_3\} [e_4] \{b_2, b_5\} [e_3] \{b_4, b_5\} [e_5] \{b_1\} [e_1] \{b_2, b_3\} [e_2] \{b_1\} [e_1] \{b_2, b_3\} [e_3] \{b_4, b_3\}$

Atributy této reprezentace:

- ohodnocená síť
- částečně uspořádaná síť

1. Částečně uspořádané množiny

❖ **Definice 1.1:** Necht' M je množina. Relace $\rho \subseteq M \times M$ se nazývá *částečné uspořádání*, jestliže $\forall a, b, c \in M$

$$(1) \neg(a\rho a) \quad [\rho \text{ je ireflexivní}]$$

$$(2) a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c \quad [\rho \text{ je tranzitivní}]$$

Částečné uspořádání ρ budeme zapisovat symbolem $<$ (bez ohledu na nosič).

$$\text{Dále } a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Ukážeme nyní některé vlastnosti relace, která popisuje vztah “kauzální závislosti a nezávislosti”.

❖ **Definice 1.2:** Necht' A je množina. Relace $\rho \subseteq A \times A$ se nazývá *relací podobnosti* (similarity relation), jestliže

(1) $\forall a \in A: a\rho a$	$[\rho \text{ je reflexivní}]$
(2) $\forall a, b \in A: a\rho b \Rightarrow b\rho a$	$[\rho \text{ je symetrická}]$

Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá *oblastí relace podobnosti ρ* , jestliže

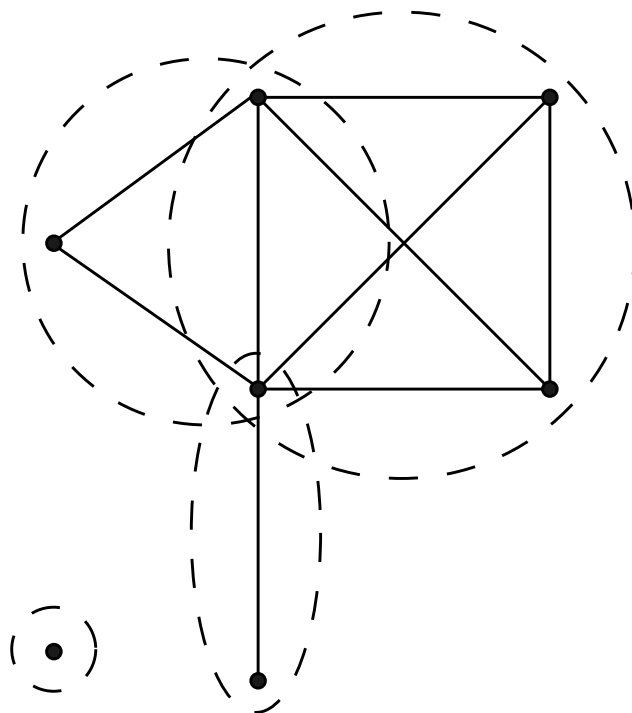
(1) $\forall a, b \in B: a\rho b$	$[\rho \text{ je úplnou relací na } B]$
(2) $\forall a \in A: a \notin B \Rightarrow \exists b \in B: \neg(a\rho b)$	$[B \text{ je maximální}]$

❖ **Tvrzení 1.1:** Necht' ρ je relace podobnosti na A .

1. Každý prvek $a \in A$ patří alespoň do jedné oblasti relace ρ
2. Žádná oblast není vlastní podmnožinou jiné oblasti
3. Je-li ρ zároveň ekvivalence, pak její oblasti jsou shodné s třídami rozkladu generovaného touto ekvivalencí

❖ **Grafická reprezentace relace podobnosti:** Neorientovaným grafem, kde A je množina vrcholů a $K = \{(a, b) \mid a \neq b \wedge a \rho b\}$ je množina hran.

❖ **Příklad 2:** Relace podobnosti a její oblasti



❖ **Definice 1.3:** Necht' A je částečně uspořádaná množina.

