Kolektiv

MATEMATIKA
Přijímací zkoušky na ČVUT

Praha 2001
Vydavatelství ČVUT

Lektoři: doc. RNDr. Čeněk Zlatník, CSc.
doc. RNDr. Ludmila Machačová, CSc.

ISBN 80-01-02323-0

N	...	množina všech přirozených čísel
Z	...	množina všech celých čísel
Q	...	množina všech racionálních čísel
R	...	množina všech reálných čísel
C	...	množina všech komplexních čísel
$R - \{a\}$	...	množina všech reálných čísel různých od a
$R - \{a, b\}$	...	množina všech reálných čísel různých od a a b
$a = b$	...	a rovná se b
$a \doteq b$	...	a se přibližně rovná b
$a \neq b$	...	a se nerovná (je různé od) b
$a > b$	...	a je větší než b
$a \geq b$	...	a je větší nebo se rovná b
$a < b$	...	a je menší než b
$a \leq b$	...	a je menší nebo se rovná b
$a \pm b$	...	a plus nebo minus b
(a, b)	...	otevřený interval
$\langle a, b\rangle$	...	uzavřený interval
$\langle a, b)$	...	polouzavřený interval
$(a, b\rangle$	...	polouzavřený interval
∞	...	nekonečno
$(-\infty, a)$	...	interval neomezený zleva
$(a, +\infty)$	...	interval neomezený zprava
$(-\infty, +\infty)$	...	oboustranně neomezený interval, množina všech reálných čísel
$\|a\|$	...	absolutní hodnota čísla a
$\sqrt{a}$	...	druhá odmocnina z nezáporného čísla a
a^n	...	n-tá mocnina čísla a
$\sqrt[n]{a}$	...	n-tá odmocnina čísla a
$\log_a x$	...	logaritmus čísla x o základu a
$\log x$	...	dekadický logaritmus čísla x, logaritmus o základu 10
$\ln x$	...	přirozený logaritmus čísla x, logaritmus o základu e
π	...	Ludolfovo číslo, délka oblouku půlkružnice o poloměru jedna
e	...	Eulerovo číslo, základ přirozených logaritmů
i	...	komplexní jednotka ($i^2 = -1$)
$z = x + iy$	...	algebraický tvar komplexního čísla z
$\overline{z} = x - iy$	...	číslo komplexně sdružené k číslu z
$a \in M$	...	a je prvkem množiny M
$a \notin M$	...	a není prvkem množiny M
$A \subset B$	...	množina A je podmnožinou množiny B
$A \cup B$	...	sjednocení množin A, B
$A \cap B$	...	průnik množin A, B
$A - B$	...	množina všech bodů z množiny A, které nepatří do množiny B
$\emptyset$	...	prázdná množina (neobsahuje žádný prvek)
$\bigcup_{k \in Z} A_k$	...	sjednocení všech množin A_k, kde $k \in Z$
$\{a, b, \dots\}$	...	množina daná výčtem svých prvků
$U \wedge V$	...	konjunkce, platí U a zároveň platí V
$U \vee V$	...	disjunkce, platí U nebo platí V
$U \Leftrightarrow V$	...	ekvivalence, U platí právě tehdy, když platí V
$U \implies U$	...	implikace, z U plyne V

$f(x)$	...	hodnota funkce f v bodě x
$D(f)$	...	definiční obor funkce f
$H(f)$	...	obor hodnot funkce f
$\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$	...	množina všech uspořádaných dvojic, kde $x \in D(f)$
$f : y = f(x)$	...	funkce daná předpisem f
f^{-1}	...	funkce inverzní k funkci f
sin	...	funkce sinus
cos	...	funkce kosinus
tg	...	funkce tangens
cotg	...	funkce kotangens
$y = a^x$	...	exponenciální funkce o základu a
$y = e^x$	...	exponenciální funkce o základu e
$\log_a$	...	logaritmická funkce o základu a
log	...	logaritmická funkce o základu 10
ln	...	logaritmická funkce o základu e
$[x, y]$	...	bod o souřadnicích x, y
$A[x, y]$	...	bod A má souřadnice x, y
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	...	nekonečná posloupnost (posloupnost)
a_n	...	n-tý člen posloupnosti
s_n	...	součet prvních n členů posloupnosti
$A \in p$	...	bod A leží na přímce p
$A \notin p$	...	bod A neleží na přímce p
$A = B, (A \neq B)$	...	bod A je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a \perp b$	...	přímka a je kolmá k přímce b
$a \parallel b$	...	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$\triangle ABC$	...	trojúhelník ABC
v_c	...	výška v $\triangle ABC$ z vrcholu C na protější stranu AB
t_a	...	těžnice v $\triangle ABC$ z vrcholu A na stranu BC
$a \cap b$	...	průsečík přímek a, b
$\|AB\|$	...	délka úsečky AB, vzdálenost bodů A, B
$\|\sphericalangle AVB\|$	...	velikost konvexního úhlu AVB (s vrcholem V a rameny VA a VB)
$k(S; r)$	...	kružnice k se středem S a poloměrem r
$\|\frown AB\|$	...	délka kružnicového oblouku AB
$\mathbf{u}$	...	vektor u
$\mathbf{o}$	...	nulový vektor
$\|\mathbf{u}\|$	...	velikost vektoru $\mathbf{u}$
$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$	...	vektor $\mathbf{u}$ o souřadnicích u_1, u_2

Obsah

Předmluva 7

Kapitola 1. **Algebraické výrazy** 9

Kapitola 2. **Funkce** 19

2.1. Lineární funkce 24
2.2. Kvadratická funkce 30
2.3. Lineární lomená funkce 35
2.4. Mocninné funkce 42
2.5. Goniometrické funkce 48
2.6. Exponenciální funkce 55
2.7. Logaritmická funkce 59

Kapitola 3. **Rovnice** 64

3.1. Lineární rovnice 64
3.2. Kvadratická rovnice 66
3.3. Goniometrické rovnice 74
3.4. Exponenciální a logaritmické rovnice 79

Kapitola 4. **Nerovnice** 86

4.1. Lineární nerovnice 86
4.2. Kvadratické nerovnice 96

Kapitola 5. **Posloupnosti** 104

Kapitola 6. **Komplexní čísla** 117

Kapitola 7. **Geometrie v rovině** 132

Kapitola 8. **Geometrie v prostoru** 152

Kapitola 9. **Analytická geometrie** 166

9.1. Vektory 166
9.2. Analytická geometrie v rovině 170
9.3. Kuželosečky 182
9.4. Přímky a roviny v prostoru 196

Kapitola 10. **Testy** 201

10.1. Test č. 1 201
10.2. Test č. 2 205
10.3. Test č. 3 208
10.4. Test č. 4 212
10.5. Test č. 5 214

Předmluva

Vážení čtenáři,

pokud se Vám dostala do ruky tato knížka, získali jste databázi úloh středoškolské matematiky, ze které se vybírají příklady u přijímací zkoušky z matematiky na ČVUT. Knížka nemá tradiční strukturu příručky pro přípravu na přijímací zkoušky z matematiky. Při letmém prohlédnutí obsahu zjistíte, že zahrnuje tradiční partie středoškolské matematiky a tradičně formulované standardní úlohy z těchto partií a je jen jakousi sbírkou (vybraných) příkladů. Pokud byste chtěli při přípravě na přijímací zkoušku sáhnout po nějaké příručce, doporučujeme vám knížku V. Sedláčková, M. Hyánková: *Matematika pro zájemce o studium na vysokých školách technických*, 2. přepracované vydání, Praha, ČVUT, 1995, 249 s.

Všechny kapitoly této sbírky mají stejnou strukturu. V každé jsou zopakovány základní pojmy, následuje několik vybraných řešených úloh a nakonec je uvedeno několik neřešených příkladů na procvičení. Příklady jsou formulovány běžným způsobem. Poslední kapitola obsahuje ukázky testů, které se u přijímacích zkoušek z matematiky na ČVUT používají na většině fakult. Od akademického roku 2000/2001 je test přijímací zkoušky z matematiky na všech fakultách ČVUT stejný, pouze na Fakultě architektury není přijímací zkouška z matematiky tak rozsáhlá a příklady v ní jsou obsaženy v kapitolách 1, 2, 4 a 10.

K poslední kapitole monografie a testům učiníme několik poznámek. První dva testy seznamují čtenáře s tím, jak se změní formulace příkladu, jsou-li v něm nabídnuty odpovědi. V každém příkladu je to pět odpovědí, z nichž právě jedna je správná. U většiny příkladů je v těchto testech odkaz na úlohu v předcházejících kapitolách, která je s příkladem ekvivalentní. Čtenář si tak může v těchto úlohách porovnat, jak se změnila formulace příkladů. U dvou typů úloh odkazy nenajdeme. Jde o nerovnice s jednou absolutní hodnotou (např. příklad 13 v testu č. 1, resp. 2) a jednoduché vlastnosti goniometrických funkcí (např. příklad 15 v testu č. 2). Příklady na výrazy s logaritmy (např. příklad 4 v testu č. 2) jsou také uvedeny jako typy a v testu se mohou objevit v modifikované (analogické) podobě. Pokud ostatní úlohy v testech jsou vybírány pouze z příkladů sbírky, mohou se tyto typy příkladů v testech lišit numerickým zadáním.

Sbírka vznikala více než rok a na její tvorbě se podílela celá řada pracovníků kateder matematiky ČVUT. Vedle autorů uvedených v podtitulech to byli RNDr. Dana Kolářová (Fakulta architektury), Mgr. Šárka Voráčová (Fakulta dopravní), RNDr. Marie Ludvíková, CSc., RNDr. Jura Charvát, CSc., RNDr. Václav Kelar, CSc., RNDr. Zdeněk Šibrava, CSc. (Fakulta stavební). Významnými připomínkami přispěli ke konečné podobě jak osnovy monografie, tak vlastního textu prof. RNDr. Marie Demlová, CSc., doc. RNDr. Ludmila Machačová, CSc., a doc. RNDr. Čeněk Zlatník, CSc. Za jejich cenné připomínky děkujeme.

Věříme, že sbírka úloh pomůže všem uchazečům o studium na ČVUT v přípravě na přijímací zkoušku. Přejeme vám při řešení úloh hodně úspěchů.

