Řádný termín 2011/2012 skupina C

1 (15b)

Uvažujme jazyk L s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem p. Buď R realizace jazyka L, jejímž univerzem je množina $S(\mathbb{Z})$ všech podgrup grupy $(\mathbb{Z}, +)$ a v níž platí $p_R(G, H) \iff$ existuje injektivní homomorfismus grup $G \to H$

1. Rozhodněte, zda R je modelem teorie uspořádaných množin (5b)
2. Uvažujme formuli $\varphi \equiv \forall y p(y, x)$. Popište všechna ohodnocení e proměnných jazyka L taková, že $R \models \varphi[e]$. (10b)

2 (10b)

Převeďte formuli $(\forall x p(x, y) \implies \forall x \exists y q(x, x)) \implies \forall x(\exists x p(y, x) \implies q(y, x))$ do prenexního tvaru. Poté ji znegujte a převeďte do tvaru, kde se spojka $\neg$ nebude vyskytovat u neatomických formulí.

3 (15b)

Mějme množinu $M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, na které jsou definovány binární operace $+, \cdot$ následujícími tabulkami

+	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	B	C	A	E	F	D	H	I	G
C	C	A	B	F	D	E	H	G	H
D	D	E	F	G	H	I	A	B	C
E	E	F	D	H	I	G	B	C	A
F	F	D	E	I	G	H	C	A	B
G	G	H	H	A	B	C	D	E	F
H	H	I	G	B	C	A	E	F	D
I	I	G	H	C	A	B	F	D	E

$\cdot$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	C	B	A	C	B	A	C	B
D	A	A	A	D	D	D	G	G	G
E	A	B	C	D	E	F	G	H	I
F	A	C	B	D	F	E	G	I	H
G	A	A	A	G	G	G	D	D	D
H	A	B	C	G	H	I	D	E	F
I	A	C	B	G	I	H	D	F	E

Rozhodněte, zda algebra $(M, +, \cdot)$ je těleso, obor integrity, komutativní okruh nebo okruh; svá tvrzení dokažte. Pokud $(M, +, \cdot)$ těleso není, pak najděte podmnožinu $N \subset M$ takovou, že $(N, +, \cdot)$ je těleso. Obě operace $+, \cdot$ jsou asociativní a $\cdot$ je distributivní nad $+$. (Tyto skutečnosti nemusíte ověřovat.)

4 (15b)

Mějme algebru $A = (\mathbb{R}^2, a, b, c)$ typu $(2, 1, 0)$ kde operace $\{a, b, c\}$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ b(x_1, x_2) &= (-x_1, x_2) \\ c &= (0, 0) \end{aligned}$$

Definujeme relaci ekvivalence $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Rozhodněte, zda $\sim$ je či není kongruence na A (odůvodněte).

5 (15b)

Nad abecedou $\Gamma = \{x, y, z\}$ uvažujeme jazyk $\Sigma = x^*y^+z^*$. Buď $\mu(u, v) = n$ kde n je nejmenší počet změn řetězce u, které je potřeba provést, aby se tento řetězec transformoval na řetězec v. Přitom změnou řetězce rozumíme vypuštění či vložení symbolu nebo nahrazení symbolu jiným symbolem v tomto řetězci. Ověřte (dokažte) zda μ je či není metrika na Σ a v kladném případě určete všechny prvky množiny Σ, které leží v otevřené kouli o poloměru 2 se středem v prvku xyz.

6 (10b)

Uzel v obyčejném grafu se nazývá artikulace, pokud se po jeho odstranění a odstranění s ním incidentních hran zvýší počet komponent grafu. Kolik existuje navzájem neizomorfních lesů o 6 uzlech s právě 1 artikulací? Nakreslete je.