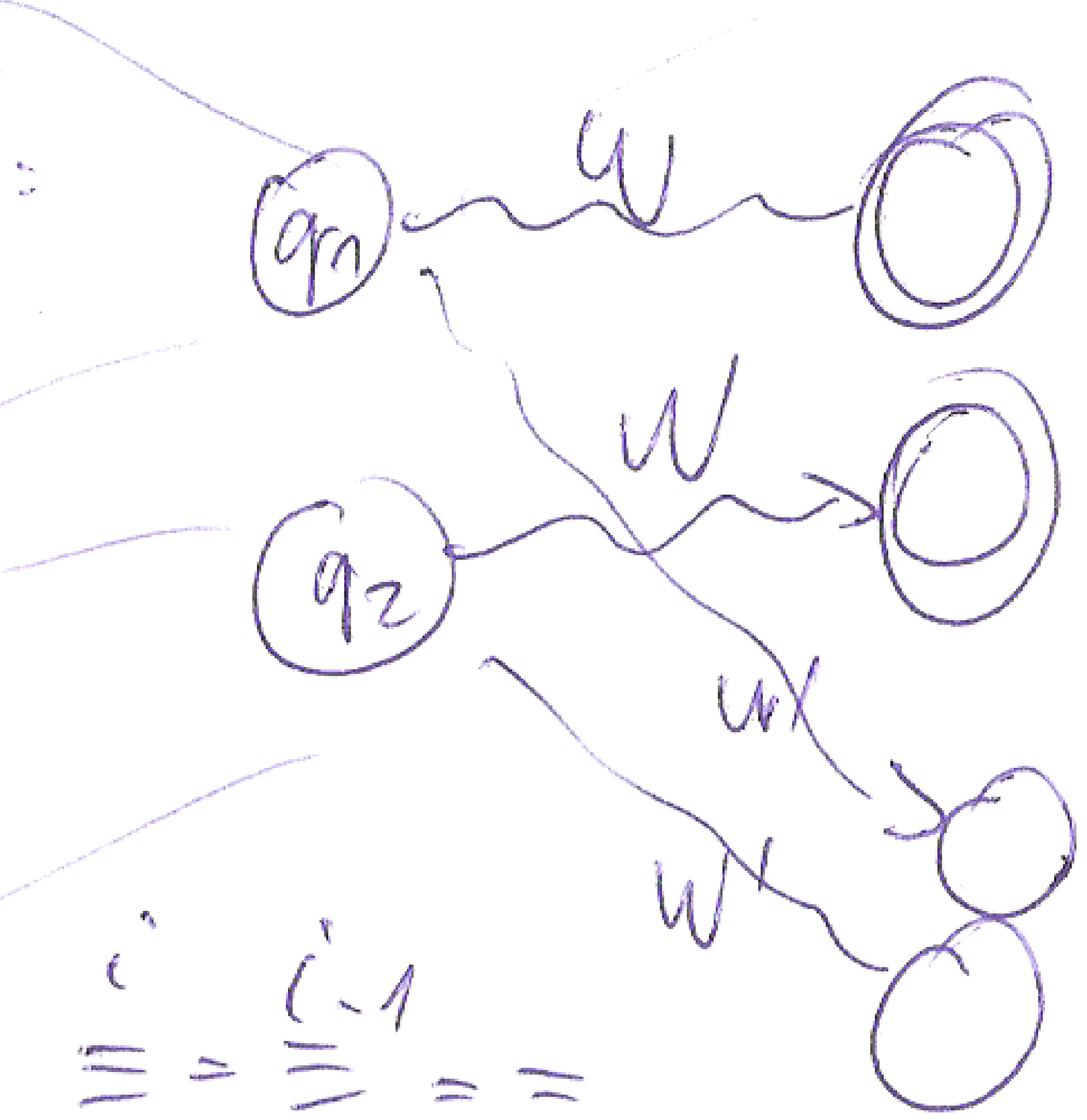
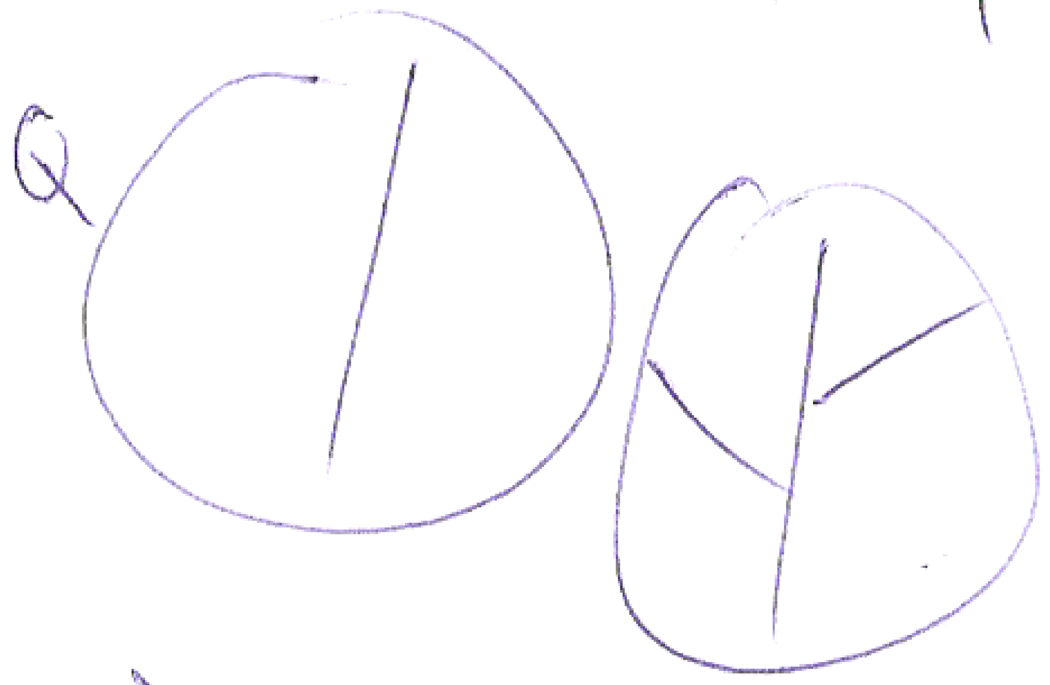
MINIMALIZACE DKA (úplně def.)