V Praze dne 30. 11. 2000 *Autoři*

Kapitola 1.

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Výraz. Přesná definice výrazu by byla poněkud složitější. Pro naše účely budeme výrazem rozumět matematický objekt, který představuje správně zapsanou kombinaci čísel, proměnných, závorek a symbolů funkcí a matematických operací. Navíc budeme předpokládat, že všechny proměnné jsou z oboru reálných čísel. Pro zjednodušení budeme v dalším textu výrazy označovat velkými písmeny.

Smysl výrazu. Řekneme, že výraz A má pro dané hodnoty proměnných smysl, pokud při dosazení těchto hodnot do výrazu a postupném výpočtu jsou argumenty všech ve výraze obsažených funkcí a matematických operací z přípustného oboru.

Rovnost výrazů. Řekneme, že výrazy A, B jsou si rovny na společném oboru proměnných M právě tehdy, když:

1) Oba výrazy mají smysl pro všechny hodnoty proměnných z množiny M.
2) Oba výrazy nabývají pro stejné hodnoty proměnných stejných hodnot.

Zjednodušení výrazu. Řekneme, že výraz B je zjednodušením výrazu A právě tehdy, když:

1) Oba výrazy jsou si rovny na neprázdném oboru proměnných M.
2) Výraz B obsahuje méně funkcí a symbolů matematických operací, případně i méně proměnných než výraz A.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Výraz

$$(2a-b)^2-(2b-a)^2$$

rozložme na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

Řešení. Pro všechna $a, b \in \mathsf{R}$ platí:

$$(2a-b)^2-(2b-a)^2=[(2a-b)-(2b-a)]\cdot[(2a-b)+(2b-a)]=\\ =3(a-b)(a+b).$$

▷ **PŘÍKLAD 2.** Zjednodušme výraz

$$\frac{a-2b}{a+b}-\frac{b-2a}{a-b}-\frac{2a^2}{a^2-b^2}\,.$$

Řešení. Výraz má zřejmě smysl pouze za předpokladu $a \neq b \wedge a \neq -b$. Za tohoto předpokladu lze psát:

$$\frac{a-2b}{a+b}-\frac{b-2a}{a-b}-\frac{2a^2}{a^2-b^2}=\\ =\frac{(a-2b)(a-b)-(b-2a)(a+b)-2a^2}{a^2-b^2}=\\ =\dots=\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}\,.$$

Všimněme si, že výsledný výraz je definován i v případě $a=b$. Definice rovnosti výrazů ovšem vyžaduje, aby smysl měl jak původní, tak i upravený výraz, a proto je k výsledku nutno uvést obě výchozí podmínky.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Za předpokladu $a \geqq 0$ zjednodušme výraz

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\,.$$

Řešení. S podmínkou uvedenou v zadání úlohy má výraz vždy smysl. Proto můžeme přistoupit k jeho úpravám:

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdot a^{\frac{1}{16}}=a^{\frac{15}{16}}=\sqrt[16]{a^{15}}.$$

▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme podmínky, za kterých má smysl výraz

$$\left(\frac{\sqrt{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}{3a}\right)^{-1}.$$

Řešení. Jmenovatel zlomku v závorce zřejmě nesmí být nulový. První podmínkou proto je

$$a \neq 0.$$

Dále výraz pod odmocninou v čitateli zlomku musí být nezáporný. Vzhledem k tomu, že platí

$$(a+1)\sqrt[3]{a+1} = \sqrt[3]{(a+1)^4} \geqq 0 \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathsf{R},$$

je tento požadavek splněn. Poslední operací, kterou musíme vzít v úvahu, je převrácená hodnota celého zlomku. Ta je definována pouze v případě, že zlomek (resp. jeho čitatel) není roven 0. Odtud dostáváme druhou podmínku

$$a \neq -1.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Výraz $(a-b)c^2 + (b-a)c^4$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

2. Výraz $(v^2+1)^2 - (v^2-2v-1)^2$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

3. Výraz $(x+1)^4 - x^4 + 2x^2 - 1$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

4. Výraz $(x-y)^3 - x^3 + y^3$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

5. Výraz $36 - 9x^4 - 4x^2 + x^6$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

6. Výraz $21z - 49z^2 + 9t^2 - 9t$ rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

7. Zjednodušte výraz $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{3x - 12}$.

8. Zjednodušte výraz $\dfrac{96a^3b^7 - 24a^5b^5}{24a^5b^6 - 12a^6b^5}$.

9. Zjednodušte výraz $\dfrac{(x+y)^2 - z^2}{(x+z)^2 - y^2}$.

10. Zjednodušte výraz $\dfrac{a}{1-a} - \dfrac{1-a}{a} - \dfrac{1}{a^2 - a}$.

11. Zjednodušte výraz $\dfrac{a-1}{a} - \dfrac{a}{a-1} - \dfrac{1}{a^2 - a}$.

12. Zjednodušte výraz $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} - \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^3}$.

13. Zjednodušte výraz $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.

14. Zjednodušte výraz

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

15. Za předpokladu $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $a \neq b$ zjednodušte výraz

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2.$$

16. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{a^2}{a+2}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{a^2 - 4}{a}\right)^{-1}$.

17. Zjednodušte výraz $\dfrac{a}{a^2 - 4} \left(\dfrac{a^2}{a+2}\right)^{-1}$.

18. Za předpokladu $v \neq 1$ a $v \neq -1$ zjednodušte výraz

$$\left[(1-v)^{-1} + (1+v)^{-1}\right]^{-1}.$$

19. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{m}{n} - \dfrac{n}{m}\right) : \dfrac{m^2 - n^2}{2m^2n^2}$.

20. Za předpokladu $z \neq 0$, $z \neq 1$, $z \neq 3$ a $z \neq -3$ zjednodušte výraz

$$\left(\frac{z^2 - z}{z^2 - 9}\right)^{-1} : \frac{z^2 - 3z}{z - 1} .$$

21. Zjednodušte výraz $\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) : \dfrac{x^2 - 2xy}{x^2 + 2xy}$.

22. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{x - y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - y}\right) : \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

23. Zjednodušte výraz $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + ab} : \left(\dfrac{a}{a - b} - \dfrac{b}{a + b}\right)$.

24. Zjednodušte výraz $\left[\dfrac{b(a - b)}{1 + ab} - 1\right] : \left[\dfrac{a - b}{1 + ab} + b\right]$.

25. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{x - 5}{x + 1} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{2x - 1}{x + 1}\right)$.

26. Zjednodušte výraz $\left[\dfrac{3ab}{a + 1} + \dfrac{a^2}{(a + 1)^3}\right] : \left[\dfrac{3ab + 1}{a} - \dfrac{2a + 1}{a(a + 1)^2}\right]$.

27. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 1} : \dfrac{6x - 6}{x^4 - 1}\right) : \dfrac{x + 1}{3}$.

28. Za předpokladu $n \neq 0$, $n \neq 2$ a $n \neq -2$ zjednodušte výraz

$$\left[\left(\frac{n + 2}{n - 2}\right)^3 : \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12}\right] \cdot \frac{n}{3} .$$

29. Zjednodušte výraz $\dfrac{1}{a - b}\left(1 + \dfrac{a}{a + b}\right) - \dfrac{1}{a + b}\left(1 + \dfrac{b}{a - b}\right)$.

30. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{1}{a - 1} - \dfrac{1}{a + 1} - 1\right) : \dfrac{1}{a^2 - 1} - 3 + a^2$.

31. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{1}{1 - a} - 1\right) : \left(a - \dfrac{1 - 2a^2}{1 - a} + 1\right) - \dfrac{1}{a}$.

32. Zjednodušte výraz $\left[\dfrac{a+b}{2(a-b)}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}-\dfrac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\cdot\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$.

33. Zjednodušte výraz

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+2x+1}\right):\frac{4}{(x^2-1)^2}\,.$$

34. Zjednodušte výraz $2u-\left(\dfrac{2u-3}{u+1}-\dfrac{u+1}{2-2u}-\dfrac{u^2+3}{2u^2-2}\right)\cdot\dfrac{u+1}{u^2-u}$.

35. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+1\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}+1\right)$.

36. Zjednodušte výraz $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2\right]:\left(\dfrac{2}{ab}\right)^2$.

37. Zjednodušte výraz $\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}:\left[\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\right]$.

38. Zjednodušte výraz

$$\left[(-x)^{-2n}:(-x)^{-2n-1}\right]^{-2}:\left[(-x)^{2n+1}(-x)^{-2n+1}\right]^3.$$

39. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{x^{-2}-x^{-4}}{x^{-2}-1}\right)^{-1}:\left(\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}}\right)^{-1}$.

40. Zjednodušte výraz $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}\,$.

41. Zjednodušte výraz $\sqrt{\dfrac{1}{m^2}\sqrt{\dfrac{1}{m}\sqrt{m}}}\,$.

42. Za předpokladu $x>0$ zjednodušte výraz $\dfrac{2\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{8x}}\,x^{\frac{1}{12}}$.

43. Zjednodušte výraz $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt{a^3}}}\,$.

44. Zjednodušte výraz $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}\,\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{ba^{-3}}}}$.

45. Zjednodušte výraz $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}\right)^2}$.

46. Za předpokladu $x > 0$ zjednodušte výraz $\sqrt[3]{\dfrac{x^2\sqrt{x^{-5}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}}$.

47. Zjednodušte výraz $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}}$.

48. Zjednodušte výraz $a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{y^{-\frac{1}{3}}a\sqrt{y^{\frac{4}{3}}}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{y}}$.

49. Zjednodušte výraz $\left(\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{ab}}\right)^{-2}}\right)^{-1}$.

50. Zjednodušte výraz $\left(\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{a^5}}}}}\right)^{-1}$.

51. Za předpokladu $a > 0,\ b > 0$ zjednodušte výraz $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}\right)^{-2}}$.

52. Zjednodušte výraz $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{a}} : \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}$.

53. Zjednodušte výraz $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}} : \dfrac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$.

54. Zjednodušte výraz $\dfrac{\sqrt{a}\cdot b^{-\frac{1}{4}}}{(\sqrt{ab})^{-\frac{1}{2}}} : \dfrac{a^{-\frac{1}{4}}}{b^{-1}}$.

