- Dokažte, že $L = \{ a^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \} \notin \mathcal{L}_3$.

Důkaz sporem:

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.
- Z P.L. plyne, že $\exists k > 0 \ \forall w \in L: |w| \geq k \Rightarrow$ $\exists x, y, z \in \{a\}^*: w = xyz \wedge |xy| \leq k \wedge y \neq \varepsilon \wedge \forall i \geq 0: xy^iz \in L$.
- Uvažme libovolné $k > 0$, pro které platí výše uvedené tvrzení. Zvolme $w = a^{k!}$. Vidíme, že $|w| = k! \geq k$.
- Tedy $\exists x, y, z \in \{a\}^*: w = a^{k!} = xyz \wedge |xy| \leq k \wedge y \neq \varepsilon \wedge \forall i \geq 0: xy^iz \in L$.
- Uvažme libovolnou volbu $x, y, z \in \Sigma^*$, pro kterou platí výše uvedené. Uvažme libovolné $i > 1$.
- Dle výše uvedeného $xy^iz \in L$ a tedy $|xy^iz| = m!$ pro $m \in \mathbb{N}$
- $|xy^iz| = |xyz| + |y^{(i-1)}|$, protože $i > 1$, tedy y^i lze psát jako $y^i = y^{i-1} \cdot y$.
- $|xy^iz| = k! + |y| \cdot (i-1) = m!$
- Omezíme se z $i > 1$ na $i = (k+1)! + 1$

- $|xy^i z| = k! + |y| \cdot ((k+1)! + 1 - 1) =$

$= k! + |y| \cdot (k+1)! =$

$= k! + |y| \cdot (k+1) \cdot k! =$

$= \underline{k!(1 + |y| \cdot (k+1))} = \underline{m!}$,

- Tedy $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k! = k!(1 + |y|(k+1))$
- Protože $k! > 0$, můžu krátit a dostaneme

$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) = 1 + |y|(k+1)$

- LS je dělitelná $k+1$ a tedy PS musí být také dělitelná $k+1$. Neboli $(k+1)$ musí dělit $1 + |y| \cdot (k+1)$.
- Vzhledem z tomu, že $(k+1)$ dělí $|y| \cdot (k+1)$, musí platit, že $(k+1)$ dělí i 1.
- To je ale spor, protože $k+1 > 1$, protože $k > 0$, a současně 1 je dělitelná pouze sama sebou. $\square$

- Mějme dokázat, že $L = \{a^n b^m a^n \mid m, n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$.
  POZOR! zvolíme-li za $w = b^k$, nelze dojít ke sporu!
  Je třeba volit jinak – např.: $a^k b a^k$.

- Víme, že $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$. S využitím uzávěrových vlastností $\mathcal{L}_3$ ukažte, že $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin \mathcal{L}_3$.

Důkaz sporem.

- Předp., že $L_2 \in \mathcal{L}_3$.
- Je zřejmé, že $L_1 = L_2 \cap a^* b^*$, kde $a^* b^* \in \mathcal{L}_3$.
- Avšak $\mathcal{L}_3$ je uzavřena vůči $\cap$. Tedy $L_1 \in \mathcal{L}_3$, ale my víme, že $L_1 \notin \mathcal{L}_3$. Spor. $\square$

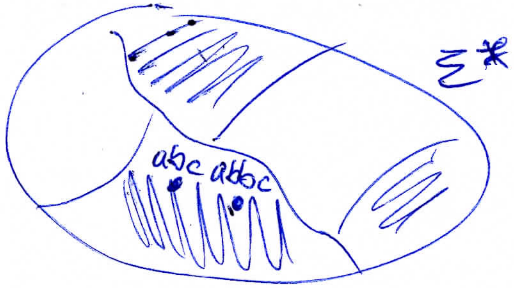
Myhill-Nerodova věta

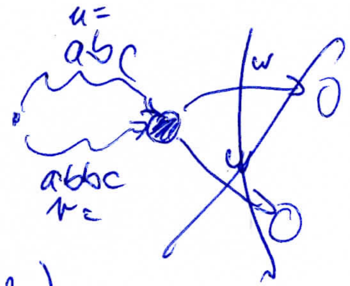
Mějme abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$. M.-N. věta říká, že násl. tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $L = L(A)$ pro nějaký DKA A.