1. Necht' $\underline{li} \subseteq A \times A$ je binární relace

$$a \underline{li} b \Leftrightarrow a < b \vee b < a \vee a = b$$

2. Necht' $\underline{co} \subseteq A \times A$ je binární relace

$$a \underline{co} b \Leftrightarrow \neg(a \underline{li} b) \vee a = b$$

$$\text{tzn. } a \underline{co} b \Leftrightarrow \neg(a < b) \wedge \neg(b < a) \vee a = b$$

❖ **Tvrzení 1.2:** Necht' A je částečně uspořádaná množina a necht' $a, b \in A$.

$$1. \quad a \underline{li} b \vee a \underline{co} b$$

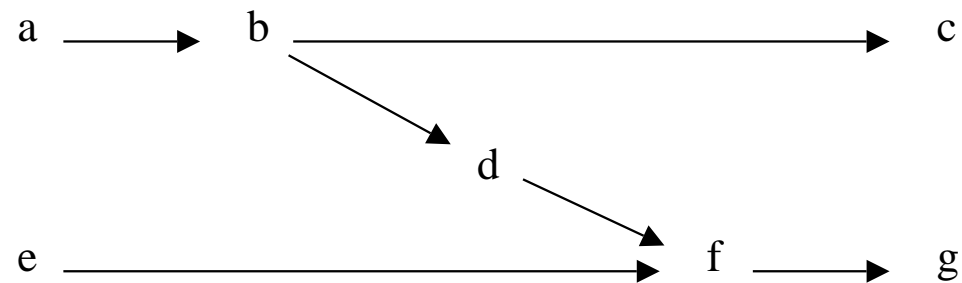
$$2. \quad a \underline{li} b \wedge a \underline{co} b \Leftrightarrow a = b$$

❖ **Theorem 1.1:** Pro každou částečně uspořádanou množinu jsou binární relace \underline{li} a \underline{co} relacemi podobnosti.

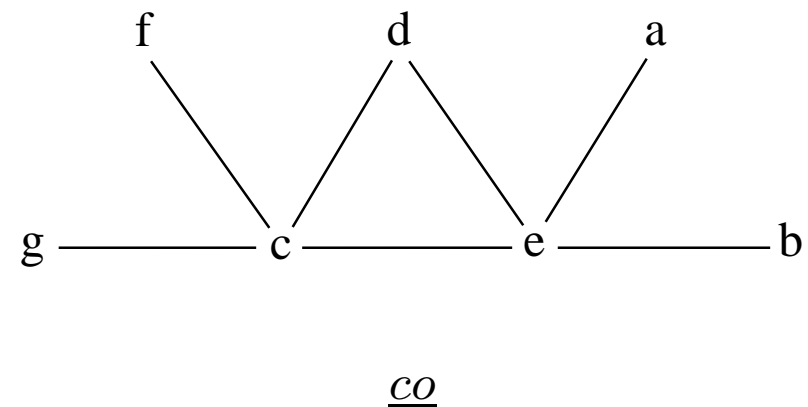
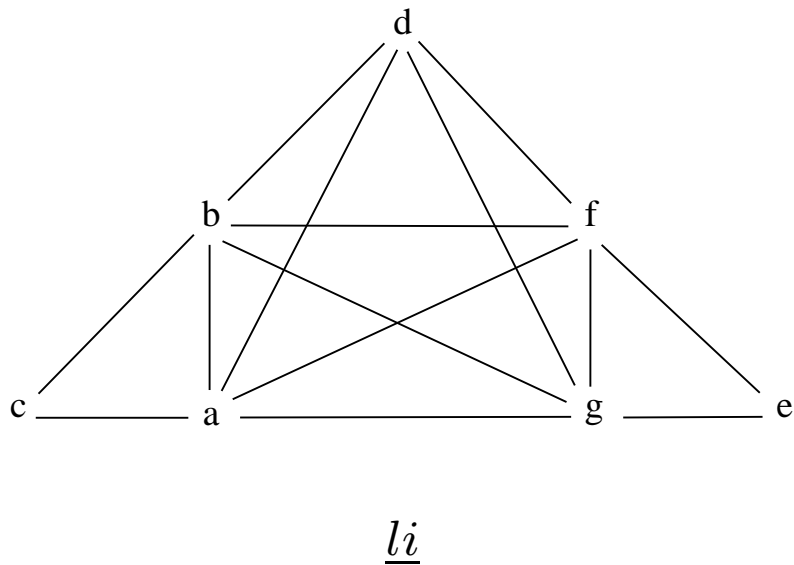
Důkaz.

