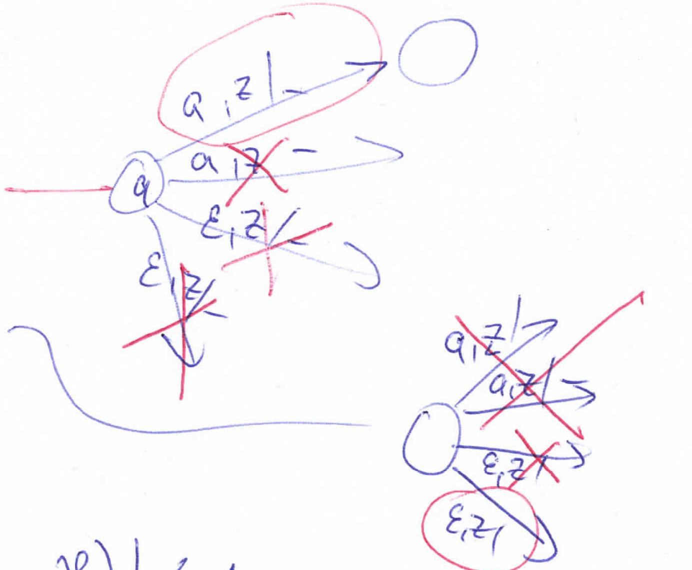
DZA

- ZA : $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

DZA $\forall q \in Q \ \forall z \in \Gamma \ \forall a \in \Sigma$:

$$(|\delta(q,a,z)| \leq 1 \wedge |\delta(q,\varepsilon,z)| = 0)$$
$$\vee (|\delta(q,a,z)| = 0 \wedge |\delta(q,\varepsilon,z)| \leq 1)$$

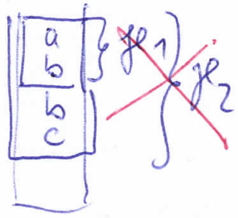


- RZA : $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

DRZA : $\forall q \in Q \ \forall x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \ \forall \gamma \in \Gamma^* : |\delta(q,x,\gamma)| \leq 1$

$\wedge \ \forall q \in Q \ \forall x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$:

$$\delta(q,x,\gamma_1) \neq \emptyset \wedge \delta(q,x,\gamma_2) \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\neg \exists \gamma_3 \in \Gamma^* : (\gamma_1 = \gamma_2\gamma_3 \vee \gamma_2 = \gamma_1\gamma_3)$$



$\wedge \ \forall q \in Q \ \forall a \in \Sigma \ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$:

$$\delta(q,a,\gamma_1) \neq \emptyset \wedge \delta(q,\varepsilon,\gamma_2) \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\neg \exists \gamma_3 \in \Gamma^* : (\gamma_1 = \gamma_2\gamma_3 \vee \gamma_2 = \gamma_1\gamma_3)$$

