základní pojmy

- logika: výroková i predikátová logika (1. řádu)

  -

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	$\boxed{0}$
1	1	1

$a \to b = \neg a \vee b$

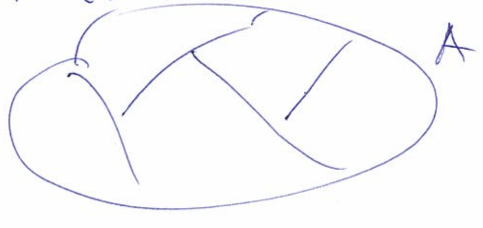
  - $\forall x \, \varphi(x) = \neg \exists x \, \neg \varphi(x)$

    $\exists x \, \varphi(x)$

- množiny
  - $\cup, \cap, \overline{}, A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
  - $=, \subseteq, \subset, \in$ [pro mn-y A, B a prvek x, lze psát $A \subseteq B$ ale nebude psát $\cancel{x \subseteq B}$]

    $x \in A$ $\qquad$ $\cancel{A \in A}$
  - zápis: $\{1,2,3\}$, NE: $(\cancel{1,2,3})$, $[\cancel{1,2,3}]$

- $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid \forall 1 \le i \le n : a_i \in A_i\}$
- relace ρ na n-ádi $A_1,\dots,A_n$: $\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$
- vlastnosti relací, konkrétně binárních relací $\rho \subseteq A \times A$:
  - souvislost: $\forall a,b \in A: a \neq b \Rightarrow a\rho b \vee b\rho a$.
  - reflexivní, ireflexivní — $\forall a \in A: a \not\rho a$
    - └ $\forall a \in A: a\rho a$
  - symetrická, asymetrická, antisymetrická
    - └ $\forall a,b \in A: a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a=b$
  - tranzitivní
- tranzitivní uzávěr relace $\rho \subseteq A \times A$: $\rho^+ \subseteq A \times A$ definovaná tak, že
  $\forall a,b \in A: a\rho^+ b \Leftrightarrow \exists n \ge 1: \exists a_1,\dots,a_n \in A: a=a_1 \wedge b=a_n \wedge$
  $\forall 1 \le i \le n-1: a_i \rho a_{i+1}$.
- reflexivní a tranz. uzávěr relace: $\rho^* \subseteq A \times A$ takový, že
  $\rho^* = \rho^+ \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$
- ekvivalence: reflex., sym., tranz.
  - vytváří rozklad na třídy



  - např. $\equiv_3 \subseteq N \times N$

- ostré / neostré úplné / částečné uspořádání:

  L $\subseteq$

  souvislá relace, ireflexivní, asymetrická, tranzitivní.

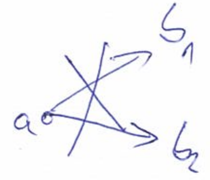
  $\{b,d\} \nsubseteq \{a,b,c\}$

  $\{a,b,c\} \nsubseteq \{b,d\}$

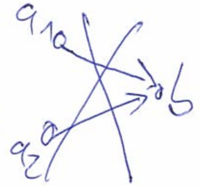
- funkce $f: A \to B$ je (částečná fce $f: A \rightharpoonup B$) nepožadujeme bod 1 může

  relace $f \subseteq A \times B$ taková, že:

  1) $\forall a \in A \; \exists b \in B: f(a) = b$ // neboli $(a,b) \in f$, $a f b$
  2) $\forall a \in A \; \forall b_1, b_2 \in B: f(a) = b_1 \wedge f(a) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$



- injekce $f: A \to B$ je funkce $A \to B$ taková, že $\forall a_1, a_2 \in A \; \forall b \in B: f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$



- surjekce $f: A \to B$ je fce taková, že

  $\forall b \in B \; \exists a \in A: f(a) = b$

- bijekce: injekce a surjekce
- spočetná mn-a A: $\exists$ bijekce $f: A \leftrightarrow \mathbb{N}$

Formální jazyky

- abeceda Σ
- $L \subseteq \Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$

  $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$, $|\varepsilon| = 0$; $\Sigma^1 = \Sigma$
- operace nad jazyky:
  - množinové: $\cup, \cap, \dots$
  - speciální: $\cdot\,, {}^*, {}^+$

    $L^+ = \bigcup_{n > 0} L^n$

    $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$

- Vypočítejte:
  - $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
  - $\emptyset^+ = \emptyset$
  - $\emptyset \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
  - $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$
  - $\emptyset \cdot L = \emptyset$
  - $\emptyset \cdot \{\varepsilon\} = \emptyset$
  - $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$
  - $\{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}$
  - $\emptyset \cap L = \emptyset$
  - $\{\varepsilon\} \cap L = \begin{cases} \emptyset & \varepsilon \notin L \\ \{\varepsilon\} & \varepsilon \in L \end{cases}$
  - $\{\varepsilon\} \cdot L = L$
  - $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$

Gramatiky

- $G = (N, \Sigma, P, S)$
  - N … kon. mn-a neterm. symb.
  - Σ … kon. nepr. abeceda
  - P … kon. mn-a přep. pr.
  - $S \in N$

$$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* \underline{N} (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

