MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE

*Půlsemestrální písemná zkouška za 20 bodů*

skupina C

**1.**Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \psi)$ Postup:

(1) Použijte tautologii $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.
(2) Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$.
(3) Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
(4) Aplikujte pravidlo odloučení.
(5) Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \psi)$.
(6) Složte implikace ze (4) a (5).
(7) Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

**2.** Převeďte negaci formule $(\forall x p(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y q(x,y)) \wedge \exists y(\forall x p(y,y) \Rightarrow \forall x p(x,y))$ do prenexního tvaru.

**3.** Buď $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; f)$ algebra typu (1) ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište

(1) podalgebru $\mathcal{B} = \langle \{-4\} \rangle$ algebry $\mathcal{A}$,
(2) přímý součin algeber $\mathcal{B} \times (\{0, 1, 2\}; g)$, kde $g$ je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

**4.** Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{4}$$

**5.** Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$. Uvažujme binární relaci $\sim$ na $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde $|\ |$ značí determinant). Dokažte, že

(1) $\sim$ je kongurence na grupě $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ a
(2) faktorová grupa $(GL(2, \mathbb{R})/\sim, \cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.

(3) Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$, která odpovídá kongruenci $\sim$.