Složitost

Složitost algoritmů

- Základní teoretický přístup vychází z Church-Turingovy teze:

  Každý algoritmus je implementovatelný jistým TS.

- Zavedení TS nám umožňuje klasifikovat problémy (resp. funkce) do dvou tříd:
  1. problémy, jež nejsou algoritmicky ani částečně rozhodnutelné (resp. funkce algoritmicky nevyčíslitelné) a
  2. problémy algoritmicky alespoň částečně rozhodnutelné (resp. funkce algoritmicky vyčíslitelné).

- Nyní se budeme zabývat třídou algoritmicky (částečně) rozhodnutelných problémů (vyčíslitelných funkcí) v souvislosti s otázkou složitosti jejich rozhodování (vyčíslování).

- Analýzu složitosti algoritmu budeme chápat jako analýzu složitosti výpočtů příslušného TS, jejímž cílem je vyjádřit (kvantifikovat) požadované zdroje (čas, prostor) jako funkci závisející na délce vstupního řetězce.

Různé případy při analýze složitosti

- Můžeme rozlišit:
  1. analýzu složitosti nejhoršího případu,
  2. analýzu složitosti nejlepšího případu,
  3. analýzu složitosti průměrného případu.

- Průměrná složitost algoritmu je definována následovně:
  - Jestliže algoritmus (TS) vede k m různým výpočtům (případům) se složitostí c_1, c_2, ..., c_m, jež nastávají s pravděpodobností p_1, p_2, ..., p_m, pak průměrná složitost algoritmu je dána jako $\Sigma_{i=1}^{n} p_i c_i$.

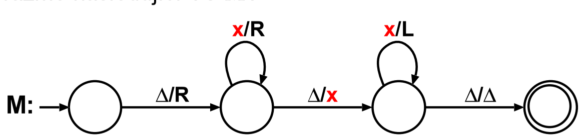
- Obvykle (alespoň na teoretické úrovni) se věnuje největší pozornost složitosti nejhoršího případu.

Složitost výpočtů TS

- Časová složitost – počet kroků (přechodů) TS provedený od počátku do konce výpočtu.

- Prostorová (paměťová) složitost – počet „buněk“ pásky TS požadovaný pro daný výpočet.

Příklad 12.1 Uvažme následující TS M:



Pro vstup $\Delta xxx \Delta\Delta$... je:

- časová složitost výpočtu M rovna 10,
- prostorová složitost výpočtu M rovna 5.

Lemma 12.1 Je-li časová složitost výpočtu prováděného TS rovna n, pak prostorová složitost tohoto výpočtu není větší než $n+1$.

Důkaz. Tvrzení je jednoduchou implikací plynoucí z definice časové a prostorové složitosti. □

Definice 12.1 Řekneme, že k-páskový DTS (resp. NTS) M přijímá jazyk L nad abecedou Σ v čase $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jestliže $L = L(M)$ a M přijme (resp. *může* přijmout) každé $w \in L$ v nanejvýš $T_M(|w|)$ krocích.

Definice 12.2 Řekneme, že k-páskový DTS (resp. NTS) M přijímá jazyk L nad abecedou Σ v prostoru $S_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jestliže $L = L(M)$ a M přijme (resp. *může* přijmout) každé $w \in L$ při použití nanejvýš $S_M(|w|)$ buněk pásky – *nepočítáme zde buňky pásky, na nichž je zapsán vstup, ale nikdy na nich nespočine hlava stroje*.

❖ Zcela analogicky můžeme definovat vyčíslování určité funkce daným TS v určitém čase, resp. prostoru.

Analýza složitosti mimo prostředí TS

❖ V jiném výpočetním prostředí, než jsou TS, nemusí mít každá primitivní operace stejnou cenu.

❖ Velmi často se užívá tzv. uniformní cenové kritérium, kdy každé operaci přiřadíme stejnou cenu.

❖ Používá se ale např. také tzv. logaritmické cenové kritérium, kdy operaci manipulující operand o velikosti i, $i > 0$, přiřadíme cenu $\lfloor lg\ i \rfloor + 1$:

- Zohledňujeme to, že s rostoucí velikostí operandů roste cena operací – logaritmus odráží růst velikosti s ohledem na binární kódování (v n bitech zakódujeme 2^n hodnot).

❖ Analýza složitosti za takových předpokladů není zcela přesná, důležité ale obvykle je to, aby se zachovala informace o tom, jak rychle roste čas/prostor potřebný k výpočtu v závislosti na velikosti vstupu.[a]

[a] Algoritmus A_1, jehož nároky rostou pomaleji než u jiného algoritmu A_2, nemusí být výhodnější než A_2 pro řešení malých instancí.

