1. JAZYK A SÉMANTIKA PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

(→ mohou být i složitější formule)
AXIOMY (výchozí tvrzení / formule) ≠ ATOMICKÉ FORMULE (prvotní formule)

Logika

Axiom – výchozí tvrzení, platnost se předpokládá, nedokazuje se
- požadavky:
  - bezespornost – není možné z axiomu odvodit tvrzení a zároveň jeho negaci
  - nezávislost – nelze z axiomu odvodit axiom
- formule – dokazatelná formule $\vdash A$ – je výsledkem odvozování z axiomů
- z axiomů se pomocí odvozovacích pravidel (manipulace s formulemi) odvodí důsledky
- příkladem odvozovacího pravidla je modus ponens
  1. A
  2. $A \to B$
  3. B

Formalizovaná axiomatická teorie

- tvoří ji
  - jazyk teorie – tvoří jej slova jazyka ⇒ formule – tvoří je symboly abecedy jazyka
    - gramatika pro tvorbu formulí
  - axiomy (výchozí formule / slova)
  - odvozovací pravidla (např. modus ponens)

ABECEDA JAZYKA
SYMBOLY
(atomické formule / výrokové proměnné + logické spojky)
$\xRightarrow{\text{ze symbolů jsou vytvořeny}}$ FORMULE → axiomy jsou některé formule jazyka u kterých se předpokládá že jsou platné

↳ formule jsou vytvořeny ze symbolů abecedy s využitím GRAMATIKY

GRAMATIKA → FORMULE: ATOMICKÉ FORMULE $A, B, C, D, \dots$; LOGICKÉ SPOJKY $\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow$

Výroková logika

- atomické formule tvoří výrokové proměnné – $A, B, x, y, p, q, \dots$
  (prvotní formule)
- složené výroky / formule jsou tvořeny z atomických a z logických spojek a závorek $\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow$
  ↳ vše lze vyjádřit pomocí $\wedge$ a $\neg$ ⇒ viz v PC to je AND a NAND
  $A \vee B \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- pravdivostní hodnocení prvotních / atomických formulí
  = zobrazení $v : P \to \{0,1\}$ P – množina prvotních formulí
- formule A je pravdivá v prvotním hodnocení v jestliže $v(A) = 1$

Tautologie – A je tautologie jestliže $v(A) = 1$ pro jakékoliv hodnocení v
(A je tautologie ⇒ $\models A$)

×

Kontradikce – A je kontradikce jestliže $v(A) = 0$ pro jakékoliv hodnocení v

- příklady základních tautologií
  - vyloučení třetího $A \lor \neg A$
  - dvojí negace $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
  - vyloučení sporu $\neg(A \land \neg A)$
- všechny logické formule lze převést na formule obsahující pouze
  1) $\neg, \to$
  2) $\neg, \land$
  3) $\neg, \lor$

Př.:
- $A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$
  $\Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$
- $A \lor B \Leftrightarrow \neg A \to B$
  –〃– $\Leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$
- $A \land B \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$
  $\Leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$

- Logicky ekvivalentní formule – jsou takové formule, které mají stejné pravdivostní ohodnocení při jakémkoli. ~~ok~~ přiřazení ohodnocení
- axiomatická teorie / systém platí i pro výrokovou logiku
- AXIOMY VÝROKOVÉ LOGIKY:
  1) $A \to (B \to A)$ (A1)
  2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (A2)
  3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (A3)
- VĚTA O KOREKTNOSTI + POSTOVA VĚTA O ÚPLNOSTI
  - jestliže je formule dokazatelná (odvoditelná z axiomů), pak je tautologie $\vdash A$ $\quad A1 \underbrace{\vdash \dots \vdash \dots}_{\text{odvozovací pravidla}} \vdash A \Rightarrow \models A$

$\boxed{\vdash A \Leftrightarrow \models A}$ + každá tautologie je dokazatelná

$A \vdash B$
– B je dokazatelné z... nebo A dokazuje B

- VĚTA O DEDUKCI
  - T je množina formulí a A a B jsou formule
    $T \vdash A \to B$ právě tehdy když $T \cup \{A\} \vdash B$ $\quad (T, A \vdash B)$

  ... tedy $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ pak $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$ atd...
- LEMMA O NEUTRÁLNÍ FORMULI
  - T je ....
    $T, \neg A \vdash B$ a $T, A \vdash B$ pak $T \vdash B$

edit!

