Odstranění ε-pravidel ($A \to \varepsilon$)

- základ: konstrukce $N_\varepsilon = \{A \in N \mid A \overset{+}{\Rightarrow} \varepsilon\}$
- zapište alg., který pro danou gr. G vypočte N_ε.

Vstup: bezkont. gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$.

Výstup: $N_\varepsilon = \{A \in N \mid A \overset{+}{\Rightarrow} \varepsilon\}$

Metoda:

1. $N_\varepsilon^0 := \emptyset$, $i := 0$
2. $N_\varepsilon^{i+1} = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^i)^*\}$ $[\cup N_\varepsilon^i]$ není zapotřebí
3. jestliže $N_\varepsilon^{i+1} = N_\varepsilon^i$, pak je výsledkem $N_\varepsilon^i =: N_\varepsilon$, jinak $i := i+1$ a přejdeme na bod 2.

- Mějme gramatiku G s pravidly:

$$S \to BC \mid d$$
$$B \to D \mid bCdS$$
$$C \to f \mid \varepsilon$$
$$D \to C \mid aB.$$

Odstraňte algoritmicky ε pravidla.

1. spočteme N_ε:

- $N_\varepsilon^0 = \emptyset$
- $N_\varepsilon^1 = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^0)^*\} =$

$= \{ \text{———} \text{ " } \text{———} \ \alpha \in (\emptyset)^* \} =$

$= \{ \text{———} \text{ " } \text{———} \ \alpha \in \{\varepsilon\} \} =$

$= \{A \in N \mid \exists (A \to \varepsilon) \in P\}$

$N_\varepsilon^1 = \{C\}$

$N_\varepsilon^2 = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in \{C\}^*\} =$

$= \text{———} \text{ " } \text{———} \ \alpha \in \{\varepsilon, C, CC, \dots\} \}$

$N_\varepsilon^2 = \{C, D\}$

$N_\varepsilon^3 = \{C, D, B\}$

$N_\varepsilon^4 = \{C, D, B, S\}$

$N_\varepsilon^5 = \{C, D, B, S\} = N_\varepsilon^4 = N_\varepsilon$

2. Upravíme pravidla pův. gr. s využitím N_ε:

$S \to BC \mid C \mid B \mid \varepsilon \mid d$

$B \to D \mid \varepsilon \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd$

$C \to f \mid \varepsilon$

$D \to C \mid \varepsilon \mid aB \mid a$

3. Odstraníme ε pravidla:

$$S' \to S \mid \varepsilon$$
$$S \to BC \mid C \mid B \mid d$$
$$B \to D \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd$$
$$C \to f$$
$$D \to C \mid aB \mid a$$

Zde S' je nový startovací symbol.

<u>Odstranění jednoduchých pravidel</u> $(A \to B)$

- pro každý $A \in N$ zavedeme $N_A = \{ B \in N \mid A \overset{*}{\Rightarrow} B \}$
- následně pro $\forall (B \to \alpha) \in P : \alpha \notin N \Rightarrow \forall A \in N : B \in N_A :$ zavedeme $A \to \alpha$
- alg. pro výpočet N_A (idea):

$$N_A^0 = \{A\}$$
$$N_A^{i+1} = \{ B \in N \mid \exists (C \to \alpha B \beta) \in P : \alpha, \beta \in N_\varepsilon^* \wedge C \in N_A^i \} \cup N_A^i$$

- odstraníte jednoduchá pravidla z výše získané gramatiky.

1. Spočteme N_A (přičemž víme, že $N_\varepsilon = \{S'\}$)

- $N_{S'}^0 = \{S'\}$, $N_{S'}^1 = \{S', S\}$, $N_{S'}^2 = \{S', S, B, C\}$

  $N_{S'}^3 = \{S', S, B, C, D\} = N_{S'}^4 = N_{S'}$

- analogicky získáme $N_S = \{S, B, C, D\}$ $N_C = \{C\}$

  $N_B = \{B, D, C\}$ $N_D = \{D, C\}$

2. provedeme úpravu pravidel:

$S' \to \varepsilon \mid BC \mid d \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd \mid f \mid aB \mid a$

$S \to BC \mid d \mid bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd \mid f \mid aB \mid a$

$B \to bCdS \mid bdS \mid bCd \mid bd \mid aB \mid a \mid f$

$C \to f$

$D \to aB \mid a \mid f$

<u>cyklus</u>

- $A \overset{+}{\Rightarrow} A$
- zapište alg. pro detekci cyklu v bezk. gr.

