počáteční funkce

1) nulová funkce $\xi : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$

$$\xi : () \mapsto 0$$

2) následník $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\sigma(x) = x+1$$

3) projekce $\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

$$\pi^n_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = x_k$$

---

primitivně rekurzivní funkce

4) kombinace $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ $\quad g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$

$$f \times g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{m+n}$$

$$f \times g(\bar{x}) = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \qquad \bar{x} \in \mathbb{N}^k$$

5) Kompozice $\quad f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m \quad g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$

$$g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$$

$$g \circ f(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) \qquad \bar{x} \in \mathbb{N}^k$$

6) primitivní rekurze $\quad g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m \quad h : \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}^m$

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^m$$

$\cancel{f(x,0) = x}$ | $\cancel{f(x,y+1) = x}$

$f(x,0) = \pi^1_1(x)$ | $f(x,y+1) = \pi^3_1(x,y,f(x,y))$

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y)) \qquad \bar{x} \in \mathbb{N}^k$$

---

7) minimalizace $\quad g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \qquad g(\bar{z},y) \text{ je def. } \forall z < y$$

$$f(\bar{x}) = \mu y[g(\bar{x},y) = 0]$$

$$nedef : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$$

$$nedef() = \mu y[1 = 0]$$

vyčíslete hodnoty funkcí:

a) $((\sigma \circ \xi) \times \xi)() =$ $\qquad \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}^2$

$(\sigma \circ \xi(), \xi()) = (\sigma \circ (0), 0) = (1, 0)$

$\sigma(\xi())$

---

b) $(\Pi^3_2 \times \Pi^3_3 \times \Pi^3_2)(5,6,7) = (\Pi^3_2(5,\underline{6},7), \Pi^3_3(5,6,\underline{7}), \Pi^3_2(5,\underline{6},7)) =$

$= (6,7,6)$ $\qquad \Pi^3_0 = ()$

---

c) $((\sigma \times \sigma) \circ \Pi^2_2)(4,7) = ((\sigma \times \sigma) \circ \Pi^2_2(4,7))$

$= ((\sigma \times \sigma)(7)) = (\sigma(7), \sigma(7)) = (8,8)$

d)

$$F(x,0) = \sigma(x)$$

$$F(x,y+1) = \pi^3_3(x,y,F(x,y))$$

$$F(5,3) = \pi^3_3(5,2,F(5,2)) = \pi^3_3(5,2,6) = \underline{\underline{6}}$$

$$F(5,2) = \pi^3_3(5,1,F(5,1)) = \pi^3_3(5,1,6) = 6$$

$$F(5,1) = \pi^3_3(5,0,F(5,0)) = \pi^3_3(5,0,6) = 6$$

$$F(5,0) = \sigma(5) = 6$$

Ukažte, že funkce swap přiřazující každé trojici (x,y,z) dvojici (u,v), která vznikne z-násobnou záměnou x a y, je primitivně rekurzivní.

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$$
$$h : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}^2$$

$$\mathrm{swap}\,\cancel{g}(x,y,0) = \boxed{\Pi^2_1 \times \Pi^2_2}^{\,g}(x,y)$$
$$\mathrm{swap}\,\cancel{g}(x,y,z+1) = \boxed{\Pi^5_5 \times \Pi^5_4}_{\,h}(\underline{x,y,z},\underbrace{\mathrm{swap}(x,y,z)}_{(\ ,\ )})$$

Ukažte, že funkce plus je PR

$$\mathrm{plus}(x,0) = \Pi^1_1(x)$$
$$\mathrm{plus}(x,y+1) = \sigma \circ \Pi^3_3(x,y,\mathrm{plus}(x,y))$$

Ukažte, že funkce mult je PR

$$\xi \circ \Pi^1_0(x)$$

$$\mathrm{mult}(x,0) = \xi \circ \Pi^1_0(x)$$
$$\mathrm{mult}(x,y+1) = \mathrm{plus} \circ (\Pi^3_1 \times \Pi^3_3)(x,y,\underline{\mathrm{mult}(x,y)})$$

$$x \cdot (y+1) = x + x \cdot y$$

$Fact(x) = x!$

$(x+1)! = (x+1) \cdot x!$

$Fact(0) = \sigma \circ \xi()$

$Fact(x+1) = \underline{\qquad}(x, Fact(x))$

$$\underbrace{mult \circ ((\sigma \circ \Pi^2_1) \times \Pi^2_2)}_{(x+1) \cdot x!}$$

$$pred(x) \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 0 \\ x-1 & \text{pokud } x > 0 \end{cases}$$