Predikátová logika (1. řádu)

- formální systém pro popis matematických vět a teorií
- vychází z výrokové logiky, kterou rozšiřuje
- jazyk – tvořen – abecedou (symboly)
  – gramatikou (pravidla pro tvorbu slov / formulí)

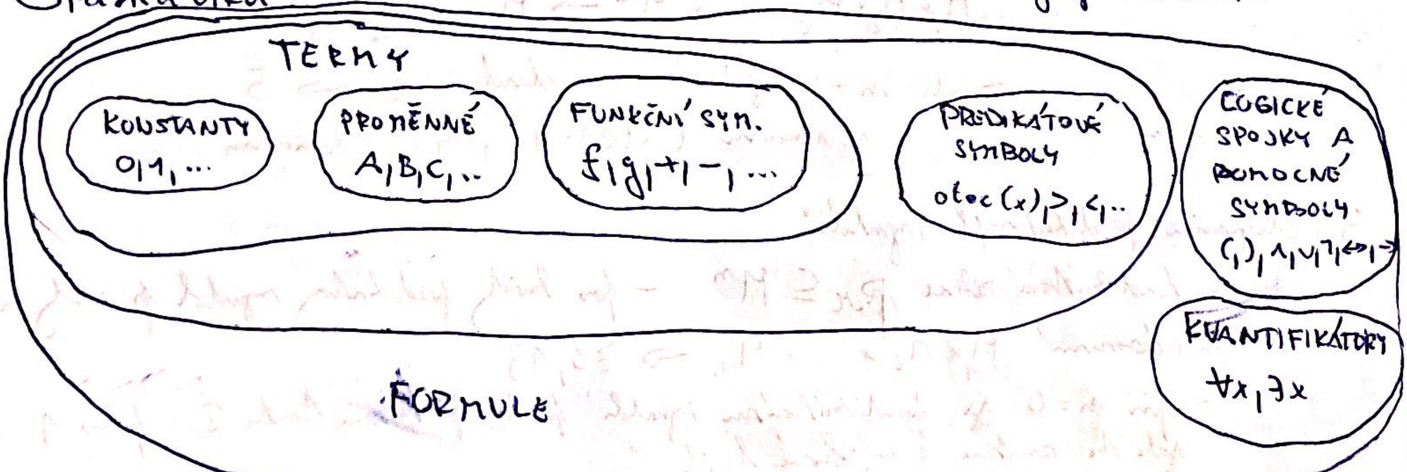
Abeceda

VL { – proměnné (čísla atd..) – ve výrokové logice nejsou proměnné za které by šly dosazovat formule ale pouze jsou prvotní / atomické formule

VL { – logické spojky – $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- pomocné symboly – (,)
- kvantifikátory – $\forall x$, $\exists x$
- funkční symboly – určují operace nad objekty ($f, g, *, +, \dots$) a mají aritu
  - s aritou = 0 to jsou konstanty
- predikátové symboly – určují vztahy mezi objekty nebo jejich vlastnosti ($>, \leq$, muž$(x), \dots$)
  - také mají aritu
  - speciálním případem je "=" – pokud je tak se říká jazyk s rovností

Gramatika



- gramatika popisuje / obsahuje pravidla pro tvorbu formulí

Volná x vázaná proměnná

$(\forall x\,(\exists y\,(x + y > z)))$ – x a y jsou vázané a z je volná

$\forall y\,.\ z + x$ – y je vázaná (i když tam není)

$\forall x\, \varphi$ – φ je obor kvantifikátoru

$x + y = z$ – otevřená
$\forall x .\ x + x$ – uzavřená
$\forall x .\ x + y$ – ani jedno

! Formule je uzavřená, pokud neobsahuje žádnou volnou a otevřená pokud žádnou vázanou

