

Kapitola 2

Predikátová logika

2.1 Formule predikátové logiky

2.1.1 Příklad. Napište formule predikátové logiky odpovídající následujícím větám. Použijte k tomu predikátových symbolů uvedených v textu.

- a) Někdo má hudební sluch (S) a někdo nemá hudební sluch.
- b) Některé děti (D) nerady čokoládu (C).
- c) Nikdo, kdo nebyl poučen o bezpečnosti práce (P), nesmí pracovat v laboratořích (L).
- d) Ne každý talentovaný malíř (T) vystavuje obrazy v Národní galerii (G).
- e) Pouze studenti (S) mají nárok na studené večere (V).
- f) Ne každý člověk (C), který má drahé lyže (D), je špatný lyžař (S).

Výsledky: a) $(\exists x S(x)) \wedge (\exists x \neg S(x))$;
 b) $\exists x (D(x) \wedge \neg C(x))$;
 c) $\forall x (\neg P(x) \Rightarrow \neg L(x))$;
 d) $\neg(\forall x (T(x) \Rightarrow G(x)))$;
 e) $\forall x (V(x) \Rightarrow S(x))$;
 f) $\neg[\forall x ((C(x) \wedge D(x)) \Rightarrow S(x))]$.

2.1.2 Příklad. Pro následující věty uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly, které potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

- a) Karel viděl Shakespearovu hru Hamlet.
- b) Karel viděl některou Shakespearovu hru.
- c) Někdo viděl Shakespearovu hru Hamlet.
- d) Někdo viděl některou Shakespearovu hru.
- e) Ne každý viděl některou Shakespearovu hru.

f) Karel viděl pouze hry od Shakespeara.

g) Lucernu nenapsal Shakespeare.

Výsledky: Naše objekty jsou lidé a hry. Pro první čtyři věty by stačila tato formalizace: Máme jeden predikátový ternární symbol $V(x, y, z)$, který má význam „osoba x viděla hru y od autora z “. (Tj. na druhém místě trojice (x, y, z) musí být hra, na prvním a třetím musí být osoba.) Dále máme tři konstanty k pro osobu Karla, h pro hru Hamlet a s pro autora Shakespeara. Formule mají tvar:

a) $V(k, h, s)$; b) $\exists y V(k, y, s)$; c) $\exists x V(x, h, s)$; d) $\exists x \exists y V(x, y, s)$.

Chceme-li popsat všechny věty, zavedeme jiné predikátové symboly: Naše objekty jsou opět lidé a hry. Máme unární predikáty H „být hrou“, O „být osobou“, máme binární predikáty $V(x, y)$ „osoba x viděla hru y “ a $N(x, y)$ „osoba x napsala hru y “. Máme čtyři konstantní symboly k „Karel“, h „Hamlet“, s „Shakespeare“ a l „Lucerna“. Formule mají tvar:

a) $N(s, h) \wedge V(k, h)$;
 b) $\exists x (H(x) \wedge V(k, x) \wedge N(s, x))$;
 c) $\exists x (O(x) \wedge V(x, h) \wedge N(s, h))$;
 d) $\exists x \exists y (O(x) \wedge H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y))$;
 e) $\neg [\forall x (O(x) \Rightarrow (\exists y (H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y))))]$;
 f) $\forall x [(H(x) \wedge V(k, x)) \Rightarrow N(s, x)]$;
 g) $\neg N(s, l)$.

2.1.3 Příklad. Pro následující věty uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly, které potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

- a) Eva mluví anglicky i francouzsky.
- b) Každý, kdo mluví německy, mluví i anglicky.
- c) Každý mluví anglicky nebo německy.
- d) Někdo mluví anglicky i německy.
- e) Někteří studenti neumí ani německy ani anglicky.

