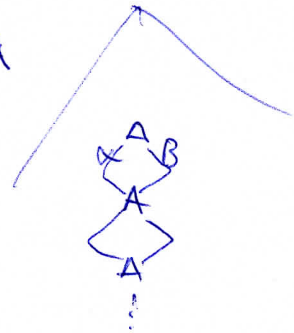
Cyklus v bezk. gr.

- bezk. gr. $G = (N, \Sigma, P, S)$: cyklus – $\exists A \in N : A \overset{+}{\Rightarrow} A$



- Sestavte a formálně zapište alg. testu, zda v dané bezk. gr. je cyklus.

vstup: bezk. gr. $G = (N, \Sigma, P, S)$

výstup: ANO, jestliže v G je cyklus, jinak NE.

Metoda:

1. Vypočteme N_ε dle dříve presentovaného alg.
2. Zavedeme relaci $\varrho \subseteq N \times N$ tak, že $\forall A, B \in N : A \varrho B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists (A \to \alpha B \beta) \in P : \alpha, \beta \in N_\varepsilon^*$ (tedy ϱ reprezentuje jeden krok v možném cyklu)
3. Vypočteme ϱ^+ např. pomocí Warshallova alg.
4. Alg. končí s odpovědí ANO, jestliže $\exists A \in N : A \varrho^+ A$ (tedy v matici ϱ^+ bude "1" na diagonále ve vstupu odp. A), jinak alg. končí s odpovědí NE.

$A \to \alpha B \beta$

$\alpha, \beta \in N_\varepsilon^*$

ϱ	A	B
A		1
B		
⋮		

Odstranění levé rekurze

- levá rekurze: $A \overset{+}{\Rightarrow} A\alpha$
- odstranění přímé levé rekurze

$A \to A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n$, kde β_i nezačíná A

(efekt: $A \Rightarrow A\alpha_1 \Rightarrow A\alpha_2\alpha_1 \Rightarrow \dots A\alpha\alpha\alpha\alpha \Rightarrow \beta\alpha\alpha\alpha\alpha$)

$A \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_1 A'$

$A' \Rightarrow \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_m A' \mid \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_m$

- nepřímá l. r. $\Rightarrow$ přímá levá rekurze dosazováním pravidel do sebe.
- Odstraňte levou rekurzi z bezk. gr. s následující pravidly:

$S \to Sa \mid Ac \mid b$

$A \to Sd \mid f$

- odstranění přímé levé rek. u symbolu S:

$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS'$ $\quad S' \to a \mid aS'$

$A \to Sd \mid f$

$A \Rightarrow Sd \Rightarrow$
$\Rightarrow Acd$

- převedeme nepř. levou rek. u A na přímou

$A \to Acd \mid bd \mid AcS'd \mid bS'd \mid f$

$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS'$ $\quad S' \to a \mid aS'$

- odstranění přímou levou rek. na A:

$A \to bd \mid bS'd \mid f \mid bdA' \mid bS'dA' \mid fA'$

$A' \to cd \mid cS'd \mid cdA' \mid cS'dA'$

$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS'$

$S' \to a \mid aS'$

$A \to \underbrace{aBccD}_{F}E \leadsto A \to EF$

- CNF : $A \to BC \mid a \quad (S \to \varepsilon)$
- GNF : $A \to a\alpha \quad (\alpha \in N^*)$ + příp. $S \to \varepsilon$
  - převod do GNF:
    1. odstraníme ε pravidla
    2. odstraníme levou rekurzi
    3. zavedeme relaci $\prec \subseteq N \times N$ (část. ostré usp.), a to tak, že $A \prec B \overset{def}{\iff} A \to B\beta \in P$
    4. zúplnění $\prec$
    5. dosadíme pravidla do sebe dle $\prec$ (počínaje od největšího prvku) tak, abychom se zbavili $A \to B\beta$
    6. "Dořešíme" α tak, aby sestávala jen z neterminálů.