❖ Význam srovnávání rychlosti růstu složitosti výpočtů si snad nejlépe ilustrujeme na příkladu:

Příklad 12.2 Srovnání polynomiální (přesněji kvadratické – n^2) a exponenciální (2^n) časové složitosti:

délka vstupu n	časová složitost $c_1.n^2$, $c_1 = 10^{-6}$	časová složitost $c_2.2^n$, $c_2 \doteq 9.766.10^{-8}$
10	0.0001 s	0.0001 s
20	0.0004 s	0.1024 s
30	0.0009 s	1.75 min
40	0.0016 s	1.24 dne
50	0.0025 s	3.48 roku
60	0.0036 s	35.68 století
70	0.0049 s	3.65 mil. roků

Složitost výpočtů na TS a v jiných prostředích

❖ Pro rozumná cenová kritéria se ukazuje, že výpočetní složitost je pro různé modely výpočtu blízké běžným počítačům (RAM, RASP stroje) polynomiálně vázaná se složitostí výpočtu na TS (viz dále) a tudíž složitost výpočtu na TS není „příliš" rozdílná oproti výpočtům na běžných počítačích.

- RAM stroje mají paměť s náhodným přístupem (jedna buňka obsahuje libovolné přirozené číslo), instrukce typu LOAD, STORE, ADD, SUB, MULT, DIV (akumulátor a konstanta/přímá adresa/nepřímá adresa), vstup/výstup, nepodmíněný skok a podmíněný skok (test akumulátoru na nulu), HALT. U RAM stroje je program součástí řízení stroje (okamžitě dostupný), u RASP je uložen v paměti stejně jako operandy.
- Funkce $f_1(n), f_2(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou polynomiálně vázané, existují-li polynomy $p_1(x)$ a $p_2(x)$ takové, že pro všechny hodnoty n je $f_1(n) \leq p_1(f_2(n))$ a $f_2(n) \leq p_2(f_1(n))$.
- Logaritmické cenové kritérium se uplatní, uvažujeme-li možnost násobení dvou čísel. Jednoduchým cyklem typu $A_{i+1} = A_i * A_i$ ($A_0 = 2$) jsme schopni počítat 2^{2^n}, což TS s omezenou abecedou není schopen provést v polynomiálním čase (pro uložení/načtení potřebuje projít 2^n buněk při použití binárního kódování).

❖ Ilustrujme si nyní určení složitosti v prostředí mimo TS:

Příklad 12.3 Uvažme následující implementaci porovnávání řetězců.

```
int str_cmp (int n, string a, string b) {
    int i;

    i = 0;
    while (i<n) {
      if (a[i] != b[i]) break;
      i++;
    }

    return (i==n);
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost nejhoršího případu lze pak snadno určit jako $4n + 3$:
  - cyklus má 4 kroky, provede se n krát, tj. $4n$ kroků,
  - tělo funkce má 3 kroky (včetně testu ukončujícího cyklus).

Příklad 12.4 Uvažme následující implementaci řazení metodou insert-sort.

```
void insertsort(int n, int a[]) {
    int i, j, value;
    for (i=0; i<n; i++) {
        value = a[i];
        j = i - 1;
        while ((j >= 0) && (a[j] > value)) {
                a[j+1] = a[j];
                j = j - 1;
        }
        a[j+1] = value;
    }
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost lze pak určit jako $2n^2 + 4n + 1$:
  - vnitřní cyklus má 4 kroky, provede se $0, 1, ..., n-1$ krát, tj. $4(0 + 1 + ... + n - 1) = 4\frac{n}{2}(0 + n - 1) = 2n^2 - 2n$ kroků,
  - vnější cyklus má mimo vnitřní cyklus 6 kroků (včetně testu ukončujícího vnitřní cyklus) a provede se n krát, tj. $6n$ kroků,
  - jeden krok připadá na ukončení vnějšího cyklu.

Asymptotická omezení složitosti

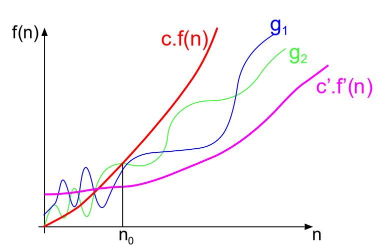
❖ Při popisu složitosti algoritmů (výpočtů TS), chceme často vyloučit vliv aditivních a multiplikativních konstant:

- různé aditivní a multiplikativní konstanty vzniknou velmi snadno „drobnými“ úpravami uvažovaných algoritmů,
- např. srovnávání dvou řetězců je možné donekonečna zrychlovat tak, že budeme porovnávat současně 2, 3, 4, ... za sebou jdoucích znaků,
- tyto úpravy ovšem nemají zásadní vliv na rychlost nárůstu časové složitosti (ve výše uvedeném případě nárůst zůstane kvadratický),
- navíc při analýze složitosti mimo prostředí TS se dopouštíme jisté nepřesnosti již zavedením různých cenových kritérií.

❖ Proto se často složitost popisuje pomocí tzv. asymptotických odhadů složitosti – viz další stránka.

Definice 12.3 Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pro danou funkci $f \in \mathcal{F}$ definujeme množiny funkcí $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ a $\Theta(f(n))$ takto:

- Asymptotické horní omezení funkce $f(n)$ je množina $O(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq c.f(n)\}$.
- Asymptotické dolní omezení funkce $f(n)$ je množina $\Omega(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c.f(n) \leq g(n)\}$.
- Asymptotické oboustranné omezení funkce $f(n)$ je množina $\Theta(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c_1.f(n) \leq g(n) \leq c_2.f(n)\}$.



Příklad 12.5 S využitím asymptotických odhadů složitosti můžeme říci, že složitost našeho srovnání řetězců patří do $O(n)$ a složitost insert-sort do $O(n^2)$.