❖ Příklad 3:

Uvažujme poset:



Odpovídající grafická reprezentace relací li a co:



❖ **Definice 1.4:** Necht' A je poset a $B \subseteq A$.

1. B se nazývá **řetězcem** (line), je-li oblastí li
2. B se nazývá **řezem** (cut), je-li oblastí co

❖ **Příklad 4:** Částečné uspořádání z příkladu 3 má

3 řetězce: $\{a, b, c\}$, $\{e, f, g\}$ a $\{a, b, d, f, g\}$

5 řezů: $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, d, c\}$, $\{f, c\}$ a $\{g, c\}$

❖ **Tvrzení 1.3:** Necht' A je poset a $B \subseteq A$.

1. B je řetězcem, právě když
 - (a) $\forall a, b \in B: a < b \vee b < a \vee a = b$
 - (b) $\forall a \in A \setminus B \exists b \in B: \neg(a < b \vee b < a)$
2. B je řezem, právě když
 - (a) $\forall a, b \in B: \neg(a < b \vee b < a)$
 - (b) $\forall a \in A \setminus B \exists b \in B: (a < b \vee b < a)$

❖ **Definice 1.5:** Necht' A je poset a $B, C \subseteq A$.

1. Množina A se nazývá **omezená** (ohraničená), jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý řetězec množiny A platí $|L| \leq n$
2. B **předchází** C (píšeme $B \leq C$), jestliže $\forall b \in B \ \forall c \in C: b < c \ \vee \ b \underline{co} c$
($B < C$ značí $B \leq C$ a $B \neq C$)
3. Necht' $B^- = \{a \in A \mid \{a\} \leq B\}$ a $B^+ = \{a \in A \mid B \leq \{a\}\}$
4. Necht' ${}^\circ B = \{b \in B \mid \forall b' \in B: b \underline{co} b' \ \vee \ b < b'\}$ a
 $B^\circ = \{b \in B \mid \forall b' \in B: b \underline{co} b' \ \vee \ b' < b\}$.
Zřejmě ${}^\circ A$ obsahují “minimální prvky” množiny A a A° pak “maximální prvky” množiny A .

❖ **Theorem 1.2:** Je-li A omezená částečně uspořádaná množina, pak ${}^{\circ}A$ a A° jsou řezy.

Důkaz: Necht' a, b jsou libovolné prvky ${}^{\circ}A$. Pak $a \underline{co} b$, protože $\neg(a < b \vee b < a)$. Necht' $c \in A \setminus {}^{\circ}A$ a necht' L je řetězec a $c \in L$. Protože L je konečná množina, existuje $d \in L \cap {}^{\circ}A$, a proto $d < c$. Podle Tvzení 1.3 (2) je ${}^{\circ}A$ řezem. Pro A° analogicky. \square

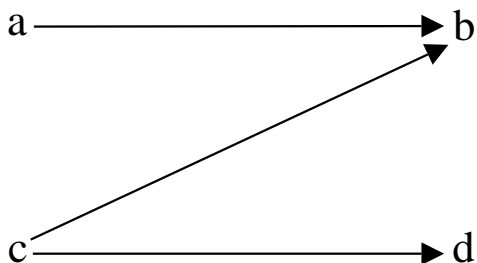
❖ **Tvrzení 1.4:** Necht' A je poset, L řetězec a D řez množiny A . Pak

$$|L \cap D| \leq 1$$

Důkaz: Necht' $a, b \in L \cap D$. Pak $a \underline{li} b$, protože $a, b \in L$. Avšak $a \underline{co} b$, protože $a, b \in D$. Podle Tvzení 1.2 (2) je $a = b$. \square

❖ **Definice 1.6:** Poset A se nazývá *K -hustým* (K -dense), jestliže každý řetězec má neprázdný průnik s každým řezem.