- základní myšlenka: využití relace $\equiv \subseteq Q \times Q$

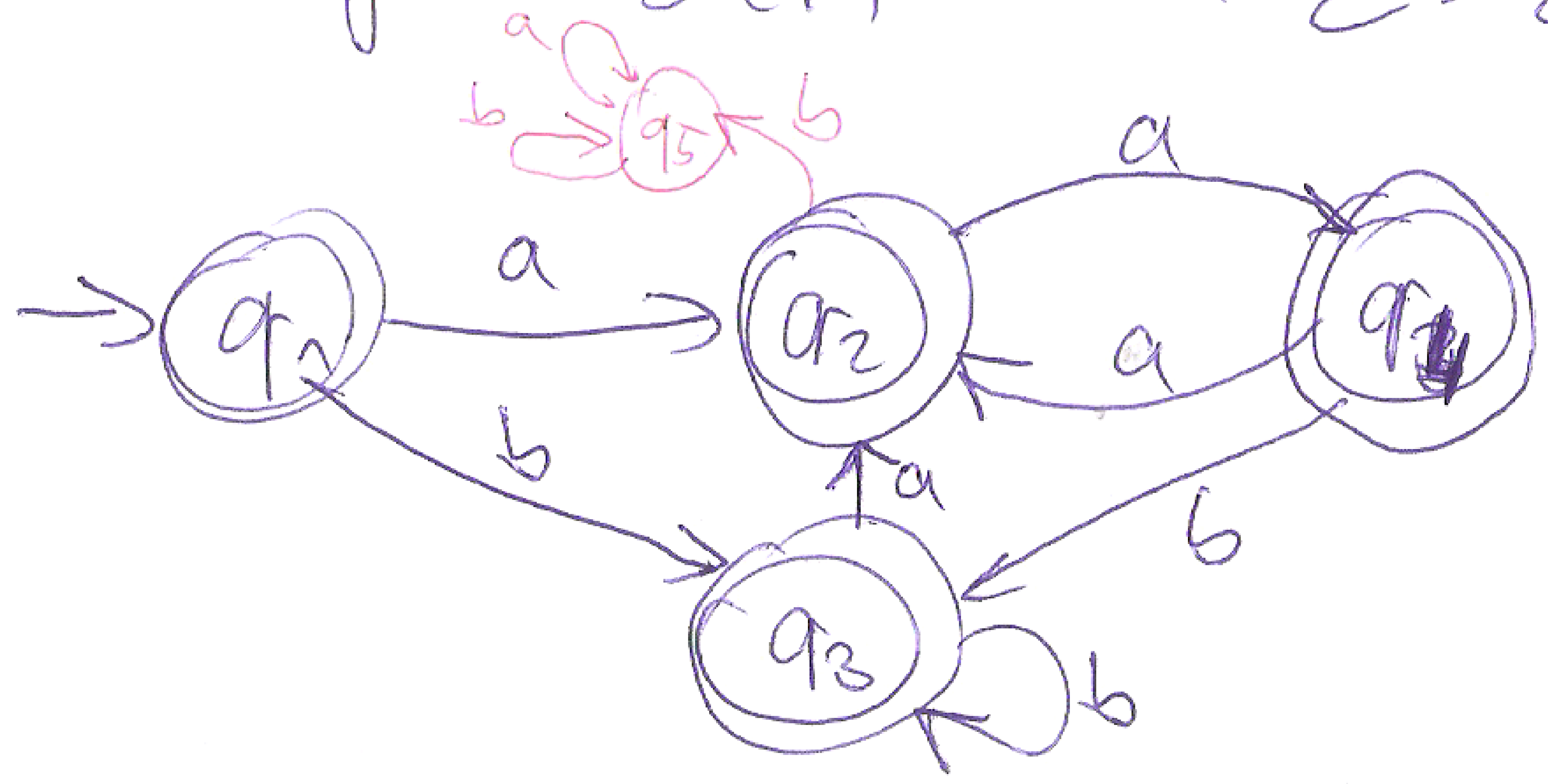
$\forall\, q_1 \equiv q_2\ \forall w:$



konstrukce $\equiv$: $\overset{0}{\equiv} \supseteq \overset{1}{\equiv} \supseteq \overset{2}{\equiv} \supseteq \overset{3}{\equiv} \dots \overset{i}{\equiv} = \overset{i-1}{\equiv} = \equiv$



- Mějme následující DKA nad $\Sigma = \{a, b\}$:



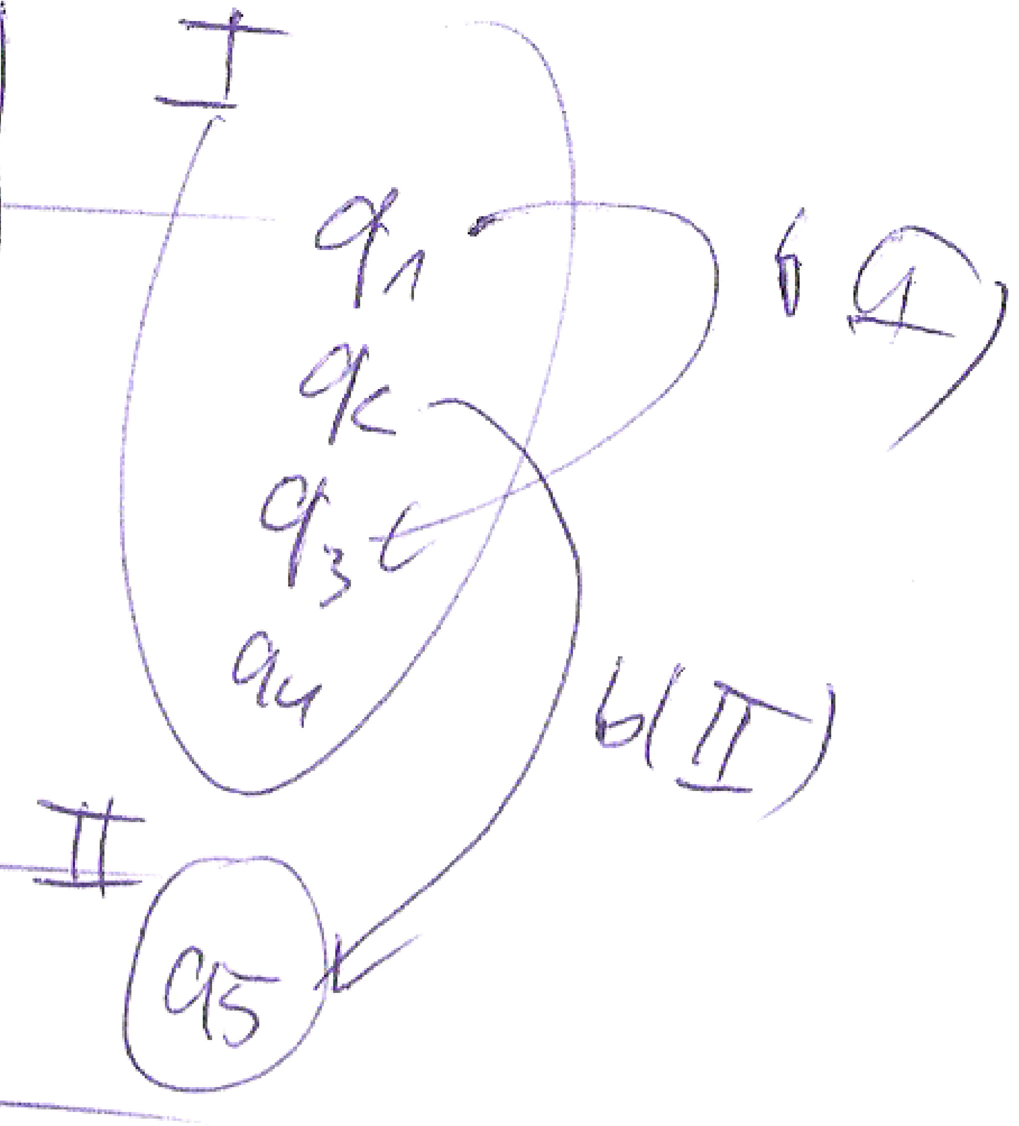
Převeďte na redukovaný DKA.

1. ověříme úplnost a případně zúplníme.
 - zobrazeno výše červeně.

2. Vybudujeme $\equiv$:

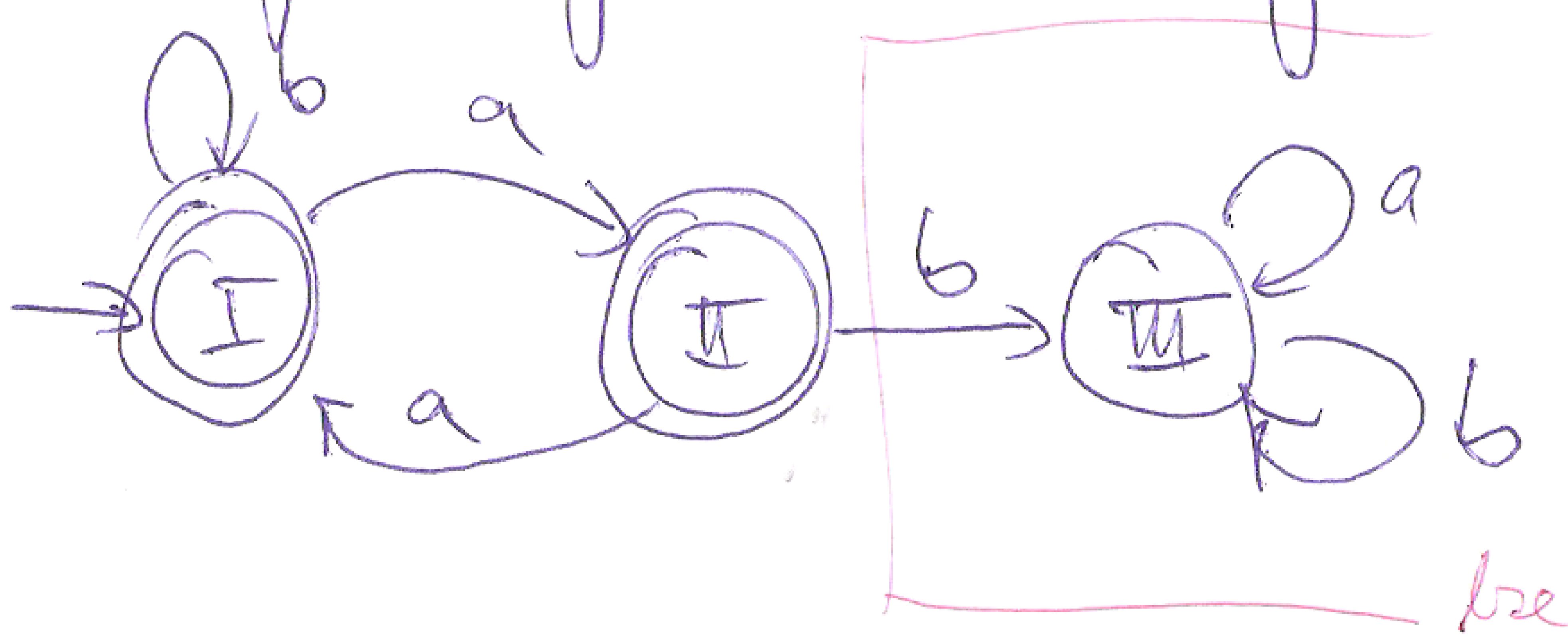
$\overset{0}{\equiv}$		a	b
I	q_1	q_2 (I)	q_3 (I)
	q_2	q_4 (I)	q_5 (II)
	q_3	q_2 (I)	q_3 (I)
	q_4	q_2 (I)	q_3 (I)
II	q_5	q_5 (II)	q_5 (II)