2. $L = \bigcup\limits_{X \in \mathcal{X} \subseteq \Sigma^*/\sim} X$,

kde $\sim$ je pravá kongruence taková, že $|\Sigma^*/\sim| \in \mathbb{N}$





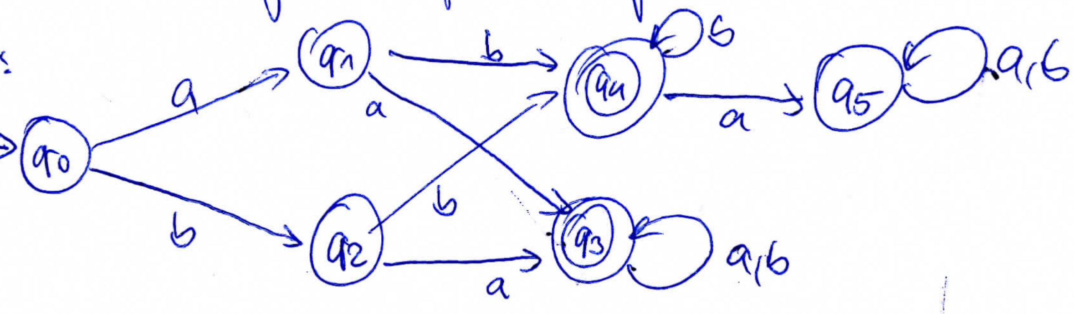
3. Relace $\sim_L$ má konečný index ($|\Sigma^*/\sim_L| \in \mathbb{N}$)

kde:

- pravá kongruence $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je ekvivalence taková, že $\forall u, v, w \in \Sigma^*: u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.
- prefixová ekvivalence $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je ekv. def. tak, že $\forall u, v \in \Sigma^*: u \sim_L v \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^*: uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$

- Mějme následující úplně def. DKA:

A:



Sestavte ekvivalenční třídy $\sim$ pro daný automat ($\sim$ je pravá kongruence dle M.-N. věty)

— Ekv. třídy odpovídají násl. jazykům pro jedn. stavy A:

$L^{-1}(q_0) = \{\varepsilon\}$ $\quad$ $L^{-1}(q_3) = (aa+ba)(a+b)^*$

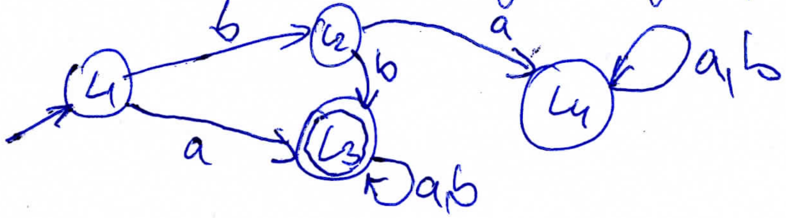
$L^{-1}(q_1) = \{a\}$ $\quad$ $L^{-1}(q_4) = (ab+bb)b^*$

$L^{-1}(q_2) = \{b\}$ $\quad$ $L^{-1}(q_5) = (ab+bb)b^*a(a+b)^*$

- dodatek:
  - Platí - $\forall i,j \in \{0,1,2,..,5\}, i \neq j$: $L^{-1}(q_i) \cap L^{-1}(q_j) = \emptyset$
    - $\bigcup_{i \in \{0,1,..,5\}} L^{-1}(q_i) = \Sigma^*$
    - $L(A) = L^{-1}(q_3) \cup L^{-1}(q_4)$

- Zkonstruujte automat k $\sim_L$ dané ekvivalenčními třídami $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{b\}$, $L_3 = a(a+b)^* + bb(a+b)^*$, $L_4 = \Sigma^* \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, jehož jazyk je dán L_3.