55. Určete podmínky, za kterých má smysl výraz $\dfrac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$.

56. Určete podmínky, za kterých má smysl výraz

$$(x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right).$$

57. Určete podmínky, za kterých má smysl výraz

$$\frac{1}{\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1)}}.$$

58. Určete podmínky, za kterých má smysl výraz

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$$

59. Určete podmínky, za kterých má smysl výraz

$$\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}.$$

60. Pro která a je výraz

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$$

roven -1?

61. Výraz x^3+2x^2-x-2 rozložte na součin mnohočlenů s co nejnižšími stupni.

62. Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{u}{u-v}-\dfrac{v}{u+v}\right):\left(\dfrac{v}{u-v}+\dfrac{u}{u+v}\right)$.

63. Pro která x je výraz

$$\frac{4x^{-\frac{1}{2}}}{1-(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^{-2}}\cdot\frac{x}{(1-\sqrt{x})^2}$$

roven -1?

Výsledky

1. $(b-a)c^2(c+1)(c-1)$

2. $4v(v+1)(v-1)$

3. $4x(x+1)^2$

4. $3xy(y-x)$

5. $(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-3)(x+3)$

6. $(3t-7z)(3t+7z-3)$

7. $\dfrac{x-4}{3}$ pro $x \neq 4$

8. $\dfrac{2(a+2b)}{a^2}$, pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 2b$

9. $\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$, pokud $(x+z)^2 \neq y^2$

10. $\dfrac{2}{1-a}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq 1$

11. $\dfrac{2}{1-a}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq 1$

12. 0 pro $x \neq -1$

13. 2 pro $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

14. $\dfrac{1}{abc}$, pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c$

15. $(a+b)^2$

16. $\dfrac{1}{a(a-2)}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -2$

17. $\dfrac{1}{a(a-2)}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -2$

18. $\dfrac{1-v^2}{2}$

19. $2mn$, pokud $m \neq 0 \wedge n \neq 0 \wedge m \neq n \wedge m \neq -n$

20. $\dfrac{z+3}{z^2}$

21. x^2-4y^2 pro $x \neq 0 \wedge x \neq 2y \wedge x \neq -2y$

22. -4, pokud $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq y \wedge x \neq -y$

23. $\dfrac{a-b}{a}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$

24. $-\dfrac{1}{a}$, pokud $a \neq 0 \wedge ab \neq -1$

25. -2, pokud $x \neq -1 \wedge x \neq 2$

26. $\dfrac{a}{a+1}$, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq -1 \wedge 3b \neq -\dfrac{a}{(a+1)^2}$

27. $(x-1)^2$, pokud $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

28. $\dfrac{n+2}{n-2}$

29. $\dfrac{1}{a-b}$, pokud $a \neq -b \wedge a \neq b$

30. 0, pokud $a \neq 1 \wedge a \neq -1$

31. 0, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq 1$

32. $\dfrac{2}{a}$, pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$

33. 1, pokud $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

34. $\dfrac{2(u^2-1)}{u}$ pro $u \neq 0 \wedge u \neq 1 \wedge u \neq -1$

35. 1, pokud $a \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$

36. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{4}$, pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

37. $\dfrac{a+b}{a-b}$, pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$

38. x^{-8} pro $x \neq 0$

39. $-x^2\sqrt{x}$ pro $x > 0 \wedge x \neq 1$

40. $\sqrt[12]{a^{29}}$ pro $a \geqq 0$

41. $\sqrt[8]{\dfrac{1}{m^9}}$ pro $m > 0$

42. $\sqrt{x}$

43. $\dfrac{1}{a}$ pro $a > 0$

44. $\sqrt[12]{a^{20}b}$, pokud $a > 0 \wedge b > 0$

45. $\sqrt[3]{a}$ pro $a > 0$

46. $x^{-\frac{2}{9}}$

47. $a\sqrt[12]{a}$ pro $a > 0$

48. $\sqrt[3]{a^2y}$, pokud $a > 0 \wedge y > 0$

49. $\sqrt[12]{a^3b}$, pokud $a > 0 \wedge b > 0$

50. $\sqrt[16]{a^{15}}$ pro $a > 0$

51. $\sqrt[12]{a^2b}$

52. $\sqrt[8]{a^3}$ pro $a > 0$

53. $\sqrt[6]{ab}$ pro $a > 0 \wedge b > 0$

54. $\dfrac{a}{b}$ pro $a > 0 \wedge b > 0$

55. $a \neq 0 \wedge a \neq x$

56. $x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 4$

57. $x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$

58. $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq -n \wedge n \neq 0 \wedge n \neq 1$

59. $a > 1$

60. $a \in \{-1\} \cup (0,1)$

61. $(x+2)(x+1)(x-1)$

62. 1 pro $u \neq v \wedge u \neq -v$

63. $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

Kapitola 2.

FUNKCE

Funkce se nazývá každé zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel.

Funkci budeme vždy definovat předpisem, který reálnému číslu x přiřazuje právě jedno reálné číslo $f(x)$ (hodnota funkce v bodě x).

Množina **všech** reálných čísel, pro která má předpis funkce f smysl, se nazývá *definiční obor* funkce f, značíme $D(f)$. Definiční obor funkce je tedy největší podmnožina reálných čísel, na které je funkce f definovaná (používá se i název maximální definiční obor). Funkci můžeme vyšetřovat i na podmnožinách $D(f)$.

Obor hodnot funkce f je množina $H(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$.

Graf funkce f (ve zvolené kartézské soustavě souřadnic Oxy v rovině) je množina $G(f) = \{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$.

Poznámka. V daším textu budeme pro funkci používat zápis typu $f\colon y = \sqrt{1-x^2}$ nebo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Nebude-li zadána množina, na níž máme funkci vyšetřovat, je nutné vždy určit definiční obor funkce. Pro danou funkci f určíme množinu **všech** reálných čísel x, pro která má výraz $\sqrt{1-x^2}$ smysl, tedy $D(f) = \langle -1, 1\rangle$.

Vlastnosti funkcí (f je funkce, J je interval, $J \subset D(f)$):

- funkce *prostá* – pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$
- funkce *rostoucí* na J – pro všechna $x_1, x_2 \in J$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$
- funkce *klesající* na J – pro všechna $x_1, x_2 \in J$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$
- funkce *sudá* – 1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
  2. pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$
- funkce *lichá* – 1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
  2. pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$

- funkce *periodická* – existuje číslo $p \in \mathsf{R} - \{0\}$ (tzv. *perioda* funkce f) takové, že platí:
  1. pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$
  2. pro každé $x \in D(f)$ je $f(x \pm p) = f(x)$

Poznámka. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadnic.

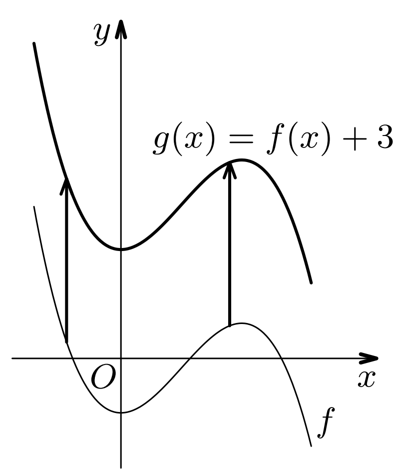
Funkce *inverzní* k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$,
2. každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno to $x \in D(f) = H(f^{-1})$, pro které $f(x) = y$.

Poznámka. Protože jsme zvyklí značit nezávisle proměnnou x, zaměníme v zápise inverzní funkce x a y. Podle úmluvy vynášíme nezávisle proměnnou na osu x a funkční hodnoty na osu y, pak grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

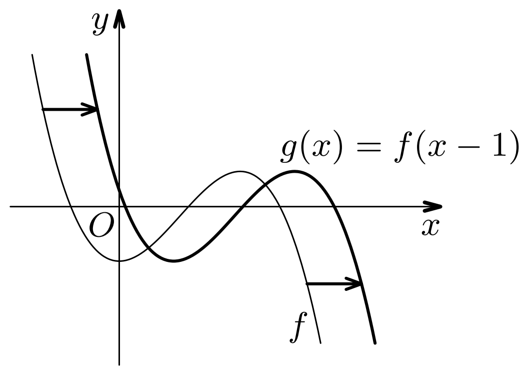
Připomeňme si, jak ze známého grafu funkce f získáme grafy dalších funkcí.

1. $g(x) = f(x) + c, \;\; c \in \mathsf{R} - \{0\}$



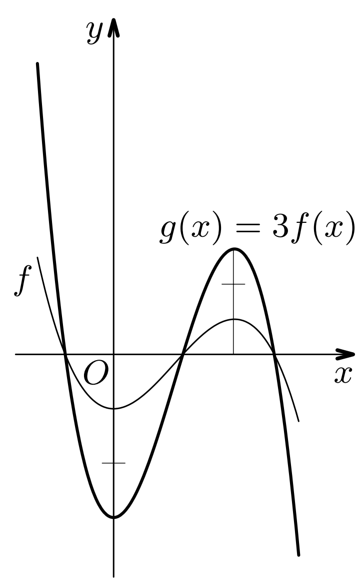
Funkční hodnoty funkcí f, g se v každém bodě x liší o danou konstantu c, $g(x) - f(x) = c$. Graf funkce g získáme posunutím grafu funkce f o c jednotek ve směru osy y. Pro $c > 0$ se jedná o posunutí ve směru kladné poloosy y, pro $c < 0$ o posunutí ve směru záporné poloosy y.

2. $g(x) = f(x + c), \;\; c \in \mathsf{R} - \{0\}$



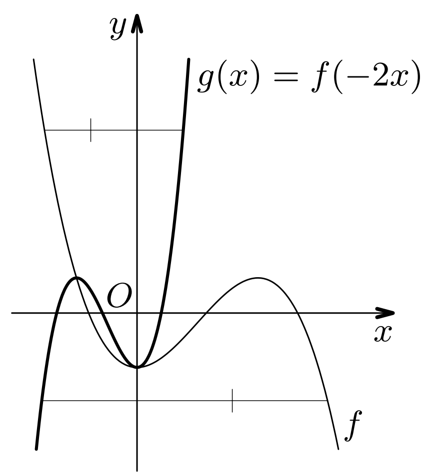
Funkce g má v bodě $x - c$ stejnou funkční hodnotu jako funkce f v bodě x, $g(x - c) = f(x)$. Graf funkce g získáme posunutím grafu funkce f o c jednotek ve směru osy x. Pro $c > 0$ jde o posunutí ve směru záporné poloosy x, pro $c < 0$ o posunutí ve směru kladné poloosy x.