Výsledky: Naše objekty jsou lidé. Predikátové symboly: A „mluvit anglicky“, N „mluvit německy“, F „mluvit francouzsky“, S „být studentem“. Všechny jsou unární. Máme jeden konstantní symbol e „Eva“.

a) $A(e) \wedge F(e)$;
 b) $\forall x (N(x) \Rightarrow A(x))$;
 c) $\forall x (A(x) \vee N(x))$;
 d) $\exists x (A(x) \wedge N(x))$;
 e) $\exists x (S(x) \wedge \neg N(x) \wedge \neg A(x))$.

2.1.4 Příklad. Pro následující věty uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly, které potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

- a) Každé nezralé ovoce je nezdravé.
- b) Žádné ovoce, které roste ve stínu, není zralé.

- c) Toto jablko rostlo ve stínu a je zralé.
- d) Matka Jany je malířka.
- e) Něčí matka je malířka.
- f) Existuje dívka, jejíž otec je hudebník a matka malířka.
- g) Každý nemá otce hudebníka.

Výsledky: Pro věty a) až c): Objekty jsou kusy ovoce. Predikátové symboly: Z „být zralé“, S „růst ve stínu“, D „být zdravé“ (všechny unární); konstantní symbol j „toto jablko“.

- a) $\forall x (\neg Z(x) \Rightarrow \neg D(x))$;
- b) $\forall x (S(x) \Rightarrow \neg Z(x))$;
- c) $S(j) \wedge Z(j)$.

Pro věty d) až g): Objekty jsou lidé; unární predikáty M „být malířkou“, H „být hudebníkem“, D „být dívkou“; unární funkční symboly $o(x)$ je otec osoby x , $m(x)$ je matka osoby x ; konstantní symbol j „Jana“.

- d) $M(m(j))$;
- e) $\exists x M(m(x))$;
- f) $\exists x (D(x) \wedge H(o(x)) \wedge M(m(x)))$;
- g) $\neg(\forall x H(o(x)))$, nebo též $\exists x \neg H(o(x))$.

2.1.5 Příklad. Zavedte predikátové symboly, funkční symboly a konstanty, které je třeba, abyste zformalisovali následující věty jako sentence predikátového počtu.

- a) Čtverec lichého čísla je vždy liché číslo.
- b) Je-li libovolné číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi.
- c) Existují čísla a, b, c taková, že součet čtverců a a b je roven čtverci c .
- d) Každý čtyřúhelník, který má stejné úhlopříčky, je kosočtverec.

Výsledky:

2.1.6 Příklad. V následujících formulích označte všechny vázané výskyty proměnných a všechny volné výskyty proměnných. V případě, že se nejedná o formuli s čistými proměnnými, napište stejnou formuli, která už čisté proměnné má. Které z formulí jsou sentence a které otevřené formule?

- a) $\forall x \exists y Q(x, y)$;
- b) $Q(f(a, b), y) \Rightarrow (\exists y P(s(y)))$;
- c) $Q(a, b) \vee (\forall x Q(a, x))$;
- d) $Q(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$;
- e) $Q(a, b) \wedge (\exists x \exists y Q(x, y))$;
- f) $(\forall x Q(a, x)) \Rightarrow (\forall x \exists y Q(y, x))$.

2.2 Sémantika predikátové logiky

2.2.1 Příklad. Vyslovte výroky, které odpovídají negacím následujících výroků:

- a) Každá ryba dýchá žábami.
- b) Každý sportovec má dobrou fyzickou kondici.
- c) Někteří studenti nejsou pilní.
- d) Žádné schody nevedou do nebe.
- e) Každý se snaží dostudovat.
- f) Každé liché číslo je prvočíslo.
- g) Každý, kdo jede do Anglie, umí anglicky.
- h) Není šprochu, aby na něm nebylo pravdy trochu.

Výsledky: a) Některé ryby nedýchají žábami.
 b) Někteří sportovci nemají dobrou fyzickou kondici.
 c) Každý student je pilný.
 d) Některé schody vedou do nebe.
 e) Někdo se nesnaží dostudovat.
 f) Některá lichá čísla jsou složená (nejsou prvočísla).
 g) Někdo jede do Anglie i když anglicky neumí.