$\overset{1}{\equiv}$		a	b
I	q_1	q_2 (II)	q_3 (I)
	q_3	q_2 (II)	q_3 (I)
	q_4	q_2 (II)	q_3 (I)
II	q_2	q_4 (I)	q_5 (III)
III	q_5	q_5 (III)	q_5 (III)



máme $\overset{1}{\equiv} = \overset{2}{\equiv} = \equiv$

3. Sestavíme výsledný redukovaný DKA úplně def.:



lze odstranit, není-li požadován úplný DKA.

- Dokažte, že v Kleeneho algebře platí $a^*a^* = a^*$.
Lze přitom užít následující lemmata:

L1. $a = b \iff a \le b \wedge b \le a$

L2. $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c$.

Důkaz:

- Dle L1 postačí ukázat, že $a^*a^* \le a^*$ a $a^* \le a^*a^*$.

I. Ukážeme, že $a^*a^* \le a^*$:

1. A.10: $1 + aa^* = a^*$
2. z 1 a L1: $1 + aa^* \le a^*$
3. Ukážeme, že $aa^* \le 1 + aa^*$
   a) z def. $\le$ stačí ukázat, že: $aa^* + (1 + aa^*) = (1 + aa^*)$
   b) z reflexivity $=$: $1 + aa^* = 1 + aa^*$
   c) z A3 (a 3b) $1 + (aa^* + aa^*) = 1 + aa^*$
   d) z A1 (a 3c) $(1 + aa^*) + aa^* = 1 + aa^*$
   e) z A2 (a 3d) $aa^* + (1 + aa^*) = 1 + aa^*$
4. z 3 a L2 a 1: $\underbrace{a}_{a_{A14}}\overbrace{a^*}^{c_{A14}} \le a^*$ $[aa^* \le 1 + aa^* \le a^*]$

5. ze 4 a A.14: $a^*a^* \le a^*$

II. Ukážeme, že $a^* \le a^*a^*$:

~~1. z def. $\le$ stačí ukázat, že $a^* + a^*a^* = a^*a^*$~~

~~2. A.10: $1 + aa^* = a^*$~~

~~3. dosazením 2 do 1: $a^* + a^*a^* = (1+aa^*)a^*$, což je nový cíl dokazování!~~

