Dokažte, že $L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$

Důkaz sporem:

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_2$.
- Dle P.L. platí, že $\exists k > 0 : \forall z \in L : |z| \geq k \Rightarrow$

  $\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$
- Uvažme všechny volby $k > 0$ a zvolíme $z = a^k b^k a^k \in L$ a $|a^k b^k a^k| = 3k \geq k$.
- Tedy musí existovat u, v, w, x, y s výše uvedenými vlastnostmi pro $z = a^k b^k a^k$.
- Uvažme všechny možné volby u, v, w, x, y, které splňují výše uvedené a dále je analyzujme:

  1. Uvažme ty volby, ve kterých se buď v x nebo ve v (případně ve v i x) vyskytuje jak "a" tak "b". Pak ale pro $i > 2$ v řetězci uv^iwx^iy vznikne více alternací mezi sekvencemi "a" a "b" než je povoleno def. L. Což je spor.
  2. Uvažme ty volby, ve kterých jak v tak x jsou

~~[illegible]~~ tvořeny pouze znaky "a" nebo pouze znaky "b". Pro $i \geq 2$ dojde k navýšení pouze počtu jednoho ze symbolů a poruší se požadavek na stejnou délku prefixu, vnitřní části a sufixu. Což je spor.

3. Uvažme možnost volby "x" části ze symbolů "a" a "v" ze symbolů "b". V tomto případě ale pro $i=2$ dojde k neshodě délky prefixu a sufixu a řetězce $uv^2wx^2y \notin L$. Což je spor

4. Poslední možností je volba "v" části ze symbolů "a" a volba "x" části ze symbolů "b". Zde ale opět není možné pro $i=2$ zůstat v jazyce podobně jako v bodě 3. Spor.

Dle P.L. lze vybrat u, v, w, x, y tak, že $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$.
Výše jsme ale ukázali, že pro všechny volby u, v, w, x, y, které splní požadavky $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$, $|vwx| \leq k$, dojde pro $i=2$ k tomu, že $uv^2wx^2y \notin L$. Spor.

Substituce a morfismy bezk. jazyků

- Předp., že máme abecedu $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$
- mějme jazyk $L \subseteq \Sigma^*$
- Mějme dále pro $\forall 1 \le i \le n$ jazyk $L_{a_i} \subseteq \Sigma_{a_i}^*$
- Operace substituce $\sigma_{L_{a_1}, \dots, L_{a_n}}(L)$ je definována takto:

$$\sigma_{L_{a_1} \dots L_{a_n}}(L) = \{ x_1 \dots x_m \mid \exists b_1 \dots b_m \in L . \forall 1 \le i \le m : x_i \in L_{b_i} \}$$

- Např. pro $L = \{0^n 1^n \mid n \ge 1\}$, $L_0 = \{a\}$, $L_1 = \{b^m c^m \mid m \ge 1\}$

dostaneme $\sigma_{L_0, L_1}(L) = \{ a^n b^{m_1} \hat{c}^{m_1} b^{m_2} \hat{c}^{m_2} \dots b^{m_n} \hat{c}^{m_n} \mid n \ge 1 \wedge \forall 1 \le i \le n : m_i \ge 1 \}$

- Platí, že $\mathcal{L}_2$ je uzavřena vůči subst. jazyků z $\mathcal{L}_2$.

Důkaz (idea)
- $L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists$ bezk. gr. G taková, že $L(G) = L$
- $\forall 1 \le i \le n : L_{a_i} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists$ bezk. gr. G_{a_i} taková, že $L(G_{a_i}) = L_{a_i}$
- Předp., že G_{a_i} má startovací symbol S_{a_i} a

bez újmy na obecnosti můžeme předp., že mn-y neterminálů všech zúčastněných gr. jsou po dvou disjunktní

- Gr. jazyka $\sigma_{La_1 \ldots La_n}(L)$ lze získat tak, že v gr. G nahradíme na pravé straně každého pravidla každý terminál $a \in \Sigma$ za neterminál S_a a příslušná pravidla gramatik $G_{a_1} \ldots G_{a_n}$.

- Např. pro výše uvedené jazyky dostaneme:

$L: \quad G = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \to 0S1 \mid 01\}, S)$

$L_0 = \{a\}: \quad G_0 = (\{S_0\}, \{a\}, \{S_0 \to a\}, S_0)$

$L_1 = \{b^n c^n \mid n \geq 1\}: \quad G_1 = (\{S_1\}, \{b,c\}, \{S_1 \to bS_1c \mid bc\}, S_1)$

$\sigma_{L_0,L_1}(L) = L(G')$, kde $G' = (\{S, S_0, S_1\}, \{a,b,c\},$
$\{S \to S_0SS_1 \mid S_0S_1,\ S_0 \to a,\ S_1 \to bS_1c \mid bc\}, S)$.