– Mějme bezk. gramatiku

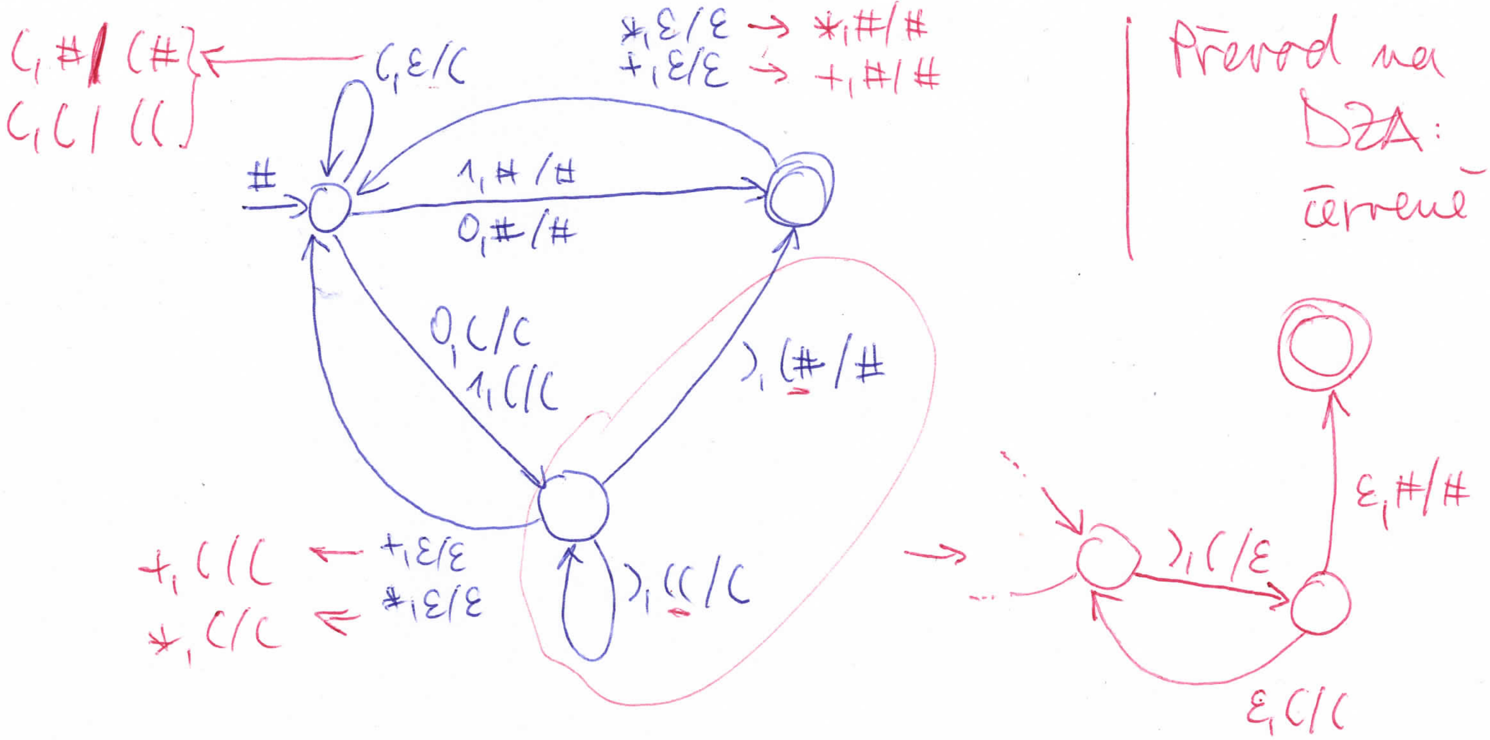
$G = (\{E, T, F\}, \{+, *, 0, 1, (,)\}, P, E)$, kde

$P: \quad E \to E+T \mid T$

$\quad\quad T \to T*F \mid F$

$\quad\quad F \to 0 \mid 1 \mid (E)$

Sestavte DRZA M takový, že $L(M) = L(G)$.

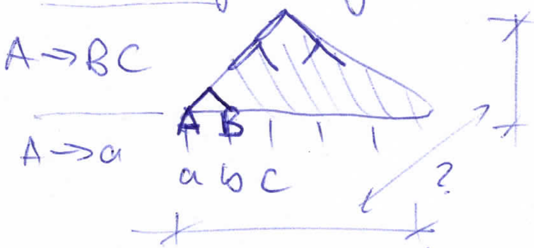


Převod na DRZA: červeně

P. L. pro $\mathcal{L}_2$

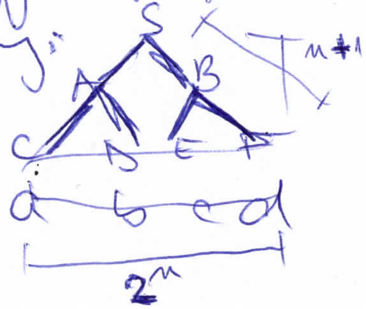
$\forall \Sigma, \Sigma$ kon. abc. $\forall L \subseteq \Sigma^*: L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists k > 0 \ \forall z \in L: |z| \geq k \Rightarrow$
$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*: z = u\underline{v}w\underline{x}y \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$
$\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.