—



- Dokažte, že $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \} \notin \mathcal{L}_3$, a to pomocí M.–N. věty.

- Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_3$.
- Pak $\sim_L$ má dle M.–N. věty konečný index, (neboli počet ekv. tříd v $\Sigma^* \setminus \sim_L$ je konečný).
- Uvažme libovolné $d \in \mathbb{N}$ a libovolná $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ takové, že

$$\#_a(w_1) - \#_b(w_1) = d \quad a \quad \#_a(w_2) - \#_b(w_2) \neq d.$$

Zřejmě $w_1 \not\sim_L w_2$, konečně stačí uvážit, že

$$w_1 b^d \in L, \text{ ale } w_2 b^d \notin L.$$

- Přitom pro $\forall d \in \mathbb{N}$ najdu řetězce $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ takové, že $\#_a(w_1) - \#_b(w_1) = d$ a $\#_a(w_2) - \#_b(w_2) \neq d$. Stačí uvážit $w_1 = a^d$, $w_2 = a^{d+1}$.
- Je tedy jasné, že $\sim_L$ musí mít nekonečný počet ekv. ~~tříd~~. SPOR. $\square$

Úpravy bezkontextových gramatik $G=(N,\Sigma,P,S)$

- symbol $X \in N \cup \Sigma$ je zbytečný, jestliže
  $\neg \exists \alpha, \beta \in (N\cup\Sigma)^*, w \in \Sigma^*: S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta \overset{*}{\Rightarrow} w$.

- Mějme gramatiku $G=(\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$, kde
  P: $S \to a \mid A$,
  $A \to AB$,
  $B \to b$.

  $S \Rightarrow A \Rightarrow AB \Rightarrow Ab \Rightarrow ABb \Rightarrow$
  $\Rightarrow Abb \Rightarrow \ldots$

  Odstraňte algoritmicky zbytečné symboly.

1. spočteme iterativně mn-u neterm. generujících term. řetězce:

$N_t^{i+1} = \tau(N_t^i)$

$N_t^0 = \emptyset$

$N_t^{i+1} = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (\Sigma \cup N_t^i)^*\} \cup N_t^i$ nemusí zde být

if $N_t^{i+1} = N_t^i$, $N_t = N_t^i$,

else $i{+}{+}$

Pro náš případ:

$N_t^0 = \emptyset$

$N_t^1 = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in \overbrace{(\Sigma \cup \emptyset)^*}^{\Sigma^*} \} = \{S, B\}$

$N_t^2 = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (\Sigma \cup \{S, B\})^* \} = \{S, B\}$

$N_t^1 = N_t^2 = N_t$

2. Odstraníme neterminály a pravidla založená na symbolech mimo N_t (s výjimkou S).

$G' = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to a, B \to b\}, S)$.

3. Spočteme mn-u dostupných symbolů V:

- $V_0 = \{S\}$
- $V_{i+1} = \{ X \in N \cup \Sigma \mid \exists (A \to \alpha X \beta) \in P : \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* \wedge$ $A \in$ [redacted] $V_i\} \cup V_i$ zde je „U" nutné!
- pro náš případ:

$V_0 = \{S\}$

$V_1 = \{ X \in N \cup \Sigma \mid \exists (A \to \alpha X \beta) \in P : \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* \wedge$
$A \in \{S\}\} \cup \{S\} = \{a\} \cup \{S\} = \{S, a\}$

$V_2 = \{ X \in N \cup \Sigma \mid \exists (A \to \alpha X \beta) \in P : \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* \wedge$
$A \in \{S, a\}\} \cup \{S, a\} = \{a\} \cup \{S, a\} = \{S, a\} = V_1 = V$