❖ **Příklad 4:** Poset, který není K -hustý



$$\{c, b\} \cap \{a, d\} = \emptyset$$

2. Výskytové sítě (Occurrence Nets)

❖ **Definice 2.1:** Síť $K = (S_K, T_K, F_K)$ se nazývá *výskytová síť* (occurrence net), jestliže

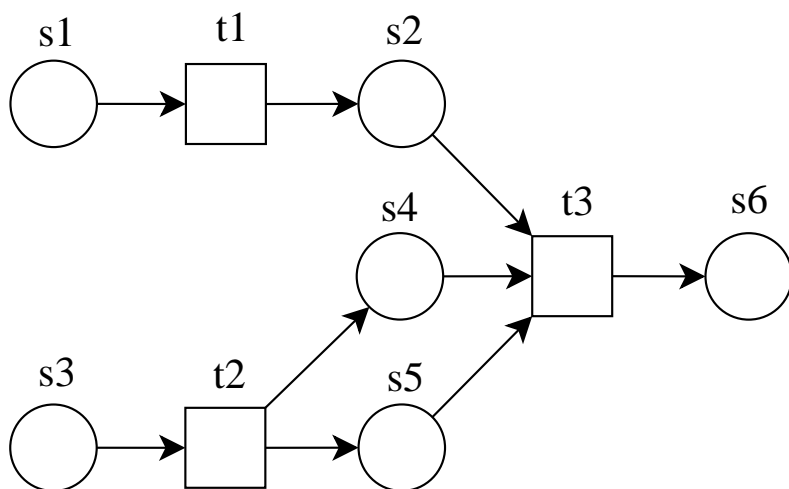
1. $\forall a, b \in K: aF_K^+b \Rightarrow \neg(bF_K^+a)$, tj. K nemá cykly
2. $\forall s \in S_K: |\bullet s| \leq 1 \wedge |s\bullet| \leq 1$, tj. místa sítě nejsou větvena

❖ **Tvrzení 2.1:** Necht' K je výskytová síť. Relace $<$ definována: $a < b \stackrel{def.}{\iff} aF_K^+b$ pro všechna $a, b \in K$ je částečné uspořádání na K (tj. $S_K \cup T_K$)

Poznámka: To znamená, že pro K jsou definovány dříve zavedené pojmy řetězce, řezy, omezenost a K -hustota.

❖ **Definice 2.2:** *S-řezem* (slice) nazýváme řez, který obsahuje pouze místa. Označme $sl(K)$ množinu všech *S-řezů* sítě K .

❖ **Příklad 5:**



Tato síť má 3 řetězce, 11 řezů a z toho 5 *S-řezů*.

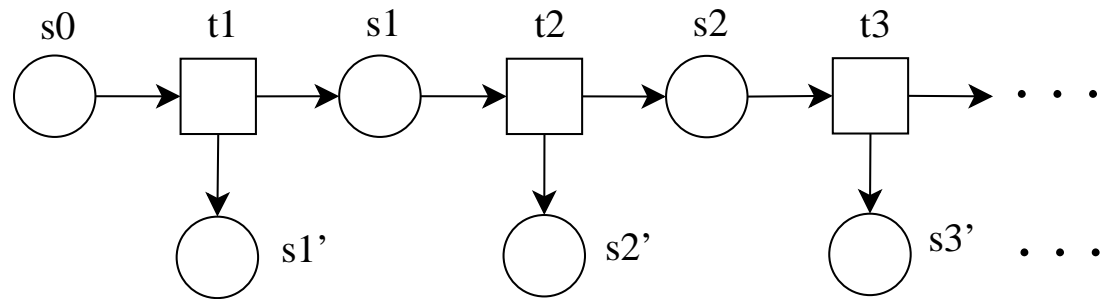
Příklad řetězce: $\{s_3, t_2, s_4, t_3, s_6\}$

