1.Jazyk a sémantika predikátové logiky (termy, formule, realizace jazyka, pravdivost formulí)

Základy logiky

Logikou rozumíme analýzu usuzovacích metod a zkoumání matematických důkazů.

Zobrazení $f:X\to Y$ je relace $f\subseteq X\times Y$:

- $\forall x\in X:\exists y\in Y, y=f\;x$ $\leftrightsquigarrow$ každému x je tedy přiřazeno nějaké y;
- $\forall x\in X, \forall y,z\in Y: y=f\;x \wedge z=f\;x \Rightarrow y=z$ $\leftrightsquigarrow$ zobrazení z X do Y je jednoznačné;

Axiomy jsou výchozí tvrzení dané teorie, nedokazují se, jejich platnost se předpokládá. Z axiomů se dedukcí odvozují další tvrzení, tzv. **důsledky**. Základním požadavkem je **bezespornost** – důsledkem axiomu nesmí být nějaké tvrzení a současně jeho negace. Vedlejším požadavkem je **nezávislost** axiomů, tzn., že žádný axiom není důsledkem zbývajících axiomů.

Matematická tvrzení se zapíší pomocí speciálních znaků – **symbolů** (tvoří abecedu dané teorie). Tvrzení dostanou podobu zvláštních **formulí** – slov sestavených určitým způsobem z daných symbolů (tvoří jazyk teorie). Axiomy jsou zapsány jako formule, které chápeme jako vždy pravdivé. **Odvozovací pravidla** jsou jisté manipulace s formulemi, pomocí nichž a axiomů odvozujeme důsledky.

Výroková logika

Výroková logika zkoumá způsoby tvorby složených výroků z daných jednoduchých výroků, závislost pravdivosti (resp. nepravdivosti) složeného výroku na pravdivosti výroků, z nichž je složen.
Buď P neprázdná množina symbolů, které nazýváme **prvotní formule**, zpravidla značíme např. písmeny p, q. Tyto hrají úlohu jednoduchých výroků. **Složené výroky** vytváříme z jednoduchých pomocí logických spojek: $\neg$ negace,$\wedge$ nebo & konjunkce, $\vee$disjunkce,$\to$ nebo $\Rightarrow$ implikace, $\equiv$ nebo$\Leftrightarrow$nebo$\leftrightarrow$ ekvivalence.
Symboly jazyka L_P výrokové logiky (nad množinou P) jsou prvky množiny P, logické spojky a závorky (a). Úlohu složených výroků hrají výrokové formule jazyka L_P, definované následovně:

1. $\forall p\in P$ je výroková formule;
2. Jsou-li A a B výrokové formule, pak $\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\to B$,$(A\equiv B)$ jsou výrokové formule;
3. Každá výroková formule vznikne konečným počtem užití pravidel (1) a (2).

Pravdivostní ohodnocení prvotních formulí je libovolné zobrazení $v:P\to\{0,1\}$, tj. zobrazení, které každé prvotní formuli $p\in P$ přiřadí hodnotu 0 (tj. nepravda) nebo 1 (pravda).

Pravdivostní ohodnocení základních složených výrokových formulí je dáno tabulkou:

$v\ (A)$	$v\ (B)$	$v\ (\neg A)$	$v\ (A \wedge B)$	$v\ (A \vee B)$	$v\ (A \rightarrow B)$	$v\ (A \equiv B)$	$v\ (A \mid B)$	$v\ (A \downarrow B)$
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0

Říkáme, že výroková formule A je **tautologie**, jestliže $v\ (A) = 1$ pro libovolné ohodnocení A. Jinak řečeno A je pravdivá vždycky, bez ohledu na ohodnocení případných jednotlivých prvotních formulí, ze kterých se skládá, což píšeme $\models A$. Následující výrokové formule jsou tautologiemi:

- $\models (A \vee \neg A)$, což je **zákon vyloučení třetího**;
- $\models (\neg \neg A \equiv A)$, což je **zákon dvojí negace**;
- $\models \neg (A \wedge \neg A)$, což je **vyloučení sporu**.