3. $g(x) = cf(x), \;\; c \in \mathsf{R} - \{0\}$



Funkční hodnota funkce g v bodě x je c-násobkem funkční hodnoty $f(x)$. Vzdálenost bodu $[x, g(x)] = [x, cf(x)]$ od osy x je $|c|$-násobkem vzdálenosti bodu $[x, f(x)]$ od osy x. Pro $c > 0$ je bod $[x, g(x)]$ ve stejné polorovině s hraniční přímkou v ose x jako bod $[x, f(x)]$, pro $c < 0$ v polorovině opačné.

4. $g(x) = f(cx), \;\; c \in \mathsf{R} - \{0\}$



Funkce g má v bodě x/c stejnou funkční hodnotu jako funkce f v bodě x, $g(x/c) = f(x)$. Vzdálenost bodu $[x/c, g(x/c)] = [x/c, f(x)]$ od osy y je $(1/|c|)$-násobkem vzdálenosti bodu $[x, f(x)]$ od osy y. Pro $c > 0$ je bod $[x/c, g(x/c)]$ ve stejné polorovině s hraniční přímkou v ose y jako bod $[x, f(x)]$, pro $c < 0$ v polorovině opačné.

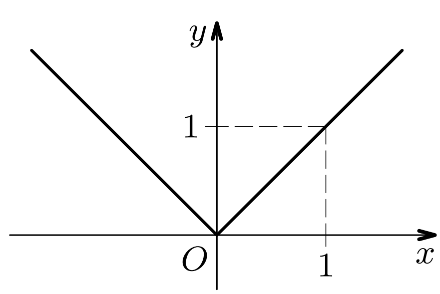
Další funkce lze získat z dané funkce f použitím absolutní hodnoty. Připomeňme si definici absolutní hodnoty reálného čísla.

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:

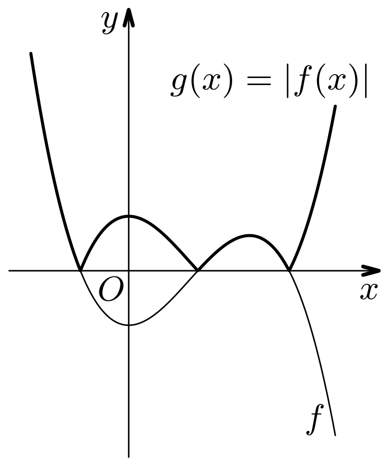
je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$,

je-li $a < 0$, je $|a| = -a$.

Funkce absolutní hodnota je funkce $y = |x|$, definiční obor je R. Graf funkce absolutní hodnota:

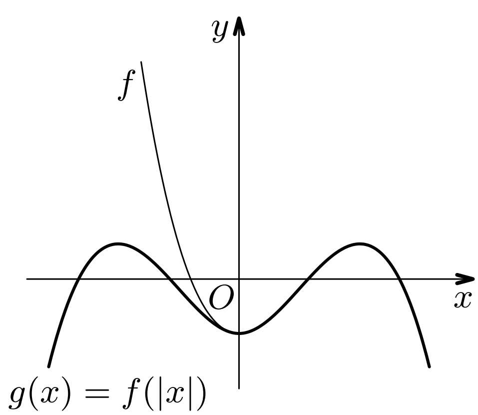


5. $g(x) = |f(x)|$



Funkční hodnoty funkce g jsou čísla nezáporná. Graf funkce g je v polorovině $y \geqq 0$ s hraniční přímkou v ose x. Pro $f(x) \geqq 0$ je $g(x) = f(x)$, pro $f(x) < 0$ je $g(x) = -f(x)$. Graf funkce g získáme z grafu f tak, že část grafu funkce f „nad“ osou x ponecháme, část grafu funkce f „pod“ osou x zobrazíme v osové souměrnosti s osou x.

6. $g(x) = f(|x|)$



Je-li $x \in D(g)$, pak také $-x \in D(g)$ a $g(x) = g(-x)$. Funkce g je sudá a její graf je souměrný podle osy y. Pro $x \in D(g)$, $x \geqq 0$ je $g(x) = f(x)$, tedy graf funkce g v polorovině $x \geqq 0$ s hraniční přímkou v ose y splývá s grafem funkce f. Graf funkce g v polorovině opačné sestrojíme s využitím osové souměrnosti s osou y.

2.1. Lineární funkce

Lineární funkce je každá funkce

$$f\colon y = ax + b,$$

kde a, b jsou reálná čísla.

Definiční obor této funkce je $D(f) = \mathsf{R}$.

Grafem lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou y.

Speciálním případem lineárních funkcí jsou funkce, pro které je $a = 0$, tj. funkce tvaru $f\colon y = b$. Tyto funkce nazýváme *konstantní funkce*. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x.

Dalším speciálním případem jsou funkce, pro které je $b = 0$, $a \neq 0$, tj. funkce tvaru $f\colon y = ax$. Pro tyto funkce užíváme název *přímá úměrnost*.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Sestrojme grafy funkcí

$$f\colon y = 2x + 2, \quad g\colon y = -\tfrac{1}{2}x + 1, \quad h\colon y = -2$$

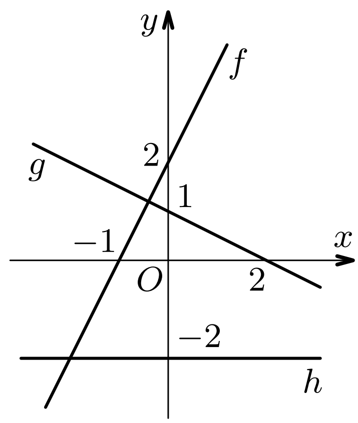
(do jednoho obrázku).

Řešení. Funkce f, g, h jsou lineární funkce, jejich grafy jsou přímky. Grafy funkcí sestrojíme tak, že určíme souřadnice dvou bodů, které na grafu leží.

Na grafu funkce f leží bod o souřadnicích $x = 0$, $y = 2 \cdot 0 + 2 = 2$, tj. bod $[0, 2]$ a také bod o souřadnicích $x = -1$, $y = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$, tj. bod $[-1, 0]$.

Na grafu funkce g leží body $[0, 1]$ a $[2, 0]$.

Funkce h je konstantní funkce, jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou x procházející bodem $[0, -2]$.



V následujících úlohách využijeme poznatky o lineárních funkcích k sestrojení grafů některých funkcí s absolutními hodnotami.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Sestrojme graf funkce

$$f\colon\ y = |x+2| - 3.$$

Řešení.

1. způsob: Určíme tzv. nulový bod výrazu $|x+2|$, tj. bod, pro který $x + 2 = 0$. Nulový bod je $x = -2$. Tímto bodem je definiční obor $D(f) = \mathsf{R}$ rozdělen na dva intervaly. V každém intervalu můžeme odstranit absolutní hodnotu.

a) $x \in (-\infty, -2)$

$$x + 2 < 0 \implies |x+2| = -(x+2) \implies y = -x - 5$$

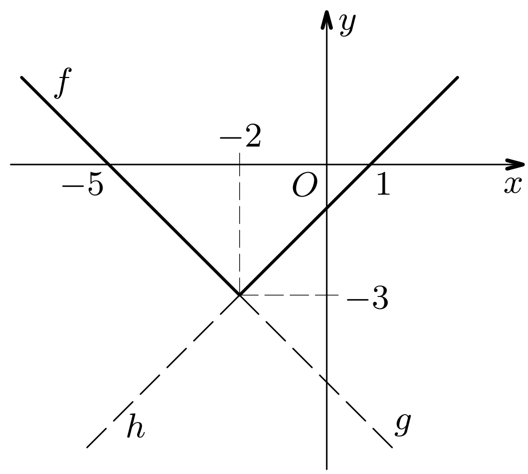
Pro $x \in (-\infty, -2)$ splývá graf funkce f s grafem funkce g: $y = -x - 5$.

b) $x \in \langle -2, \infty)$

$$x + 2 \geqq 0 \implies |x+2| = x + 2 \implies y = x - 1$$

Pro $x \in \langle -2, \infty)$ je graf funkce f část přímky, která je grafem funkce h: $y = x - 1$.

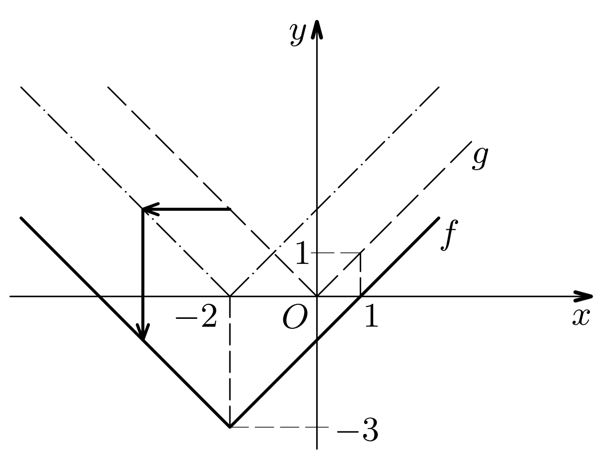
Shrnutí: Graf funkce f je tvořen dvěma polopřímkami se společným počátečním bodem.



2. způsob: Vyjdeme ze známého grafu funkce g: $y = |x|$. Graf funkce f můžeme získat způsobem popsaným v úvodu kapitoly o funkcích:

$$f(x) = g(x + 2) - 3.$$

Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce g o 2 jednotky ve směru záporné poloosy x a posunutím o 3 jednotky ve směru záporné poloosy y.



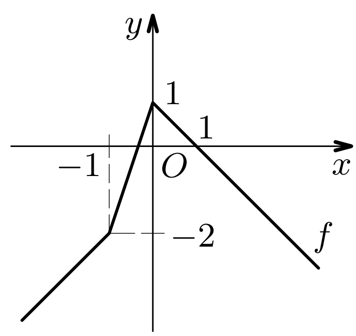
▷ **PŘÍKLAD 3.** Sestrojme graf funkce

$$f\colon\ y = |x + 1| - 2|x|.$$

Řešení. Definiční obor funkce $D(f) = \mathsf{R}$ rozdělíme nulovými body výrazů $|x+1|$ a $|x|$ na tři intervaly, v každém z nich můžeme absolutní hodnoty odstranit.

