2. Formální systém predikátové logiky *(axiomy a odvozovací pravidla, dokazatelnost, model a důsledek teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti, prenexní tvar formulí)*

Axiomy výrokové logiky

Formální axiomatický systém Hilbertova typu tvoří abeceda (prvotní formule, logické spojky $\neg$, $\rightarrow$ a závorky) a formule. Jazyk takového formálního axiomatického systému je tvořen abecedou a formulemi. Tři axiomy výrokové logiky:

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
- $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Odvozování ve výrokové logice

Jediné odvozovací pravidlo **modus ponens (pravidlo odloučení)**, značí se MP. Z **předpokladů** $A, A \rightarrow B$ lze odvodit **závěr** B.

Formule je dokazatelná, právě když existuje její důkaz! **Důkazem** ve formální výrokové logice rozumíme libovolnou konečnou posloupnost $A_1, \ldots, A_n$ výrokových formulí takovou, že pro každé $i \leq n$ formule A_i je buď axiomem nebo je závěrem pravidla modus ponens, jehož předpoklady jsou mezi $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Řekneme, že formule A je dokazatelná ve výrokové logice, jestliže existuje důkaz, jehož poslední formulí je formule A, což zapisujeme $\vdash A$.

Věta o úplnosti říká, že každá tautologie je dokazatelná. **Postova věta o úplnosti** říká, dokazatelné formule jsou tautologiemi. Obě předchozí věty ukazujíc ekvivalenci $\vdash A \Leftrightarrow \vDash A$. **Věta o korektnosti** říká, že libovolná dokazatelná formule výrokové logiky je tautologií.

Věta o dedukci říká, že je-li T množina formulí, pak $T \vdash A \rightarrow B$ ($A \rightarrow B$ je dokazatelné pomocí T), právě když $T \cup \{A\} \vdash B$, což píšeme $T, A \vdash B$. Věta o dedukci pomáhá při procesu dokazování.

Neutrální formule neovlivňuje důkaz, platí $T, A \vdash B \wedge T, \neg A \vdash B \Rightarrow T \vdash B$.

Axiomy predikátové logiky

Jazyk L predikátové logiky přebíráme z předchozího s tím, že z logických spojek bereme jako základní $\neg$, $\rightarrow$ a jako základní kvantifikátor $\forall$. Analogicky na axiomy výrokové logiky vybudujeme tři základní axiomy predikátové logiky:

– $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))$;
- $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Nově k nim přidáme **schéma axiom kvantifikátoru**, formulemi φ, ψ a proměnnou x, která nemá v φ volný výskyt, pak:

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x \psi))$$

Dále **schéma axiomu substituce**, ve kterém je-li φ formule, x proměnná a t term substituovatelný za x do φ, pak:

$$\forall x\varphi \rightarrow \varphi_x[t]$$

Poslední schéma axiomu rovnosti platí pro predikátové logiky s rovností. Je-li x proměnná, pak $x = x$ je axiom. Jsou-li $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ proměnné a je-li f funkční symbol s četností n a p predikátový symbol s četností n, pak jsou axiomy:

- $(x_1=y_1 \rightarrow (x_2=y_2 \rightarrow (\dots (x_n=y_n \rightarrow f(x_1,\dots,x_n) = f(y_1,\dots,y_n)) \dots)))$;
- $(x_1=y_1 \rightarrow (x_2=y_2 \rightarrow (\dots (x_n=y_n \rightarrow p(x_1,\dots,x_n) = p(y_1,\dots,y_n)) \dots)))$

Odvozování v predikátové logice

Stejně jako ve výrokové logice i zde existuje pravidlo odloučení (modus ponens), kde z formulí $\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ lze odvodit ψ. Kromě něho zde existuje ještě **pravidlo zobecnění (generalizace)**, kde pro libovolnou proměnnou x z formule φ se odvodí formule $\forall x\varphi$.

Důkazem v predikátové logice 1. řádu rozumíme libovolnou posloupnost $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ formulí jazyka L, v níž pro každé i je formule φ_i buď axiom nebo ji lze odvodit z některých předchozích formulí φ_j,kde $j<i$ použitím pravidla odloučení nebo zobecnění.

Řekneme, že formule φ **je dokazatelná** v predikátové logice 1. řádu, existuje-li důkaz, jehož poslední formulí je φ, což píšeme $\vdash\varphi$. Obecněji, pokud T je množina předpokladů, ze kterých je φ dokazatelná, tak $T\vdash\varphi$.

Věta o korektnosti říká, že libovolná formule jazyka L dokazatelná v predikátové logice 1. řádu, je-li logicky platnou formulí (tj. je splněna v každé realizaci jazyka L).
Jsou-li $x_1,\dots,x_n$ volné proměnné ve formuli φ v nějakém pořadí, pak formuli $\forall x_1 \dots \forall x_n$ nazveme **uzávěrem formule** φ.