Říkáme, že výrokové formule A a B jsou **logicky ekvivalentní**, právě když $v\ (A) = v\ (B)$, což znamená $A \equiv B$. Následující formule jsou ekvivalentní:

$$A \equiv B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$
$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$
$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$$
$$A \vee B \Leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$$
$$A \vee B \Leftrightarrow \neg (A \rightarrow B)$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$$

Predikátová logika

Pro označení libovolného prvku z daného oboru používáme **proměnné** (např. *x, y, z, …*). Mezi prvky z daného oboru mohou být nějaké význačné objekty (0, 1, neutrální prvek), pro něž zavádíme speciální symboly zvané **konstanty**.

K označení operací užíváme **funkcí symboly** (např. *f, g, h, …*). Matematika zkoumá vlastnosti objektů a vztahy mezi nimi. Vlastnosti a vztahy mezi objekty daného oboru, tzv. **predikáty**, (*„být záporným číslem“, „být menším než“, „být prvkem“*) vyjadřujeme pomocí **predikátových symbolů** (např. *p, q, r, …*). Predikát znamená vztah mezi užitým počtem objektů, tedy je příkladem relace. Tím je každému predikátovému symbolu přiřazeno přirozené číslo, jeho četnost, udávající počet jeho argumentů. Je-li četnost rovna *n*, říkáme, že symbol je *n*-ární.

Z uvedených symbolů sestavujeme jistým způsobem nejjednodušších tvrzení, vyjádřených tzv. **atomickými formulemi**. Z nich vytváříme složitější formule pomocí logických spojek (stejných jako ve výrokové logice) a pomocí následujících **kvantifikátorů proměnných**:

- **univerzální (obecný) kvantifikátor** $\forall$ vyjadřuje platnost pro všechny objekty daného oboru;
- **existenční kvantifikátor** $\exists$ vyjadřuje existenci požadovaného prvku v daném oboru.

Abecedu predikátové logiky 1. řádu tak tvoří tedy funkční, predikátové a pomocné symboly, proměnné, konstanty, logické spojky a nově i kvantifikátory.

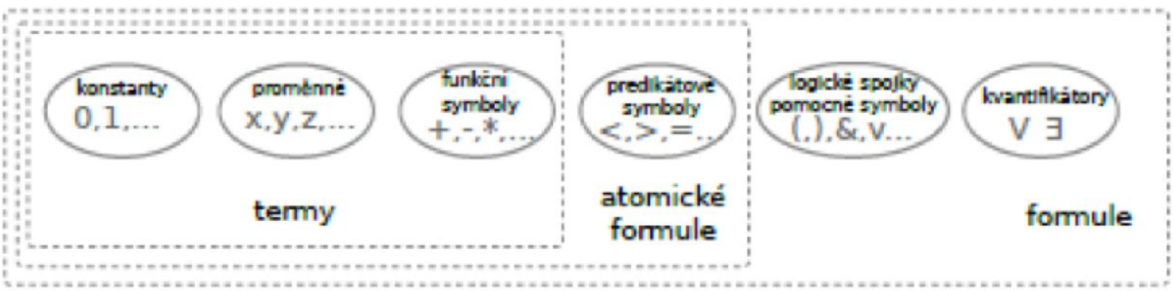
Jazyk predikátové logiky 1. řádu je tedy tvořen:
- **logickými symboly** (proměnné, logické spojky, kvantifikátory, závorky, predikát rovnosti =);
- **speciálními symboly** (funkční symboly s $\mathbb{N}_0^+$-ární četností a predikátové symboly $\mathbb{N}^+$-ární četností).

Termy jsou rekurentně definovány následujícími pravidly:
1. Každá proměnná je term;
2. Je-li f funkční symbol četnosti n a jsou-li $t_1,\ldots,t_n$ termy, pak $f(t_1,\ldots,t_n)$ je term;
3. Každý term vznikne konečným užitím pravidel (1) a (2).

Je-li p predikátový symbol četnosti n a jsou-li $t_1,\ldots,t_n$ termy, pak $p(t_1,\ldots,t_n)$ nazýváme **atomickou (elementární) formulí**.

