7. METRICKÉ PROSTORY

Metrické prostory

- metrický prostor je matematická struktura pomocí které lze formálně definovat pojem vzdálenost
- (X,ρ) kde X je nosná neprázdná množina
  kde ρ je metrika – jinými slovy ta vzdálenost
- ρ je funkce, tedy zobrazení dvou prvků z X na množinu kladných reálných čísel s nulou

$$\boxed{\rho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+}$$

kde toto zobrazení ρ je definované $\forall a,b \in X$

tedy $\forall a,b \in X\ \exists c \in \mathbb{R}_0^+ : \rho(a,b) = c$

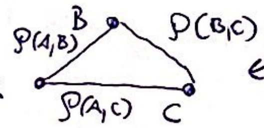
Axiomy metrického prostoru (platí $\forall a,b,c \in X$)

A4) máme dané, že $\rho(a,b) \geq 0$ (nesmí být záporné)

A1) $\rho(a,b) = 0 \iff a = b$ – axiom totožnosti → toto je možná také axiom A4)

A2) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ – axiom symetrie

A3) $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(b,c)$ – trojúhelníková nerovnost



← pro tohle to $<$
– u rovnostranného trojúhelníka $=$

← pro tohle to je $=$

Příklady metrických prostorů

- **Diskrétní metrický prostor** (prostor izolovaných bodů)
  X je neprázdná množina
  $$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

- **Metrický prostor na množině reálných čísel** – je dokonce úplný
  X je $\mathbb{R}$ – jednorozměrný
  $\rho(x,y) = |x - y|$ tedy absolutní hodnota

- **Vícerozměrný (Euklidovský) prostor na množině reálných čísel**
  X je $\mathbb{R}^n$
  $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ tedy pro $\mathbb{R}^2$ $\rho(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
  kde $X[x_1,x_2]$ a $Y[y_1,y_2]$

Otevřená koule (ε okolí)

– máme metrický prostor X s funkcí vzdálenosti

– otevřená koule je zde $S(x_0, r)$ kde $x_0 \in X$ a je to střed té koule a r je poloměr

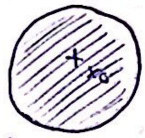
– otevřená koule je množina všech bodů $x \in X$ která splňují podmínce

$$\rho(x, x_0) < r$$

Uzavřená koule

– stejné jako otevřená ale

$$\rho(x, x_0) \le r$$



$\Longrightarrow$ otevřená koule je ε okolí bodu x_0 a značíme $O_\varepsilon(x_0)$

Úplný metrický prostor

– je metrický prostor (X, ρ) v němž každá Cauchyovská posloupnost konverguje

- Cauchyovská posloupnost (Košiovská posloupnost)

– členy posloupnosti se od určitého indexu k sobě blíží na libovolně malou vzdálenost

– jinými slovy pro každou vzdálenost $\varepsilon > 0$ existuje jistý index od něhož jsou další body (na vyšších indexech) k sobě blíž než na vzdálenost ε – tedy jejich vzdálenost je menší než ε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall m, n \in N; n > n_0 \wedge m > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

kde x_i jsou z X

nebo také → $N(\varepsilon)$ je ten index od kterého to platí pro danou vzdálenost ε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z} : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \ge N(\varepsilon)$$

mně se ale nejvíce líbí zápis:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z} : (n > n_0 \wedge m > n_0) \rightarrow (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

kde $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ a $\forall x \in X$

– pokud chceme nějaký úplný metrický prostor tak v něm musí platit že v něm každá jeho Cauchyovská posloupnost konverguje

– je potřeba tedy najít všechny Cauchyovské posloupnosti a ověřit jejich konvergenci