Třídy složitosti

Složitost problémů

❖ Přejdeme nyní od složitosti konkrétních algoritmů (Turingových strojů) ke složitosti problémů.

❖ Třídy složitosti zavádíme jako prostředek ke kategorizaci (vytvoření hierarchie) problémů dle jejich složitosti, tedy dle toho, jak dalece efektivní algoritmy můžeme navrhnout pro jejich rozhodování (u funkcí můžeme analogicky mluvit o složitosti jejich vyčíslování).

❖ Podobně jako u určování typu jazyka se budeme snažit zařadit problém do co nejnižší třídy složitosti – tedy určit složitost problému jako složitost jeho nejlepšího možného řešení.

- Omezením této snahy je to, že (jak uvidíme) existují problémy, jejichž řešení je možné do nekonečna *významně* zrychlovat.

❖ Zařazení různých problémů do téže třídy složitosti může odhalit různé vnitřní podobnosti těchto problémů a může umožnit řešení jednoho převodem na druhý (a pragmatické využití např. různých již vyvinutých nástrojů).

Třídy složitosti

Definice 12.4 Mějme dány funkce $t, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a nechť T_M, resp. S_M, značí časovou, resp. prostorovou, složitost TS M. Definujeme následující časové a prostorové třídy složitosti deterministických a nedeterministických TS:

- $DTime[t(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový DTS $M : L = L(M)$ a $T_M \in O(t(n))\}$.
- $NTime[t(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový NTS $M : L = L(M)$ a $T_M \in O(t(n))\}$.
- $DSpace[s(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový DTS $M : L = L(M)$ a $S_M \in O(s(n))\}$.
- $NSpace[s(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový NTS $M : L = L(M)$ a $S_M \in O(s(n))\}$.

❖ Definici tříd složitosti pak přímočaře zobecňujeme tak, aby mohly být založeny na množině funkcí, nejen na jedné konkrétní funkci.

❖ *Poznámka*: Dále ukážeme, že použití více pásek přináší jen polynomiální zrychlení. Na druhou stranu ukážeme, že zatímco nedeterminismus nepřináší nic podstatného z hlediska vyčíslitelnosti, může přinášet mnoho z hlediska složitosti.

Časově/prostorově zkonstruovatelné funkce

❖ Třídy složitosti obvykle budujeme nad tzv. časově/prostorově zkonstruovatelnými funkcemi:

- Důvodem zavedení časově/prostorově zkonstruovatelných funkcí je dosáhnout intuitivní hierarchické struktury tříd složitosti – např. odlišení tříd $f(n)$ a $2^{f(n)}$, což, jak uvidíme, pro třídy založené na obecných rekurzívních funkcích nelze.

Definice 12.5 Funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme časově zkonstruovatelnou (time constructible), jestliže existuje vícepáskový TS, jenž pro libovolný vstup w zastaví po přesně $t(|w|)$ krocích.

Definice 12.6 Funkci $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme prostorově zkonstruovatelnou (space constructible), jestliže existuje vícepáskový TS, jenž pro libovolný vstup w zastaví s využitím přesně $s(|w|)$ buněk pásky.

❖ *Poznámka*: Pokud je jazyk L nad Σ přijímán strojem v čase/prostoru omezeném časově/prostorově zkonstruovatelnou funkcí, pak je také přijímán strojem, který pro každé $w \in \Sigma^*$ vždy zastaví:

- U časového omezení $t(n)$ si stačí předem spočíst, jaký je potřebný počet kroků a zastavit po jeho vyčerpání.
- U prostorového omezení spočteme z $s(n)$, $|Q|$, $|\Delta|$ maximální počet konfigurací, které můžeme vidět a z toho také plyne maximální počet kroků, které můžeme udělat, aniž bychom cyklili.

Nejběžněji užívané třídy složitosti

❖ Deterministický/nedeterministický polynomiální čas:

$$\mathbf{P} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DTime(n^k) \qquad \mathbf{NP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NTime(n^k)$$

❖ Deterministický/nedeterministický polynomiální prostor:

$$\mathbf{PSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(n^k) \qquad \equiv \qquad \mathbf{NPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(n^k)$$

❖ *Poznámka*: Problémy ze třídy $\mathbf{PSPACE}$ se často ve skutečnosti neřeší v polynomiálním prostoru – zvyšují se prostorové nároky výměnou za alespoň částečné (např. z $O(2^{n^2})$ na $O(2^n)$) snížení časových nároků.