Příklad řezu: $\{t_1, s_4, s_5\}$

Příklad *S-řezu*: $\{s_1, s_3\}$

❖ **Theorem 2.1:** Každá omezená neprázdná výskytová síť je K -hustá.

❖ **Příklad 6:** Síť, která není K -hustá



$$\{s_0, t_1, s_1, \dots\} \cap \{s'_1, s'_2, \dots\} = \emptyset$$

Pokud by tato síť byla konečná: $|\{s_0, t_1, s_1, \dots, t_n, s'_n\} \cap \{s'_1, \dots, s'_n\}| = 1$

3. Procesy

Proces definujeme jako zobrazení z omezené výskytové sítě do bezkontaktního C/E systému, které splňuje 2 požadavky:

1. Každý S -řez sítě je injektivně zobrazen na nějaký případ C/E systému
2. Zobrazení přechodů výskytové sítě na události C/E systému respektuje okolí události

❖ **Definice 3.1:** Nechť K je omezená výskytová síť a nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Zobrazení $p: K \rightarrow \Sigma$ se nazývá proces systému Σ , jestliže pro každý S -řez D sítě K a každý přechod $t \in T_K$ platí:

1. $p|D$ je injektivní a $p(D) \in C_\Sigma$
2. $p(\bullet t) = \bullet p(t) \wedge p(t \bullet) = p(t) \bullet$

Grafická reprezentace procesů $p : K \rightarrow \Sigma$:

Každý prvek x sítě K je označen (labeled) svým obrazem $p(x)$.

Síť z příkladu 1 je procesem C/E systému z příkladu 3 kapitoly C/E systémy.

❖ **Theorem 3.1:** Pro každý proces $p : K \rightarrow \Sigma$ platí:

1. $p(S_K) \subseteq B_\Sigma \wedge p(T_K) \subseteq E_\Sigma$, tj. p zachovává druhy
2. $\forall x, y \in K: xF_K y \Rightarrow p(x)F_\Sigma p(y)$, tj. p zachovává relaci toku
3. $\forall x, y \in K: p(x) = p(y) \Rightarrow x \underline{li} y$, tj. podmínky a události nejsou vzájemně paralelní
4. $\forall t \in T_K: \bullet t \neq \emptyset \wedge t^\bullet \neq \emptyset$, tj. události mají antecedenty a konsekventy
5. pro každý řez D sítě K : $p|D$ je injektivní

❖ **Theorem 3.2:** Necht' $p : K \rightarrow \Sigma$ je proces, necht' pro $T \subseteq T_K$ platí $\forall t_1, t_2 \in T: t_1 \underline{co} t_2$. Pak $\exists c_1, c_2 \in C_\Sigma: c_1[p(T)]c_2$.

Důkaz: Zřejmě $\forall s_1, s_2 \in {}^\bullet T: s_1 \underline{co} s_2$. Pak tedy existuje $D \in \underline{sl}(K)$, pro který ${}^\bullet T \subseteq D$. Podle definice 3.1 $p(D) \in C_\Sigma$ a ${}^\bullet p(T) = p({}^\bullet T) \subseteq p(D)$. Dále $\forall s \in T^\bullet \exists s_1 \in D$ takové, že $s_1 < s$. Proto $T^\bullet \cap D = \emptyset$ a také $p(D) \cap p(T^\bullet) = p(D) \cap p(T)^\bullet = \emptyset$. Tudíž $p(T)$ je $p(D)$ -proveditelný krok. \square

Poznámka: Izomorfismus výskytových sítí - nepojmenovávají se prvky sítě

❖ **Věta 3.1:** Každý bezkontaktní C/E systém je plně charakterizován množinou svých procesů. Proces $p: K \rightarrow \Sigma$ je skutečně reprezentován množinou dvojic $\{(x, p(x)) \mid x \in K\}$.

