

• VĚTA: CANTOROVA VĚTA O VHOVĚŠÍCÍCH INTERVALECH

$$\text{NECHť } I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$$

$$\text{PRO } n = 1, 2, \dots$$

$$1 \quad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} : I_n \supset I_{n+1}$$

$$\text{PAK JE } \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cap I_2 \cap \dots \neq \emptyset \quad \text{TEŽK}$$

• EXISTUJE $L \in \mathbb{R}$, TAKŽE $L \in I_n$ PRO VŠECHNĚ $n \in \mathbb{N}$
 POKUD PRO KAŽDÉ $\varepsilon > 0$ EXISTUJE $N \in \mathbb{N}$, TAKŽE
 $b_n - a_n = |I_n| < \varepsilon$ PRO KAŽDÉ $n \geq N$, TAK

$$\text{TAKOVÉ } L \text{ JEDINEČNĚ NEBOU, } \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{L\}$$

DŮKAZ:

$$\bullet a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{I } m > n: \text{ ~~} a_n < a_m < b_m < b_n \text{ }~~$$

$$\bullet L := \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) \quad (a_n < a_m < b_m < b_n \text{ } \text{ (Omezená uspořádaná)})$$

$$\bullet a_n \leq L \text{ PRO VŠECHNĚ } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ NEEXISTUJE } b_m < L$$

$$\Rightarrow a_n < L < b_m \text{ PRO VŠECHNĚ } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow L \in I_n \text{ PRO VŠECHNĚ } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$$

DŮKAZ (DRUHÝ ZPŮSOB):

SPORUM

$$\bullet K, L \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j; \quad K \neq L$$

$$|I_n| \geq |K-L| \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{SPOR při zvolení } \varepsilon = \frac{|K-L|}{2}$$

□

VĚTA: (\mathbb{R} je nepočítatelný)

NEXISTUJE BIJEKČNÍ ZOBRAZENÍ MEZI
KUCHOU \mathbb{N} A \mathbb{R} .

DŮKAZ: CHCEME DOKÁZAT, ŽE NEXISTUJE
 $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ^{BIJEKČNÍ}. DOKÁŽEME, ŽE NEXISTUJE
 $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ SURJEKČNÍ

DOKÁŽEME ŽE PRO KAŽDOU $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,
EXISTUJE $d \in \mathbb{R}$, ŽE $F(n) \neq d$ PRO VŠECHNA
 $n \in \mathbb{N}$.

BUD' $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ POKLOŤME $I_0 = [0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

• I_1 BUDE JEDEN Z INTERVALŮ VE KTERÝCH INTERVALU
NELEŽÍ $F(1)$

• ROZDĚLÍME I_1 NA 3 ^{UBAŇOVACÍ} INTERVALY, I_2 BUDE

JEDEN Z NICH V $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$ A

$F(n) \notin I_n$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \dots \alpha \notin F(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

□

2. POSLOUPNOSTI V \mathbb{R} ČÍSEL

DEFINICE: POSLOUPNOSTÍ ROZUMÍME JAKÉKOLIV

ZOBRAZENÍ $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

NOTACE: MÍSTO $a(n)$ PIŠEME a_n NEBO (a_1, a_2, a_3, \dots)

NEBO $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ NEBO $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq 1}$

PŘÍKLADY: 1) $a_n = 1, 2, 3, 4, \dots$ $a_n = n$

2) $a_n = 2^n$ (2, 4, 8, 16, ...)

3) a_n JE n -TÉ PRVOČÍSLO (2, 3, 5, 7, ...)

REKURENTE ZADANÁ POSLOUPNOST

ad 2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$

4) FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
PRO VŠECHNÁ $n \in \mathbb{N}$

MA' SE UKÁZAT: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

DEFINICE:

- posloupnost a_n je shora omezená pokud,
 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je shora omezená (existuje horní m.)
- posloupnost je zdola omezená...
- je neklesající: $m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n$
- je nerostoucí: $m \leq n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- je klesající: $m \leq n \Rightarrow a_m > a_n$
- je rostoucí: $m \leq n \Rightarrow a_m < a_n$

LIMITA POSLOUPNOSTI

DEF: Necht a_n je posloupnost reálných čísel, pak $L \in \mathbb{R}$ je limitou (a_n) právě když:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : (a_n - L) < \epsilon$$

ZNAČENÍ: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $a_n \rightarrow L$ pro $n \rightarrow \infty$

TERMINOLOGIE: a_n konvergent $\rightarrow L$, pokud
 a_n je konvergentní

pokud a_n není L , je divergentní

PŘÍKLADY:

1) $a_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

necht' $\varepsilon > 0$; $N \in \mathbb{N}$: $N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N$:

$$\frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

2) konstantní posloupnost $(c, c, c, \dots) \rightarrow c$ pro $n \rightarrow \infty$

3) $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$; $a_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$

viz př.

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| = \left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$$

4) $a_n = n^{\frac{1}{2}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty$

$n^{\frac{1}{2}} \geq 1$... tedy $|n^{\frac{1}{2}} - 1| = n^{\frac{1}{2}} - 1$

SPORUM

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N: n^{\frac{1}{2}} - 1 \geq \varepsilon$$

tedy $n^{\frac{1}{2}} \geq 1 + \varepsilon \quad |^n$

$$n \geq (1 + \varepsilon)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \varepsilon^j$$

$$\geq n \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow 1 \geq \varepsilon + \frac{n+1}{2} \varepsilon^2$$

$$2(1 - \varepsilon) \geq (n+1) \varepsilon^2$$

$$\text{NECHť } N: 2n(1 - \varepsilon) < (N+1) \varepsilon^2 < (n+1) \varepsilon^2$$



□

VĚTA: (JEDNOZNAČNOST LIMITY)

KAŽDÁ POSLOUPNOST REČNÍČKŮ CHÍŠEL MÁ NAJVIŠE JEDNU LIMITU.

DŮKAZ: (SPOREM)

$\exists a_n$ KTERÁ MÁ ALESPOL 2 LIMITY ($K < L$)

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \forall n > N_1: |a_n - K| < \frac{\varepsilon = \frac{L-K}{2}}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \forall n > N_2: |a_n - L| < \frac{L-K}{2}$$

$$n \geq \max(N_1, N_2)$$

$$L - K \leq |L - a_n + a_n + K| < |L - a_n| + |K + a_n - K|$$

$$< \frac{L-K}{2} + \frac{L-K}{2} = L-K \quad \text{⚡}$$

□

VĚTA: (OMEZENÁ A MONOTONÍ POSC. JE KONVERGENTNÍ)

JE-LI a_n NEKLESAJÍCÍ A SHORA OMEZENÁ
TAK JE I KONVERGENTNÍ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup(\{a_n | n \in \mathbb{N}\})$$