Důkaz (idea) – G bezk. gr. $\longrightarrow$ CF : $A \to BC \mid a \quad (S \to \varepsilon)$
- gr. v CNF generuje bin. der. stromy



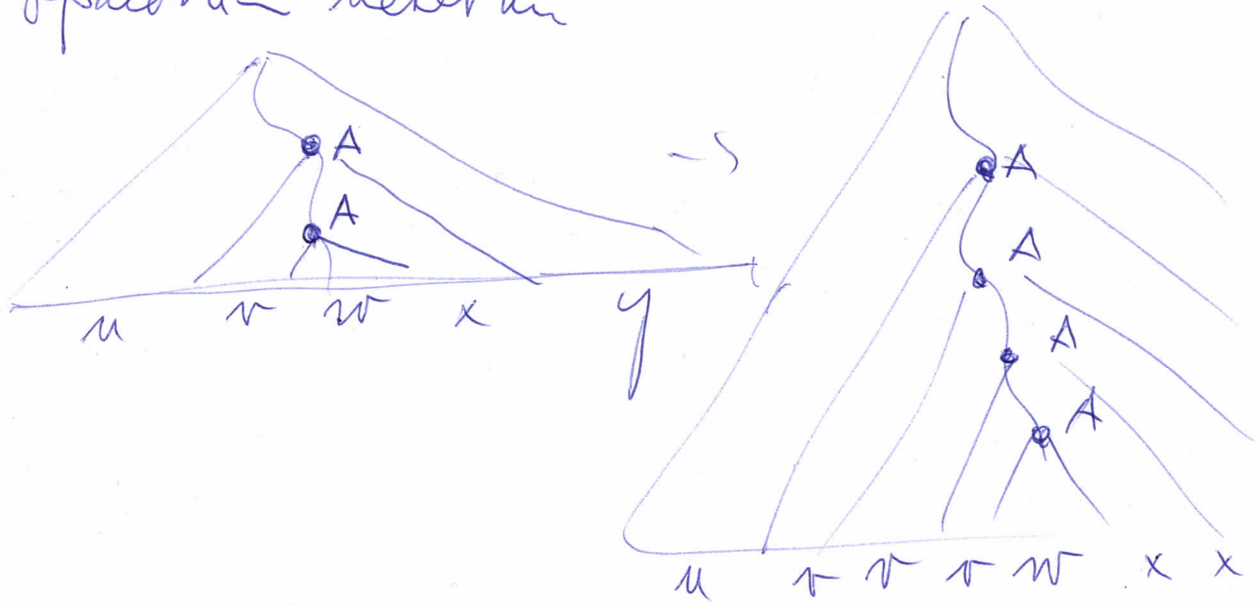
- nejd. věta pro určitou výšku : plný bin. strom

- souvislost výšky (resp. počtu neterm. na větvích) a délky věty:



$2^2 = 4$

- pro gr. v CNF s množinou neterm. N uvážíme věta délky $2^{|N|}$ $\rightarrow$ na větvích bude $|N|+1$ neterm. (případně více pro neplný strom).
  $\Rightarrow$ opakování neterm.



- Dokažte, že $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\} \cup \{b^m \mid m \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$

Důkaz sporem: - předp. $L \in \mathcal{L}_2$.

- dle P.L.: $\exists k > 0 : \forall z \in L : |z| \geq k \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \{a, b\}^* :$
  $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

- Uvažme libovolné k, pro které platí výše uvedené a zvolme $z = a^k b^k a^k \in L$, kde $|z| = 3k \geq k$.

  (Pozn. volba $z = b^k$ nepovede ke sporu.)

- Musí tedy platit, že

  $\exists u, v, w, x, y \in \{a,b\}^*: z = a^k b^k a^k = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k$

  $\wedge \forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.