❖ **Theorem 3.3:** Necht' Σ_1, Σ_2 jsou dva bezkontaktní C/E systémy a necht' P_i jsou množiny procesů systému Σ_i ($i = 1, 2$). Pak $P_1 = P_2 \Leftrightarrow \Sigma_1 = \Sigma_2$.

Důkaz: Necht' $\Sigma_i = (B_i, E_i, F_i, C_i)$, $i = 1, 2$ a necht' $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Pak existuje $b \in B_1 \cup B_2$ nebo $e \in E_1 \cup E_2$ nebo $c \in C_1 \cup C_2$ takový, že $b \in B_1 \setminus B_2$ nebo $e \in E_1 \setminus E_2$ nebo $(b, e) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $(e, b) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $c \in C_1 \setminus C_2$. Pak ale existuje krok $c_1[e']c_2$ v Σ_1 , který není možný v Σ_2 (vyber $b \in c_1 \cup c_2$ nebo $e' = e$ nebo $c = c_1$ nebo $c = c_2$). Pro $K = (S, \{t\}, F)$ necht' $p: K \rightarrow \Sigma_1$ je proces, pro který $p({}^\circ K) = c_1$ a $p(K^\circ) = c_2$ a $p(t) = e'$. Pak $p \in P_1 \setminus P_2$. □

4. Kompozice procesů

Za předpokladu, že proces p_1 končí ve stejném případě (stavu), ve kterém proces p_2 začíná, definujeme kompozici

$$p_1 \circ p_2$$

❖ **Lemma 4.1:** Je-li $p: K \rightarrow \Sigma$ proces, pak ${}^\circ K$ a K° jsou S -řezy množiny K .

Důkaz: Podle theoremu 1.2 jsou ${}^\circ K$ a K° řezy množiny K . Protože Σ je bezkontaktní, pak pro každé $e \in E_\Sigma$ je $\bullet e \neq \emptyset$ a $e^\bullet \neq \emptyset$. Z definice 3.1 (2) plyne ${}^\circ K \cup K^\circ \subseteq S_K$. \square

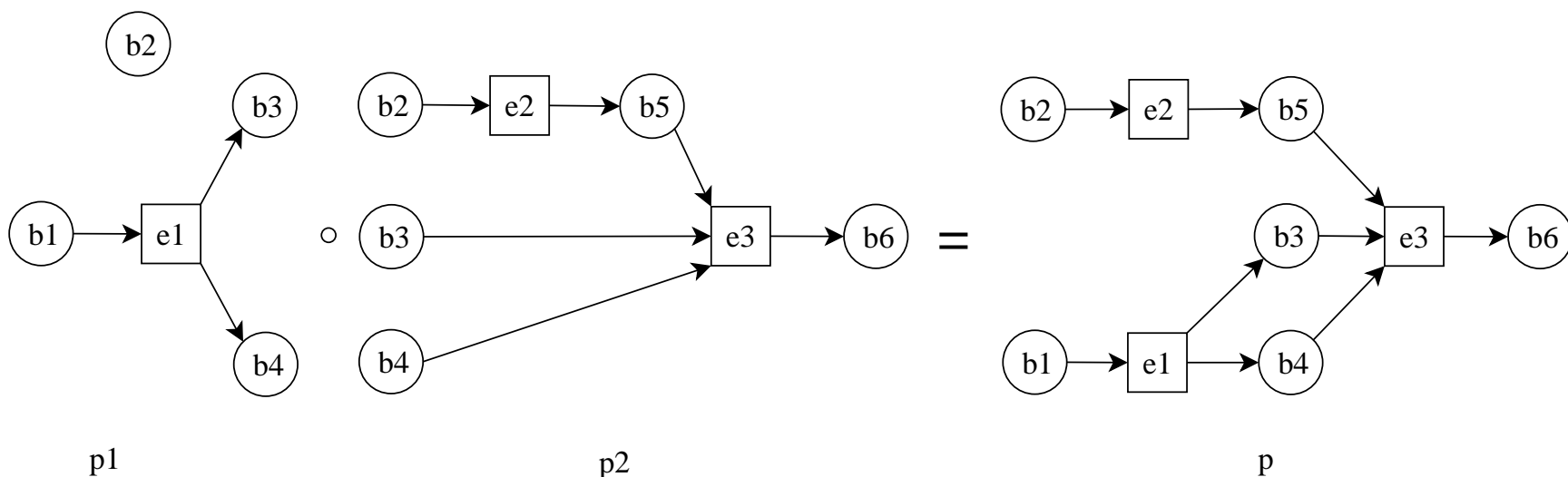
❖ **Lemma 4.2:** Necht' $p_i: K_i \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$, jsou dva procesy, pro které $p_1(K_1^\circ) = p_2({}^\circ K_2)$. Pak existuje právě jedna (až na izomorfismus) výskytová síť K a S -řez D této sítě a proces $p: K \rightarrow \Sigma$ takový, že