Sémantika predikátové logiky

- sémantika/význam formulí je dána interpretací
- máme nějaký zápis formule, ale nejsme schopni říct zda je pravdivá a jiné, pokud neznáme její sémantiku (nevíme co znamená)
- nejprve musíme danou formuli interpretovat a až potom můžeme určit její pravdivost, nebo nepravdivost v dané ~~formuli~~ interpretaci
- ! z proměnných nás zajímají pouze VOLNÉ proměnné a jejich interpretace, protože pouze ty mění hodnotu formule (není závislá na vázaných proměnných)

Realizace (interpretace) jazyka

- jazyk tvoří symboly (abeceda) a gramatika pro tvorbu formulí a tedy pro interpretaci formulí musíme interpretovat jazyk

- je algebraická struktura $\mathcal{M}$ složená z:

1) univerzum M - obor hodnot - např. 0, 1, 2, 3, 4, ...
   - těchto hodnot nabývají proměnné
   - ! v predikátové logice 1. řádu nabývají proměnné pouze hodnot z univerza - v PL 2. řádu nabývají i predikátů a funkcí

2) definice funkčních symbolů
   - zobrazení $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$ pro každý funkční symbol f s aritou n

     $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_m \to M$ $\quad f(1,2,3) \to 6$
   - když $n = 0$ jedná se konstantu $k \to 5$
   - $n = 1$ je unární $(k(2) = 4)$, $n = 2$ binární, ...

3) definice predikátových symbolů
   - predikátová relace $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ - pro každý predikátový symbol p arity n
   - zobrazení $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \to \{0,1\}$
   - při $n = 0$ je predikátovým symbolům prostě přiřazena 1 nebo 2 : $p \to 1$ jako to známe z výrokové logiky
   - $n = 1$: ~~[illegible]~~ → jedná se o vlastnost a vlastnosti jsou tedy podmnožiny univerza ($n = 1$)
   - $n = 2$ | $g(1,2) \to 0$ - g je větší

     muž(Petr) $\to 1$
   - pokud něco nějakou vlastnost nemá tak to nezmíníme a uvádí se v interpretaci jen ty co ji mají a vlastnost je podmnožina univerza a tedy $P \subseteq M$, že třeba muži jsou jen Tomáš, Petr, Filip

Ohodnocení proměnných (e)

- je zobrazení všech proměnných do univerza M realizace $\mathcal{M}$ jazyka L

$e(x) \in M$ – když je univerzum $\{0,1,2,3\}$ tak $e(x)$ může být třeba 2 ale ne 5

- Formule φ je splněna v realizaci $\mathcal{M}$ $[\mathcal{M} \models \varphi]$
  - pokud je pravdivá pro každé ohodnocení e realizace $\mathcal{M}$
  - když je φ uzavřená tak je v realizaci $\mathcal{M}$ i pravdivá
- Formule φ je splnitelná v realizaci $\mathcal{M}$ $[\mathcal{M} \models \varphi[e]]$
  - pokud existuje alespoň jedno ohodnocení e realizace $\mathcal{M}$ ve kterém je φ pravdivá
- Formule φ je logicky platná (tautologie) $[\models \varphi]$
  - pokud pro jakoukoliv realizaci $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi$
- Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní $[\varphi \equiv \psi]$
  - pokud pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ a libovolné ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ právě tehdy když $\mathcal{M} \models \psi[e]$
  - každá formule je logicky ekviv. se formulí kde se nevyskytuje jeden kvantifik. a nebo se tam vyskytuje jen $\rightarrow, \neg$ a $\forall$

Substituce

$\varphi_x[y]$ – ve formuli φ jsou všechna x nahrazena za y

- proměnná x musí být ve formuli φ substituovatelná a tedy žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru y (v tomto případě)

$x \rightarrow \exists y(x = S(y))$ – x zde není substituovatelné za $S(y)$ protože volný výskyt x leží v oboru kvantifikátoru y → tedy $\exists y$

