Goniometrické identity

$$\sin x = -\sin(-x)$$
$$\cos x = \cos(-x)$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$\mathrm{arccotg} x = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\mathrm{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

Hodnoty gonio. funkcí

$\alpha(deg)$	0	30	45	60	90	180
$\alpha(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	0
cot	N/A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	N/A

Exponenciela a logaritmus

$$x^y = e^{y\log x}$$
$$\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$$

Taylorova řada Pro $f(x)$ v a: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Limity

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1} = 1$$
$$e^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$
$$a>0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to\infty} x^a \log^b x = \infty$$
$$a<0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to\infty} x^a \log^b x = 0$$
$$a>0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to 0} x^a \log^b x = 0$$
$$a<0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to 0} x^a \log^b x = \infty$$
$$a>0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b} = \infty$$
$$a<0, b\in\mathbb{R}: \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b} =$$

Derivace

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$
$$(f\cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(a)$$
$$f'(a) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tabulkové derivace

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$
$$(a^x)' = a^x\log a$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\mathrm{cotg}\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{arccotg}\ x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Limity posloupnosti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow K$$

Průběh funkce

1. $D(f), H(f)$
2. Limity v krajních bodech
3. Derivace
4. Monotonie
5. Extrémy: $f'(x) = 0$
6. Druhá derivace
7. Konvexita $f''(x) \geq 0$, konkávnost $f''(x) \leq 0$
8. Inflexní body
9. Asymptoty $y = kx + q \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = q$
10. Graf

Řady

Nutná podmínka: $\sum a_n < \infty \Rightarrow a_n \to 0$

D'Alambert: $\forall a_n > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$

Limitně: $\forall a_n \geq 0, b_n > 0 : c := \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

1. $0 < c < \infty : \sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty$
2. $c = 0 : \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$
3. $c = \infty : \sum b_n = \infty \Rightarrow \sum a_n = \infty$

Cauchy: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n = \infty$

Leibnitz (neabsolutní): $a_n \to 0 \Rightarrow \sum(-1)^{n+1}a_n \leq \infty$

Ultimátní goniometrická substituce

- $y = \tan(x/2)$
- $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$
- $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$
- $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

Známe integrály

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x = \frac{\pi}{2}$$
$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$
$$\int\frac{x}{1+x} = x - \log(1+x)$$
$$\int\frac{x}{1-x} = -x - \log(1-x)$$

Tipy na substituci

- $\sqrt{1-x^2}\ldots x = \sin(t)$
- $\sqrt{x^2-1}\ldots x = \cosh(t)$
- $\sqrt{x^2+1}\ldots x = \sinh(t)$

Aplikace

- délka: $l(\varphi) = \int\limits_a^b\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + \ldots}\mathrm{d}t$
- plocha: $S = \int\limits_a^b(g-f)\mathrm{d}x$
- objem: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$
- povrch: $S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$

Konvergence

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} K \Leftrightarrow p<1$$
$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} K \Leftrightarrow p<1$$

Více proměnných

Parciální derivace jsou zaměnitelné pouze na spojitém okolí (většinou polynomy)

Diferenciál v a: $L(h_1,...,h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = 0$

Tečná nadrovina v a: $x_{n+1} = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$

Směrová derivace: $D_v f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s : (g\circ f)'(a) = g'(f(a))\circ f'(a)$

Tipy na limity

- $y=0$
- $y=kx\ldots$(často $k=1$)
- $y=x^2$
- $y=\frac{1}{x}$
- převod na pol. souřadnice

Převod na polární souřadnice

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y)$$
$$\Downarrow$$
$$x = a_x + r\cdot\cos\varphi$$
$$y = a_y + r\cdot\sin\varphi$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{r\to 0} f(a_x + r\cdot\cos\varphi, a_y + r\cdot\sin\varphi)$$

Per partes

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$
$$\int_a^b f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$$

Substituce

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) = \int f(x)$$
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) = \int_{\varphi(a+)}^{\varphi(b-)} f(x)$$

Eul. subst. 1. druhu

$$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) \to y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Eul. subst. 2. druhu

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} \to t+x = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

Derivace implic. funkcí

- vyjádřit vhodnou funkci pomocí zbylých proměnných
- zderivovat každou stranu zvlášť (a to podle všech zbylých proměnných)
- postupně vyjádřit derivace
- popř. zderivovat znovu (z rovnice, ne z vyjádření)

Jednostranná derivace (snad)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i\to a_i} f(a_1,\ldots x_i,\ldots a_n)$$

Vázané extrémy

$$Funkce f(x,y,z); mnozina M$$
$$M = \{g_1(x,y,z) < 1\ldots g_n(x,y,z) < 0\}$$
$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i$$

Extrémy

1. Všechny parciální derivace 1. stupně
2. Stacionnární body (vyřešit soustavu rovnic parciálních derivacích položených nule)
3. Všechny parciální derivace 2. stupně
4. Pro každý stac. bod sestavit Jacobiho matici
5. Otestovat pos. (neg.) definitnost → minimum (maximum)

Hodně štěstí!

http://prints.os1.cz/13/