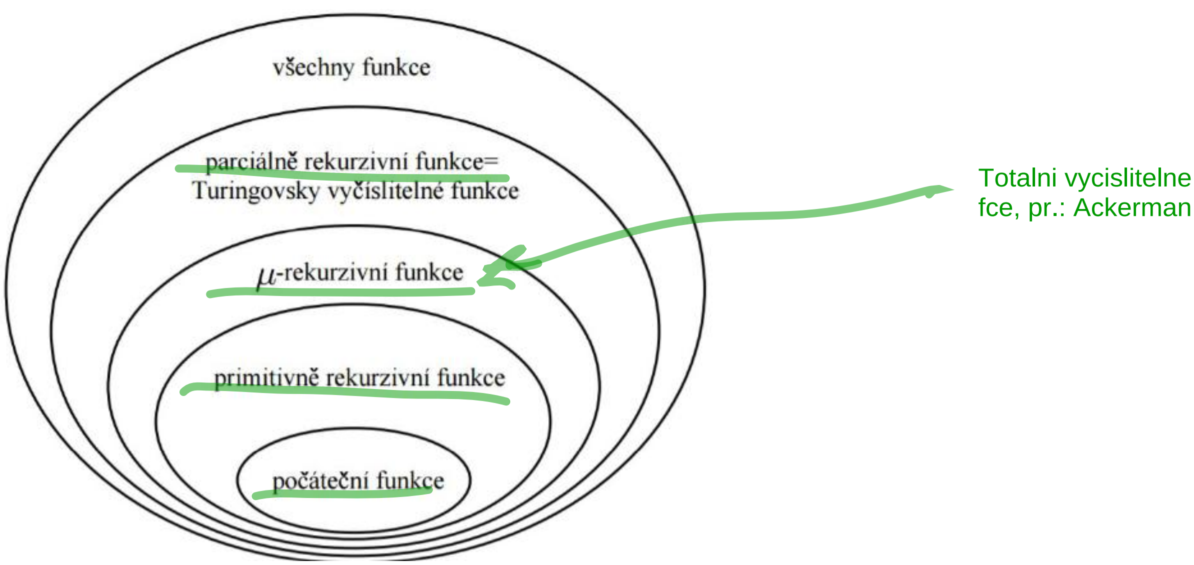
19. Parciální rekurzivní funkce

Minimum na zkoušku od mladého Češky :-) 2
Klasifikace parciálních fcí 3
Vyčíslitelné fce 3
Vytváření fcí 3
Počáteční fce 3
3 způsoby vytváření složitějších fcí 4
Definice 4
Příklady primitivních fcí 5
Další způsob vytváření složitějších fcí 5
definice 6
TS 6
Důkaz 6
Příklady 6

19. Parciální rekurzivní funkce

Minimum na zkoušku od mladého Češky :-)

- Vědět tyto koláče níže
- Počáteční fce
  - vyjmenovat
- Primitivně rekurzivní fce
  - kombinace, kompozice, primitivní rekurze
  - V programování **cyklus for**: vždy skončí, dokážu ihned v počátku definovat počet opakování
  - Je totální
- Mí rekurzivní fce
  - V programování **cyklus while**: vždy skončí, ale nevím za jak dlouho, resp. nedokážu to odhanout ihned na počátku
  - Je totální
  - Asi je ekvivalent úplného TS, ale nebyl si jistý
- Ackermannova funkce:
  - Patri do mi
  - je fce totální, ale není primitivně rekurzivní.
- Parciálně rekurzivní:
  - Plus minimalizace
  - Občas zastaví, občas ne
  - Ekvivalent TS
- Znát základ důkazu, že parciálně rekurzivní fce jsou Turingovsky vyčíslitelné



m

Funkce je zobrazeni: $f\ N^m \to N^m$

m

Klasifikace parciálních fcí

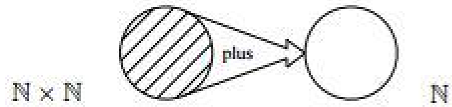
- Totální funkce

  Definovana pro cely definicni obor

  Totální funkce plus

  $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  $plus(x, y) = x + y$



Parcialni funkce: nemusi byt definovana pro cely definicni obor (ale muze)