	$(-\infty, -1)$	$\langle -1, 0)$	$\langle 0, \infty)$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
$\lvert x+1\rvert - 2\lvert x\rvert$	$x-1$	$3x+1$	$-x+1$

Graf funkce f se skládá ze dvou polopřímek a jedné úsečky.



NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete definiční obory následujích funkcí a popište křivky, které tvoří jejich grafy:

a) $f\colon\ y = \sqrt{x^2}$, b) $g\colon\ y = \dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$,

c) $h\colon\ y = (x+1)^2 - (x-2)^2$, d) $k\colon\ y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

2. Určete definiční obory následujích funkcí a popište křivky, které tvoří jejich grafy:

a) $f\colon\ y = \sqrt{(x+2)^2}$, b) $g\colon\ y = 3 + \sqrt{x^2}$,

c) $h\colon\ y = \left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}\right)^2$, d) $k\colon\ y = \begin{cases} x-2 & \text{pro } x \in (-\infty, 2\rangle, \\ |x-2| & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases}$

V úlohách 3–10 sestrojte grafy daných funkcí.

3. $f\colon\ y = |x-2|$

4. $f\colon\ y = |x+1|$

5. $f\colon\ y = |x-4|-5$

6. $f\colon\ y = -|x+2|-1$

7. $f\colon\ y = |3+x|-x$

8. $f\colon\ y = |x+1|-x$

9. $f\colon\ y = |x-4|+|2x-3|$

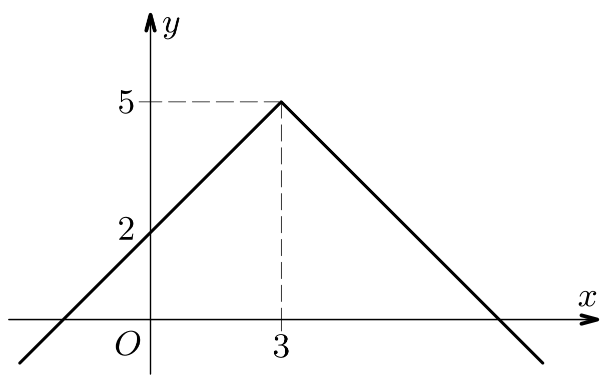
10. $f\colon\ y = |-x-2|+|x|$

* * *

11. Načrtněte graf funkce $f\colon\ y = 2|x-3|-|x+1|,\ \ x \in \langle 1, 5\rangle$.

12. Načrtněte graf funkce $f\colon\ y = \begin{cases} x-3 & \text{pro } x \leqq 3, \\ |3-x| & \text{pro } x > 3. \end{cases}$

13. Ověřte, že na obrázku je zakreslen graf funkce $y = -|x-3|+5$.



Výsledky

1. a) $D(f) = \mathsf{R}$, dvě různoběžné polopřímky se společným počátečním bodem,

b) $D(g) = \mathsf{R} - \{-2\}$, přímka bez jednoho bodu,

c) $D(h) = \mathsf{R}$, přímka,

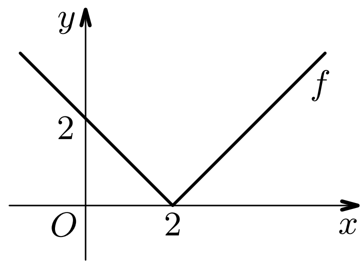
d) $D(k) = \mathsf{R} - \{2\}$, přímka bez jednoho bodu.

2. a) $D(f) = \mathsf{R}$, dvě různoběžné polopřímky se společným počátečním bodem,

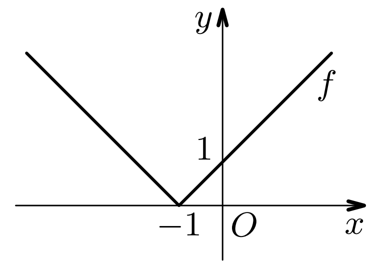
b) $D(g) = \mathsf{R}$, dvě různoběžné polopřímky se společným počátečním bodem,

c) $D(h) = (0, 1) \cup (1, \infty)$, polopřímka bez počátečního bodu a jednoho vnitřního bodu,

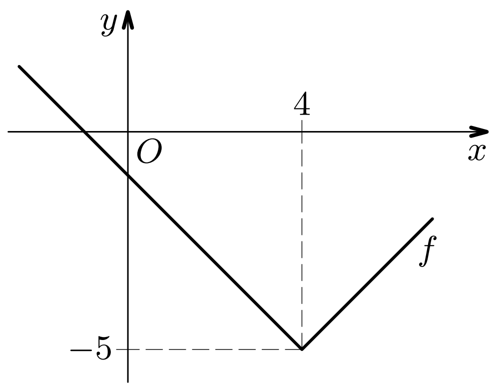
d) $D(k) = \mathsf{R}$, přímka.


y
f
2
O
2
x

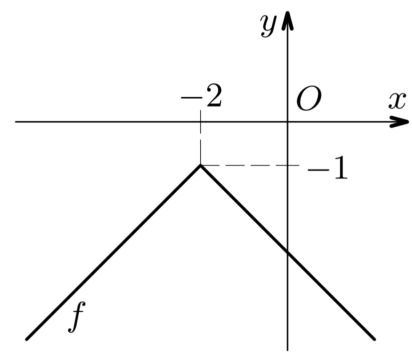
3.


y
f
1
−1
O
x

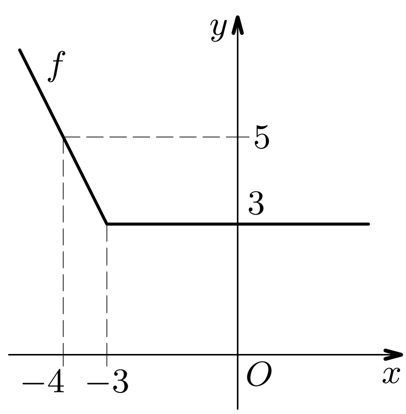
4.


y
4
O
x
f
−5

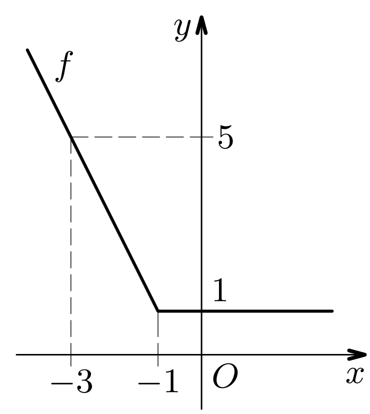
5.


y
−2
O
x
−1
f

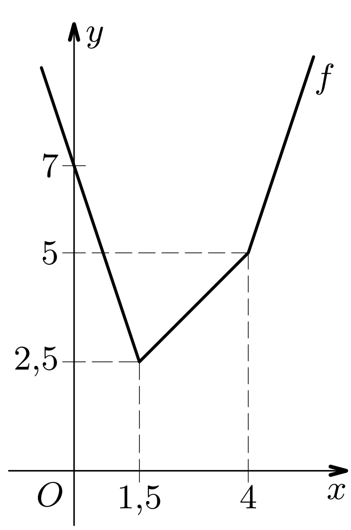
6.


y
f
5
3
−4
−3
O
x

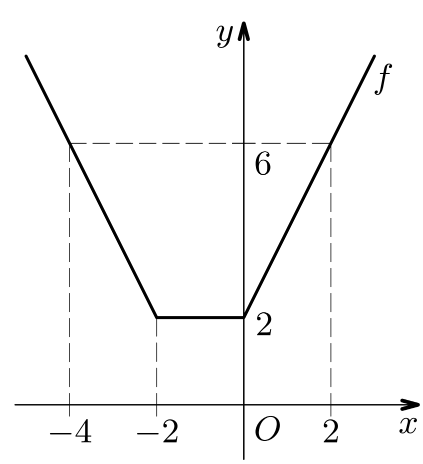
7.


y
f
5
1
−3
−1
O
x

8.

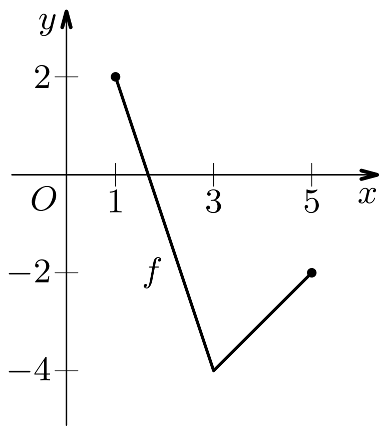

y
f
7
5
2,5
O
1,5
4
x

9.

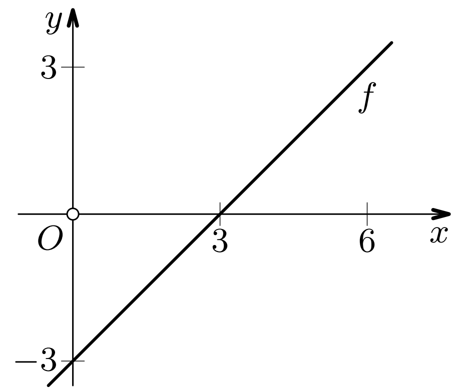

y
f
6
2
−4
−2
O
2
x

10.

11.



12.



2.2. Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je každá funkce

$$f\colon\ y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a, b, c \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$.

Definiční obor této funkce je $D(f) = \mathsf{R}$.