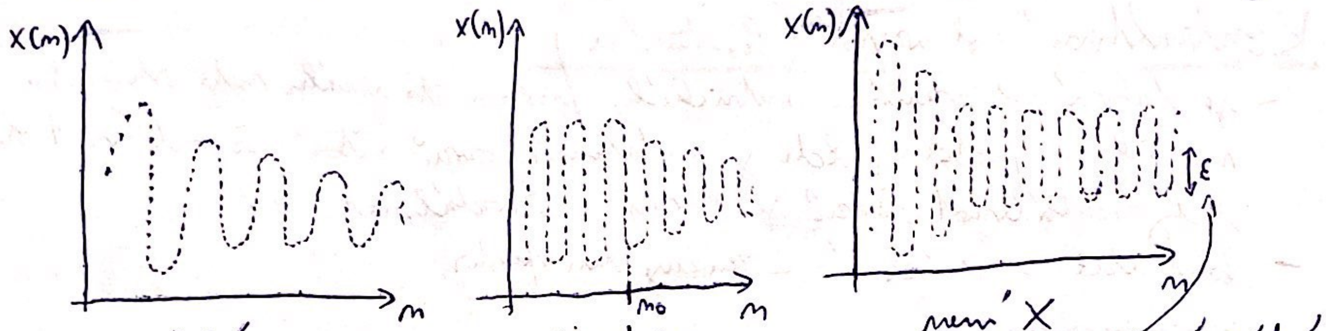
– každá konvergující posloupnost je Cauchyovská ale ne každá Cauchyovská posloupnost konverguje

– v prostoru izolovaných bodů tedy v diskrétním metrickém prostoru musí platit že se od určitého indexu bude opakovat stále jeden bod – pro jakékoliv $\varepsilon > 0$

– například máme posloupnost bodů:

ABBADCDDDDDDD....

– od indexu 7 platí pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ že je vzdálenost bodu x_m a x_n kde m i $n > 7$ menší než ε: protože ta vzdálenost tam bude vždy 0



je ✓ | je od n_0 ✓ | není X – například pro ε není žádný index n_0 $(N(\varepsilon))$ od kterého by byly body k sobě blíž než ε

– $\frac{1}{n}$ je Cauchyovská posloupnost

– $2n$ není

– $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je Cauchyovská posloupnost jak na racionálních číslech tak na reálných číslech (na racionálních nekonverguje)

• Konvergence posloupnosti

– posloupnost $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v metrickém prostoru konverguje jestliže se limitně blíží k nějakému bodu X
– od určitého indexu se další prvky přibližují tomuto bodu X
– limita této posloupnosti v nekonečnu je X

$$\lim_{n\to\infty}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X$$ kde x jsou jednotlivé prvky té posloupnosti

– např.: $\frac{1}{n}$ v racionálních číslech ($\mathbb{Q}$) je Cauchyovská posloupnost a je i konvergentní protože $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

– pokud by $\mathbb{Q}$ mělo jen tuto posloupnost a ne žádnou jinou Cauch. posloupnost, která by nekonvergovala, tak by $\mathbb{Q}$ byl úplný metrický prostor

– např.: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je v $\mathbb{Q}$ Cauchyovská posloupnost

kde $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ – eulerovo číslo

ale $e \notin \mathbb{Q}$ a tedy nekonverguje!

– posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu X jestliže limita je následující

Toto je důležité na konvergenci: $\lim_{n \to \infty} \rho(X, x_n) = 0$ → prvek té posloupnosti v nekonečnu

$\Longrightarrow$ jestliže poslední prvek té nekonečné posloupnosti je tedy ten prvek X (jejich vzdálenost je 0)

Kontraktivní zobrazení (kontrakce)

- je takové zobrazení z metrického prostoru do jiného nebo stejného metrického prostoru, kde je vzdálenost vzorů větší než vzdálenost obrazů tedy vzdálenost obrazů je menší než vzdálenost vzorů
- kontrakce = zúžení – zúžuje ten prostor

- (A, a) a (B, b) jsou metrické prostory kde a a b jsou funkce vzdálenosti
- zobrazení je $f: A \to B$ a existuje číslo $\alpha \in (0,1)$ kde

$$\forall x, y \in A: \ b(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot a(x, y)$$

tak f je kontrakce.