- pokud má být proměnná x substituovatelná za y (tedy kde je x se nahradí za y) ve formuli φ, tak se nesmí stát, že by ta x měla volný výskyt ve formuli φ někde v oboru kvantifikátoru v tomto případě y → tak by se stalo že z volné x by se po substituci stala vázaná proměnná ke kvantifikátoru $\forall y$ nebo $\exists y$

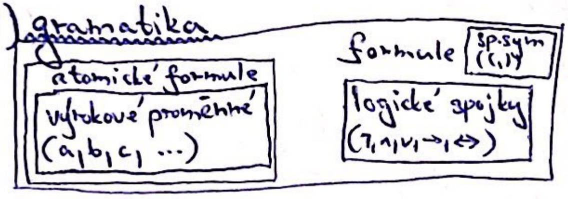
VÝROKOVÁ LOGIKA

Jazyk L

1) abeceda

symboly (a, b, c, ...) /výrokové proměnné + logické spojky ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) + speciální symboly ((,))

2) gramatika



Axiomy

1) (A1)

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

2) (A2)

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

3) (A3)

$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Odvozovací pravidla

1) Pravidlo odloučení (Modus Ponens)

$\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ tak ψ (platí φ a platí i $\varphi \rightarrow \psi$, tak platí i ψ)

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA 1. ŘÁDU

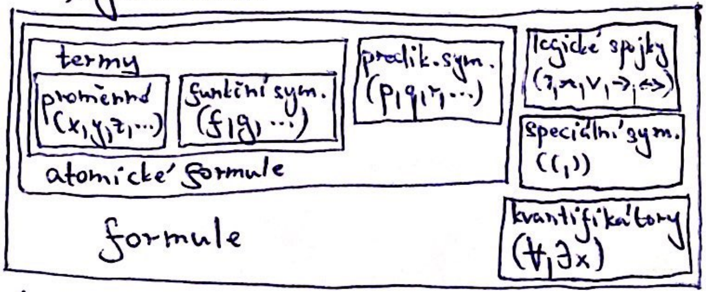
Jazyk L

1) abeceda

proměnné (x, y, z, ...) + logické spojky ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) + speciální sym. ((,)) +

+ funkční sym. (f, g, ...) + predikátové sym. (p, q, r, ...) + kvantifikátory ($\forall, \exists$)

2) gramatika



Axiomy

1)

2) — || —

3)

4) Axiom kvantifikátoru

$(\forall x(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x \psi))$ a x nemá volný výskyt v φ

(pokud by formule φ vypadala takto $\forall x (xy)$ tak to nevadí, ale pokud by vypadala takto $\forall y (xy)$ tak ano)

5) Axiom substituce

$(\forall x \varphi) \rightarrow (\varphi_x[t])$ a t je term substituovatelný za x

6) Axiom rovnosti (v jazyce/logice s rovností)

1) $x = x$ je axiom

2) $x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \dots$ je axiom

3) $x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow (p(x_1, \dots, x_n) = p(y_1, \dots, y_n)) \dots)$

Odvozovací pravidla

1) — || —

2) Pravidlo zobecnění

pro libovolnou proměnnou x z φ lze odvodit $\forall x (\varphi)$

Sémantika

- sémantiku logických spojek dobře známe
- je nutné pouze zavést ohodnocení výrokových proměnných (atomických formulí)

$$v: P \to \{0,1\}$$

Sémantika

- pro daný jazyk L je nutné (abychom porozuměli formulím) zavést jeho interpretaci či realizaci → určit obor hodnot + definovat funkční symboly + definovat predikátové symboly a vždy provést ohodnocení proměnných

$\mathcal{M}$

Realizace $\mathcal{M}$ jazyka L

- algebraická grupa - skládá se z:

1) universum M - obor hodnot (proměnných, funkč. sym., pred. sym.)
2) definice funkčních sym.
   $\forall f \in F,\ f_M: M^n \to M$
   n - arita toho daného funkčního symbolu
   n = 0 - konstanta $\{\emptyset\} \to M$
3) definice predikátových sym.
   $\forall p \in P,\ p_M \subseteq M^n$
   n - arita toho daného pred. sym.
   n = 0 - true, false, 1, 0, ...
   n = 1 - vlastnost
   n > 1 - vztahy / relace

- např. musí platit x, y a u
- x > y

↳ ohodnocení proměnných

$\forall x \in X,\ e: x \to M$

$e(x) \in M$

Věty, lemmy a pravidla

T - libovolná množina formulí jazyka L (formule jsou speciální axiomy)

⇒ TEORIE !