Formule je rekurentně definována následujícími pravidly:

1. Každá atomická formule je formule;
2. Jsou-li φ,ψ formule, pak také $\urcorner\varphi$,$(\varphi\wedge\psi)$,$(\varphi\vee\psi)$,$(\varphi\rightarrow\psi)$,$(\varphi\equiv\psi)$ jsou formule;
3. Je-li x proměnná a φ formule, pak také $\forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou formule;
4. Každá formule vznikne konečným užitím pravidel (1), (2) a (3).



Řekneme, že daný **výskyt** proměnné x ve formuli φ **je vázaný**, nachází-li se v nějaké podformuli tvaru $\forall x\varphi$ nebo $\exists x\varphi$, opačném případě se jedná o **volný výskyt**. V těchto souvislostech hovoříváme o x jako o **vázané/volné proměnné**. Formule neobsahující žádnou volnou proměnnou se nazývá **uzavřená formule** nebo též **výrok**.

Sémantika predikátové logiky

Chceme dát interpretaci symbolům jazyka predikátové logiky 1. řádu. Nejprve vymezíme obor, který bude určovat možné hodnoty proměnných, bude to určitý soubor M uvažovaných objektů. Funkčním symbolům budou odpovídat operace na M příslušných četností. Predikátovým symbolům budou odpovídat vztahy mezi objekty z M, které lze popsat jako relace na M s patřičnou aritou. Máme-li jazyk s rovností, interpretujeme symbol = jako rovnost objektů z M.

Nechť L je jazyk 1. řádu, pak **realizací jazyka** L rozumíme algebraickou strukturu $\mathcal{M}$, která se skládá z:

- neprázdné množiny M nazývané **univerzum**;
- pro každý funkční symbol f četnosti n, je dáno zobrazení $f_{\mathcal{M}}:M^n\rightarrow M$;
- pro každý predikátový symbol p četnosti n, krom rovnosti je dána relace $p_{\mathcal{M}}\subseteq M^n$.

Libovolné zobrazení e množiny všech proměnných do univerza M dané realizace $\mathcal{M}$ jazyka L budeme nazývat **ohodnocení proměnných**.

Hodnota termu *t* v realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L při daném ohodnocení e označujeme jako $t[e]$ a indukcí se definuje následovně:

- Je-li t proměnná x, potom $t[e] = e(x)$;
- Je-li t ve tvaru $f(t_1,\dots,t_n)$, kde f je funkční symbol četnosti n a $t_1,\dots,t_n$ jsou termy, potom $t[e] = f_{\mathcal{M}}(t_1[e],\dots,t_n[e])$;

Formule φ **je splněna** v realizaci $\mathcal{M}$ pokud je pravdivá při každém ohodnocení e, píšeme $\mathcal{M}\vDash\varphi$. Je-li φ uzavřená, pak říkáme, že φ **je pravdivá** v $\mathcal{M}$. **Formule** φ jazyka L **je logicky platná**, pokud pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L platí $\mathcal{M}\vDash\varphi$.

Říkáme, že formule φ,ψ jazyka L **jsou logicky ekvivalentní**, jestliže v libovolné realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L při libovolné ohodnocení e proměnných, je $\mathcal{M}\vDash\varphi\,[e] \Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash\psi\,[e]$. Každá formule φ jazyka L je logicky ekvivalentní nějaké formuli ψ v níž se nevyskytuje kvantifikátor $\exists/\forall$. Každá formule jazyka L je logicky ekvivalentní nějaké formuli vytvořené z atomických formulí jen pomocí logických spojek $\neg$,$\rightarrow$ a kvantifikátoru $\forall$. Významné dvojice ekvivalentních formulí:

$$(\exists x\varphi) \Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg\varphi))$$
$$(\forall x\varphi) \Leftrightarrow \neg(\exists x(\neg\varphi))$$
$$(\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x(\varphi\wedge\psi)$$
$$(\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi) \Leftrightarrow \exists x(\varphi\vee\psi)$$

Substituce termů za proměnné: Pokud v termu t dosadíme za proměnné další termy, t zůstává termem. Dosazením termu za proměnné ve formuli vytvoříme opět formuli. Ne vždy je to vhodné, proměnná musí být substituovatelná (proměnná x taková, že žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru proměnné y, která je obsažena v substituovatelném termu).