- Nechť Σ a Δ jsou abecedy.
  Zobrazení $h: \Sigma^* \to \Delta^*$ nazveme morfismem, jestliže
  $\forall a_1 \dots a_n \in \Sigma^*: h(a_1 \dots a_n) = h(a_1) \dots h(a_n)$
- Pro morfismus h definujeme:
  - morfismus jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ jako $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$
  - inverzní morfismus jazyka $L \subseteq \Delta^*$ definujeme jako
    $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L\}$

- $\mathcal{L}_2$ je uzavřeno vůči morfismu i vůči inv. morfismu.
- Uzavřenost vůči morfismu plyne z uzavření vůči substituci, neboť $h(L) = \sigma_{L_{a_1} \dots L_{a_n}}(L)$, kde $\forall 1 \le i \le n:$
  $L_{a_i} = \{h(a_i)\}$

- Uzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči inv. morfismu lze ukázat následovně.
  - Mějme abecedy Σ a Δ a morfismus $h: \Sigma^* \to \Delta^*$.
  - Mějme dále jazyk $L \subseteq \Delta^*$, přičemž $L \in \mathcal{L}_2$.
  - Platí, že

$h^{-1}(L) = h_1(\sigma(L) \cap L_1^*)$, kde

- σ je substituce definovaná tak, že
  $\forall a \in \Delta : L_a = (\overline{\Sigma})^* a (\overline{\Sigma})^*$, kde
  $\overline{\Sigma} = \{ \overline{b} \mid b \in \Sigma \}$ za předp., že $\overline{\Sigma} \cap \Sigma = \overline{\Sigma} \cap \Delta = \emptyset$,
  což je bez újmy na obecnosti.
- $L_1 = \{ \overline{a} w \mid a \in \Sigma, w \in \Delta^*, h(a) = w \} \in \mathcal{L}_3$
  a tedy $L_1^* \in \mathcal{L}_3$
- $h_1 : (\overline{\Sigma} \cup \Delta)^* \to \Sigma^*$ je definován tak, že
  $\forall a \in \Sigma : h(\overline{a}) = a$
  a $\forall b \in \Delta : h(b) = \varepsilon$
- Přitom $\mathcal{L}_2$ jsou uzavřeny vůči $\cap$ s $\mathcal{L}_3$ a současně $\mathcal{L}_2$ je uzavřeno vůči σ a h_1. Tedy $\mathcal{L}_2$ je uzavřeno i vůči h^{-1}.

$\square$

- Příklad. Mějme $\Sigma = \Delta = \{a, b\}$,
  $h : a \mapsto ab, \; b \mapsto ba$ a
  $L = (ab)^* (ba)^*$.

Sestavte $h^{-1}(L)$ v souladu s výše uvedeným důkazem.

- σ : $L_a = \{\bar{a}, \bar{b}\}^* a \{\bar{a}, \bar{b}\}^*$, $\bar{\Sigma} = \{\bar{a}, \bar{b}\}$

  $L_b = \{\bar{a}, \bar{b}\}^* b \{\bar{a}, \bar{b}\}^*$

- $\sigma(L) = (\{\bar{a}, \bar{b}\}^* a \{\bar{a}, \bar{b}\}^* b \{\bar{a}, \bar{b}\}^*)^* (\{\bar{a}, \bar{b}\}^* b \{\bar{a}, \bar{b}\}^* a \{\bar{a}, \bar{b}\}^*)^*$

- $L_1^* = \{\bar{a}ab, \bar{b}ba\}^*$

- $\sigma(L) \cap L_1^* = (\bar{a}ab)^* (\bar{b}ba)^*$

- h_1 : $\bar{a} \mapsto a$, $\bar{b} \to b$

  $a \mapsto \varepsilon$, $b \to \varepsilon$

- $h_1(\sigma(L) \cap L_1^*) = a^* b^*$

$\Sigma = \{0, 1\}$ $\Delta = \{a, b\}$

$h(0) = aab$ $h(1) = bba$

cílový řetězec $\bar{0}a\cancel{a}b\,|\bar{1}\cancel{bba}\,|\bar{0}\cancel{aab}$

$0 \quad 1 \quad 0$

$\underbrace{\bar{0}\,\bar{0}}_{\{\bar{0},\bar{1}\}^*}\,a\bar{1}a\bar{1}\bar{1}b \; b \; b \; a \; a \; a \; b$