~~4. A9 umožňuje upravit 3 na: $a^* + a^*a^* = 1\cdot a^* + aa^*a^*$~~

~~5. A6 umožní zjednodušit 4 na: $a^* + a^*a^* = a^* + aa^*a^*$~~

A.10 $1+aa^* = a^*$

1. z reflex =: $a^*a^* = a^*a^*$
2. z 1 a A.10: $a^*a^* = a^*(1+aa^*)$
3. z 2 a A.8: $a^*a^* = a^*\cdot 1 + a^*aa^*$
4. z 3 a A.6: $a^*a^* = a^* + a^*aa^*$
5. z 4 a L1: $a^* + a^*aa^* \le a^*a^*$
6. Ukážeme, že $a^* \le a^* + a^*aa^*$:
   a) z refl. =: $a^* + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$
   b) z 6(a) a A.3: $(a^*+a^*) + a^*aa^* = a^* + a^*aa^*$
   c) z 6(b) a A.1: $a^* + (a^* + a^*aa^*) = a^* + a^*aa^*$

d) ⊢ 6(c) a def. ≤ : $a^* \leq a^* + a^* a a^*$

7. z 6 $(a^* \leq \underbrace{a^* + a^* a a^*})$ a 5 $(\underbrace{a^* + a^* a a^*} \leq a^* a^*)$ a

L2 : $a^* \leq a^* a^*$. $\square$

Dokažte, že platí $\underline{L^* = L^* L^*}$ v alg. reg. množin.
(bez odkazu na K.A.)

důkaz:

$$L^* L^* \overset{\text{def. * jazyků}}{=} \Big(\bigcup_{n \geq 0} L^n\Big)\Big(\bigcup_{m \geq 0} L^m\Big) \overset{\text{def. } \cup}{=} \{w_1 \in L^n \mid n \geq 0\} \cdot \{w_2 \in L^m \mid m \geq 0\} =$$

$$\overset{\text{def. · jazyků}}{=} \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L^n, w_2 \in L^m, n, m \geq 0\} =$$

index

$$\overset{\text{def. · jazyků}}{=} \{w_1^1 \cdot w_1^2 \cdots w_1^n \cdot w_2^1 w_2^2 \cdots w_2^m \mid n, m \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq n : w_1^i \in L \wedge \forall 1 \leq j \leq m : w_2^j \in L\} =$$

$$\overset{\text{převod}}{=} \{w_1 \cdots w_{n+m} \mid n, m \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq n+m : w_i \in L\} =$$

= a) každé přir. číslo $k \in \mathbb{N}$ lze napsat jako součet $m+n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$ - konečně lze volit $k = n$ a $m = 0$.
b) každé $m+n$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ odpovídá nějaké $k \in \mathbb{N}$: konečně $\mathbb{N}$ je uzavřeno vůči sčítání

$$= \{ w_1 \dots w_k \mid k \geq 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq k : w_i \in \Sigma \} =$$

$$\underset{\text{def. } \circ \text{ jazyků}}{=} \{ w \mid w \in \Sigma^k, k \geq 0 \} \underset{\text{def. } \cup}{=} \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k \underset{\text{def. \# jazyků}}{=} \Sigma^\# \qquad \square$$

Navrhněte a formálně popište algoritmus pro konkatenaci jazyků popsaných DKA, přičemž výstupní je popsán KA.

Vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a
DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$, bez újmy na obecnosti předpokl., že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Lze vyřešit přejmenováním, např. $Q_1' = Q_1 \times \{1\}$, $Q_2' = Q_2 \times \{2\}$