$$p|D^- = p_1 \text{ a } p|D^+ = p_2$$

Důkaz: Necht' $K_i = (S_i, T_i, F_i)$, $i = 1, 2$ a necht' $(S_1 \cup T_1) \cap (S_2 \cup T_2) = K_1^\circ = {}^\circ K_2$. Pak síť $K = (S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2)$, $D = K_1^\circ = {}^\circ K_2$ a proces p definovaný předpisem $p(x) = p_i(x) \xLeftrightarrow{def} x \in K_i, i = 1, 2$ splňuje tvrzení lemmy. □

❖ **Definice 4.1:** Necht' p_1, p_2, p jsou procesy splňující Lemma 4.2. Proces p se nazývá *kompozicí* procesů p_1 a p_2 . Kompozici procesů zapisujeme $p = p_1 \circ p_2$

❖ **Příklad 7:** Kompozice procesů



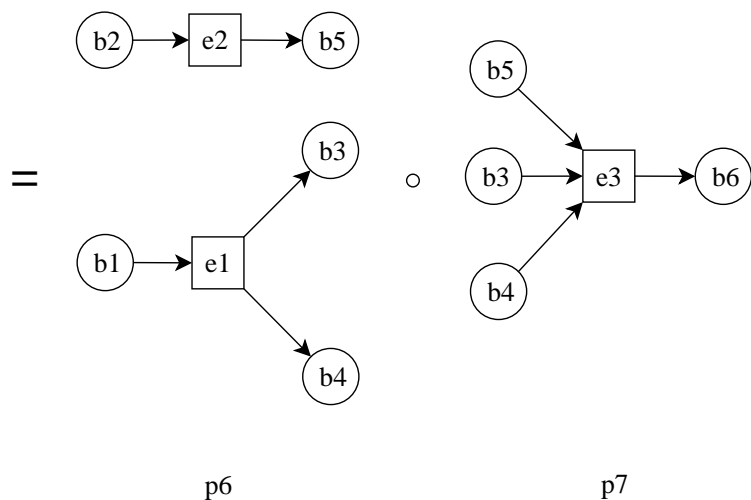
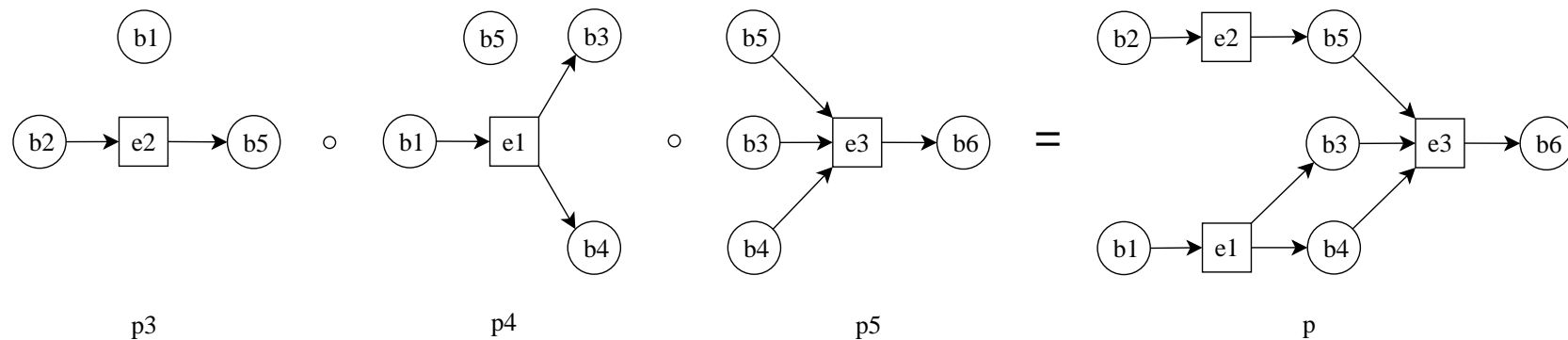
❖ **Tvrzení 4.1:** Nechť $p: K \rightarrow \Sigma$ je proces a nechť D je S -řez množiny K . Nechť $p^- = p|D^-$ a $p^+ = p|D^+$. Pak p^- a p^+ jsou procesy a $p = p^- \circ p^+$.

❖ **Tvrzení 4.2:** Nechť p_1, p_2, p_3 jsou procesy, pro které jsou definovány $p_1 \circ p_2$ a $p_2 \circ p_3$. Pak $p_1 \circ (p_2 \circ p_3) = (p_1 \circ p_2) \circ p_3$.

❖ **Definice 4.2:** Proces $p: K \rightarrow \Sigma$ je *elementární*, jestliže $S_K = {}^\circ K \cup K^\circ$