$C \mapsto abba$ | $\bar{c}\,abba$

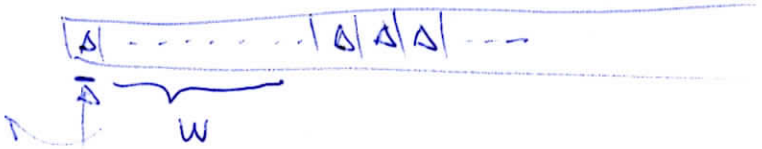
ab | $\bar{a}\,ab\,\bar{b}\,ba$

c

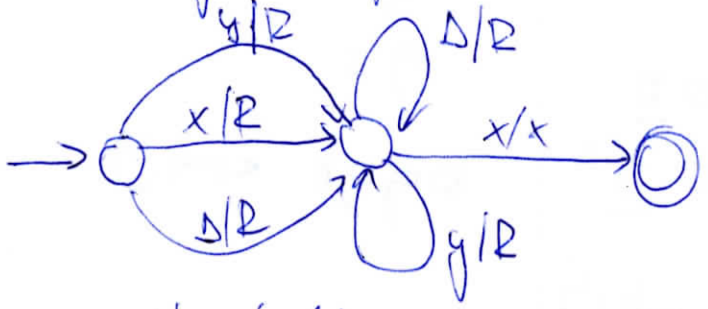
Turingovy stroje

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$$

$$\delta : (Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \longrightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\});\ L, R \notin \Gamma$$



- přechodový diagram – např.:



posun doprava na první x vpravo od aktuální pozice (Rx)

- kompozitní diagram TS
  - standardní komponenty TS: $x, Rx, Lx, R\neg x, L\neg x$
    $x \in \Gamma$

    S_R, S_L

- kompozice $\to A \to B \to C$ ($\to ABC$)
- podmíněná kompozice: $A \xrightarrow{x} B$ / $A \xrightarrow{\neg x} B$ / $A \xrightarrow{x} B$, $A \xrightarrow{y} C$

- makra: $A \xrightarrow{x,y,z} \} \xrightarrow{\omega} B \cdots \xrightarrow{\omega}$

- nedeterminismus: $A \xrightarrow{x}$, $A \xrightarrow{x}$ | A x,y / x,z

- vícepáskovost: indexy u symbolů a komponent:

R_x^{1}, R_x^{10}, y^5

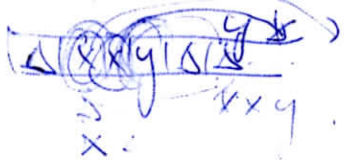
U $A \xrightarrow{x} B$, pokud A nemůže přes x předat řízení B, pak komponentní stroj $A \xrightarrow{x} B$ přijme. (zastaví NORMÁLNĚ!)

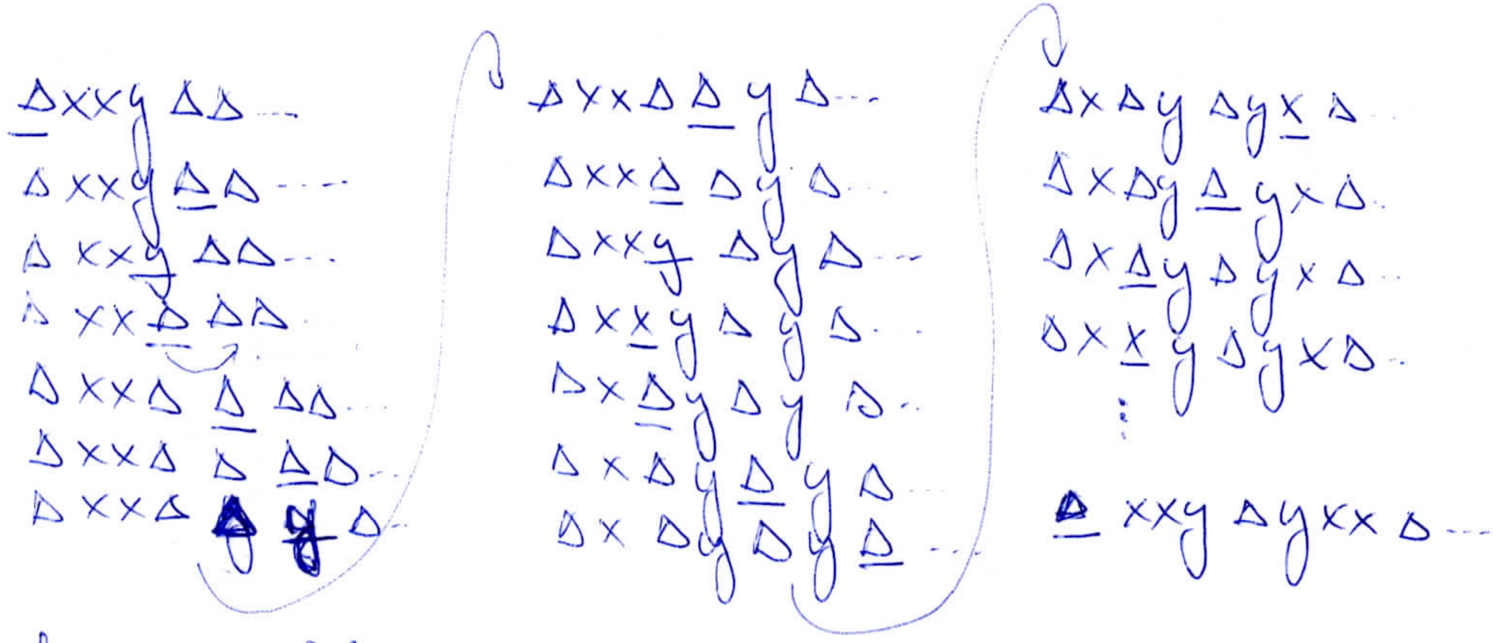
- Jaký je rozdíl mezi TS (a) $\rightarrow R_L$ a (b) $\rightarrow L_R$?