Věta o korektnosti

Je-li formule dokazatelná $\vdash \varphi$, pak je také logicky platná (tautologie) $\models \varphi$

(Postova) věta o úplnosti

Každá logicky platná formule je dokazatelná.

Věta o dedukci

T je množina formulí (teorie) a φ a ψ jsou f. a když platí $T \vdash \varphi \to \psi$ tak platí $T, \varphi \vdash \psi$

tedy: $A_1, A_2, \dots A_n \vdash B$ pak $A_1, A_2, \dots A_{n-1} \vdash A_n \to B$

Věta o neutrální formuli

jestliže $T, A \vdash B \wedge T, \neg A \vdash B$

pak $T \vdash B$ a A je neutrální formule

(patří i sem ⟶)

Věty, lemmy a pravidla

T - —〃—

Věta o korektnosti

- v pred. logice 1. řádu to znamená, že je-li dokazatelná ta formule φ jazyka L (pak je splněna v každé realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L) pak je logicky platná

(Postova) věta o úplnosti

Každá log. platná formule jazyka L je splněná ve všech jeho realizacích $\mathcal{M}$ a je dokazatelná

— doplnění spíš Gödelova věta o úplnosti pro predik. logiku

Věta o dedukci

φ musí být uzavřená formule jinak je to stejné

Uzávěr formule φ

φ je formule a $x_1, x_2, \dots x_n$ jsou volné proměnné ve φ pak $\forall x_1, x_2, \dots x_n\ \varphi$ je uzávěr formule φ

Věta o uzávěru

(φ) je uzávěr formule φ tak $T \vdash \varphi$ právě když $T \vdash (\varphi)$

PRAVIDLA !

1) $\forall$: je-li $\vdash \varphi \to \psi$ a x není volný výskyt ve φ tak $\vdash \varphi \to (\forall x\, \psi)$
2) $\exists$: je-li $\vdash \varphi \to \psi$ a x není volný výskyt ve ψ tak $\vdash (\exists x\, \varphi) \to \psi$

Model, teorie a důsledek teorie

T – libovolná množina formulí jazyka L (slov jazyka L), přičemž formule jsou speciální axiomy a spolu s axiomy predikátové logiky 1. řádu tvoří axiomy ~~formule~~ teorie T

- z teorie se dá něco dokazovat a odvozovat
- máme teorii a axiomy a pomocí odvozovacích pravidel (odloučení a zobecnění) můžeme odvozovat další formule

Sporná teorie T

jestliže $T \vdash A$ a zároveň $T \vdash \neg A$, jinak je bezesporá

↳ má-li teorie model, je bezesporá

Úplná teorie T

je bezesporná a pro každou formuli φ platí že buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$

Model teorie T $[\mathcal{M} \models T]$

je realizace $\mathcal{M}$ jazyka L taková že pro všechny formule φ z té teorie T platí že $\mathcal{M} \models \varphi$ (pro každou $\varphi \in T$)

Důsledek teorie T

je formule φ která je splněná ve všech modelech $\mathcal{M}$ teorie T ($\mathcal{M} \models \varphi$) a značí se to $T \models \varphi$

Věta o korektnosti vzhledem k teoriím

jestliže teorie T dokazuje formuli φ pak je formule φ důsledkem teorie T tedy jestliže $T \vdash \varphi$ tak $T \models \varphi$

Věta o úplnosti vzhledem k teoriím

1) má-li teorie model, je bezesporá
2) formule φ jazyka L je dokazatelná z T ($T \vdash \varphi$) právě když je φ důsledkem teorie T ($T \models \varphi$)

Prenexní tvar formulí

$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A$ — prenexní normální forma
— resp. formule v prenexní normální formě