- Uvažme všechny možné volby $u, v, w, x, y \in \{a,b\}^*$, pro které platí výše uvedené, a analyzujme je:

  a) Zvolíme-li $v \in a^+b^+$ nebo $v \in b^+a^+$ nebo $x \in a^+b^+$ nebo $x \in b^+a^+$, pak pro $i \geq 2$ dojde při napumpování k většímu než přípustnému počtu alternací mezi podřetězci tvořenými a nebo b.

  b) Zvolíme-li $vx \in a^+$ nebo $vx \in b^+$. Pak pro $i \geq 2$ dojde při napumpování k porušení shody délky prefixu a střední části, nebo střední části a sufixu.

  c) Zvolíme-li $v \in a^+$ a $x \in b^+$. Pak pro $i \geq 2$ dojde po napumpování k porušení shody délky střední části řetězce a sufixu řetězce.

aaabbbaaa
v x

  d) Zvolíme-li $v \in b^+$ a $x \in a^+$. Pak pro $i \geq 2$

dojde k porušení shody délky prefixu a střední části.

- Nelze tedy vybrat u, v, w, x, y tak, aby $uv^iwx^iy \in L$ pro $\forall i \geq 0$. SPOR.

Nechť $L = \{ w \in \{a,b,c,d\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge \#_c(w) = \#_d(w) \} \notin \mathcal{L}_2$.

Důkaz sporem (IDEA):

- Předp. $L \in \mathcal{L}_2$
- Zvolíme např. $z = a^k c^k b^k d^k \in L$
  $|z| = 4k \geq k$.
- S ohledem na to, že při volbě u, v, w, x, y musí platit $|vwx| \leq k$ nelze zvolit v a x tak, aby obsahovaly symboly a i b nebo c i d.
- Při "pumpování" tudíž nutně dojde k porušení jedné z def. rovností. $\square$

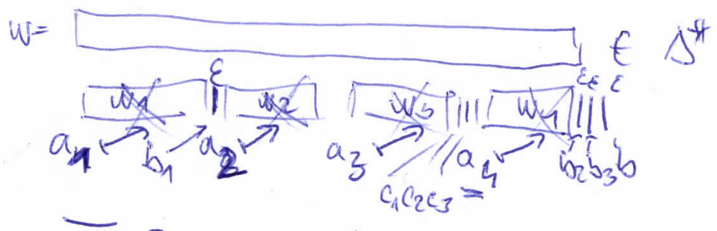
Pokud zvolíme např.
$z = a^k b^k c^k d^k$
zvolíme $v = a$ $w = \varepsilon$ $x = b$ a je možno "pumpovat"
$\rightarrow$ nevede ke sporu.

Uzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči morfismu a inv. morf.

- Pro abecedy Σ a Δ, zobrazení $h: \Sigma^* \to \Delta^*$ je morfismus, jestliže $\forall w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*, n \geq 0$:
  $h(w) = h(a_1) \cdot \ldots \cdot h(a_n)$.

- Pro $L \subseteq \Sigma^*$, $h(L) = \{ h(w) \mid w \in L \}$.
  Pro $L \subseteq \Delta^*$, $h^{-1}(L) = \{ w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L \}$.

- Základní myšlenka uzavřenosti $\mathcal{L}_2$ vůči h^{-1}:
  - nechť $h: \Sigma^* \to \Delta^*$
  - nechť $L \subseteq \Delta^*$
  - zavedeme pomocnou abecedu $\overline{\Sigma} = \{ \overline{a} \mid a \in \Sigma \}$ takovou, že $\overline{\Sigma} \cap \Delta = \emptyset$.



  - $h^{-1}(L) = h_{cleanup}(\delta(L) \cap L_{match}^*)$

  kde: - δ: $\forall b \in \Delta$: $L_b = \overline{\Sigma}^* \{b\} \overline{\Sigma}^*$
  - $L_{match} = \{ \overline{a} w \in \overline{\Sigma} \Delta^* \mid h(a) = w \} \in Fin \subset \mathcal{L}_3$

- $h_{cleanup}: (\overline{\Sigma} \cup \Delta)^* \to \Sigma^*$:

$$\forall \bar{a} \in \overline{\Sigma}: h(\bar{a}) = a$$
$$\forall b \in \Delta: h(b) = \varepsilon$$

- Příklad: $\Sigma = \Delta = \{a, b\}$, $h: a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$, $L = (ab)^*(ba)^*$

Určete $h^{-1}(L)$ dle výše uvedeného postupu.