Narozdíl od $\rightarrow R_L$ stroj $\rightarrow L_R$ může zastavit abnormálně.

- Sestavte TS nad $\Sigma = \{x,y\}$, který změní páskovou konfiguraci $\Delta w \Delta^\omega$ na $\Delta w \Delta w^R \Delta^\omega$ pro libovolné $w \in \Sigma^\#$.

$\rightarrow R_\Delta L \xrightarrow{x,y} z \xrightarrow{w} \Delta R_z R_\Delta w L_\Delta L_\Delta w$



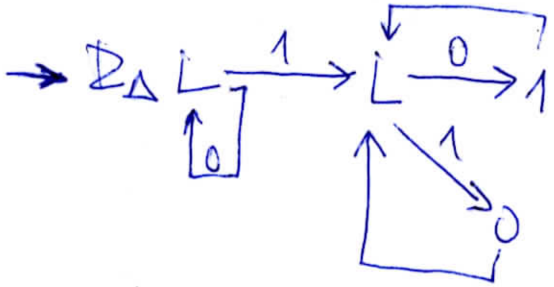


- Sestavte TS, který převede celé číslo x zapsané binárně v doplňkovém kódu na daném poli bitů na −x.

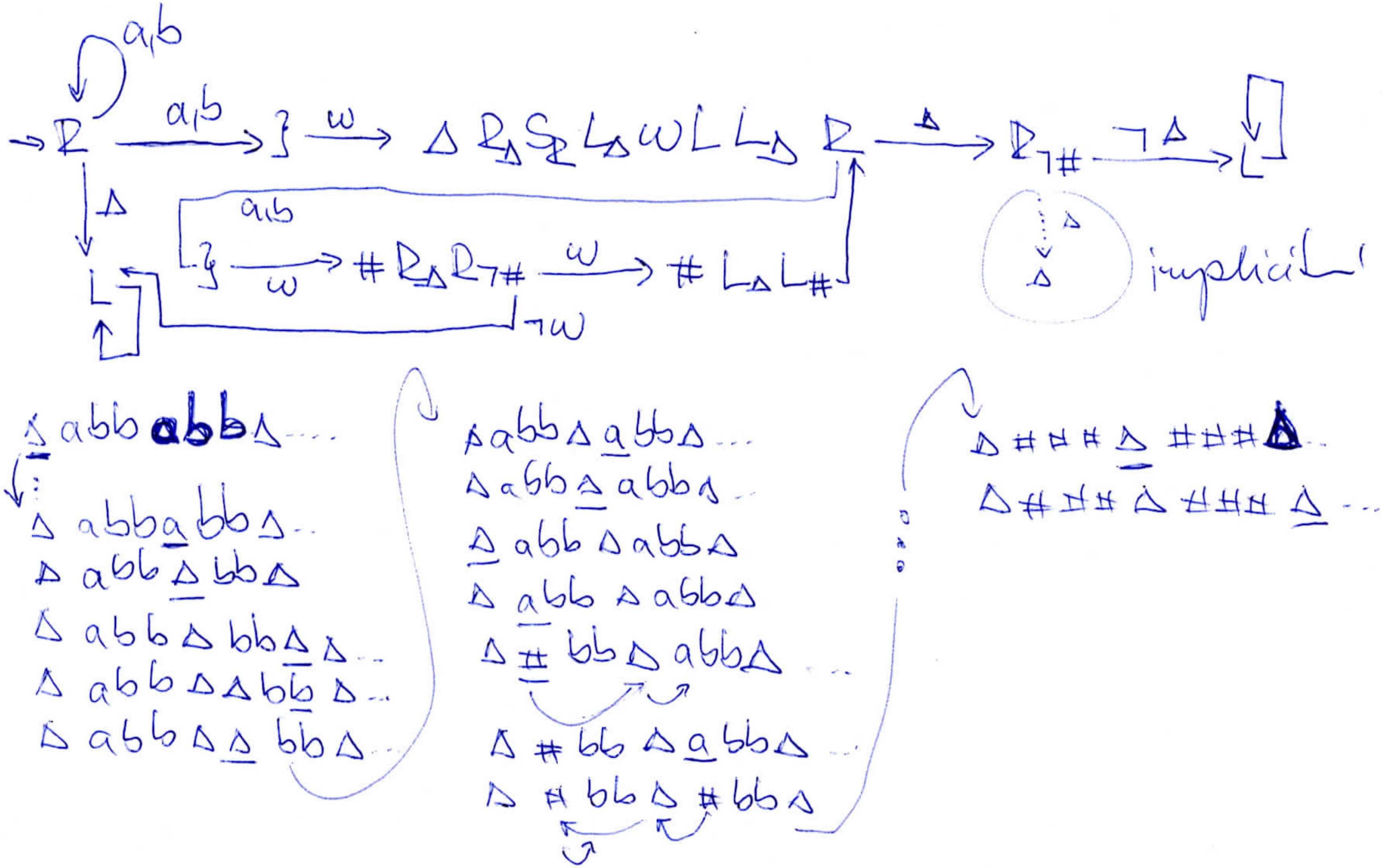
Např. Δ 00110100 (52)

11001011 + 1

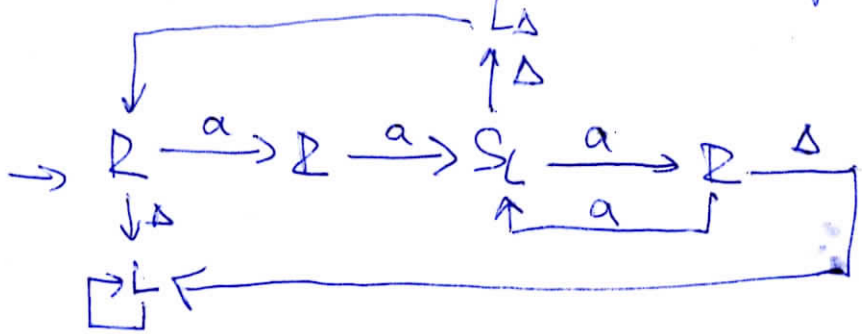
Δ 11001100 (−52)



— Sestavte (N)TS, který může normálně zastavit tehdy a jen tehdy, když má vstupní konfiguraci pásky tvar $\underline{\Delta} w w \Delta^{\omega}$ pro $w \in \{a,b\}^{+}$.



- Sestavte TS, který přijímá jazyk $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$



$\underline{\Delta}\, a^1 a^2 a^3 a^4\, \Delta \ldots$

$\Delta\, \underline{a^1} a^2 a^3 a^4\, \Delta \ldots$

$\Delta\, a^1 \underline{a^2} a^3 a^4\, \Delta \ldots$

$\Delta\, a^1 \underline{a^3} a^4\, \Delta \Delta \ldots$

$\Delta\, a^1 a^3 \underline{a^4}\, \Delta \ldots$

$\Delta\, a^1 a^3\, \underline{\Delta}\, \Delta \ldots$

$\underline{\Delta}\, a^1 a^3\, \underline{\Delta}$

$\Delta\, \underline{a^1} a^3\, \Delta$

$\Delta\, a^1 \underline{a^3}\, \Delta$

$\Delta\, a^1\, \underline{\Delta}\, \Delta$

$\underline{\Delta}\, a^1\, \Delta \Delta$

$\Delta\, \underline{a^1}\, \Delta$

$\Delta\, a^1\, \underline{\Delta}$ ✓