$Q_1 \dots Q_n$ jsou kvantifikátory

$x_1 \dots x_n$ jsou volné proměnné v A (v A už není žádný kvantifikátor)

A je otevřená formule

Převod formulí do prenexního tvaru

1) odstranění zbytečných kvantifikátorů v jejichž oboru kvantifikátorem neleží žádná volná proměnná
2) přejmenování proměnných — začínáme z leva v podformuli a pokud má nějaká proměnná další výskyt někde ve vyšší formuli, tak ji nahrazujeme
3) odstranění ekvivalence — z $A \Leftrightarrow B$ na $(A \to B) \to (B \to A)$
4) negace dovnitř
$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \to B) \Rightarrow A \wedge \neg B$$
$$\neg(\exists x A) \Rightarrow \forall x \neg A$$
$$\neg(\forall x A) \Rightarrow \exists x \neg A$$
5) přesun kvantifikátorů doleva
$$(Qx A) \vee B \Rightarrow Qx(A \vee B)$$
$$(Qx A) \wedge B \Rightarrow Qx(A \wedge B)$$
$$(Qx A) \to B \Rightarrow \neg Qx(A \to B)$$
$$A \to (Qx B) \Rightarrow Qx(A \to B)$$

Skolemizace

— Skolemova normální forma je prenexní normální forma bez existenčních kvantifikátorů

- převod formulí na formule bez $\exists$
- nejdřív chceme prenexní tvar a pak až děláme skolemizaci

! podmínka na existenci y je možné chápat (pro všechna $x_1, x_2, \dots$) jak podmínku na existenci zobrazení f všech $x_1, x_2, \dots x_n$ nějakou — pro konkrétní $x_1 x_2 \dots x_n$ existuje konkrétní y tedy $f(x_1, x_2, \dots x_n) = y$

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y (P(x_1, x_2, \dots x_n, y))$$
$$\Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (P(x_1, x_2, \dots x_n, f(x_1, x_2, \dots x_n)))$$

tedy např.: $\forall x \exists y : x + y = 0 \Rightarrow \forall x : x + f(x) = 0$ kde $f(x) = -x$

Věta o úplnosti, korektnosti a kompaktnosti

Výroková logika

⇒ Postova věta o úplnosti
- každá logicky platná formule (tautologie) je dokazatelná

$\models \varphi \rightarrow \vdash \varphi$

⇒ Věta o korektnosti
- každá dokazatelná formule je logicky platná ($\vdash \varphi \rightarrow \models \varphi$) (tautologie)

⇒ Věta o kompaktnosti
- T je množina formulí a T' je konečná podmnožina T
- je-li T' splnitelná (existuje ohodnocení atomických formulí v takové, že všechny formule z T' jsou pravda) pak i T je splnitelná

⇒ stačí najít jednu formuli z T která je splnitelná a víme že všechny z T jsou splnitelné
- je důsledkem Postovi věty o úplnosti

+ Věta o dedukci

+ Věta o neutrální formuli

Predikátová logika 1. řádu

⇒ Gödelova věta o úplnosti
- každá formule, která je důsledkem teorie T, tedy platí ve všech modelech teorie T (model je realizace $\mathcal{M}$ jazyka L ve které jsou všechny formule z T splněné, $\mathcal{M} \models T$) je dokazatelná v teorii T

⇒ Věta o korektnosti
- každá formule, která je dokazatelná v teorii T, tedy teorie T ji dokazuje je důsledkem teorie T

[φ je důsledkem teorie T : $T \models \varphi$; φ je dokazatelná v teorii T tedy T dokazuje φ : $T \vdash \varphi$]

⇒ Věta o kompaktnosti
- pokud každá konečná podteorie T' teorie T má model, tak i teorie T má model
- je důsledkem Gödelovy věty o úplnosti

+ Věta o dedukci – stejná jako ve výrokové oblasti teorii

+ Věta o uzávěru
- T je množina formulí nebo teorie a φ' je uzávěr formule φ tak $T \vdash \varphi$ právě tehdy když $T \vdash \varphi'$