Půlsemestrálka z MAT - 2005

1 – Buď φ formule v jazyce L teorie T(lineární uspořádání), která má tvar:
$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

a) Napište negaci formule φ tak aby neobsahovala logickou spojku negaci ($\neg$).
b) Uvažujte množinu Z všech celých čísel s obvyklým uspořádáním (podle velikosti) jako model M teorie T. Zjistěte, zda platí $M \models \varphi$ nebo $M \models \neg \varphi$.
c) Převeďte formuli φ do prenexního tvaru.

2 – Dokažte, že platí $\vdash \forall x \forall y\, f(x,y) \rightarrow \forall x\, f(x,x)$
Návod: Formuli $\forall x \forall y\, f(x,y)$ vezměte jako předpoklad a pak postupně použijte:

- Axiom substituce
- Pravidlou odloučení
- Axiom substituce
- Pravidlo odloučení
- Pravidlo zobecnění
- Věta o dedukci

3 – Buď $\Omega = \{p,e\}$ kde p je lineární a e nulární operační symbol.
Položme $Q^* = Q - \{0\}$ (Q je množina č. všech racionálních čísel.)
Uvažujeme Ω – algebra Q^* kde $p_{Q^*}(x,y) = x/y$ pro libovolné $x,y \in Q^*$ a $e_{Q^*} = 1$.

a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi: Q^* \rightarrow Q^*$ dané vztahem $\varphi(x) = 1/x$ pro libovolné $x \in Q^*$ je homomorfismus
b) Zjistěte, zda relace N definovaná na Q^* předpisem $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$ je kongruence na Ω – algebře Q^*.
c) Určete, zda Q^* patří do variety V typu Ω určené teorií $T = \{p(x,y) = x, p(p(x,y),z) = p(x,p(y,z)\}$
d) Určete (svými prvky) podalgebru $\langle\{2\}\rangle$ v Ω – algebře.

4 – Buď G grupa s příslušnými operacemi $\cdot, ^{-1}, e$
Buď $H \subseteq G$ podmnožina, $H \neq \emptyset$. Dokažte, že platí: H je podgrupa grupy G, právě když pro každou dvojici prvků $a,b \in H$ platí $ab^{-1} \in H$.

Pozn. přepisovatelů: Doufáme, že se nám povedlo dobře rozluštit originál. D&P