- Mějme bezk. gr. s pravidly

$A \to BcC \mid dDaDaD$

$B \to aB \mid Cd \mid b$

$C \to bB \mid a$

$D \to dD \mid c$.

Převeďte do GNF.

1. ε pravidla nejsou.

2. levá rekurze není.

3. sestavíme $<$: $A < B$, $B < C$

4. zúplníme : $A < B < C < D$

5. Dosadíme pravidla do sebe s ohledem na $<$:

$D \to dD \mid c$

$C \to bB \mid a$

$B \to aB \mid bBd \mid ad \mid b$

$A \to aBcC \mid bBdcC \mid adcC \mid bcC \mid dDaDaD$

6. Upravíme pravé strany, kde v α se vyskytují terminály:

$D \to dD \mid c$ $\quad C \to bB \mid a$

$B \to aB \mid bBD' \mid aD' \mid b$

$D' \to d$

$A \to aBC'C \mid bBD'C'C \mid aD'C'C \mid bC'C \mid dDA'DA'D$

$C' \to c$ $\quad A' \to a$

- Mějme jazyk $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ a gramatiku $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid \varepsilon\}, S)$. Dokažte, že $L = L(G)$.

Důkaz:

1. $L(G) \subseteq L$: Ukážeme, že $\forall w \in L(G)$: $w \in L$,

a to indukcí přes délku w. Délka w je evidentně sudá, proto postačí indukce přes sudá čísla.

a) bázový případ $|w| = 0$: $w = \varepsilon$. Ovšem $\varepsilon \in L$, protože $\varepsilon = a^0 b^0$

b) předpokládejme, že tvrzení platí pro $\forall\, w \in L(G)$, kde $|w| = i \geq 0$, kde i je sudé.

Ukážeme, že pak platí i pro řetězce $w \in L(G)$, kde $|w| = i+2$:

- Uvažme věty $w \in L(G)$ takové, že $|w| = i+2 \geq 2$. Zřejmě pro vygenerování w v $L(G)$ je nutné uplatnit $S \to aSb$ alespoň jednou a tedy:

$$S \Rightarrow \underline{a}S\underline{b} \overset{*}{\Rightarrow} w = aw'b$$

Pro bezk. gr. platí, že jednou vygenerované terminály zůstávají, proto $w = aw'b$.

- Ovšem $|w'| = i$ (protože $|w| = i+2$) a současně $S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ vzhledem k tomu, že G je bezk. gr.

Tedy $w' \in L(G)$ a $|w'| = i$, tedy můžeme uplatnit ind. předpoklad: $w' \in L$, neboli $w' = a^n b^n$ pro nějaké $n \geq 0$.

- $w = a a^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1} \in L$.

2. $L \subseteq L(G)$: Ukážeme, že $\forall w \in L: w \in L(G)$, a to indukcí přes délku w. L evidentně obsahuje řetězce sudé délky, proto postačí indukce přes sudá čísla:

a) $|w|=0$, $w=\varepsilon$: Ověříme $\varepsilon \in L(G)$, neboť $(S \to \varepsilon) \in P$.

b) Předpokládejme, že pro $i \geq 0$, kde i je sudé, platí $\forall w \in L: \underset{|w| \leq i \Rightarrow}{\wedge} w \in L(G)$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $w \in L$, kde $|w| = i+2$

- Uvažme $w \in L$ takové, že $|w| = i+2$.
- Tedy $w = a^n b^n$ pro nějaké $n \geq 1$
- Pak můžeme rozepsat $w = a\underline{a^{n-1} b^{n-1}}b$.
- Označme $w' = \underline{a^{n-1} b^{n-1}}$. Zřejmě $w' \in L$, $|w'| = i$.
- Dle ind. předpokladu $w' \in L(G)$, neboli $S \overset{*}{\Rightarrow} w'$.
- Uvažujme derivaci $S \Rightarrow aSb \overset{*}{\Rightarrow} aw'b = w$.

Tedy $w \in L(G)$. $\square$

- Nedeterministická synt. analýza shora dolů

Uvažujme bezk. gr. s pravidly

$E \rightarrow E+T \mid T$

$T \rightarrow T*F \mid F$

$F \rightarrow (E) \mid i$, kde E je startovací symbol.