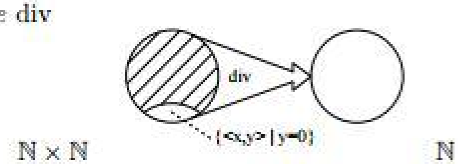
- Striktně parciální funkce

  Neni definovana pro cely definicni obor

  Striktně parciální funkce div

  $div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  $div(x, y) = \textit{celá část } x/y, \textit{ je-li } y \neq 0$



Vyčíslitelné fce

$f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$

kde $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Pozn. stačí $\mathbb{N}$, tedy přirozená čísla, protože v počítači máme pouze 0 a 1, tj výřez přirozených čísel a taky nám to stačí na TS

- Jedním z alternativních formalismů, který má plnou Turingovskou vyčíslitelnou sílu, tj vše co se dá vyjádřit TS, dá se vyjádřit vyčíslitelnými fcemi
- Definují se ve striktní syntaxi nebo ve volnější (zjednodušené) syntaxi

Vytváření fcí

Počáteční fce - jsou stavebnimi kameny pro vyssi funkce

Nulová funkce (zero function):

- $\xi() = 0$ (sémantika)
- $\xi: \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^1$ (syntax)
- zobrazuje „prázdnou n-tici“ na hodnotu 0, tj fce, která nemá na vstupu nic a zobrazuje 0

Funkce následníka (successor function):

- $\sigma(x) = x + 1$ (sémantika)
- $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (syntax)
- Na vstupu int, na výstupu int

Projekce (projection):

- $\pi^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ (sémantika)
- $\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (syntax)
- Vybírá z n-tice k-tou složku, např.: $\pi^3_2(7, 6, 4) = 6$ a $\pi^2_1(5, 17) = 5$
  pozn. Prve čteme o spodní číslo, tj pí 2 3
- Speciální případ: $\pi^n_0 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^0$, tj. např. $\pi^3_0(1, 2, 3) = ()$
- Projekcí je nekonečně mnoho

3 způsoby vytváření složitějších fcí

Následující tři fce mi pomáhají definovat fce ~~totální~~ Slozitejsi fce

Kombinace: Spojeni vysledku

- Kombinací dvou funkcí $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ získáme funkci, pro kterou:
  $f \times g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{n+m}$
  $f \times g(\overline{x}) = (f(\overline{x}), g(\overline{x})), \overline{x} \in \mathbb{N}^k$
  pozn: $\overline{x}$ je vektor :-) (x s carkou nad tim)
- Jinými slovy složím dva vstupy do jednoho výstupu
- př..: $\pi^3_1 \times \pi^3_3(4, 12, 8) = (4, 8)$

Kompozice:

- Kompozice dvou funkcí $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ je funkce, pro kterou:
  g PO f
  $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$
  pozn. Čteme gé po ef
  $g \circ f(\overline{x}) = g(f(\overline{x})), \overline{x} \in \mathbb{N}^k$
- Fce vyhodnocuji sekvenčně
- Př. $\sigma \circ \xi() = 1$, $\sigma \circ \sigma \circ \xi() = 2$

Primitivní rekurze: Vstup je k prvkovy

- je technika, která umožnuje vytvořiit funkci $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^m$ na základě jiných dvou funkcí
  $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $h : \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}^m$ rovnicemi:
  pozn. 1 je parametr, přes který iterujeme
  $f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}), \ \overline{x} \in \mathbb{N}^k$
  $f(\overline{x}, y + 1) = h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y)), \overline{x} \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}$
  pozn. y+1 - tj nejsem na 0, v dalším je už jen y, tj postupně hodnoty snižuji
- Bázový případ (fce g) a rekurzivní krok (fce h)

Definice

Třída primitivních rekurzivních funkcí obsahuje všechny funkce, které mohou být z počátečních funkcí vytvořeny: (a) kombinací (b) kompozicí (c) primitivní rekurzí

Každá primitivní rekurzivní funkce je totální funkcí.
Důkaz: Počáteční funkce jsou totální. Aplikací kombinace, kompozice a primitivní rekurze na totální funkce dostaneme totální funkce

Pozn. Ackermannova funkce je fce totální, ale není primitivně rekurzivní.