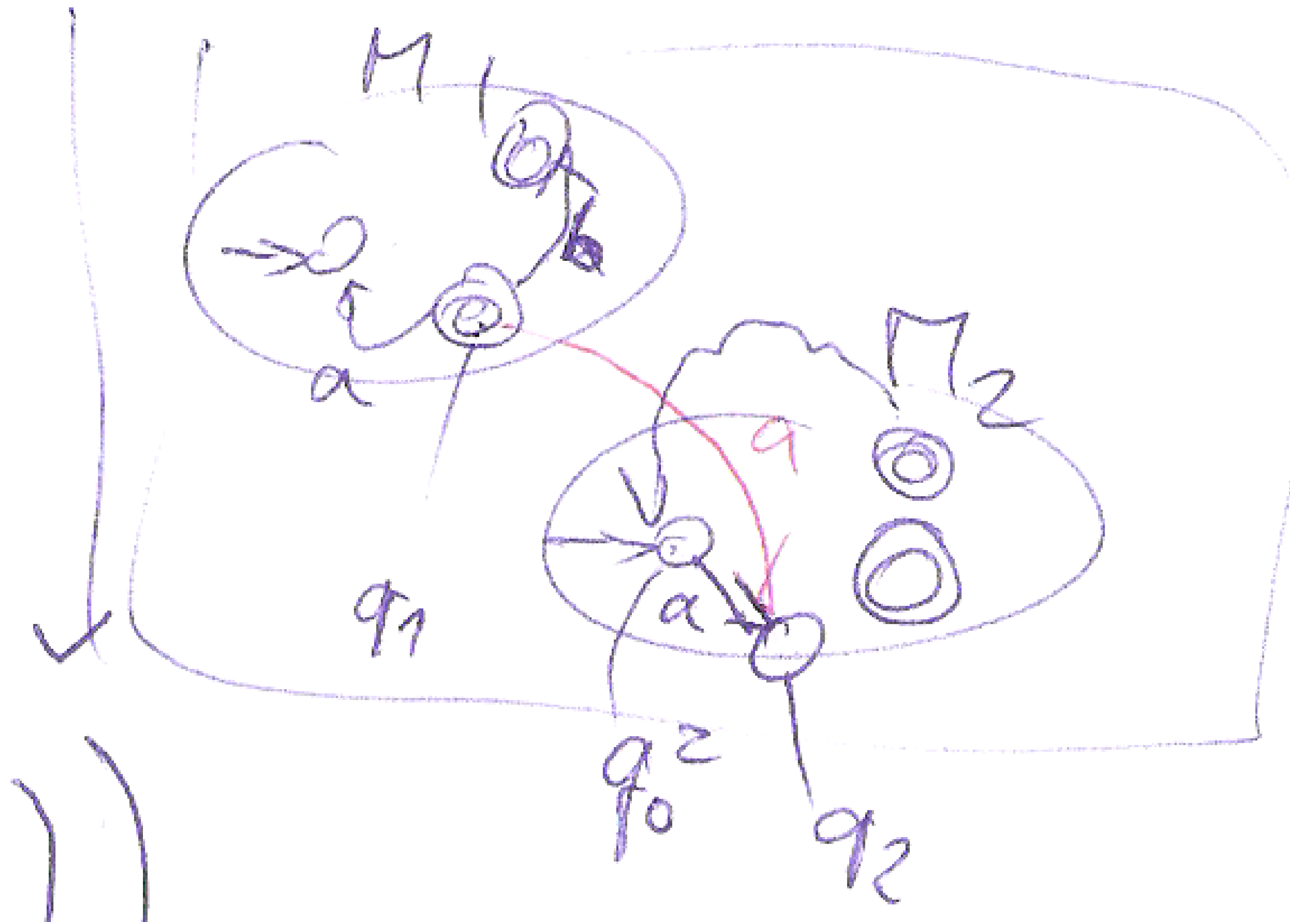
Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \cdot L(M_2)$.

Metoda:
1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

3. δ: sestavíme tak, že $\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma$:

$q_2 \in \delta(q_1, a) \Leftrightarrow$

$\big(q_2 = \delta_1(q_1, a) \vee q_2 = \delta_2(q_1, a) \vee \big(q_2 = \delta_2(q_0^2, a) \wedge q_1 \in F_1\big)\big)$



4. $q_0 = q_0^1$

5. $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{pokud } \varepsilon \in L(M_2), \text{ neboli } q_0^2 \in F^2 \\ F_2 & \text{jinak} \end{cases}$

- Operace shuffle jazyků nad abecedou Σ:
  - $\forall w \in \Sigma^*$: $\varepsilon \parallel w = w \parallel \varepsilon = \{w\}$
  - $\forall a, b \in \Sigma \ \forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$: $aw_1 \parallel bw_2 = \{a\}(w_1 \parallel bw_2) \cup \{b\}(aw_1 \parallel w_2)$
  - $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 \parallel L_2 = \bigcup_{\substack{w_1 \in L_1 \\ w_2 \in L_2}} w_1 \parallel w_2$.

- Sestavte a formálně zapište alg., který provádí shuffle nad jazyky popsanými dvěma DKA, přičemž výsledek popíše KA.