Třídy pod a nad polynomiální složitostí

❖ Deterministický/nedeterministický logaritmický prostor:

$$\mathbf{LOGSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(k\,lg\,n) \qquad \mathbf{NLOGSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(k\,lg\,n)$$

❖ Deterministický/nedeterministický exponenciální čas:

$$\mathbf{EXP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DTime(2^{n^k}) \qquad \mathbf{NEXP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NTime(2^{n^k})$$

❖ Deterministický/nedeterministický exponenciální prostor:

$$\mathbf{EXPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(2^{n^k}) \qquad \equiv \qquad \mathbf{NEXPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(2^{n^k})$$

Třídy nad exponenciální složitostí

❖ Det./nedet. k-exponenciální čas/prostor založený na věži exponenciál $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ o výšce k:

$$\textbf{k-EXP} = \bigcup_{l=0}^{\infty} DTime(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}) \qquad \textbf{k-NEXP} = \bigcup_{l=0}^{\infty} NTime(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}})$$

$$\textbf{k-EXPSPACE} = \bigcup_{l=0}^{\infty} DSpace(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}) \equiv \textbf{k-NEXPSPACE} = \bigcup_{l=0}^{\infty} NSpace(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}})$$

$$\mathbf{ELEMENTARY} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \textbf{k-EXP}$$

Vrchol hierarchie tříd složitosti

❖ Na vrcholu hierarchie tříd složitosti se pak hovoří o obecných třídách jazyků (funkcí), se kterými jsme se již setkali:

- třída primitivně-rekurzívních funkcí **PR** (implementovatelných pomocí zanořených cyklů s pevným počtem opakování – `for i=... do ...`),
- třída $\mu-$rekurzívních funkcí (rekurzívních jazyků) **R** (implementovatelných pomocí cyklů s předem neurčeným počtem opakování – `while ...`) a
- třída rekurzívně vyčíslitelných funkcí (rekurzívně vyčíslitelných jazyků) **RE**.

Vlastnosti tříd složitosti

k-páskové Turingovy stroje

Věta 12.1 Je-li jazyk L přijímán nějakým k-páskovým DTS M_k v čase $t(n)$, pak je také přijímán nějakým 1-páskovým DTS M_1 v čase $O(t(n)^2)$.

Důkaz. (idea)

- Obsah k pásek stroje M_k můžeme zapsat na jednu pásku stroje M_1 za sebe a oddělit je vhodným oddělovačem. Pozici hlav M_k na pásce můžeme zakódovat vhodným označením symbolů, pod kterými se hlavy aktuálně nacházejí.
- Při simulaci kroku stroje M_k stroj M_1 dvakrát projde páskou – při jednom průchodu zjistí znaky pod hlavami M_k, při druhém je patřičně upraví.
- Jestliže je na některé simulované pásce stroje M_k nedostatek prostoru, je zapotřebí provést posun zbytku pásky stroje M_1, což si může opět vyžádat dva průchody touto páskou.
- Užitečná délka pásek stroje M_k je ovšem omezena na $t(n)$ a tudíž užitečná délka pásky stroje M_1 je omezena na $k.t(n) + k$, tj. $O(t(n))$.
- Simulace jednoho kroku M_k strojem M_1 je proto v $O(t(n))$.
- Takových kroků se provede $t(n)$ a tudíž M_1 přijímá L v čase $O(t(n)^2)$.

$\square$

Determinismus a nedeterminismus

Věta 12.2 Je-li jazyk L přijímán nějakým NTS M_n v čase $t(n)$, pak je také přijímán nějakým DTS M_d v čase $2^{O(t(n))}$.

Důkaz. (idea) Ukážeme, jak může M_d simulovat M_n v uvedeném čase:

- Očíslujeme si přechody M_n jako $1, 2, ..., k$.
- M_d bude postupně simulovat veškeré možné posloupnosti přechodů M_n (obsah vstupní pásky si uloží na pomocnou pásku, aby ho mohl vždy obnovit; na jinou pásku si vygeneruje posloupnost přechodů z $\{1, 2, ..., k\}^*$ a tu simuluje).
- Vzhledem k možnosti nekonečných výpočtů M_n nelze procházet jeho možné výpočty do hloubky – budeme-li je ale procházet do šířky (tj. nejdřív všechny řetězce z $\{1, 2, ..., k\}^*$ délky 1, pak 2, pak 3, ...), určitě nalezneme nejkratší přijímající posloupnost přechodů pro M_n, existuje-li.
- Takto projdeme nanejvýš $O(k^{t(n)})$ cest, simulace každé z nich je v $O(t(n))$ a tudíž celkem využijeme nanejvýš čas $O(k^{t(n)})O(t(n)) = 2^{O(t(n))}$.

$\square$

❖ Doposud nikdo nebyl schopen přijít s polynomiální simulací NTS pomocí DTS. **Zdá se tedy, že nedeterminismus přináší značnou výhodu z hlediska časové složitosti výpočtů.**

❖ Zatímco *se zdá*, že nedeterminismus přináší značnou výhodu z hlediska časové složitosti výpočtů, v případě prostorové složitosti je situace jiná:

Věta 12.3 (Savitchův teorém) $NSpace[s(n)] \subseteq DSpace[s^2(n)]$ pro každou prostorově zkonstruovatelnou funkci $s(n) \geq lg\ n$.