Poznámka: Proces se nazývá elementární, jestliže popisuje jednoduchý krok. Procesy jsou rozložitelné na konečně mnoho elementárních procesů.

❖ **Příklad 8:** Kompozice procesu p užitím elementárních procesů p_3, p_4, p_5 nebo p_6, p_7



❖ **Tvrzení 4.3:**

1. $p: K \rightarrow \Sigma$ je elementární proces $\Leftrightarrow p({}^\circ K) [p(T_K)] p(K^\circ)$ je krok
2. Jestliže $p: K \rightarrow \Sigma$ je elementární, pak $\forall t_1, t_2 \in T_K: t_1 \underline{co} t_2$

❖ **Definice 4.3:** Proces $p: K \rightarrow \Sigma$ se nazývá *prázdný*, jestliže $T_K = \emptyset$.

❖ **Tvrzení 4.4:**

1. Každý prázdný proces je elementární
2. Je-li p' prázdný proces a je-li definováno $p \circ p'$ (resp. $p' \circ p$), pak $p = p \circ p'$ (resp. $p = p' \circ p$)

❖ **Tvrzení 4.5:** Je-li $p: K \rightarrow \Sigma$ proces, pak existuje konečně mnoho elementárních procesů p_1, p_2, \dots, p_n takových, že

$$p = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$$

Důkaz: Existuje celé číslo m ohraničující počet přechodů každého řetězce množiny K . Je-li $m = 0$, pak p je prázdný. Jestliže nejdelší řetězec má $m \neq 0$ přechodů, pak p je rozložitelný na p' a p'' tak, že $p = p' \circ p''$, p' obsahuje $(m - 1)$ přechodů a p'' je elementární neprázdný proces. Dále indukcí. □