- $\overline{\Sigma} = \{\bar{a}, \bar{b}\}$
- δ: $L_a = \{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{a\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^*$
  $L_b = \{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{b\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^*$
- $\delta(L) = (\{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{a\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{b\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^*)^* (\{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{b\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^* \{a\} \{\bar{a}, \bar{b}\}^*)^*$
- $L_{mask} = \{\bar{a}ab, \bar{b}ba\}$
- $\delta(L) \cap L_{mask}^* = (\bar{a}ab)^* (\bar{b}ba)^*$
- $h_{cleanup}$: $\bar{a} \mapsto a$, $\bar{b} \mapsto b$, $a \mapsto \varepsilon$, $b \mapsto \varepsilon$
- $h_{cleanup}(\delta(L) \cap L_{mask}^*) = a^* b^*$. $\square$

- Mějme jazyky

$L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m,n \geq 1\}$,

$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m,n \geq 1\}$,

$L_3 = \{0\}L_1 \cup L_2$.

Jakým způsobem rozvod

$(\underline{\{0\} \cup L_3})^* \cap \underline{0a^+b^+c^+} = \{0\}(L_1 \cup L_2)$ ukazuje

nezavřenost jazyků DZA vůči $*$.

- $L_1 \in \mathcal{L}_2^D$ (kde $\mathcal{L}_2^D$ je třída bezk. jazyků přijímaných DZA).

  $L_2 \in \mathcal{L}_2^D$ — v obou případech snadno sestrojíme příslušný DZA.

- $L_3 \in \mathcal{L}_2^D$, neboť prefix "0" rozliší jednoznačně jazyky $\{0\}L_1$ a L_2.

- $\{0\} \cup L_3 \in \mathcal{L}_2^D$

- $0a^+b^+c^+ \in \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^D$

- Víme, že $\mathcal{L}_2^D$ jsou uzavřeny vůči průniku s $\mathcal{L}_3$.
(viz dřívější konstrukce "ZA $\cap$ KA" – v tomto případě aplikována na DZA a DKA $\to$ DZA).

- Budeme-li předp., že $\mathcal{L}_2^D$ je uzavřena vůči $*$, pak $(\{0\} \cup L_3)^* \cap 0a^+b^+c^+ \in \mathcal{L}_2^D$

- Ovšem $\{0\}(L_1 \cup L_2)$ nelze přijmout DZA: Po načtení "0" se nelze nijak deterministicky rozhodnout, zda použít či nepoužít zásobník pro symboly "a".

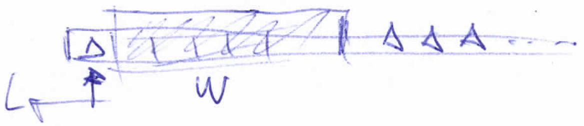
- To vede ke sporu. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_2^D$ není uzavřena vůči $*$.

Turingovy stroje

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$

  - Q – kon. mn-a.
  - Σ – kon. vst. abeceda, $\Delta \notin \Sigma$
  - Γ – kon. pásk. abeceda, $\Sigma \subset \Gamma$, $\Delta \in \Gamma$, $\{L, R\} \cap \Gamma = \emptyset$
  - $q_0 \in Q$
  - $q_F \in Q$

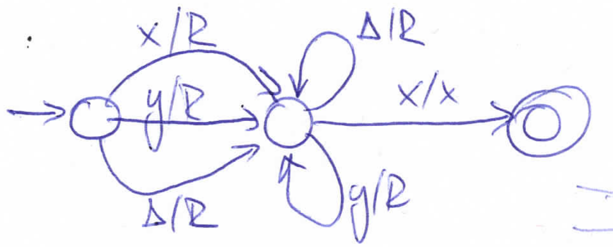
$\delta: Q \setminus \{q_F\} \times \Gamma \to Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$

