DŮKAZ (DRUHÁ ČÁST):

SPOREM

- $K, L \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$; $K \neq L$

$$|I_n| \geq |K-L| \text{ PRO VŠECHNA } n \in \mathbb{N}.$$

SPOR PŘI ZVOLENÍ $\varepsilon = \frac{|K-L|}{2}$ $\square$

VĚTA: ($\mathbb{R}$ JE NESPOČETNÁ)

NEEXISTUJE BIJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ MEZI MNOŽINOU $\mathbb{N}$ A $\mathbb{R}$.

DŮKAZ: CHCEME DOKÁZAT, ŽE NEEXISTUJE $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ BIJEKTIVNÍ. DOKÁŽEME, ŽE NEEXISTUJE $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ SURJEKTIVNÍ

DOKÁŽEME ŽE PRO KAŽDOU $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, EXISTUJE $\alpha \in \mathbb{R}$, ŽE $F(n) \neq \alpha$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$.

BUĎ $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ POLOŽME $I_0 = [0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}$

- I_1 BUDE JEDEN Z INTERVALŮ VE KTERÉM INTERVALU NELEŽÍ $F(1)$
- ROZDĚLÍME I_1 NA 3 UZAVŘENÉ INTERVALY, I_2 BUDE JEDEN Z NICH V $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$ A

$F(n) \notin I_n$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

CANTOROVA ~~KA~~ VĚTA MA 16/10/14 ③

$$\implies \exists \alpha \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \;\dots\; \alpha \neq F(n) \text{ PRO VŠECHNA } n \in \mathbb{N}$$

$\square$

2 POSLOUPNOSTI $\mathbb{R}$ ČÍSEL

DEFINICE: POSLOUPNOSTÍ ROZUMÍME JAKÉKOLIV ZOBRAZENÍ $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

NOTACE: MÍSTO $a(n)$ PÍŠEME a_n NEBO $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ NEBO $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ NEBO $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 1}$

PŘÍKLADY: 1) $a_n = 1, 2, 3, 4, \dots$ $\quad a_n = n$

2) $a_n = 2^n$ $(2, 4, 8, 16, \dots)$

3) a_n JE n-TÉ PRVOČÍSLO $(2, 3, 5, 7, \dots)$

REKURENTNĚ ZADANÁ POSLOUPNOST

ad 2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$

4) FIBONACCIHO POSLOUPNOST $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

PAK SE UKÁŽE: $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

DEFINICE:

- POSLOUPNOST a_n JE SHORA OMEZENÁ POKUD, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ JE SHORA OMEZENÁ (EXISTUJE HORNÍ M.
- POSLOUPNOST JE ZDOLA OMEZENÁ...
- JE NEKLESAJÍCÍ: $m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n$
- JE NEROSTOUCÍ: $m \leq n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- JE KLESAJÍCÍ: $m < n \Rightarrow a_m > a_n$
- JE ROSTOUCÍ: $m < n \Rightarrow a_m < a_n$

LIMITA POSLOUPNOSTI

DEF: NECHŤ a_n JE POSLOUPNOST REÁLNÝCH ČÍSEL, PAK $L \in \mathbb{R}$ JE LIMITOU (a_n) PRÁVĚ KDYŽ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

ZNAČENÍ: $L = \lim\limits_{n \to} a_n$, $a_n \to L$ PRO $n \to \infty$

TERMINOLOGIE: a_n KONVERGUJE K L, ~~POKUD~~

a_n JE KONVERGENTNÍ

POKUD a_n NEMÁ L, JE DIVERGENTNÍ

PŘÍKLADY:

1) $a_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

NECHŤ $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$: $N > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n \geq N$:

$\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

2) KONSTANTNÍ POSLOUPNOST $(c, c, c, \dots) \to c$ PRO $n \to \infty$

3) $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$; $a_n \to 0$ PRO $n \to \infty$

VIZ PŘ.

$\left|\frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} + 0\right|$

4) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$; $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

- $n^{\frac{1}{n}} \geq 1 \dots$ TEDY $|n^{1/2} - 1| = n^{\frac{1}{2}} - 1$

SPOREM

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N: n^{\frac{1}{n}} - 1 \geq \varepsilon$

TEDY $n^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \varepsilon \quad /^n$

$$n \geq (1+\varepsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j$$

$$\geq n \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow 1 \geq \varepsilon + \frac{n+1}{2}\varepsilon^2$$

$$2(1 - \varepsilon) \geq (n-1)\varepsilon^2$$

NECHŤ $N: 2n(1-\varepsilon) < (N-1)\varepsilon^2 < (n-1)\varepsilon^2$

$\lightning$ $\square$

VĚTA: (JEDNOZNAČNOST LIMITY)

KAŽDÁ POSLOUPNOST REÁLNÝCH ČÍSEL MÁ NEJVÝŠE JEDNU LIMITU.

DŮKAZ: (SPOREM)

$\exists a_n$ KTERÁ MÁ ALESPOŇ 2 LIMITY $(K < L)$

$\varepsilon = \frac{L - \cancel{K}}{2}$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \forall n > N_1: |a_n - K| < \frac{L-\cancel{K}}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \forall n > N_2: |a_n - L| < \frac{L-K}{2}$

$n \geq \max(N_1, N_2)$

$L - K \leq |L - a_n + a_n + K| < |L - a_n| + |\cancel{K} + a_n - K|$

$< \frac{L-K}{2} + \frac{L-K}{2} = L - K$ $\lightning$ $\square$

VĚTA: (OMEZENÁ A MONOTÓNNÍ POSL. JE KONVERGENTNÍ)

JE-LI a_n NEKLESAJÍCÍ A SHORA OMEZENÁ TAK JE I KONVERGENTNÍ

$$\lim_{n \to \infty} = \sup(\{a_n; n \in \mathbb{N}\})$$

VĚTA: CANTOROVA VĚTA O VNOŘENÝCH INTERVALECH

NECHŤ $I_n = [a_n ; b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$

PRO $n = 1, 2, \ldots$

A $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N} : I_n \supset I_{n+1}$

PAK JE $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \neq \emptyset \ \ldots$ TEDY

EXISTUJE $L \in \mathbb{R}$, TAKŽE $L \in I_n$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

POKUD PRO KAŽDÉ $\varepsilon > 0$ EXISTUJE $N \in \mathbb{N}$, TAKŽE

$b_n - a_n = |I_n| < \varepsilon$ PRO KAŽDÉ $n \geq N$, TAK

TAKOVÉ L JEDINÉ NEBOLI $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{L\}$

DŮKAZ:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$; $m > n$:

  $a_n < a_m < b_m < b_n$
- $L := \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$ (OMEZENÁ USPOŘÁDANÁ)
- $a_n \leq L$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$
- NEEXISTUJE $b_m < L$

$\Rightarrow a_n < L < b_m$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow L \in I_n$ PRO VŠECHNY $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$