Sestavte ZA přijímající vyprázdněním zásobníku jazyk výše uvedené gramatiky a modelující synt. analýzu shora dolů.

- $Q = \{q\}$
- $\Sigma = \{+, *, (,), i\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F\}$
- δ: $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, E+T), (q, T)\}$

$\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, T*F), (q, F)\}$

$\delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, (E)), (q, i)\}$

$\delta(q, +, +) = \{(q, \varepsilon)\}$ $\delta(q,),)) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, *, *) = \{(q, \varepsilon)\}$ $\delta(q, i, i) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, (, () = \{(q, \varepsilon)\}$

- $q_0 = q$
- $z_0 = E$
- $F = \emptyset$

- **Nedeterministická synt. analýza zdola nahoru**

  - Sestavte RNZA pro ~~ten~~ jazyk generovaný výše uvedenou gr. a modelující synt. anal. zdola nahoru
  - Vnitřní vrchol zásobníku doprava

- $Q = \{q, r\}$
- $\Sigma = \{+, *, (,), i\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{E, T, F, \#\}$
- δ:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta(q, +, \varepsilon) = \{(q, +)\} & \delta(q, *, \varepsilon) = \{(q, *)\} \\ \delta(q, (, \varepsilon) = \{(q, ()\} & \delta(q,), \varepsilon) = \{(q,))\} \\ \delta(q, i, \varepsilon) = \{(q, i)\} & \end{array}\right| \text{shift}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \delta(q, \varepsilon, E+T) = \{(q, E)\} & \delta(q, \varepsilon, F) = \{(q, T)\} \\ \delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, E)\} & \delta(q, \varepsilon, (E)) = \{(q, F)\} \\ \delta(q, \varepsilon, T*F) = \{(q, T)\} & \delta(q, \varepsilon, i) = \{(q, F)\} \end{array}\right| \text{reduce}$$

$\delta(q, \varepsilon, \#E) = \{(r, \varepsilon)\}$ | accept

- $q_0 = q$
- $z_0 = \#$
- $F = \{r\}$.

- Formálně zapište alg. pro konstrukci ZA přijímajícího $\cap$ jazyků ZA a KA.

Vstup: ZA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, z_0^1, F_1)$ a
KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$.

Výstup: ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Metoda:
1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (lze užít $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, pokud $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.)
3. $\Gamma = \Gamma_1$
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ taková, že

   a) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^*$:
   $((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a, z) \Leftrightarrow$

$\left((q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, a, z) \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a) \right)$