Důkaz. Uvažme NTS $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ rozhodující $L(M)$ v prostoru $s(n)$:

- Existuje $k \in \mathbb{N}$ závislé jen na $|Q|$ a $|\Gamma|$ takové, že pro libovolný vstup w, M projde nanejvýš $k^{s(n)}$ konfigurací o délce max. $s(n)$.
- To implikuje, že M provede pro w nanejvýš $k^{s(n)} = 2^{s(n) lg\ k}$ kroků.
- Pomocí DTS můžeme snadno implementovat proceduru $test(c, c', i)$, která otestuje, zda je možné v M dojít z konfigurace c do c' v 2^i krocích:

  procedure $test(c, c', i)$
  if $(i = 0)$ **then return** $((c = c') \vee (c \underset{M}{\vdash} c'))$
  else for all configurations c'' such that $|c''| \leq s(n)$ **do**
    if $(test(c, c'', i-1) \wedge test(c'', c', i-1))$ **then return** $true$
  return $false$

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

- Všimněme si, že rekurzivním vyvoláváním $test$ vzniká strom o výšce i simulující posloupností svých listů posloupnost 2^i výpočetních kroků.
- Nyní k deterministické simulaci M postačí projít všechny akceptující konfigurace c_F takové, že $|c_F| \leq s(n)$, a ověřit, zda $test(c_o, c_f, \lceil s(n) lg\ k \rceil)$, kde c_0 je počáteční konfigurace.
- Každé vyvolání $test$ zabere prostor $O(s(n))$, hloubka rekurze je $\lceil s(n) lg\ k \rceil = O(s(n))$ a tedy celkově deterministicky simulujeme M v prostoru $O(s^2(n))$.
- Dodejme, že $s(n)$ může být zkonstruováno v prostoru $O(s(n))$ (jedná se o prostorově zkonstruovatelnou funkci) a tudíž neovlivňuje výše uvedené úvahy.

□

❖ Důsledkem Savitchova teorému jsou již dříve uvedené rovnosti:

- **PSPACE** $\equiv$ **NPSPACE**,
- **k-EXPSPACE** $\equiv$ **k-NEXPSPACE**.

Prostor kontra čas

❖ Intuitivně můžeme říci, že zatímco prostor může růste relativně pomalu, čas může růst výrazně rychleji, neboť můžeme opakovaně procházet týmiž buňkami pásky – opačně tomu být zřejmě nemůže (nemá smysl mít nevyužitý prostor).

Věta 12.4 $NSpace[t(n)] \subseteq DTime[O(1)^{t(n)}]$ pro každou časově zkonstruovatelnou funkci $t(n) \geq lg\ n$.

Důkaz. Dá se použít do jisté míry podobná konstrukce jako u Savitchova teorému – blíže viz literatura. □

Uzavřenost vůči doplňku

❖ Doplňkem třídy rozumíme třídu jazyků, které jsou doplňkem jazyků dané třídy. Tedy označíme-li doplněk třídy $\mathcal{C}$ jako $co\text{-}\mathcal{C}$, pak $L \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{L} \in co\text{-}\mathcal{C}$. U rozhodování problémů toto znamená rozhodování komplementárního problému (prázdnost x neprázdnost apod.).

❖ Prostorové třídy jsou obvykle uzavřeny vůči doplňku:

Věta 12.5 Jestliže $s(n) \geq lg\ n$, pak $NSpace(s(n)) = co\text{-}NSpace(s(n))$.

Důkaz. Jedná se o teorém Immermana a Szelepcsényiho – důkaz viz literatura. □

❖ Pro časové třídy je situace jiná:

- Některé třídy jako **P** či **EXP** jsou uzavřeny vůči doplňku.
- U jiných významných tříd zůstává otázka uzavřenosti vůči doplňku otevřená. Proto má smysl hovořit např. i o třídách jako:
  - **co-NP** či
  - **co-NEXP**.

Věta 12.6 Třída **P** je uzavřena vůči doplňku.

Důkaz. (idea) Základem je to, že ukážeme, že jestliže jazyk L nad Σ může být přijat DTS M v polynomiálním čase, pak také existuje DTS M', který L rozhoduje v polynomiálním čase, tj. $L = L(M')$ a existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $w \in \Sigma^*$ M' zastaví v čase $O(|w|^k)$:

- M' na začátku výpočtu určí délku vstupu w a vypočte $p(|w|)$, kde $p(n)$ je polynom určující složitost přijímání strojem M. Na speciální dodatečnou pásku uloží $p(|w|)$ symbolů.
- Následně M' simuluje M, přičemž za každý krok umaže jeden symbol z dodatečné pásky. Pokud odebere z této pásky všechny symboly a M by mezitím nepřijal, M' abnormálně ukončí výpočet (odmítne).
- M' evidentně přijme všechny řetězce, které přijme M na to mu stačí $p(n)$ simulovaných kroků a nepřijme všechny řetězce, které by M nepřijal – pokud M nepřijme v $p(n)$ krocích, nepřijme vůbec. M' však vždy zastaví v $O(p(n))$ krocích.

□

Ostrost hierarchie tříd

❖ Z dosavadního můžeme shrnout, že platí následující:

- **LOGSPACE** $\subseteq$ **NLOGSPACE** $\subseteq$ **P** $\subseteq$ **NP**
- **NP** $\subseteq$ **PSPACE** $=$ **NPSPACE** $\subseteq$ **EXP** $\subseteq$ **NEXP**
- **NEXP** $\subseteq$ **EXPSPACE** $=$ **NEXPSPACE** $\subseteq$ **2-EXP** $\subseteq$ **2-NEXP** $\subseteq$ ...
- ... $\subset$ **ELEMENTARY** $\subset$ **PR** $\subset$ **R** $\subset$ **RE** [a]

❖ Řada otázek ostrosti uvedených vztahů pak zůstává otevřená, nicméně z tzv. teorému hierarchie (nebudeme ho zde přesně uvádět, neboť je velmi technický – zájemci je naleznou v literatuře) plyne, že exponenciální „mezery“ mezi třídami jsou „ostré“:

- **LOGSPACE**, **NLOGSPACE** $\subset$ **PSPACE**,
- **P** $\subset$ **EXP**,
- **NP** $\subset$ **NEXP**,
- **PSPACE** $\subset$ **NEXPSPACE**,
- **EXP** $\subset$ **2-EXP**, ...