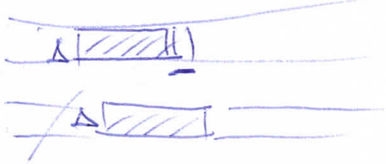


- přechodový diagram

  R_x pro $\Sigma = \{x, y\}$

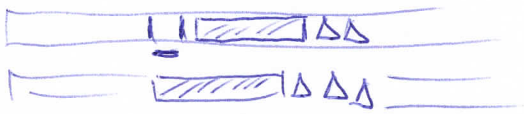
  $\Gamma = \{x, y, \Delta\}$





- kompoziční diagramy
  - x, L, R, L_x, R_x, $L_{\neg x}$, $R_{\neg x}$, S_L, S_R

    $x \in \Gamma$
  - sekvence $\to ABC$ / $\to A \to B \to C$

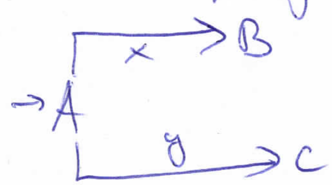


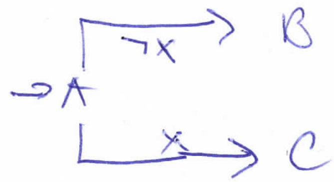
  - podmíněná sekvence

    $\to A \xrightarrow{x} B$

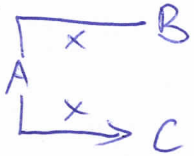
    POZOR: - Pokud je v konc. stavu A pod čtecí hlavou "x", pokračuj B.

    - Jinak se přejde do konc. stavu B.
  - větvení :

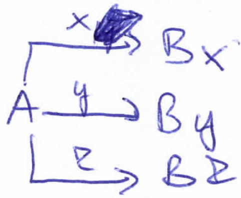




  - nedeterminismus (POKUD povolen!!!)



  - "makra" $A \xrightarrow{\{x,y,z\}} \xrightarrow{w} Bw \equiv$



– více pásek: indexace : R^1 (doprava na 1. pásce)

L^2 (doleva na 2. pásce)

– popis TS algoritmem.

– sestavte a popište kompozitním diagramem TS, který změní počáteční konfiguraci $\underline{\Delta} w \Delta \Delta \ldots$ na $\underline{\Delta} w \Delta w^R \Delta \ldots$

$\to R_\Delta L \xrightarrow{x,y} \} \xrightarrow{w} \Delta R_\Delta R_\Delta w L_\Delta L_\Delta w$

$\underline{\Delta} x y \Delta \Delta \ldots$

~~$\Delta x y \Delta \Delta \ldots$~~

$\Delta x y \underline{\Delta} \Delta \ldots$

$\Delta x \underline{y} \Delta \Delta \ldots$

$\Delta x \underline{\Delta} \Delta \Delta \ldots$

$\Delta x \Delta \underline{\Delta} \Delta \ldots$

$\Delta x \Delta \Delta \underline{\Delta} \Delta \ldots$

$\Delta x \Delta \Delta \underline{y} \Delta \ldots$

$\Delta x \Delta \underline{\Delta} y \Delta \ldots$

$\Delta x \underline{\Delta} \Delta y \Delta \ldots$

$\Delta x \underline{y} \Delta y \Delta \ldots$

$\Delta \underline{x} y \Delta y \Delta \ldots$

$\Delta \underline{\Delta} y \Delta y \Delta \ldots$

$\Delta \Delta y \underline{\Delta} y \Delta \ldots$

$\Delta \Delta y \Delta y \underline{\Delta} \Delta$

$\Delta \Delta y \Delta y \underline{x} \Delta$

$\Delta \Delta y \underline{\Delta} y x \Delta \ldots$

$\Delta \underline{\Delta} y \Delta y x \Delta \ldots$

$\Delta \underline{x} y \Delta y x \Delta \ldots$

$\underline{\Delta} x y \Delta y x \Delta \ldots$