Příklady primitivních fcí

Konstantní funkce:

- funkce κ^n_m, která libovolné n-tici $\ddot{x} \in \mathbb{N}^n$ přiřadí konstantní hodnotu $m \in \mathbb{N}$
- $\kappa^2_3(1, 1) = \pi^3_3(1, 0, \kappa^2_3(1, 0)) = \kappa^2_3(1, 0) = \kappa^1_3(1) = \kappa^1_3(0) = \kappa^0_3() = 3$

Funkce násobení :

- $mult(x, 0) = \kappa^1_0(x)$ Kazdemu jdnomu priradi 0

  $mult(x, y + 1) = plus(x, mult(x, y))$

$m(3,2) = plus(3, mult(3,1))$ 6

$mult(3,1) = plus(3, mult(3,0))$ 3

$mult(3,0) = K^1_0(3)$ 0

Funkce předchůdce:

- $pred(0) = \xi()$

  $pred(y + 1) = \pi^2_1(y, pred(y))$

Funkce eq (equal):

- $eg(x, y) = 1$ je-li $x = y$, 0 je-li $x \neq y$
- $eq(x, y) = 1 \dot{-} ((y \dot{-} x) + (x \dot{-} y))$
- $eq \equiv monus \circ (\kappa^2_1 \times (plus \circ ((monus \circ (\pi^2_2 \times \pi^2_1)) \times monus \circ (\pi^2_1 \times \pi^2_2))))$

Pozor: $\pi^3_2(7,3,5) = 3$

$K^3_2(7,3,5) = 2$

vstup (např. 5)

even. $= eq \circ ((mult \circ ((quo \circ (\pi^1_1 \times K^1_2)) \times K^1_2)) \times \pi^1_1)$

při definici fce neuvádím parametry (s výjimkou prim. rek. a minimalizace)

$eq \circ (mult \circ (quo \circ (5,2), 2), 5)$ → 2 → 4 → 0

Parcialne rekurzivni funkce - lze ji vytvorit pomoci primitivne rekurzivni fce a minimalizace

Další způsob vytváření složitějších fcí

Mechanismus minimalizace:

- Vytvoření fce $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ z jiné funkce $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem, v němž $f(\ddot{x})$ je nejmenší y takové, že:

  1. $g(\ddot{x}, y) = 0$

  2. $g(\ddot{x}, z)$ je definována pro $\forall z < y, z \in N$

  Tuto konstrukci zapisujeme notací: $f(\ddot{x}) = \mu y[g(\ddot{x}, y) = 0]$ pozn. μy se čte "nejmenší hodnota z y"

  Tj já dosanu ntici a postupně k ní budu přidávat větší a větší hodnoty od 0 nahoru a zarazím se poprvé když $g(\ddot{x}, y)$ mi vrátí 0. V takovém okamžiku vrátím y. Pro všechny menší hodnoty než y (tady vyjádřeny proměnnou z) mi to vrátí nějakou hodnotu.

- Fce f bude hledat nejmenší hodnotu parametru ($^{+1}$), pro kterou při zachování parametrů n (^{n}) mi fce g vrátí hodnotu 0

17

0

- Př. div(x, y) = μt[((x + 1)∸(mult(t, y) + y)) = 0]
- Hledání y může být až do nekonečna, proto mi umožňuje tato fce definovat fce parciální (tj silnejsi než totální)

definice

Třída parciálně rekurzivních funkcí je třída parciálních funkcí, které mohou být vytvořeny z počátečních funkcí aplikací: (a) kombinace (b) kompozice (c) primitivní rekurze (d) minimalizace

TS

Parciální funkce, kterou může počítat nějaký TS se nazývá Tuingovky vyčíslitelnou
Každá parciálne rekurzivní funkce je Turingovsky vyčíslitelná.