[a] Bez důkazu jsme doplnili, že **ELEMENTARY** $\subset$ **PR**.

Některé další zajímavé výsledky

Věta 12.7 (Blumův teorém) Pro každou totální vyčíslitelnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existuje problém, jehož každé řešení s nějakou složitostí $t(n)$ může být zlepšeno tak, že nové řešení má složitost $f(t(n))$ pro skoro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Viz literatura. □

❖ V důsledku Blumova teorému tedy existují problémy jejichž řešení se složitostí $t(n)$ je možné donekonečna zrychlovat na $lg\ t(n)$, $lg\ lg\ t(n)$, $lg\ lg\ lg\ t(n)$, ...

❖ Nutnost pracovat s časově zkonstruovatelnými funkcemi, abychom se vyhnuli např. tomu, že $DTime[f(n)] = DTime[2^{f(n)}]$ pro nějaké $f(n)$, vyjadřuje následující teorém:

Věta 12.8 (Gap Theorem) Ke každé rekurzívní funkci $\phi(n) > n$ existuje rekurzívní funkce $f(n)$ taková, že $DTime[\phi(f(n))] = DTime[f(n)]$.

Důkaz. Viz literatura – založeno na konstrukci funkce f takové, že žádný TS nezastaví pro vstup délky n počtem kroků mezi $f(n)$ a $\phi(f(n))$. □

Jazyky $\mathcal{C}$-těžké a $\mathcal{C}$-úplné

❖ Až doposud jsme třídy používali jako horní omezení složitosti problémů. Všimněme si nyní omezení dolního – to zavedeme pomocí redukovatelnosti třídy problémů na daný problém.

Definice 12.7 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí. Jazyk $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ je $\mathcal{R}$ redukovatelný (přesněji $\mathcal{R}$ many-to-one reducible) na jazyk $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, což zapisujeme $L_1 \leq_{\mathcal{R}}^m L_2$, jestliže existuje funkce f z $\mathcal{R}$ taková, že $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

Definice 12.8 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $\forall L \in \mathcal{C} : L \leq_{\mathcal{R}}^m L_0$.

Definice 12.9 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 nazveme $\mathcal{C}$-úplný ($\mathcal{C}$-complete) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $L_0 \in \mathcal{C}$ a L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti.

❖ Pro třídy $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ a jazyk L, jenž je $\mathcal{C}_2$ úplný vůči $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, platí, že buď $\mathcal{C}_2$ je celá $\mathcal{R}$ redukovatelná na $\mathcal{C}_1$ nebo $L \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$.

Nejběžnější typy úplnosti

❖ Uveďme nyní nejběžněji používané typy úplnosti – všimněme si, že je použita redukovatelnost dostatečně silná na to, aby bylo možné najít úplné problémy vůči ní a na druhou stranu nebyly příslušné třídy triviálně redukovány na jejich (možné) podtřídy:

- **NP**, **PSPACE**, **EXP** úplnost je definována vůči polynomiální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v polynomiálním čase),
- **P**, **NLOGSPACE** úplnost definujeme vůči redukovatelnosti v deterministickém logaritmickém prostoru,
- **NEXP** úplnost definujeme vůči exponenciální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v exponenciálním čase).

Příklady složitosti problémů

❖ Příklady $\mathbf{LOGSPACE}$ problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v neorientovaném grafu.

❖ Příklady $\mathbf{NLOGSPACE}$-úplných problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v orientovaném grafu,
- 2-SAT (*SATisfiability*), tj. splnitelnost výrokových formulí tvaru konjunkce disjunkcí dvou literálů (literál je výroková proměnná nebo její negace), např. $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$.

❖ Příklady $\mathbf{P}$-úplných problémů:

- splnitelnost Hornových klauzulí $(p \wedge q \wedge ... \wedge t) \Rightarrow u$, kde p, q, ... jsou atomické formule predikátové logiky,
- náležitost řetězce do jazyka bezkontextové gramatiky,
- následnost uzlů při průchodu grafem do hloubky (pro dané řazení přímých následníků).

❖ Příklady $\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- 3-SAT a obecný SAT – viz dále,
- řada grafových problémů, např.:
  - existence kliky dané velikosti,
  - existence Hamiltonovské kružnice v neorientovaném grafu,
  - existence orientované Hamiltonovské kružnice v orientovaném grafu,
  - barvitelnost – lze daný neorientovaný graf obarvit určitým počtem barev?,
  - uzlové pokrytí neorientovaného grafu množinou uzlů o určité velikosti (tj. množinou uzlů, se kterou souvisí všechny hrany),
  - ...
- problém obchodního cestujícího,
- *knapsack* – máme položky s cenou a hodnotou, maximalizujeme hodnotu tak, aby cena nepřekročila určitou mez.