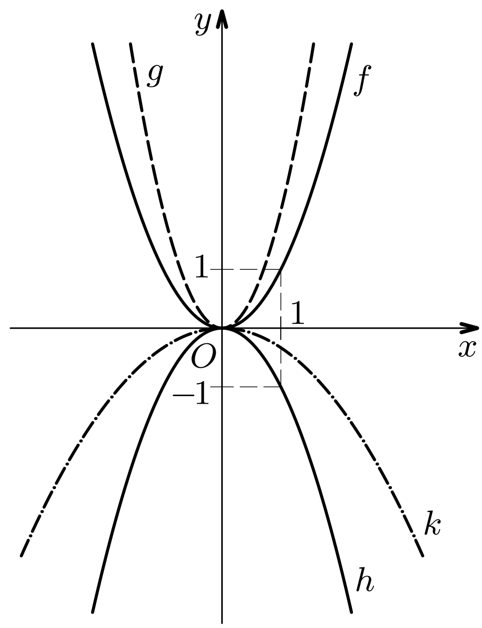
Grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou s osou y a vrcholem $V[-b/(2a),\ c - b^2/(4a)]$.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Sestrojme grafy funkcí

$$f\colon\ y = x^2, \quad g\colon\ y = 2x^2, \quad h\colon\ y = -x^2, \quad k\colon\ y = -\tfrac{1}{3}x^2.$$

Řešení. Funkce f, g, h, k jsou kvadratické funkce, jejich grafy jsou paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a s osou v ose y. Grafy funkcí g, h, k lze získat z grafu funkce f (viz úvod kapitoly 2).

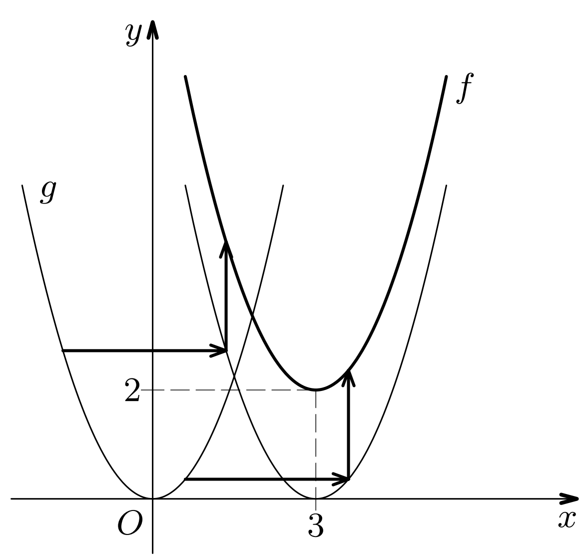


▷ **PŘÍKLAD 2.** Sestrojme graf funkce

$$f\colon\ y = x^2 - 6x + 11.$$

Řešení. Graf funkce f sestrojíme posunutím grafu funkce $g\colon\ y = x^2$. Abychom určili posunutí, musíme kvadratický trojčlen $x^2 - 6x + 11$ upravit na druhou mocninu lineárního dvojčlenu (tzv. doplnění na „úplný čtverec“):

$$x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 11 - 9 = (x-3)^2 + 2.$$



Funkci f zapíšeme pomocí funkce g takto: $f(x) = g(x-3) + 2$. Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce g o 3 jednotky ve směru kladné poloosy x a o 2 jednotky ve směru kladné poloosy y.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Sestrojme graf funkce

$$f\colon\ y = |x^2 - 2x - 3|.$$

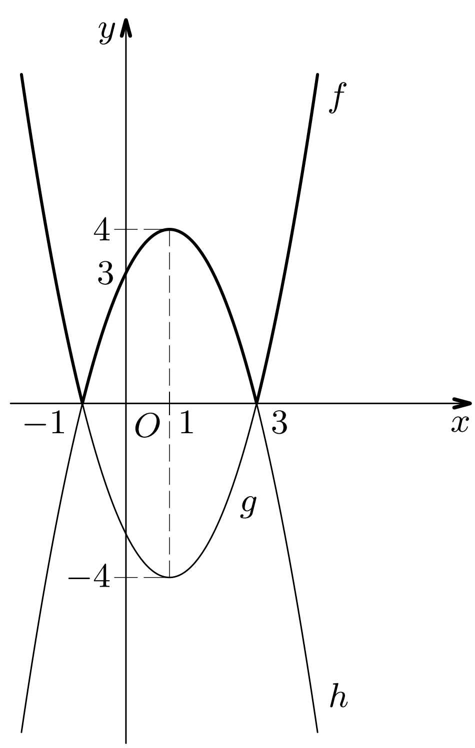
Řešení.

1. způsob: Určíme nulové body výrazu $|x^2-2x-3|$. Nulové body jsou kořeny rovnice $x^2 - 2x - 3 = 0$, tedy $x_1 = 3$ a $x_2 = -1$. Definiční obor rozdělíme na intervaly:

1. $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty)$

$$x^2 - 2x - 3 \geqq 0 \implies f(x) = |x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x - 3 = \\ = (x-1)^2 - 4$$

Graf funkce f splyne s grafem funkce $g\colon y = (x-1)^2 - 4$, který získáme posunutím grafu funkce $y = x^2$.

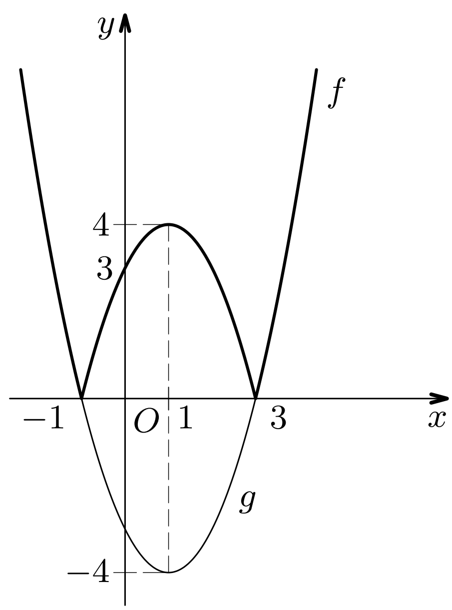


2. $x \in (-1, 3)$

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \implies f(x) = |x^2 - 2x - 3| = -(x^2 - 2x - 3) = \\ = -(x-1)^2 + 4$$

Graf funkce f splyne s grafem funkce h: $y = -(x-1)^2 + 4$, který vznikne posunutím paraboly $y = -x^2$.

2. způsob: Sestrojíme graf funkce $g(x) = x^2 - 2x - 3$, část grafu funkce g ležící pod osou x zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x (viz úvod kapitoly 2).



NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body A, B, C.

a) $A[1, 4]$, $B[2, 10]$, $C[-1, -2]$,

b) $A[1, 3]$, $B[2, 0]$, $C[0, 4]$,

c) $A[3, -1]$, $B[4, 2]$, $C[2, -2]$.

2. Určete kvadratickou funkci f, jestliže platí:

a) $f(0) = -3$, $f(1) = 0$, $f(-1) = -4$,

b) $f(2) = 5$, $f(-1) = -4$, $f(-2) = 1$,

c) $f(1) = 0$, $f(2) = -7$, $f(-1) = 2$.

V úlohách 3–12 sestrojte grafy daných funkcí.

3. $f\colon\ y = (x-2)^2 + 3$

4. $f\colon\ y = x^2 + 2x$

5. $f\colon\ y = -(x-1)^2$

6. $f\colon\ y = -(x+2)^2 + 3$

7. $f\colon\ y = |(x+1)^2 - 2|$

8. $f\colon\ y = |(x-2)^2 - 1|$

9. $f\colon\ y = \left|-x^2 + 2x + 3\right|$

10. $f\colon\ y = -x^2 + 2|x| + 3$

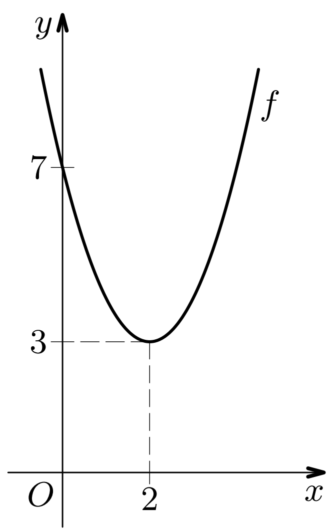
11. $f\colon\ y = x^2 + 3|x| + 1$

12. $f\colon\ y = |(x+1)^2 + 1|$

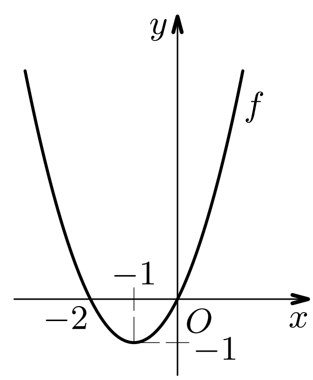
Výsledky

1. a) $y = x^2 + 3x$, b) $y = -x^2 + 4$, c) $y = x^2 - 4x + 2$

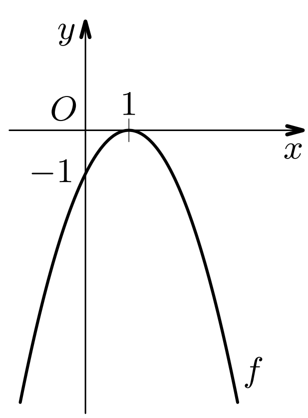
2. a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = 2x^2 + x - 5$, c) $f(x) = -2x^2 - x + 3$



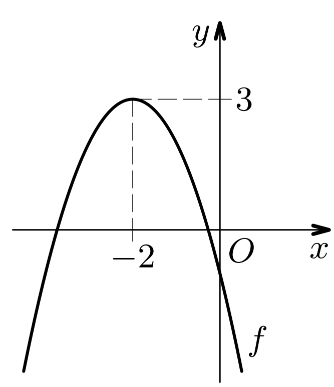
3.



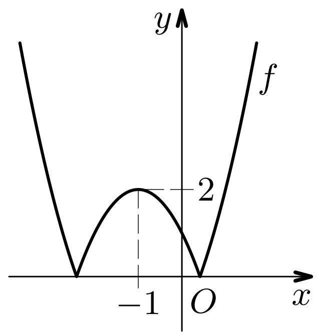
4.



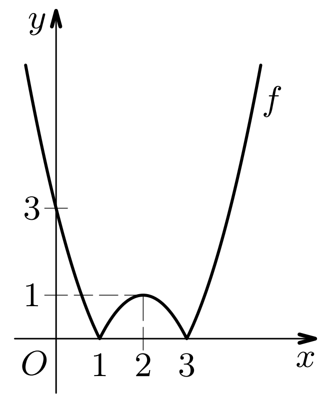
5.



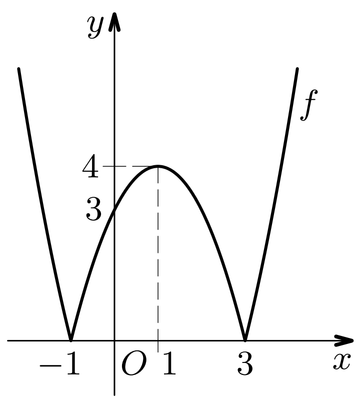
6.



