Nerozhodnutelnost (problém zastavení TS, princip diagonalizace a redukce, Postův korespondenční problém)

Základní pojmy

Jazyky mimo třídu 0

Existují jazyky ležící mimo typ 0 Chomského hierarchie

- **množina všech TS je spočetná (TS lze zakódovat jako binární řetězce a ty počítat dle pořadí)**
- množina všech jazyků je nespočetná (viz diagonalizace)
- množiny tedy mají rozdílnou mohutnost

Existují jazyky, které nejsou vyčíslitelné žádným TS, a problémy, které žádný TS není schopen rozhodnout

(Cantorova) diagonalizace

- Lemma: Pro neprázdnou a konečnou množinu Σ je množina 2^{Σ^*} nespočetná (množina Σ^* obsahuje nekonečně mnoho řetězců)
- používá se pro důkaz nespočetnosti množiny
- poprvé použita pro důkaz rozdílné mohutnosti přirozených a reálných čísel

Diagonalizace pro množinu jazyků

- předpokládejme, že 2^{Σ^*} je spočetná (tj. každému jazyku lze vzájemně jednoznačně přiřadit nějaké přirozené číslo - bijektivní zobrazení f)
- uspořádáme řetězce Σ^* do posloupnosti w_1,w_2,w... (podle libovolného klíče)
- bijektivní zobrazení jazyků na přirozená čísla lze nyní zobrazit jako nekonečnou matici:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_i & \dots \\
L_0 = f(0) & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0i} & \dots \\
L_1 = f(1) & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\
L_2 = f(2) & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

kde a_{ij} je 1 pokud $w_j \in L_i$ jinak je 0

- uvažme jazyk $\overline{L} = \{w_i | a_{ii} = 0\}$ (množina všech w, které mají na diagonále - a_{ij} bude 1 tam, kde a_{ii} je 0)
- tento jazyk se liší od každého jazyka v matici - přinejmenším prvkem, kde se diagonála protíná s řádkem jazyka $\overline{L}$

- jazyk ale zároveň patří do 2^{Σ^*} - to je spor a předpoklad, že 2^{Σ^*} je spočetná tedy neplatí

Rozhodovací problémy

Rozhodovací problém

- funkce s oborem hodnot {true, false}
- obvykle je specifikován množinou všech možných instancí problému a podmnožinou pro které je výsledek roven true
- v teorii formálních jazyků používáme k zakódování problémů řetězce nad abecedou - jazyky pak představují podmnožiny pro které je výsledek roven true

Rozhodnutelný problém

vždy je možné rozhodnout zda je výsledek true nebo false

- rozhodnutelné jsou problémy reprezentované rekurzivními jazyky

Nerozhodnutelný problém

není možné vždy rozhodnout zda je výsledek true nebo false

Částečně rozhodnutelný problém

pro výsledek true vždy (po konečné době) rozhodne, ale pro výsledek false buď rozhodne nebo donekonečna cyklí (rozhodnutí trvá nekonečnou dobu)

- částečně rozhodnutelné jsou problémy reprezentované rekurzivně vyčíslitelnými jazyky

Problém zastavení TS (HP - Halting problem)

Problém zda daný TS pro daný vstupní řetězec zastaví není rozhodnutelný, ale je částečně rozhodnutelný

Důkaz:

Problému zastavení odpovídá rozhodování jazyka $HP = \{\langle M\rangle\#\langle w\rangle | M$ zastaví při $w\}$, kde <M> je kód TS M a <w> je kód vstupní pásky TS M.