❖ Příklady co-$\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů bez iterace.

- Příklady $\mathbf{PSPACE}$-úplných problémů:
  - ekvivalence regulárních výrazů,
  - náležitost řetězce do jazyka kontextové gramatiky,
  - model checking formulí lineární temporální logiky (LTL – výroková logika doplněná o temporální operátory *until*, *always*, *eventually*, *next-time*) s ohledem na velikost formule,
  - nejlepší tah ve hře Sokoban.
- Příklady $\mathbf{EXP}$-úplných problémů:
  - nejlepší tah v šachu (zobecněno na šachovnici $n \times n$),
  - model checking procesů s neomezeným zásobníkem (rekurzí) vůči zafixované formuli logiky větvícího se času (CTL) – tj. EXP ve velikosti procesu.
  - inkluze pro tzv. *visibly push-down* jazyky (operace push/pop, které provádí přijímající automat jsou součástí vstupního řetězce).
- Příklady $\mathbf{EXPSPACE}$-úplných problémů:
  - ekvivalence regulárních výrazů doplněných o operaci kvadrát (tj. r^2).

- $\mathbf{k\text{-}EXP}$ / $\mathbf{k\text{-}EXPSPACE}$:
  - rozhodování splnitelnosti formulí Presburgerovy aritmetiky – tj. celočíselné aritmetiky se sčítáním, porovnáváním (ne násobením – to vede na tzv. Peanovu aritmetiku, která je již nerozhodnutelná) a kvantifikací prvního řádu (např. $\forall x, y : x \leq x + y$) je problém, který je v $\mathbf{3\text{-}EXP}$ ($\mathbf{2\text{-}EXPSPACE}$-úplný).
- Problémy mimo $\mathbf{ELEMENTARY}$:
  - ekvivalence regulárních výrazů doplněných o negaci,
  - rozhodování splnitelnosti formulí logiky WS1S – celočíselná aritmetika s operací $+1$ a kvantifikací prvního a druhého řádu (tj. pro každou/existuje hodnota, resp. množina hodnot, taková, že ...),
  - verifikace dosažitelnosti v tzv. *Lossy Channel Systems* – procesy komunikující přes neomezenou, ale ztrátovou frontu (cokoliv se může kdykoliv ztratit).

SAT-problém

Polynomiální redukce

Definice 12.10 *Polynomiální redukce* jazyka L_1 nad abecedou Σ_1 na jazyk L_2 nad abecedou Σ_2 je funkce $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, pro kterou platí:

1. $\forall w \in \Sigma_1^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$
2. f je Turingovsky vyčíslitelná v polynomiálním čase

Existuje-li polynomiální redukce jazyka L_1 na L_2, říkáme, že L_1 *se redukuje na* L_2 a píšeme $L_1 \leq_P^m L_2$.

Věta 12.9 Je-li $L_1 \leq_P^m L_2$ a L_2 je ve třídě P, pak L_1 je ve třídě P.

Důkaz. Nechť M_f je Turingův stroj, který provádí redukci f jazyka L_1 na L_2 a nechť $p(x)$ je jeho časová složitost. Pro libovolné $w \in L_1$ výpočet $f(w)$ vyžaduje nanejvýš $p(|w|)$ kroků a produkuje výstup maximální délky $p(|w|) + |w|$.
Nechť M_2 přijímá jazyk L_2 v polynomiálním čase daném polynomem $q(x)$. Uvažujme Turingův stroj, který vznikne kompozicí $\to M_f M_2$. Tento stroj přijímá jazyk L_1 tak, že pro každé $w \in L_1$ udělá stroj $\to M_f M_2$ maximálně $p(|w|) + q(p(|w|) + |w|)$ kroků, což je polynomem ve $|w|$ a tedy L_1 leží ve třídě P. □

Příklad 12.6 Funkce $f : \{x, y\}^* \rightarrow \{x, y, z\}^*$ definována jako $f(v) = vzv$ je polynomiální redukcí jazyka $L_1 = \{w | w$ je palindrom nad $\{x, y\}\}$ na jazyk $L_2 = \{wzw^R | w \in \{x, y\}^*\}$.

❖ Předchozí věta nám dává praktickou možnost jak ukázat, že určitý jazyk je ve třídě P. Navíc, přeformulujeme-li tuto větu takto: „Jestliže platí $L_1 \leq_P^m L_2$ a L_1 neleží v P, pak L_2 také neleží v P “, můžeme dokazovat, že určitý jazyk neleží v P.

Problém splnitelnosti – SAT problém

❖ Nechť $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je konečná množina Booleovských proměnných (prvotních formulí výrokového počtu). *Literálem* nazveme každou proměnnou v_i nebo její negaci $\overline{v_i}$. *Klausulí* nazveme výrokovou formuli obsahující pouze literály spojené výrokovou spojkou $\vee$ (nebo).