4. Odstraníme nedostupné symboly, které nejsou ve U, a pravidla na nich založená:

$$G'' = (\{S\}, \{a\}, \{S \to a\}, S).$$

– Odstranění ε pravidel

$$N_\varepsilon = \{ A \in N \mid A \Rightarrow^+ \varepsilon \}$$

a) zapište alg. pro výpočet N_ε:

Vstup: bezk. gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: $N_\varepsilon = \{ A \in N \mid A \Rightarrow^+ \varepsilon \}$

Metoda:

1. $N_\varepsilon^0 = \emptyset$, $i = 0$.
2. $N_\varepsilon^{i+1} = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^i)^* \}$
3. Jestliže $N_\varepsilon^{i+1} = N_\varepsilon^1$, pak $N_\varepsilon = N_\varepsilon^i$ a konec, jinak $i{+}{+}$ a pokračuj bodem 2.

b) Mějme bezk. gramatiku s pravidly

$S \to BC \mid d$ $\quad C \to f \mid \varepsilon$

$B \to D \mid bCdS$ $\quad D \to C \mid aB$.

Odstranění alg. ε pravidla.

- Spočteme N_ε:

$N_\varepsilon^0 = \emptyset$

$N_\varepsilon^1 = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in \emptyset^* = \{\varepsilon\} \} = \{C\}$

$N_\varepsilon^2 = \{ \text{—— " ——} \ \alpha \in \{C\}^* \} = \{C, D\}$

$\{C\}^* = \{\varepsilon, C, CC, \ldots\}$

$N_\varepsilon^3 = \{ \text{—— " ——} \ \alpha \in \{C, D\}^* \} = \{C, D, B\}$

$N_\varepsilon^4 = \{C, D, B, S\} = N_\varepsilon^5 = N_\varepsilon$

- Danou gramatiku upravíme na gr. s pravidly:

$S' \to \varepsilon \mid S$

$S \to BC \mid C \mid B \mid d$

$B \to D \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd$

$C \to f$

$D \to C \mid aB \mid a$

- <u>Odstranění jednoduchých pravidel</u> $(A \to B,\ A, B \in N)$

- $N_A = \{ B \in N \mid A \overset{*}{\Rightarrow} B \}$

- $N_A^0 = \{A\}$

$N_A^{i+1} = \{ B \in N \mid \exists (C \to \alpha B \beta) \in P : \alpha, \beta \in N_\varepsilon^* \wedge C \in N_A^i \} \cup N_A^i$

- Odstraňte jednoduchá pravidla z výsledku předchozího příkladu:
  - $N_\varepsilon^0 = \emptyset \quad N_\varepsilon^1 = \{S'\} = N_\varepsilon^2 = N_\varepsilon$
  - $N_{S'}^0 = \{S'\} \quad N_{S'}^2 = \{S', S, B, C\}$

    $N_{S'}^1 = \{S', S\} \quad N_{S'}^3 = \{S', S, B, C, D\} = N_{S'}^4 = N_{S'}$

    $N_S^0 = \{S\} \quad N_S^1 = \{S, B, C\} \quad N_S^2 = \{S, B, C, D\} = N_S^3 = N_S$

    $N_B^0 = \{B\} \quad N_B^1 = \{B, D\} \quad N_B^2 = \{B, D, C\} = N_B^3 = N_B$

    $N_C^0 = \{C\} = N_C^1 = N_C$

    $N_D^0 = \{D\} \quad N_D^1 = \{D, C\} = N_D^2 = N_D$

  - Upravíme pravidla původní gramatiky:

    $S' \to \varepsilon \mid BC \mid d \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd \mid f \mid aB \mid a$

    $S \to BC \mid f \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd \mid aB \mid a \mid d$

    $B \to aB \mid a \mid f \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd$

    $C \to f$

    $D \to f \mid aB \mid a$