METODA PROSTÉ ITERACE

- funkce $f(x)$
- hledáme řešení $f(x)=0$ na intervalu $\langle a,b\rangle$
- $f(x)$ má právě 1 řešení na $\langle a,b\rangle$
- převedeme $f(x)=0$ na $F(x)=x$
- vybereme $x_0 \in \langle a,b\rangle$
- počítáme $x_i = F(x_{i-1})$
- FUNGUJE POKUD F je kontrakce na $(\langle a,b\rangle, \rho)$, $\rho(x,y)=|x-y|$
- podmínka je $|F'(x)| \leq \alpha < 1$

PŮLENÍ INTERVALU

- funkce $f(x)$
- interval $\langle a, b\rangle$ t. ž. $f(x)$ má na $\langle a, b\rangle$ právě jedno řešení

$$f(x) = 0$$

$$sig(f(a)) \neq sig(f(b))$$

Půlení intervalu v kontextu BVPB

$$X = \{\langle x, y\rangle \mid x > a \wedge y < b \wedge x < y\}$$

$$\rho(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = |(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2)|$$

pevný bod je $\langle z, z\rangle \in X$. $f(z) = 0$

1 ITERACE CYKLU PŮLENÍ INTERVALU JE KONTRAKCE NA $X = (X, \rho)$

$$A(\langle x,y\rangle) = \langle x',y'\rangle \quad \text{t.ž.} \quad y'-x = \frac{y-x}{2}$$

ukaž, že A je kontrakce

$$\alpha \cdot \rho(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle) \geq \rho(A(\langle x_1,y_1\rangle), A(\langle x_2,y_2\rangle))$$

$$\alpha \cdot |(y_1-x_1)-(y_2-x_2)| \geq \left| \frac{x_1-y_1}{2} - \frac{x_2-y_2}{2} \right|$$

$$\alpha \cdot |(y_1-x_1)-(y_2-x_2)| \geq \frac{1}{2} \cdot |(x_1-y_1)-(x_2-y_2)|$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right) \cdot |(y_1-x_1)-(y_2-x_2)| \geq 0$$

platí pro $\alpha \geq \frac{1}{2}$ je kontrakce

BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ

Pokud $\mathcal{X} = (X, \rho)$ a A je kontrakce a $\mathcal{X}$ je úplný tak potom

$x, A(x), A^2(x), \ldots$ konvergují k pevnému bodu

$$A(x) = \begin{cases} 1 \iff x > 0 \\ 0 \iff x = 0 \\ -1 \iff x < 0 \end{cases}$$

NENÍ

$x = -1 \quad y = 1 \quad \rho(-1,1) = 2$

$A(x) = -1 \quad A(y) = 1 \quad \rho(-1,1) = 2$

$2 \leq \alpha \cdot 2$ neplatí pro $\alpha < 1$

$X = (\mathbb{R}^2, \rho) \qquad \rho = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$A((x,y)) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

$\cancel{A((k_1,k_2))} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$A((x,y)) = (k_1, k_2)$

$$\alpha \cdot \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2} - \frac{y_2}{2}\right)^2}$$

$$\alpha^2 \cdot (x_1-y_1)^2 + \alpha^2 \cdot (x_2-y_2)^2 \geq \frac{1}{4} \cdot (x_1-y_1)^2 + \frac{1}{4} \cdot (x_2-y_2)^2$$

$$\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot (x_1-y_1)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot (x_2-y_2)^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 \geq \frac{1}{4} \qquad \boxed{\alpha \geq \frac{1}{2}}$$

je kontrakce

$A(x,y) = \left(\frac{x}{2}, y\right)$

není kontrakce

body $(0,1)$ a $(0,2)$

$A((0,1)) = (0,1)$ a $A((0,2)) = (0,2)$

$\rho((0,1),(0,2)) = 1$

NENÍ KONTRAKCE

$\boxed{\text{KONTRAKCE}}$

$\mathcal{X} = (X, \rho)$

$A : X \to X$ je kontrakce $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \alpha < 1$ t. ž.

$\forall x, y \in X : \rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$

$\mathcal{X} = (\mathbb{R}, \rho)$ $\qquad \rho(x, y) = |x - y|$

$A(x) = 0$ ✓ $\qquad \alpha \cdot |x - y| \geq |A(x) - A(y)| = |0 - 0| = 0$

$A(x) = K$ ✓

$A(x) = \frac{x}{2}$ ✓ $\qquad \alpha \cdot |x - y| \geq \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \boxed{\frac{1}{2} \cdot |x - y|}$

$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot |x - y| \geq 0$

Pro $\alpha \geq \frac{1}{2}$ PLATÍ $\to$ JE KONTRAKCE

$\boxed{\text{NEÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR}}$

$X = (\mathbb{N}_0, \rho)$, kde ρ je def. následovně:

* $\rho(x,x) = 0$
* $\rho(0,1) = 1$
* $\rho(x, x+1) = \dfrac{\rho(x-1, x)}{2}$

– pro $x < y$

* $\rho(x,y) = \rho(x, x+1) + \rho(x+1, y)$

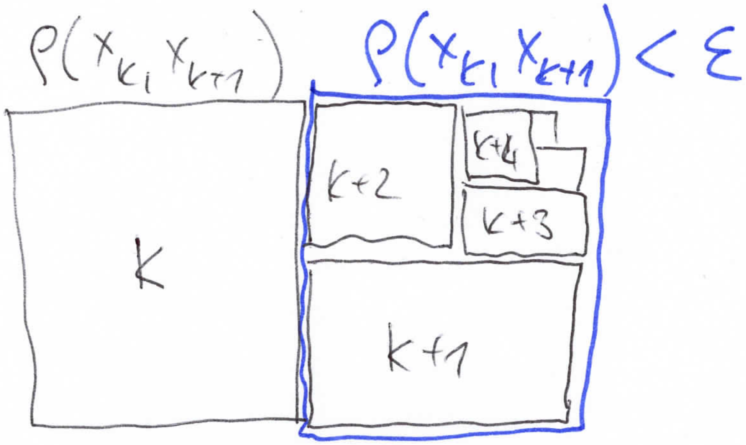
– pro $y < x$

* $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$\{x_n\}$ $x_i = i$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

– víme, že pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje x_k : $\rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$

$$\boxed{N(\xi) = k+1}$$



posloupnost $\{x_n\}$ konverguje
k ∞ a $\infty \notin \mathbb{N}_0$

ÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR

$X = (X, \rho)$ je úplný $\overset{def}{\iff}$ každá cauchyovská posloupnost konverguje k bodu $x \in X$

$X = (X, \rho)$

posloupnost $\{x_n\}$ $\forall n : x_n \in X$

Posloupnost konverguje k $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

$X = (\mathbb{R}^1, \rho)$ $\rho(x,y) = |x-y|$

* $\{x_n\}$ $x_i = \frac{1}{i}$ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

konverguje k bodu $x = 0$

---

* $\{x_n\}$ $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ \forall i > 5:\ x_i = x_{i-1}$

konverguje k bodu $\boxed{x = 4}$

$\boxed{N(\varepsilon) = 4}$

CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST

<u>Def:</u> $\{x_n\}$ je CAUCHYOVSKÁ $\overset{def}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists N(\varepsilon) : \forall m, n \geq N(\varepsilon) : \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Posloupnost $\{x_n\}$ $x_i = \frac{1}{i}$

$N(\varepsilon) = i$ t. ž. $\frac{1}{i} < \varepsilon$

pro $j > i$: $\rho\left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\right) < \frac{1}{i}$

$X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \rho)$ $\qquad \rho = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

ukažte, že X je metrický prostor

---

1) „$\Rightarrow$“ $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$

„$\Leftarrow$“ $x = y \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Rightarrow \rho(x,y) = 0$

---

2) $\rho(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|(-1)\cdot\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right| = \cancel{|-1|}\cdot\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \rho(y,x)$

$(A - B) = (-1)\cdot(B - A)$

---

3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \geq$

$|a \pm b| \geq |a| - |b|$

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| - \cancel{\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right|} + \cancel{\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right|} = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| = \rho(x,z)$

$X = (\{1,2,3,4\}, \rho)$

ρ_1	1	2	3	4
1	0	3	4	5
2	3	0	2	2
3	4	2	0	1
4	5	2	1	0

DOPLŇTE DEFINICI ρ TAK ABY X BYL METRICKÝ PROSTOR

ρ_2	1	2	3	4
1	0	1	2	5
2		0		2
3			0	
4				0

NESPLŇUJE Ax 3 $\longrightarrow$

$\rho(1,4) > \rho(1,2) + \rho(2,4)$

UKÁŽTE, ŽE $X = (\mathbb{R}^2, \rho)$ $\quad \rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

1) „$\Rightarrow$“ $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 \Rightarrow |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = 0 \Rightarrow |x_1-y_1| = 0 \wedge |x_2-y_1| = 0$

$\Rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$

„$\Leftarrow$“ $(x_1,x_2) = (y_1,y_2) \Rightarrow |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| = |0| + |0| = 0$

---

2) $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = |(-1)\cdot(y_1-x_1)| + |(-1)\cdot(y_2-x_2)| =$

$= |y_1-x_1| + |y_2-x_2| = \rho((y_1,y_2),(x_1,x_2))$

3) $\rho((x_1,x_2),(z_1,z_2)) = |x_1-z_1| + |x_2-z_2| = |(x_1-y_1)+(y_1-z_1)| + |(x_2-y_2)+(y_2-z_2)| \leq$

$|A+B| \leq |A|+|B|$

$\leq |x_1-y_1| + |y_1-z_1| + |x_2-y_2| + |y_2-z_2| = \rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + \rho((y_1,y_2),(z_1,z_2))$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$

$$\rho(x,y) = |x-y| = |(-1)\cdot(y-x)| = \cancel{|-1|}\cdot|y-x| = \rho(y,x)$$

---

3) $\forall x, y, z: \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

$$\rho(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq$$
$$\leq |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

$\mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}, \rho)$ $\qquad \rho(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \rho)$ $\qquad \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Dokažte, že $\mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}, \rho)$ $\quad \rho = |x-y|$ je metrický prostor

1) $\forall x,y \in \mathbb{R} : \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

„$\Rightarrow$" $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

„$\Leftarrow$" $x = y \Rightarrow |x-y| = |x-x| = |0| = 0 \Rightarrow \rho(x,y) = 0$

METRICKÝ PROSTOR

$$X = (\{0,1,2\}, \rho)$$

$$\rho : \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \to \mathbb{R}_0^+$$

ρ	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	0

$$\mathcal{X} = (X, \rho)$$

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$$

1: $\forall x, y \in X: \quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$

2: $\forall x, y \in X: \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$

3: $\forall x, y, z \in X: \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$