Příklady klausulí: $v_1 \vee \overline{v_2}, \quad v_2 \vee v_3, \quad \overline{v_1} \vee \overline{v_3} \vee v_2$

❖ *SAT-problém* lze formulovat takto: Je dána množina proměnných V a množina klausulí nad V. Je tato množina klausulí splnitelná?

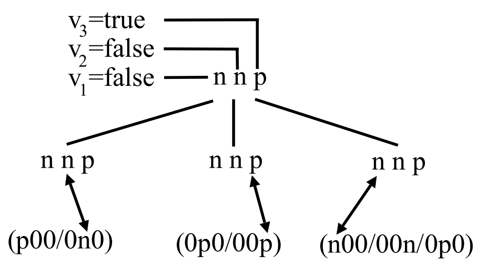
❖ Každý konkrétní SAT-problém můžeme zakódovat jediným řetězcem takto: Nechť $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, každý literál v_i zakódujeme řetězcem délky m, který obsahuje samé 0 s výjimkou i-té pozice, která obsahuje symbol p, jde-li o literál v_i, nebo n, jde-li o literál $\overline{v_i}$. Klausuli reprezentujeme seznamem zakódovaných literálů oddělených symbolem $/$. SAT-problém bude seznam klausulí uzavřených v aritmetických závorkách.

Příklad 12.7 SAT-problém obsahuje proměnné v_1, v_2, v_3 a klausule $v_1 \vee \overline{v_2}$, $v_2 \vee v_3$, $\overline{v_1} \vee \overline{v_3} \vee v_2$ bude reprezentována řetězcem: $(p00/0n0)(0p0/00p)(n00/00n/0p0)$

❖ Označme L_{SAT} jazyk obsahující řetězce tohoto typu, které reprezentují splnitelné množiny klausulí. Řetězec $(p00/0n0)(0p0/00p)(n00/00n/0p0)$ je prvkem L_{SAT} $(v_1 = F, v_2 = F, v_3 = T)$, na rozdíl od řetězce $(p00/0p0)(n00/0p0)(p00/0n0)(n00/0n0)$, který je kódem nesplnitelné množiny klausulí $v_1 \vee v_2$, $\overline{v_1} \vee v_2$, $v_1 \vee \overline{v_2}$, $\overline{v_1} \vee \overline{v_2}$.

❖ Přiřazení pravdivostních hodnot budeme reprezentovat řetězcem z $\{p, n\}^+$, kde p v i-té pozici představuje přiřazení $v_i \approx$ true a n v i-té pozici představuje přiřazení $v_i \approx$ false.

❖ Pak test, zda určité hodnocení je modelem množiny klausulí (množina klausulí je pro toto hodnocení splněna), je velmi jednoduchý a ilustruje ho obrázek:



❖ Na uvedeném principu můžeme zkonstruovat nedeterministický Turingův stroj, který přijímá jazyk L_{SAT} v polynomiálním čase. Zvolíme 2-páskový Turingův stroj, který:

1. začíná kontrolou, zda vstup reprezentuje množinu klausulí
2. na 2. pásku nageneruje řetězec z $\{n, p\}^m$ nedeterministickým způsobem
3. posouvá hlavu na 1. pásce a testuje, zda pro dané ohodnocení (na 2. pásce) je množina klausulí splnitelná

Tento proces může být snadno implementován s polynomiální složitostí přijetí v závislosti na délce vstupního řetězce a tedy $L_{SAT} \in NP$.

Věta 12.10 *Cookův teorém:* Je-li L libovolný jazyk z NP, pak $L \leq_P^m L_{SAT}$.

Důkaz. Protože $L \in NP$, existuje nedeterministický Turingův stroj M a polynom $p(x)$ tak, že pro každé $w \in L$ stroj M přijímá w v maximálně $p(|w|)$ krocích. Jádro důkazu tvoří konstrukce polynomiální redukce f z L na L_{SAT}: Pro každý řetězec $w \in L$ bude $f(w)$ množina klausulí, které jsou splnitelné, právě když M přijímá w. $\square$

NP-úplné jazyky

- Po objevení Cookova teorému se ukázalo, že mnoho dalších NP jazyků má vlastnost podobnou jako L_{SAT}, t.j. jsou polynomiálními redukcemi ostatních NP jazyků.
- Tyto jazyky se – jak již víme – nazývají *NP-úplné* (NP-complete) jazyky.
- Kdyby se ukázalo, že libovolný z těchto jazyků je v P, pak by muselo platit $P = NP$; naopak důkaz, že některý z nich leží mimo P by znamenalo $P \subset NP$.

Význačné NP-úplné problémy

- *Satisfiability*: Je boolovský výraz splnitelný?
- *Clique*: Obsahuje neorientovaný graf kliku velikosti k?
- *Vertex cover*: Má neorientovaný graf dominantní množinu mohutnosti k?
- *Hamilton circuit*: Má neorientovaný graf Hamiltonovskou kružnici?
- *Colorability*: Má neorientovaný graf chromatické číslo k?
- *Directed Hamilton circuit*: Má neorientovaný graf Hamiltonovský cyklus?
- *Set cover*: Je dána třída množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Existuje podtřída k množin $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ taková, že $\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j} = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$?
- *Exact cover*: Je dána třída množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Existuje množinové pokrytí (set cover) tvořené podtřídou po dvojicích disjunktních množin?