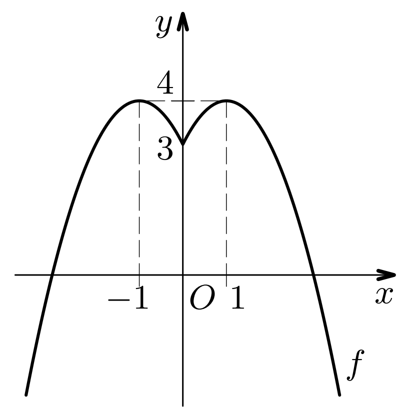
7.



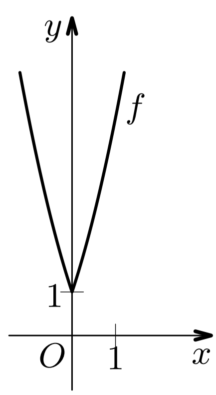
8.



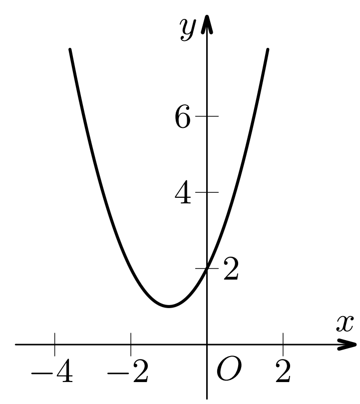
9.



10.



11.



12.

2.3. Lineární lomená funkce

Lineární lomená funkce je každá funkce

$$f\colon\ y = \frac{ax+b}{cx+d}\,,$$

kde $a, b, c, d \in \mathsf{R}$, $\ c \neq 0$, $\ ad - bc \neq 0$.

Definiční obor této funkce je $D(f) = \mathsf{R} - \{-d/c\}$.

Speciální lineární lomená funkce je funkce $f\colon y = k/x$, $k \in \mathsf{R} - \{0\}$, $D(f) = \mathsf{R} - \{0\}$. Tuto funkci nazýváme *nepřímá úměrnost.*

Grafem lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola, která má střed $S[-d/c, a/c]$ a jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami x a y.

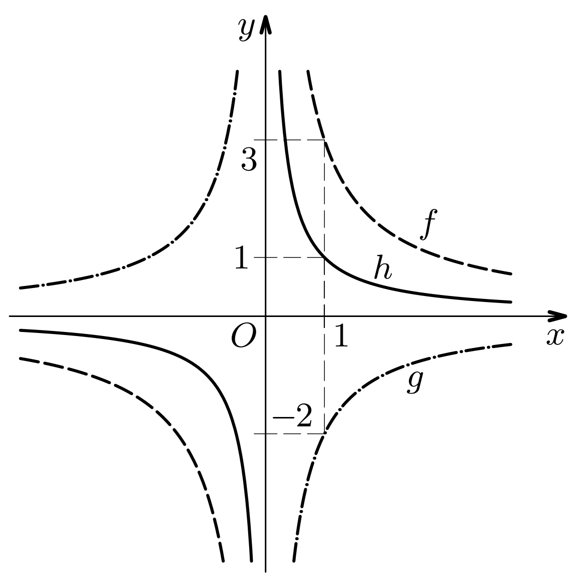
ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme definiční obory funkcí

$$f\colon\ y = \frac{3}{x}\,, \qquad g\colon\ y = -\frac{2}{x}$$

a sestrojme jejich grafy.

Řešení.



Funkce f a g jsou nepřímé úměrnosti, jejich grafy jsou rovnoosé hyperboly s asymptotami v osách souřadnic a $D(f) = D(g) = \mathsf{R} - \{0\}$, $H(f) = H(g) = \mathsf{R} - \{0\}$. Při sestrojování grafů těchto funkcí můžeme využít známého grafu funkce $h\colon y = 1/x$. Potom $f(x) = 3h(x)$ a $g(x) = -2h(x)$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme definiční obor funkce

$$f\colon\ y = \frac{3x+5}{x+1}$$

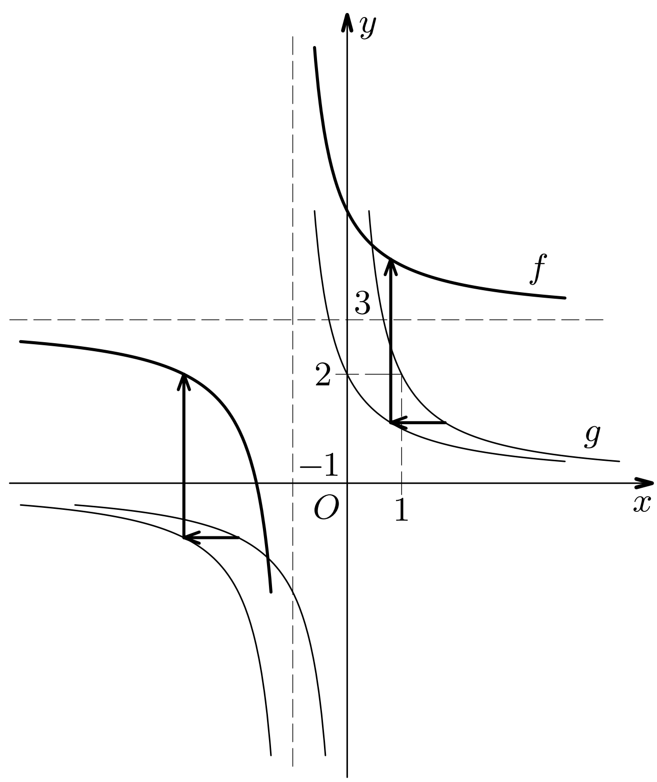
a sestrojme její graf.

Řešení. Zlomek $(3x+5)/(x+1)$ je definován pro $x \neq -1$, proto $D(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$.

Graf libovolné lineární lomené funkce lze získat posunutím grafu vhodné nepřímé úměrnosti $y = k/x$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$. Potřebujeme tedy nejprve upravit předpis funkce, pro každé $x \in D(f)$ je

$$f(x) = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3(x+1)+2}{x+1} = 3 + \frac{2}{x+1}$$

(stejný výsledek získáme vydělením dvojčlenu $3x+5$ dvojčlenem $x+1$).



Označíme-li g: $y = 2/x$, pak $f(x) = g(x+1) + 3$. Sestrojíme-li graf nepřímé úměrnosti g, pak graf funkce f získáme posunutím grafu funkce g o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x a o 3 jednotky ve směru kladné poloosy y.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme definiční obor funkce

$$f\colon\ y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$$

a sestrojme její graf.

Řešení. Zlomek $(x^2 - 2x)/(x^2 - x - 2)$ je definován pro $x^2 - x - 2 \neq 0$, tj. $(x-2)(x+1) \neq 0$, tedy $D(f) = \mathsf{R} - \{-1, 2\}$.

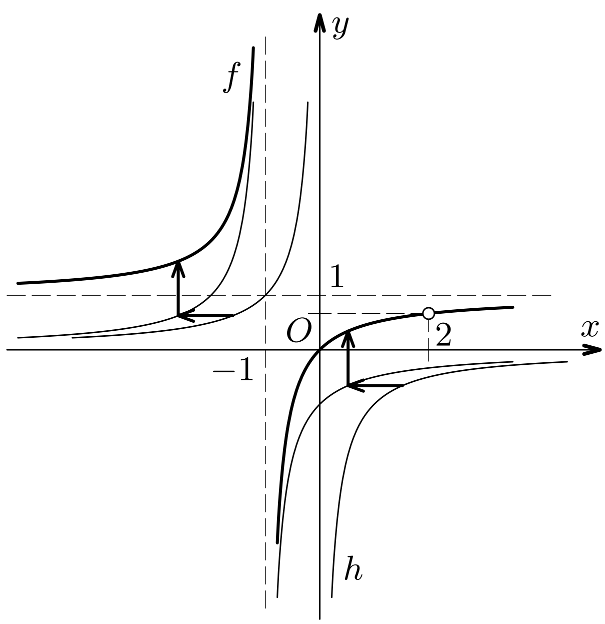
Pro každé $x \in D(f)$ je

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x+1}\,.$$

Graf funkce f je tedy částí grafu funkce

$$g\colon\ y = \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}\,, \quad D(g) = \mathsf{R} - \{-1\}.$$

Z grafu funkce g musíme vyjmout bod $[2, \frac{2}{3}]$. (Graf funkce g získáme posunutím grafu funkce h: $y = -1/x$.)



▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme definiční obor funkce

$$f\colon\ y = \frac{1}{|x-3|} - 2$$

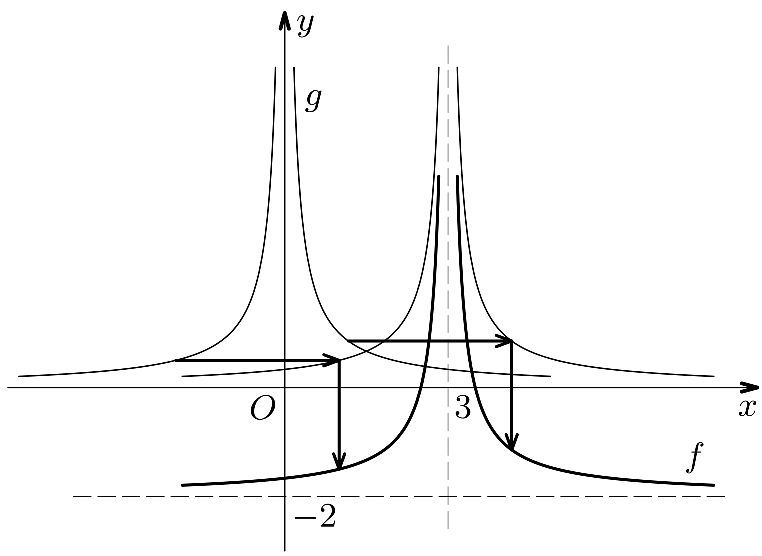
a sestrojme její graf.

Řešení. Zlomek $1/|x-3|$ je definován, jestliže $|x-3| \neq 0$, tedy $D(f) = \mathsf{R} - \{3\}$.