! – každé kontraktivní zobrazení je spojité

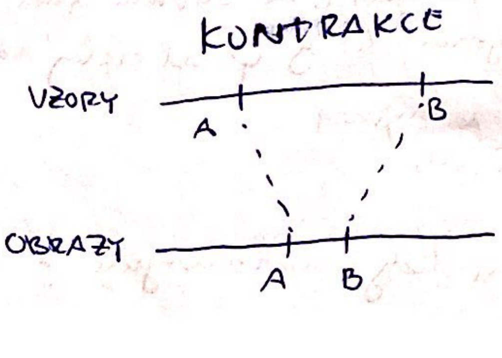
Spojité zobrazení

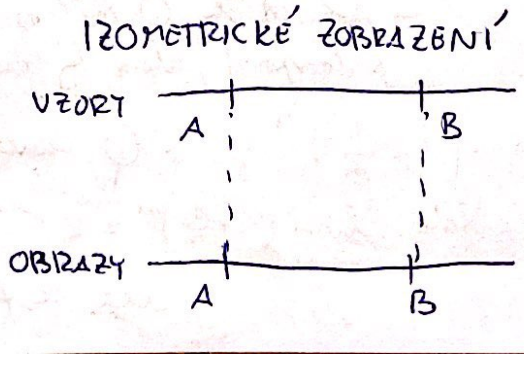
– pokud jsou vzory dostatečně blízko $\rho(x,y) < \varepsilon$ tak i obrazy musí být dostatečně blízko $\sigma(f(x), f(y)) < \delta$

- Spojité zobrazení v bodě $x_0 \in X$
  - jestliže mají dva body nenulovou vzdálenost, tak i zobrazení těchto bodů má nenulovou vzdálenost
- Spojité zobrazení
  - zobrazení je spojité ve všech bodech x_0

Izometrické zobrazení

– vzdálenost bodů vzorů je stejná jako vzdálenost bodů obrazů × kontrakce





Spojité zobrazení X Izometrické zobrazení

z (M_1,ρ_1) do (M_2,ρ_2)
pro $\forall x_0 \in M_1$ a pro každé ε existuje δ taková že $\forall x \in M_1$:
$\rho_1(x,x_0) < \varepsilon$ pak platí $\rho_2(f(x),f(x_0)) < \delta$

— lépe
$\forall a,b \in M_1$ a $\forall \varepsilon \, \exists \delta$:
$\rho_1(a,b) < \varepsilon$ tak $\rho_2(f(a),f(b)) < \delta$

z (M_1,ρ_1) do (M_2,ρ_2)
$\forall x,y \in M_1$:
$\rho_2(f(x),f(y)) = \rho_1(x,y)$
— zachovává vzdálenost

X Kontrakce

z (M_1,ρ_1) do (M_2,ρ_2)
$\forall x,y \in M_1$ existuje $\alpha \in (0,1)$:
$\rho_2(f(x),f(y)) \le \alpha \cdot \rho_1(x,y)$
— zmenšuje vzdálenost

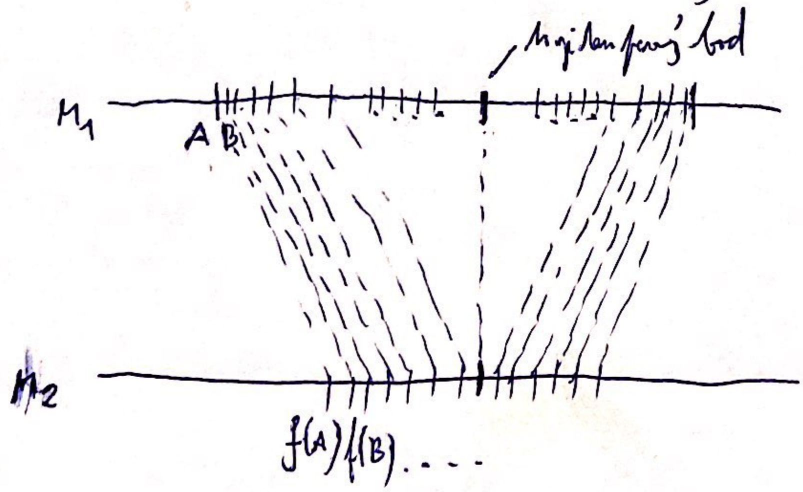
Pevný bod

— pevný bod se v daném zobrazení zobrazuje sám na sebe
$f: M \to M$ pak $x^{\in M}$ kde platí že $f(x) = x$ je pevný bod
— př.: máme zobrazení $f(x) = x^2 - 4x + 6$
kde jsou pevné body 2 a 3 $f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 6 = 2$
— pevný bod je tedy vlastnost vzhledem k zobrazení

Banachova věta o pevném bodě

— v neprázdném úplném (všechny Cauchyho posloupnosti jsou konvergentní) metrickém prostoru má kontrakce (stahující/zužující/kontraktivní zobrazení) právě jeden pevný bod

!



f – kontrakce