Je-li L jazyk 1. řádu a T množina formulí jazyka L, říkáme, že T je **teorie 1. řádu** s jazykem L. Říkáme, že teorie T **je sporná**, jestliže pro KAŽDOU formuli φ jazyka L platí $T\vdash\varphi$. Ve sporné teorii totiž lze $T\vdash\psi$ i $T\vdash\neg\psi$, lze dokázat formuli i její negaci. V opačném případě **je** teorie **bezesporná**.

Model a důsledek teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti

Buď L jazyk 1. řádu, pak připomeňme, že libovolnou množinu T formulí jazyka L nazýváme **teorií** 1. řádu s jazykem L. Formule z T jsou tzv. **speciální axiomy**, které spolu s axiomy predikátové logiky tvoří soustavu axiomů teorie T.

Buď T teorie s jazykem L a nechť $\mathcal{M}$ je nějaká realizace jazyka L. Říkáme, že $\mathcal{M}$ je model teorie T, jestliže pro $\forall\varphi\in T: \mathcal{M}\models\varphi$, což zapisujeme $\mathcal{M}\models T$.

Říkáme, že formule φ je **důsledkem teorie** T, jestliže pro každý model $\mathcal{M}$ teorie T je $\mathcal{M}\models\varphi$, pak píšeme $T\models\varphi$. Důsledek je formule, která je splněna v každém modelu dané teorie.

Má-li teorie T s jazykem L nějaký model, potom je bezesporná.

Gödelova věta o úplnosti říká, že teorie T je bezesporná, právě když má nějaký model.

Teorie T **je úplná**, pokud je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli platí buď $T\models\psi$ nebo $T\models\neg\psi$.

Věta o kompaktnosti říká, že když máme T množinu formulí jazyka L. Pak teorie T má nějaký model, právě když každá její podmnožina $Q\subseteq T$ má taky model.

Prenexní tvar formulí

Buď $i_1,\dots,i_n$ libovolná permutace čísel $\{1, \dots, n\}$. Nechť $x_1,\dots,x_n$ jsou proměnné a A je formule predikátové logiky. Pak platí:

– $\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\, A \leftrightarrow (\forall x_{i1}) \dots (\forall x_{in})\, A$;

- $\vdash (\exists x_1) \dots (\exists x_n)\, A \leftrightarrow (\exists x_{i1}) \dots (\exists x_{in})\, A$;

Předchozí věta složitým způsobem říká, že pořadí kvantifikátorů ve formuli lze zaměňovat, aniž by docházelo ke změně významu formule.

Věta o ekvivalenci říká, že když formule A' vznikne z formule A nahrazením některých výskytů podformulí $B_1,\dots,B_n$ po řadě formulemi $B'_1,\dots,B'_n$, pak je-li $\vdash B_i \leftrightarrow B'_i$ pro všechna $i = \{1, \dots, n\}$, pak $\vdash A \leftrightarrow A'$. Jednodušeji, nahrazením podformulí formule A jejich ekvivalentními variantami nedochází ke změně významu původní formule.

Věta o ekvivalenci nás teoreticky vybavila možností upravit formule predikátové logiky podle momentálních potřeb na ekvivalentní tvar, který dává čitelnější a přehlednější zápis nebo ve kterém je rozsah platnosti kvantifikátorů v podformulích buď minimalizován, nebo naopak ve kterém mají všechny kvantifikátory co největší rozsah. Praktickým prostředkem k takovým úpravám jsou následující ekvivalence mezi formulemi, kterým se často zkráceně říká **prenexní operace**, protože se výrazněji uplatňují při převodu formulí do tzv. **prenexní formy**.

Buď z proměnná, která není volná ve formuli A, nechť $\circ$ je některá z výrokových spojek $\wedge, \vee$ nebo $\rightarrow$, pak platí:

– $\vdash \forall z\, (A \circ B) \leftrightarrow (A \circ \forall z B)$

- $\vdash \exists z\, (A \circ B) \leftrightarrow (A \circ \exists z B)$

- pro implikaci v opačném pořadí $B \rightarrow A$:
    - $\vdash \forall z\, (B \rightarrow A) \leftrightarrow (\exists z B \rightarrow A)$
    - $\vdash \exists z\, (B \rightarrow A) \leftrightarrow (\forall z B \rightarrow A)$

Nechť A je formule predikátové logiky. Formule A_0 je **variantou** formule A, jestliže vznikne z A postupným nahrazením podformulí tvaru (QxB) podformulemi $(QyB_x[y])$, kde Q je obecný nebo existenční kvantifikátor a y je proměnná nevyskytující se v B ⇝ formule, které „vypadají“ stejně, jen se liší názvem proměnné, jsou ekvivalentními variantami téže formule $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Formule A je v **prenexní formě**, jestliže má tvar $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$, kde:

– $n \geq 0$ a pro každé $i = \{1, \dots, n\}$ je Q_i buď $\forall$, nebo $\exists$ kvantifikátor;

- $x_1,\dots,x_n$ jsou navzájem různé proměnné;

- B je otevřená formule (tj. neobsahuje kvantifikátor, všechny jsou totiž vytknuty).