Částečná rozhodnutelnost

- Sestavíme univerzální TS, který simuluje běh původního TS tak, aby zastavil přijetím vstupu <M>#<w> právě když by zastavil původní TS přijetím vstupu w - převod abnormálního zastavení na zastavení přechodem do koncového stavu

Nerozhodnutelnost

- provádí se diagonalizací
- všechny možné (binární) řetězce kódující TS sestavíme do posloupnosti
- vytvoříme matici, kde sloupce jsou řetězce kódující TS a řádky jsou samotné TS. Každá buňka pak označuje zda daný TS pro daný řetězec cyklí nebo zastaví

- předpokládáme, že existuje úplný TS K přijímající jazyk HP (tj. na vstup dostane zakódovaný TS M a řetězec, přičemž příjme (zastaví normálně) právě tehdy, pokud M zastaví pro vstup w a odmítne (zastaví abnormálně) pokud M cyklí pro vstup w)
- Sestavím TS N, který pro vstup x provede simulaci TS X zakódovaného v x na vstup x (TS provádějící svoje vlastní zakódování) a přijme pokud simulovaný TS odmítne a cyklí pokud simulovaný TS přijme (v podstatě komplement diagonály matice)o
- TS N se liší od jakéhokoliv zakódovatelného TS v posloupnosti - to je spor, protože posloupnost obsahuje všechny TS
- z toho plyne, že předpoklad, že existuje TS K, je chybný

jazyk HP je tedy rekurzivně vyčíslitelný, ale není rekurzivní

jazyk co-HP (komplement problému zastavení, $HP = \{\langle M\rangle\#\langle w\rangle | M$ nezastaví při *w*}) není ani rekurzivně vyčíslitelný (problém není ani částečně rozhodnutelný)

Nerozhodnutelnost problémů

Důkaz nerozhodnutelnosti redukcí

Redukce

Redukce je základní technikou klasifikace problémů z hlediska vyčíslitelnosti. Jedná se o algoritmický převod problému na jiný problém (převod jednoho jazyka na jiný úplným TS)
redukční funkce f každé instanci I problému P přiřadí instanci f(I) problému Q tak, že řešení f(I) je právě řešením I

značíme $A \leq B$ (A je redukovatelný na B)

Důkaz redukcí

- víme, že jazyk A není rekurzivní (rekurzivně vyčíslitelný)
- zkoumáme jazyk B
- ukážeme, že A lze úplným TS převést (redukovat) na B
- to znamená, že B také není rekurzivní (rekurzivně vyčíslitelný)

pokud lze A redukovat na B tak platí, že:

- **A není** rekurzivní **->** **B není** rekurzivní
- **A není** rek. vyčíslitelný **->** **B není** rekurzivně vyčíslitelný
- **B je** rekurzivní **->** **A je** rekurzivní
- **B je** rek. vyčíslitelný **->** **A je** rek. vyčíslitelný

tj. pokud lze jazyky navzájem redukovat (oběma směry) tak platí, že:

- [oba jsou rekurzivní] nebo [oba nejsou rekurzivní]
- [oba jsou rekurzivně vyčíslitelné] nebo [oba nejsou rekurzivně vyčíslitelné]

Příklady problémů

Rozhodnutelné problémy

- TS má alespoň x stavů
- TS učiní alespoň x kroků pro vstup w

Částečně rozhodnutelné problémy

- TS má neprázdný jazyk
- Jazyk TS má alespoň x slov

Nerozhodnutelné

- jazyk TS je prázdný
- jazyk TS má maximálně x slov
- jazyk TS je konečný

Postův korespondenční problém

Postův systém (nad abecedou Σ)

neprázdný seznam S dvojic neprázdných řetězců abecedy

$$S = \langle(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots\rangle$$

Řešení Postova systému

každá neprázdná posloupnost přirozených čísel (indexů) $I = \langle i_1, i_2, \ldots \rangle$ taková, že

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\ldots = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}\ldots$$

- pozn.: indexy se v posloupnosti mohou opakovat

Postův problém

existuje pro daný systém řešení?

Postův problém je nerozhodnutelný (dokazuje se redukcí z problému náležitosti)

Redukce z PCP ci jeho doplnku se velmi casto používají k dukazum nerozhodnutelnosti.