Vstup: bezk. gr. $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: ANO, pokud G obsahuje cyklus, jinak NE.

Metoda: 1. Vypočteme N_ε

2. Zavedeme relaci $\varrho \subseteq N \times N$ takovou, že

$\forall A, B \in N: \; A \varrho B \overset{def}{\iff} \exists (A \to \alpha B \beta) \in P: \alpha, \beta \in N_\varepsilon^*$

3. Vypočteme Warshallovým alg. relaci ϱ^+.

4. ANO, je-li $A \in N: A \varrho^+ A$, jinak NE.

Levá rekurze $\quad (A \overset{+}{\Rightarrow} A\alpha)$

- odstranění přímé levé rekurze:

$$A \to A\alpha_1 \mid \dots \mid A\alpha_n \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_m$$

$$\Downarrow$$

$$A \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_m \mid \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_m A'$$

$$A' \to \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_n A'$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &\Rightarrow A\alpha_{i_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A\alpha_{i_2}\alpha_{i_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_j \dots \alpha_{i_2}\alpha_{i_1} \end{aligned}}$$

- nepřímou levou rekurzi převedeme na přímou.
- Odstraňte levou rekurzi z gramatiky s pravidly:

$$S \to S\underbrace{a}_{\alpha_1} \mid \underbrace{Ac}_{\beta_1} \mid \underbrace{b}_{\beta_2}$$

$$A \to Sd \mid f$$

1. Odstraníme přímou l. rekurzi u S:

$$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS' \qquad A \to Sd \mid f$$

$$S' \to a \mid aS'$$

2. Převedeme nepřímou levou rekurzi u A na přímou:

$$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS' \qquad S' \to a \mid aS'$$

$$A \to \underbrace{A\,cd}_{\alpha_1} \mid \underbrace{bd}_{\beta_1} \mid \underbrace{A\,cS'd}_{\alpha_2} \mid \underbrace{bS'd}_{\beta_2} \mid \underbrace{f}_{\beta_3}$$

3. Odstranění přímé lev. rek. u A:

$$S \to Ac \mid b \mid AcS' \mid bS' \qquad S' \to a \mid aS'$$

$$A \to bd \mid bS'd \mid f \mid bdA' \mid bS'dA' \mid fA'$$

$$A' \to cd \mid cS'd \mid cdA' \mid cS'dA'$$

Převod do GNF

- GNF: $A \to a\alpha$, kde $A \in N$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in N^*$
  případně $S \to \varepsilon$, kde...
- Převeďte do GNF gramatiku s pravidly

$$A \to BcC \mid dDaD$$
$$B \to aB \mid Cd \mid f$$
$$C \to bB \mid a$$
$$D \to dD \mid c$$

, kde A je st. neterm.

1. Odstranění ε-pravidel a levé rekurze

- V daném případě netřeba.

2. Vybudujeme $< \subseteq N \times N$ takové, že

$$X < Y \iff \exists (X \to Y\alpha) \in P \text{ pro } X, Y \in N, \ \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$$

V našem případě:

$A < B$; $B < C$

3. Upravíme $<$ na úplné uspořádání např.:

$A < B < C < D$

4. Provedeme úpravu pravidel dle $<$:

$D \to dD \mid c$

$C \to bB \mid a$

$B \to aB \mid bBd \mid ad \mid f$

$A \to aBcC \mid bBdcC \mid adcC \mid fcC \mid dDaD$

5. Odstraníme terminály, které nejsou levostranné:

$D \to dD \mid c$

$C \to bB \mid a$

$B \to aB \mid bBD' \mid aD' \mid f$

$D' \to d \quad C' \to c \quad A' \to a$

$A \to aBC'C \mid bBD'C'C \mid aD'C'C \mid fC'C \mid dDA'D$

- Sestavte algoritmus pro průnik nad ZA a KA.