2.2.2 Příklad. Speciální symboly jazyka predikátové logiky jsou tyto: predikátové symboly P , Q a funkční symbol f , g . Všechny symboly jsou unární.

Je dána interpretace D , I , kde D je množina všech lidí, f odpovídá otci, tj. $I(f)$ přiřazuje osobě x jejího otce, g odpovídá matce, tj. $I(g)$ přiřazuje osobě x její matku, P odpovídá vlastnosti „hrát na piano“, Q odpovídá vlastnosti „hrát na kytaru“.

Napište věty, kterým v této interpretaci odpovídají následující formule:

- a) $\forall x (P(f(x)) \vee Q(g(x)))$;
- b) $\exists x (P(g(x)) \wedge Q(f(x)))$;
- c) $\forall x ((P(f(x)) \vee Q(g(x))) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x)))$;
- d) $\exists x (P(g(f(x))))$;
- e) $\exists y (P(y) \wedge \neg Q(f(g(y))))$;

Výsledky: a) Každý měl otce pianistu nebo matku kytaristku.
 b) Někdo měl matku pianistku a otce kytaristu.
 c) Jestliže měl někdo otce pianistu nebo matku kytaristku, pak sám hraje na piano nebo na kytaru.
 (Uvědomte si, že tady má slovo „někdo“ význam „každý“.)
 d) Něčí babička z otcovy strany je kytaristka.
 e) Někdo je sám pianista navzdory tomu, že jeho dědeček z matčiny strany si na klavír ani nebrnkl.

2.2.3 Příklad. Speciální symboly jazyka predikátové logiky jsou tyto: predikátové symboly P a Q , funkční symboly f , g a konstantní symboly a, b, c , kde P a f jsou unární a Q a g binární.

Je dána interpretace D, I , kde D je množina přirozených čísel; $I(a) = 0$, $I(b) = 1$, $I(c) = 3$,
 $I(f): n \mapsto n^2$, tj. f odpovídá povýšení na druhou,
 $I(g): (m, n) \mapsto m + n$, tj. g odpovídá součtu,
 $I(P) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj. P odpovídá vlastnosti „být sudým“,
 $I(Q) = \{(m, n) \mid m \text{ je dělitelem } n\}$, tj. Q odpovídá relaci „dělitelnosti“.

Rozhodněte o pravdivosti nebo nepravdivosti následujících sentencí:

- a) $P(c)$;
- b) $P(f(a))$;
- c) $P(g(a, f(b)))$;
- d) $Q(a, f(b))$;
- e) $Q(f(b), a)$;
- f) $\forall x Q(x, x)$;
- g) $\exists x Q(f(x), x)$;
- h) $\forall x (Q(c, x) \Rightarrow Q(b, x))$;
- i) $\forall x (Q(b, x) \Rightarrow Q(c, x))$;
- j) $\exists x (P(f(x)) \wedge P(x))$;
- k) $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge P(g(x, y)))$;
- l) $\exists x \exists y (\neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge P(g(x, y)))$.

Výsledky: a) Nepravdivá; b) pravdivá; c) nepravdivá; d) nepravdivá; e) pravdivá; f) nepravdivá (protože 0 nedělí 0); g) pravdivá; h) pravdivá; i) nepravdivá; j) pravdivá; k) pravdivá; l) pravdivá.

2.2.4 Příklad. Pro následující sentence rozhodněte, zda se jedná o tautologie, kontradikce nebo splnitelné sentence, které nejsou tautologie. (P je binární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol.)

- a) $(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$;
- b) $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$;
- c) $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$;
- d) $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x))$;
- e) $\forall x [\exists y Q(x, y) \vee \forall z \neg Q(x, z)]$.