- relace přímé derivace $\underset{G}{\Rightarrow} \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ taková, že

$$\forall \lambda, \mu \in (N \cup \Sigma)^* : \lambda \underset{G}{\Rightarrow} \mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^* : \lambda = \gamma \alpha \delta \wedge \mu = \gamma \beta \delta \wedge (\alpha \to \beta) \in P.$$

- relace derivace: $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$
- $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \}$

- Uvažme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$P: \quad S \to A \mid B$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB$$

Ilustrace možných derivací:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & a & & aa & & \dots \\
 & & A \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & & & \\
S \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & & & aA \arrow[uur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & aaA \arrow[uurr, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \dots & \\
 & & B \arrow[r, Rightarrow] & bB \arrow[r, Rightarrow] & bbB \arrow[r, Rightarrow] & \dots & &
\end{tikzcd}$$

Zapište množinově jazyk $L(G)$.

$$L(G) = \{ a^n \mid n \geq 1 \}$$

- zapište mn-ně jazyk gramatiky $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$.

$L(G) = \emptyset$

Chomského klasifikace gr. a jazyků

- typ 3 (NKA/DKA/) RV : $A \to wB \mid w$, kde $A, B \in N$, $w \in \Sigma^*$
  - pravé lineární

  nebo $A \to Bw \mid w$, kde — " —
  - levé lineární

  (nelze míchat)

  lze převést na $A \to aB \mid a$, $A, B \in N$, $a \in \Sigma$
  plus (příp.) $S \to \varepsilon$, kde S se nevyskytuje nikdy na pravé straně (*)
  (pravé regulární)

  - analogicky: levé regulár.

- typ 2 (ZA) : $A \to \alpha$, kde $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

- typ 1 : $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, kde $A \in N$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$

(LA) nebo $S \to \varepsilon$, kde S se nesmí ... (*)

Alternativně: $\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$ (implicitně $\alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*$)

kde $|\beta| \geq |\alpha|$,

nebo $S \to \varepsilon$ ...!

- typ 0: obecné gramatiky

- Zapište množinově jazyky generované následujícími gramatikami, posuďte typ gramatiky a typ jazyka.

a) $G = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \to 1S1 \mid 0S0 \mid \varepsilon\}, S)$

- $L(G) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
- typ gr. G: 2
- typ jazyka $L(G)$: 2

$S \Rightarrow 1S1 \Rightarrow 10S01 \Rightarrow 1001$

b) $G = (\{S, Z\}, \{a, b\}, \{S \to aSb \mid Z, Z \to aZ \mid Zb \mid \varepsilon\}, S)$

- $L(G) = \{a^m b^n \mid n, m \geq 0\}$
- typ G: 2
- typ $L(G)$: 3

$S \Rightarrow Z \Rightarrow \varepsilon$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaZbb \Rightarrow aaaZbb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaabb$.

konečně $L(G) = L(G')$, kde

$G' = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to aS \mid A, A \to bA \mid \varepsilon\}, S)$.

- Sestrojte gramatiku, která generuje řetězce nad $\{0, 1\}$ takové, že obsahují sudý počet nul i jedniček, neboli:
  $\{ w \in \{0,1\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w) \bmod 2 = 0 \}$

$P: \quad S \to \varepsilon \mid 0A \mid 1B \qquad G = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P, S)$

$A \to 0S \mid 1C$

$B \to 0C \mid 1S$

$C \to 0B \mid 1A$

- Sestrojte gramatiku, která generuje jazyk $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

$P: \quad S \to aSBC \mid abC$

$CB \to BC$

$bB \to bb$

$bC \to bc$

$cC \to cc$

~~$B \to b$~~

~~$C \to c$~~

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabCBCBC$

$\Rightarrow aaabcBCBC \Rightarrow$ X

$\Rightarrow aaabcBBCC$

$\Rightarrow aaabBCCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbCCBC \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots$

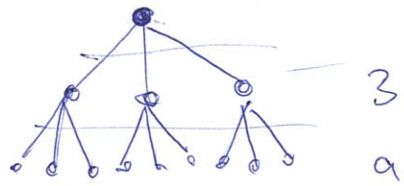
$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

– Sestrojte gramatiku, která generuje jazyk

$\{ a^{3^n} b^n \mid n \geq 1 \} = \{ aaab, aaaaaaaaabb, \dots \}$

$a^{3^2} b^2 = a^9 b^2$

[plné ternární stromy]



P: $S \to AS \mid AaX$

$Aa \to aaaA$

$AX \to Xb \mid b$

$G = (\{S, A, X\}, \{a, b\}, P, S)$

$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow AAAaX$
$\Rightarrow AAaaaAX \Rightarrow$
$\Rightarrow AaaaAaaAX \Rightarrow$
$\Rightarrow AaaaAaaXb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaaAaaAaaXb \Rightarrow \dots$
$\Rightarrow a^{27} b^3$

– Sestrojte gramatiku typu 2, která generuje jazyk

$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$

P: $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$