Vstup: ZA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, z_0^1, F_1)$, kde $\delta_1 : Q_1 \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \to 2^{Q_1 \times \Gamma_1^*}$,

KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$, kde $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma_2 \to 2^{Q_2}$.

Výstup: ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$.
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.
3. $\Gamma = \Gamma_1$
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ taková, že:

a) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^*$:

$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a, z) \Leftrightarrow (q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, a, z) \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a)$$

b) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^*$:

$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), \varepsilon, z) \Leftrightarrow (q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, \varepsilon, z) \wedge q_1^2 = q_2^2.$$

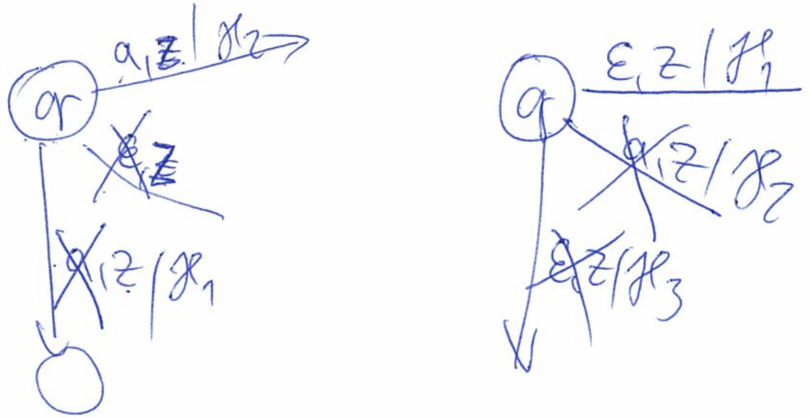
5. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$.

6. $z_0 = z_0^1$

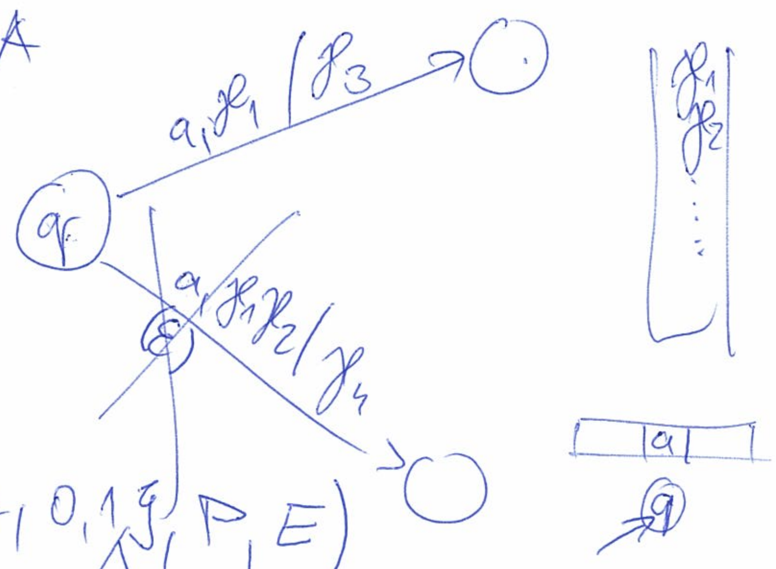
7. $F = F_1 \times F_2$.