Výsledky: a) Tautologie. b) Tautologie.

c) Splnitelná formule, která není tautologie. Zdůvodnění: Sentence $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$ je pravdivá kdykoli je nepravdivá sentence $\exists x P(x)$. Uvažujme interpretaci: D je množina reálných čísel, predikátový symbol P odpovídá vlastnosti „být odmocninou z -1 “. Protože žádné reálné číslo vlastnost $I(P)$ nemá, je naše sentence pravdivá v D, I . Na druhé straně uvažujme interpretaci: D' je množina přirozených čísel, P odpovídá vlastnosti „být sudý“. Pak formule $\exists x P(x)$ je pravdivá v D', I' , protože existuje sudé přirozené číslo. Formule $\forall x P(x)$ ovšem pravdivá není, protože ne všechna přirozená čísla jsou sudá. Tedy formule $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$ není pravdivá v D', I' .

d) Kontradikce. e) Tautologie.

2.2.5 Příklad. K formuli φ nalezněte formuli ψ tautologicky ekvivalentní s formulí $\neg\varphi$ a takovou, že ψ má negace pouze těsně před atomickými formulemi. (P je unární predikátový symbol, R je binární predikátový symbol a a je konstantní symbol.)

$$\text{a) } \forall x [P(x) \Rightarrow (\exists y (P(y) \wedge R(x, y)))];$$

$$\text{b) } P(a) \vee [\exists z (P(z) \wedge \forall y (R(y, z) \Rightarrow \neg P(y)))].$$

Výsledky: a) $\exists x [P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \vee \neg R(x, y))];$

$$\text{b) } \neg P(a) \wedge [\forall z (\neg P(z) \vee (\exists y (R(y, z) \wedge P(y))))].$$

2.2.6 Příklad. Rozhodněte, zda následující množiny sentencí jsou splnitelné nebo nesplnitelné. Zdůvodněte. (P a R jsou unární predikátové symboly, Q je binární predikátový symbol.)

$$\text{a) } S = \{\forall x \exists y Q(x, y), \forall x \neg Q(x, x)\};$$

$$\text{b) } S = \{\exists x \forall y Q(x, y), \forall x \neg Q(x, x)\};$$

$$\text{c) } S = \{\forall x (P(x) \vee R(x)), \neg \exists x R(x), \neg P(a)\}.$$

Výsledky: a) S je splnitelná. Její model je např. tato interpretace: $D = \mathbb{N}$, $I(Q)$ je relace $<$ na množině \mathbb{N} , tj. $I(Q) = \{(m, n) \mid m < n\}$. Pak pro každé přirozené číslo n existuje číslo větší (např. $n + 1$) a žádné přirozené číslo není větší než ono samo.

b) S je nesplnitelná. „Přečtěme si“ první formuli: „Existuje prvek, řekněme d , takový, že pro každý prvek y dvojice (d, y) má vlastnost Q .“ Dosadíme-li za y prvek d , má dvojice (d, d) také vlastnost Q . Tudíž nemůže být pravdivá druhá formule množiny S , která říká: „Pro žádný prvek x dvojice (x, x) nemá vlastnost Q .“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci D, I , v níž je pravdivá formule $\exists x \forall y Q(x, y)$. Pak existuje prvek $d \in D$, tak, že pro každý prvek $d' \in D$ dvojice $(d, d') \in I(Q)$. Proto také $(d, d) \in I(Q)$. To ovšem znamená, že sentence $\forall x \neg Q(x, x)$ není pravdivá v D, I .

c) S je nesplnitelná. „Přečtěme si“ první a třetí sentenci: „Každý prvek má vlastnost P nebo vlastnost R .“ „Prvek a nemá vlastnost P .“ Jsou-li obě tyto sentence pravdivé v některé interpretaci, pak v této interpretaci musí prvek a mít vlastnost R . To ovšem znamená, že není pravdivá druhá sentence: „Žádný prvek nemá vlastnost R .“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci D, I , v níž je pravdivá první a třetí sentence. Pak existuje prvek $d \in D$ ($d = I(a)$) takový, že $d \notin I(P)$. Protože je pravdivá sentence $\forall x (P(x) \vee R(x))$, musí být pravdivá sentence $P(a) \vee R(a)$. To ale znamená, že je pravdivá $R(a)$ a tudíž $d = I(a) \in I(Q)$. Tedy sentence $\forall x \neg R(x)$ je nepravdivá v D, I .