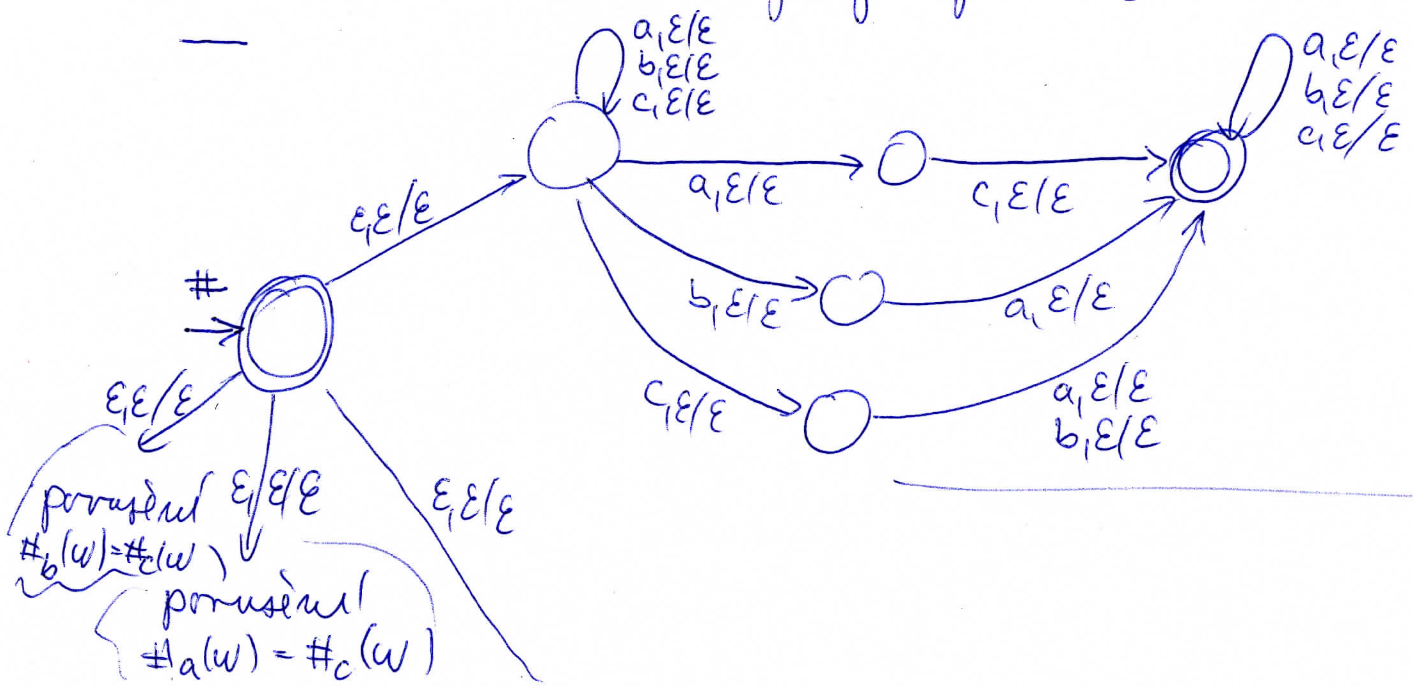
b) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^{*}$:

$\left(((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), \varepsilon, z) \Leftrightarrow \right.$

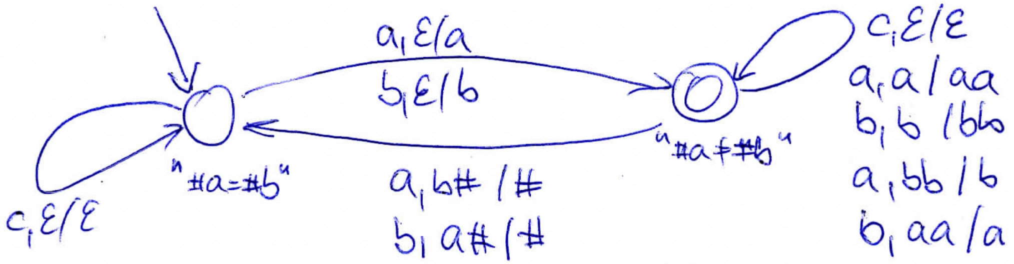
$\left. (q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, \varepsilon, z) \wedge \underline{q_1^2 = q_2^2} \right)$

5. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$
6. $z_0 = z_0^1$
7. $F = F_1 \times F_2$.

- Sestavte NZZA M přijímají $\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \}$



porušení pořadí a-b-c



porušení
$\#a(w) = \#b(w)$

aabbbccc

- O každé z následujících implikací rozhodněte, zda platí a zdůvodněte.

a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$

Platí. Stačí vzít $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$, kde $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, a vytvořit

$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\}, S)$.

$S \notin N_1 \cup N_2$

b) $L_1 \in \mathcal{L}_2 \wedge L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$

Neplatí. Stačí vzít $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ a $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$ a $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_2$.

c) $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

Neplatí. $L_1 = \{a, b, c\}^* \in \mathcal{L}_3$

$L_2 = \overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}} \in \mathcal{L}_2$

$\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_2} = \overline{\overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2.$

d) $L_1 \in \mathcal{F}in \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

↑ třída konečných jazyků

Platí. $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{F}in \subseteq \mathcal{L}_3$ a $\mathcal{L}_3$ je uzavřeno vůči doplňku.