Deterministické ZA

DZA



DZZA



- Mějme gramatiku $G = (\{E, T, F\}, \{+, *, 0, 1, (,)\}, P, E)$

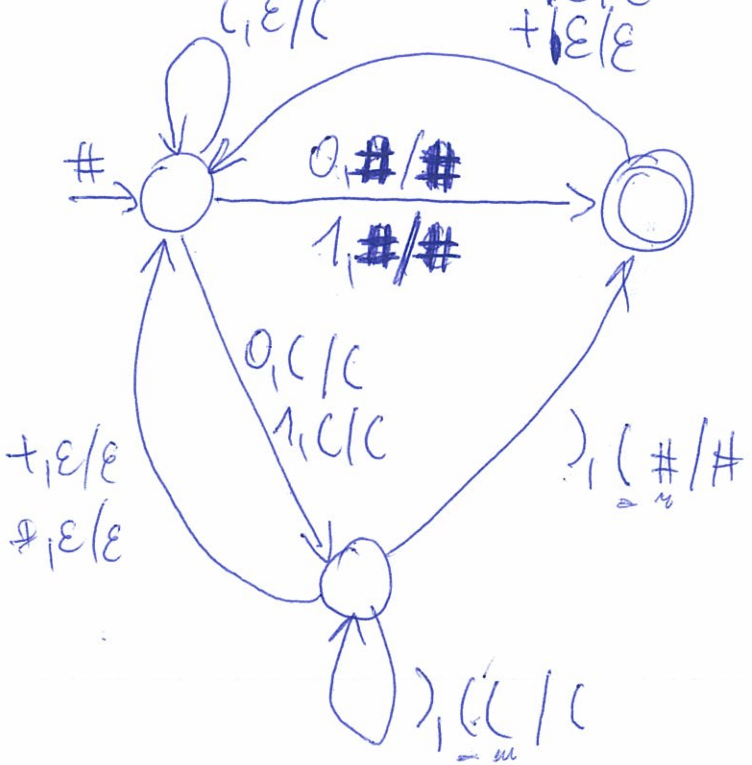
$E \to E+T \mid T$

$T \to T*F \mid F$

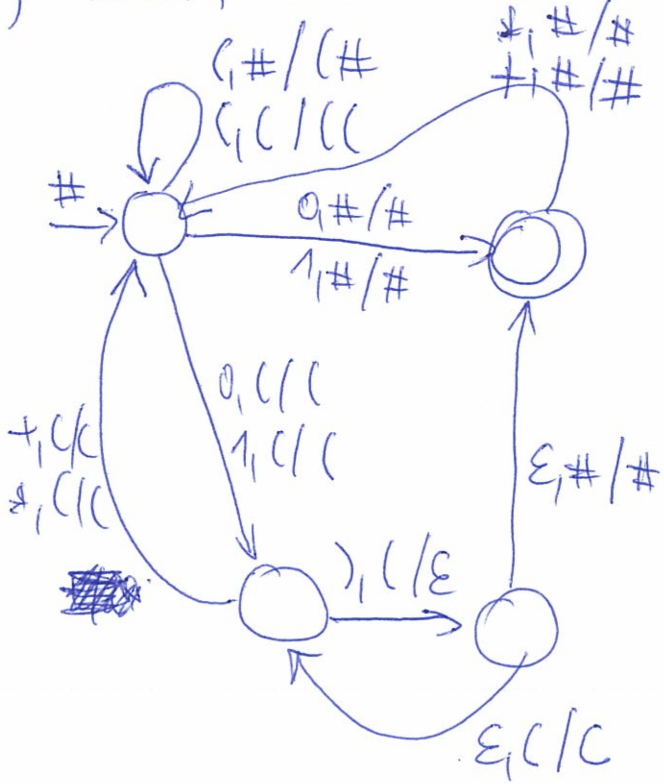
$F \to 0 \mid 1 \mid (E)$.

Sestavte DZZA a DZA pro $L(G)$.

a) DZZA



b) DZA



- O každé z následujících implikací rozhodněte, zda platí a proč.

a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$ ✓ (sestavte gr. s přep. pr. $\{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2$ po přejmen.)

b) $L_1 \in \mathcal{L}_2 \wedge L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$ ✗

(protipříklad: $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$

$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 0\}$, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_2$

c) $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$ ×

(protipříklad $L_2 = \overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}} \subseteq \{a, b, c\}^*$,

$L_2 \in \mathcal{L}_2$

$L_1 = \{a, b, c\}^* \in \mathcal{L}_3$

pak $\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_2} = \overline{\overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}}} =$

$= \{a^n b^n c^n \mid \dots\} \notin \mathcal{L}_2$

$\forall L_1, L_2$:

d) $L_1 \in Fin \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$ ✓

idea důkazu:
- $L_1 \cap L_2 \in Fin \subseteq \mathcal{L}_3$
- $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$
- $\mathcal{L}_3$ je uzavřená vůči doplňku.
- $\overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$
- $\overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

D.