Převedení formule na prenexní tvar:

1. **Vyloučení zbytečných kvantifikátorů** – Vynecháme všechny ty kvantifikátory Q s proměnnou *x* v podformulích B, pokud se nevyskytující se volně v B;
2. **Přejmenování proměnných** – Vyhledáme nejlevější podformuli QxA takovou, že proměnná *x* se vyskytuje volně v A. Pokud má *x* výskyt ještě v další formuli výchozí podformule, nahradíme QxA její variantou $Qx'A'$, kde x' je různá od všech jiných proměnných vyskytujících se v převáděné formuli. Tento proces opakujeme do doby, dokud se substitucemi v původní formuli nevyskytují samé unikátní proměnné;
3. **Eliminace ekvivalence** – provedeme podle předpisu: $A \leftrightarrow B \Rrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;
4. **Přesun negace dovnitř** – provádíme postupně náhrady podformulí podle schématu, tak dlouho, dokud se spojka negace nevyskytne bezprostředně před atomickými formulemi:

$$\urcorner (\forall xA) \Leftrightarrow \exists x \urcorner A$$

$$\urcorner (\exists xA) \Leftrightarrow \forall x \urcorner A$$

$$\urcorner (A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \urcorner B$$

$$\urcorner (A \vee B) \Leftrightarrow \urcorner A \wedge \urcorner B$$

$$\urcorner (A \wedge B) \Leftrightarrow \urcorner A \vee \urcorner B$$

$$\urcorner (\urcorner A) \Leftrightarrow A$$

5. **Přesun kvantifikátorů doleva** – pro B, ve kterém se nevyskytuje proměnná *x*, provádíme náhrady podle schématu, ve kterém je Q opačný ku kvantifikátoru Q:

$$(QxA) \vee B \Leftrightarrow Qx\ (A \vee B)$$

$$(QxA) \wedge B \Leftrightarrow Qx\ (A \wedge B)$$

$$(QxA) \rightarrow B \Leftrightarrow Qx\ (A \rightarrow B)$$

$$B \rightarrow (QxA) \Leftrightarrow Qx\ (B \rightarrow A)$$

Prenexní forma pro danou formuli není jednoznačná!

Na závěr příklad pro $\forall y\ (\ \exists xP\ (x,y) \rightarrow \exists uR\ (y,u)\ ) \rightarrow \forall xS\ (x,y)$:

1. se neuplatní, žádné zbytečné proměnné nejsou;
2. dojde ke dvěma substitucím:
   - $\forall y\ (\ \exists x'P(x',y) \rightarrow \exists uR\ (y,u)\ ) \rightarrow \forall xS\ (x,y)$
   - $\forall y'(\ \exists x'P(x',y') \rightarrow \exists uR\ (y',u)\ ) \rightarrow \forall xS\ (x,y)$
3. se neuplatní, neb formule neobsahuje ekvivalenci;
4. se neuplatní, neb formule neobsahuje negaci, kterou by bylo potřeba zanořit;
5. proběhne v několika krocích:
   - $\forall x\ (\ \forall y'\ (\exists x'P(x',y') \rightarrow \exists uR(y',u)) \rightarrow S(x,y)\ )$
   - $\forall x \forall y'\ (\ (\exists x'P(x',y') \rightarrow \exists uR(y',u)\ ) \rightarrow S\ (x,y)\ )$
   - $\forall x \forall y'\ (\ \forall x'\ (P(x',y') \rightarrow \exists uR(y',u)\ ) \rightarrow S\ (x,y)\ )$
   - $\forall x \forall y' \exists x'\ (\ (P(x',y') \rightarrow \exists uR(y',u)\ ) \rightarrow S\ (x,y)\ )$
   - $\forall x \forall y' \exists x'\ (\exists u\ (P(x',y') \rightarrow R(y',u)\ ) \rightarrow S\ (x,y)\ )$
   - $\forall x \forall y' \exists x' \forall u\ (\ (P(x',y') \rightarrow R(y',u)\ ) \rightarrow S\ (x,y)\ )$