Vstup: DKA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a
DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \,|||\, L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. Přech. f-ci $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ sestavíme tak, že

$$\forall q^1_1, q^1_2 \in Q_1 \ \forall q^2_1, q^2_2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma :$$

$$(q^1_2, q^2_2) \in \delta((q^1_1, q^2_1), a) \Leftrightarrow$$

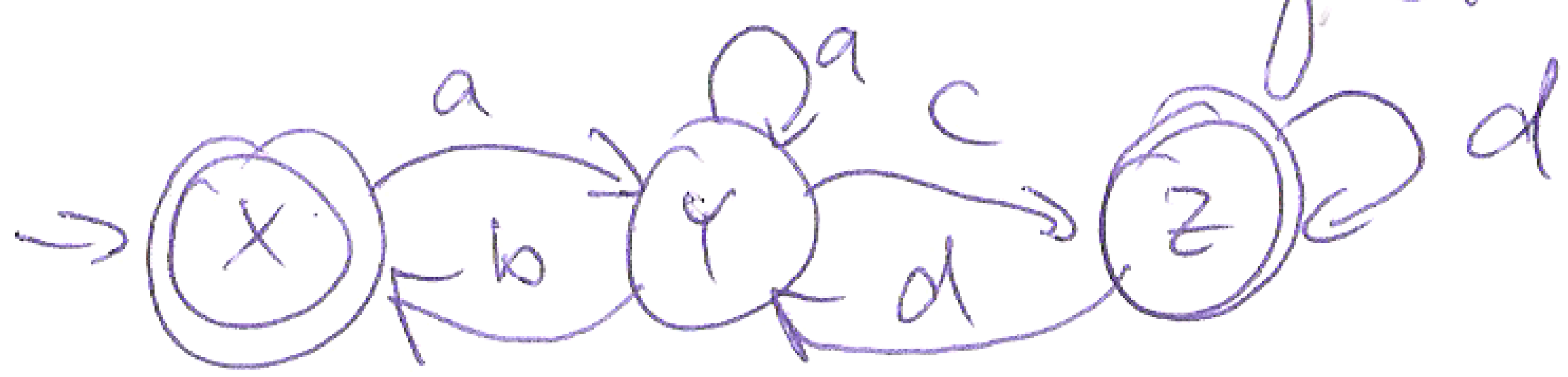
$$((q^1_2 \in \delta_1(q^1_1, a) \wedge q^2_2 = q^2_1) \vee$$

$$(q^1_1 = q^1_2 \wedge q^2_2 \in \delta_2(q^2_1, a)))$$

4. $q_0 = (q^1_0, q^2_0)$
5. $F = F_1 \times F_2$.

Převod KA na RV řešením rovnic

- Převeďte na RV následující KA:



, a to řešením rovnic nad RV.

1. sestavíme rovnice popisující jazyk daného KA:

$$X = aY + \varepsilon$$
$$Y = aY + bX + cZ$$
$$Z = dZ + dY + \varepsilon$$

2. Vyřešíme soustavu a získáme hodnotu X.
Lze užít toho, že pro libovolnou rovnici tvaru $X = pX + q$ je řešení $X = p^*q$.

$$X = p^*q$$
$$pX + q = p \cdot p^*q + q = p^+q + q$$
$$= p^+q + p^0q = (p^+ + p^0)q$$
$$= p^*q$$

- $Z = dZ + dY + \varepsilon = \underbrace{dZ}_{p} + (\underbrace{dY + \varepsilon}_{q})$

$$Z = d^*(dY + \varepsilon) = d^+Y + d^*$$

- $Y = aY + bX + cZ = aY + bX + c(d^{+}Y + d^{*})$

$$Y = aY + bX + cd^{+}Y + cd^{*}$$

$$Y = aY + cd^{+}Y + bX + cd^{*}$$

$$Y = \underbrace{(a + cd^{+})}_{p}Y + \underbrace{(bX + cd^{*})}_{q}$$

$$Y = (a + cd^{+})^{*}(bX + cd^{*})$$

$$X = pX + q$$

$$X = p^{*}q$$

- $X = aY + \varepsilon = \boxed{a(a+cd^{+})^{*}}(bX + cd^{*}) + \varepsilon =$

$$X = \underbrace{a(a+cd^{+})^{*}b}_{p}X + \underbrace{(a\underset{(a+cd^{+})^{*}}{\wedge}cd^{*} + \varepsilon)}_{q}$$

$$X = (a(a+cd^{+})^{*}b)^{*}(a\underset{(a+cd^{+})^{*}}{\wedge}cd^{*} + \varepsilon)$$