Důkaz

- Potřebujeme dokázat oba směry
- Takto zhruba by to mělo stačit, víc by chtít neměli…, kdyžtak opora TIN str. 141

1. Každá parciálně rekurzivní funkce je Turingovsky vyčíslitelná
a) Nejprve je třeba nalézt Turingovy stroje, které vyčíslují počáteční funkce ξ, σ, π.
b) Dále popíšeme konstrukci Turingových strojů pro aplikaci kombinace, kompozice, primitivní rekurze a minimalizace
2.Každý výpočetní proces prováděný Turingovým strojem je procesem vyčíslení nějaké parciálně rekurzivní funkce.
a) každý možný pohyb TS lze vyjádřit primitivně rekurzivní fcí

Příklady

Vyčíslení fcí:
Př.1:
Nalezněte hodnoty následujících fcí pro zadané vstupy:

a) $((\sigma \circ \xi) \times \xi)() = (1, 0)$ pozn. První část: nic jdo do ksí, to vrátí 0, to se dá do sigmy a ta to o 1 inkrementuje, tj 1. Druhá část je výsledek ksí na prázdnou entici, tj 0
b) $\pi^3_2 \times \pi^3_3 \times \pi^3_2(5,6,7) = (6, 7, 6)$
c) $(\sigma \times \sigma) \circ \pi^3_2(4, 7) = (8, 8)$ pozn. ze 4, 7 se vybere 2. prvek tj 7, to se dá do obou členů závorky (pač ×) tj jde to do sigmy, která to v obou případech zvýší o 1, tj výsl. je 8 a 8
d) Primitivní rekurze: f(5,4) pro $f(x,0) = \sigma(x)$
$f(x, y+1) = \pi^3_3(x, y, f(x, y))$

$f(5, 4) = \pi^3_3(5, 3, f(5, 3))$	$f(5, 4) = \pi^3_3(5, 0, 6) = 6$
$f(5, 3) = \pi^3_3(5, 2, f(5, 2))$	...
$f(5, 2) = \pi^3_3(5, 1, f(5, 1))$	...
$f(5, 1) = \pi^3_3(5, 0, f(5, 0))$	$f(5, 1) = \pi^3_3(5, 0, 6) = 6$
$f(5, 0) = \sigma(5) = 6$	6 se propaguje nahoru

dukaz: viz prednaska 11 od slidu 21

Definujte pojem turingovsky vyčíslitelná funkce a parciální rekursivní funkce. Uveďte hlavní kroky důkazu **ekvivalence** třídy parciálně rekursivních funkcí a třídy turingovsky vyčíslitelných funkcí.

a) (75b)

- Zadána parciálně rekurzivní funkce div (x,y) = ut[((x + 1) - (mult(y, t) - 2)) = 0] (nebo tak nějak).
- úkolem bylo zdůvodnění, proč je funkce div parciálně rek. fcí (a to na základě definice parc. rek. fcí), nebo tak nějak
- ilustrovat výpočet pro div(3,2)

$div\left(x,y\right)=\mu t\left[\left(\left(x+1\right)-\left(t.y+y\right)\right)=0\right]$, minus je monus, u minimalizácie sa vždy hľadá rovnosť s nulou... výsledkom je premenná uvedená za minimalizáciou, čiže teraz t (hľadáš od 0)

1. div(20, 3) =>
2.
3. (20+1)-(0.3+3)=18 x
4. (20+1)-(1.3+3)=15 x
5. (20+1)-(2.3+3)=12 x
6. (20+1)-(3.3+3)=9 x
7. (20+1)-(4.3+3)=6 x
8. (20+1)-(5.3+3)=3 x
9. (20+1)-(6.3+3)=0 <-- víťaz
10. =
11. div(20, 3) = 6