$pred(0) = \xi()$

$pred(x+1) = \Pi^2_1(x, pred(x))$

$$monus(x,y) \begin{cases} x-y & \text{pokud } x \geq y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$x \dot{-} (y+1)$

$monus(x,0) = \Pi^1_1(x)$

$monus(x,y+1) = pred \circ \Pi^3_3(x, y, monus(x,y))$

$x \dot{-} y$

$$\mathrm{even}(x): \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \text{ je sudé nebo } 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\mathrm{even}: \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}^1$$

$$\mathrm{even} = \cancel{\xi \circ \Pi^1_0 \times \sigma\circ\xi\circ\Pi^1_0}$$

$$\Pi^2_2 \circ \mathrm{swap} \circ \Big(\underbrace{(\xi \circ \Pi^1_0)}_{0} \times \underbrace{(\sigma\circ\xi\circ\Pi^1_0)}_{1} \times \underbrace{\Pi^1_1}_{x} \Big)$$

$\mathrm{swap}(0,1,3)$

$$(0,1) \overset{1}{\rightsquigarrow} (1,0) \overset{2}{\rightsquigarrow} (0,1) \overset{3}{\rightsquigarrow} (1,0)$$

$$\mathrm{even}(x) \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot 2 = x}$$

$$\mathrm{neg}(x) \begin{cases} 0 & \text{pokud } x > 0 \\ 1 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

použijte monus $\qquad 1 \dot{-} x$

$$\mathrm{neg} = \mathrm{monus}(1, x)$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{je-li } z \text{ sudé} \\ y & \text{je-li } z \text{ liché} \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = \Pi^2_2(swap(y,x,z))$$

$$f(x,y,z) = x \cdot even(z) + y \cdot neg(even(z))$$

Dokažte, že pro parciálně rek. fce

$F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

není funkce $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parciálně rek.

kde

$$h(x) \begin{cases} f(x) & \text{je-li } f(x) \text{ def.} \\ g(x) & \text{je-li } f(x) \text{ nedef.} \end{cases}$$

Důkaz sporem

Předpoklad je: h je parc. rek.

$f(x) = 1$ pokud x je číslo, jehož binární zápis odpovídá $\langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle$ kde $w \in L(M)$ pro TS M

$g(x) = 0$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = \langle M\rangle\langle\#\rangle\langle w\rangle \text{ a } w \in L(M) \\ & \text{pokud } x = \text{——}''\text{——} \text{ a } w \notin L(M) \\ 0 & \text{pokud } x = \\ & \text{nebo } x \text{ je neplatný kód} \end{cases}$$

h rozhoduje členství v RE jazyce $\Rightarrow$ spor

$\square$

Máte k dispozici funkce $F(x,y)$ a ~~neq~~ neq(x,y).

Implementujte v jazyce C funkci

$$g(x) = \mu y\,[\mathrm{neq}(F(x,y),1) = 0]$$

```c
unsigned g(unsigned x){
    unsigned y=0;
    while(F(x,y)!=1){
        ++y;
    }
    return y;
}
```

S využitím fcí monus, mult, div, eq, neg zapište funkci gcd(x,y) – největší společný dělitel x a y

$$gcd(x,y) = \max(\{d \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N}.\ x = a \cdot d \wedge \exists b \in \mathbb{N}.\ y = b \cdot d\})$$

předpokládejme $x \leq y$

$$1 \leq gcd(x,y) \leq x$$

pak se můžeme snažit najít nejmenší z takové, že

$$gcd(x,y) = x \dot{-} z$$

$$gcd_{x \leq y}(x,y) = monus(x, \mu z[\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ = 0])$$

$$divides(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \mid y \quad (y \% x = 0) \\ 0 & \text{if } \neg(x \mid y) \quad (y \% x > 0) \\ \text{nedef} & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$\left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor \cdot x = y$$

$$divides(x,y) = eq(mult(div(y,x),x),y)$$

$$gcd_{x \leq y}(x,y) = monus(x, \mu z[neg(divides(x \dot{-} z, x)) + neg(divides(x \dot{-} z, y)) = 0])$$