Funkci f vyjádříme pomocí funkce

$$g\colon\ y = \frac{1}{|x|}\,, \quad D(g) = \mathsf{R} - \{0\}, \quad f(x) = g(x-3) - 2.$$

Graf funkce g získáme z grafu funkce $y = 1/x$. Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce g.



NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–10 určete definiční obory daných funkcí a sestrojte jejich grafy.

1. $f\colon\ y = \dfrac{3}{x+3} - 2$

2. $f\colon\ y = \dfrac{x-2}{x-1}$

3. $f\colon\ y = \dfrac{2x+2}{x+3}$

4. $f\colon\ y = \dfrac{2}{|x+1|}$

5. $f\colon\ y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+x}$

6. $f\colon\ y = \dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

7. $f\colon\ y = -\dfrac{1}{|x+2|}$

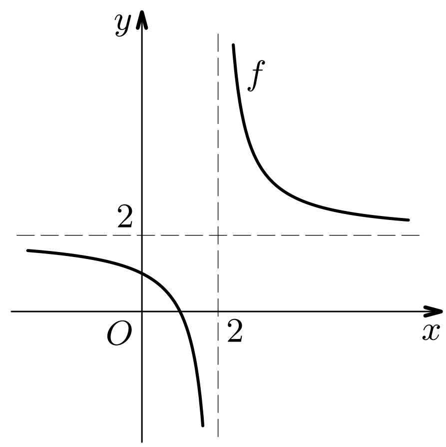
8. $f\colon\ y = \left|\dfrac{3}{x-3} + 2\right|$

9. $f\colon\ y = \dfrac{1}{|x|-3}$

10. $f\colon\ y = \dfrac{3x-2}{x-1}$

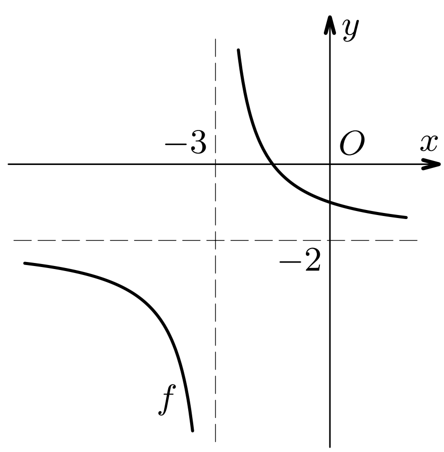
* * *

11. Ověřte, že na obrázku je zakreslen graf funkce $f\colon\ y = \dfrac{2x-2}{x-2}$.

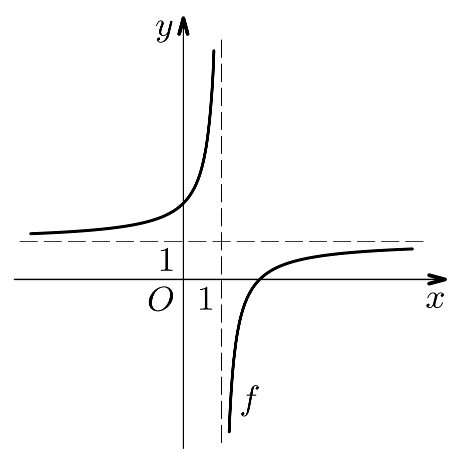


Výsledky

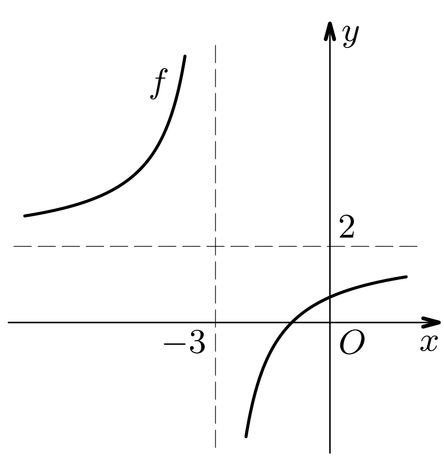
1. $D(f) = \mathsf{R} - \{-3\}$



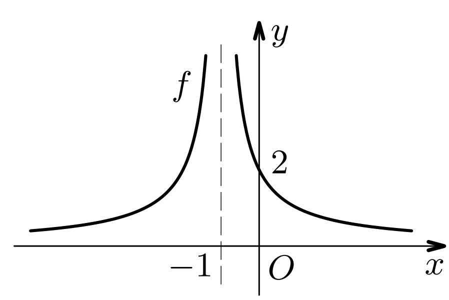
2. $D(f) = \mathsf{R} - \{1\}$



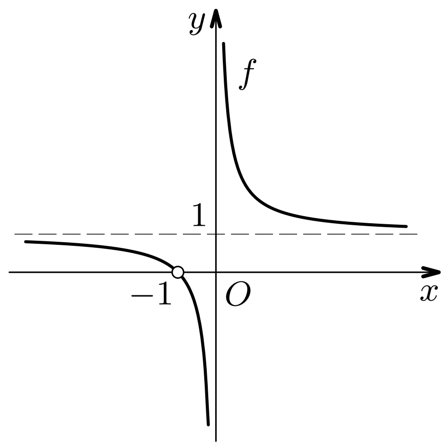
3. $D(f) = \mathsf{R} - \{-3\}$



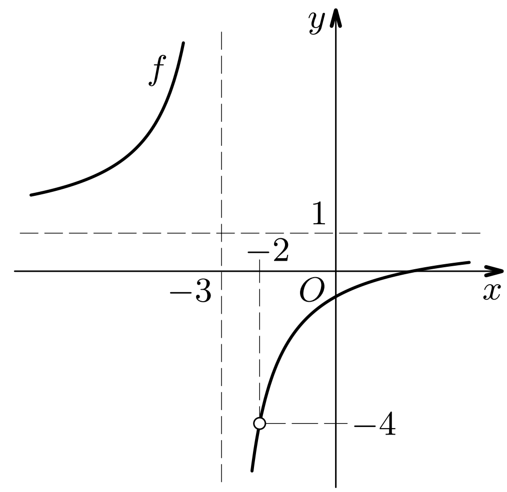
4. $D(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$



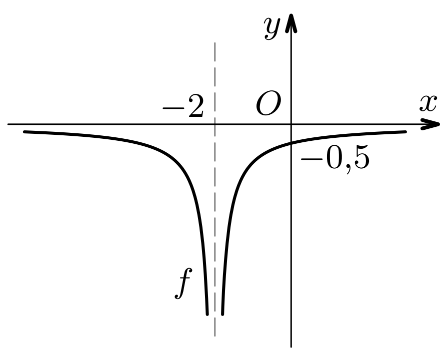
5. $D(f) = \mathsf{R} - \{-1, 0\}$



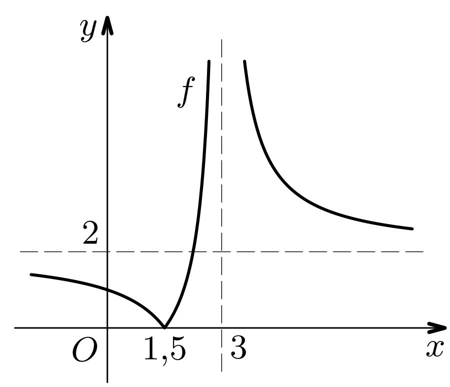
6. $D(f) = \mathsf{R} - \{-3, -2\}$



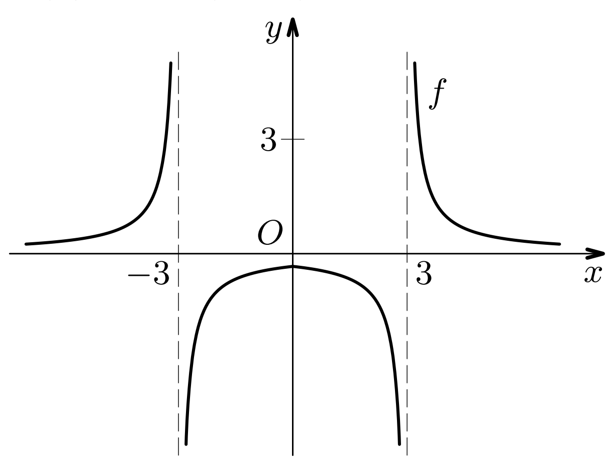
7. $D(f) = \mathsf{R} - \{-2\}$



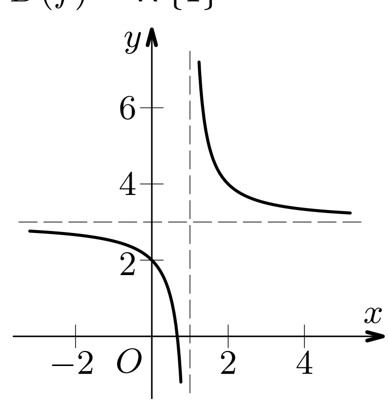
8. $D(f) = \mathsf{R} - \{3\}$



9. $D(f) = \mathsf{R} - \{-3, 3\}$



10. $D(f) = \mathsf{R}\,\{1\}$



2.4. Mocninné funkce

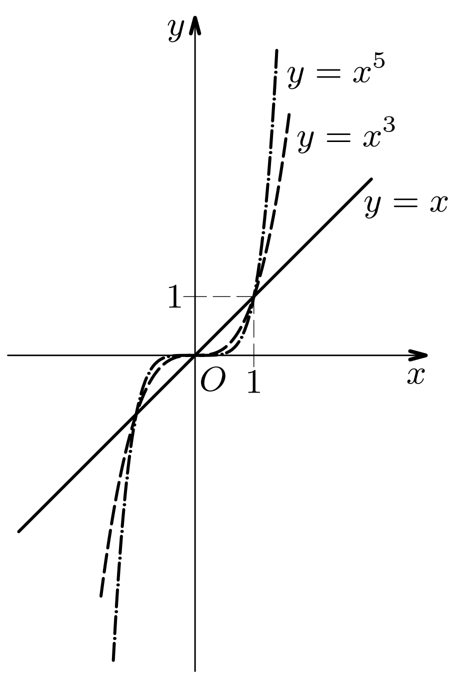
Mocninná funkce s přirozeným exponentem je každá funkce

$$f\colon\ y = x^n,$$

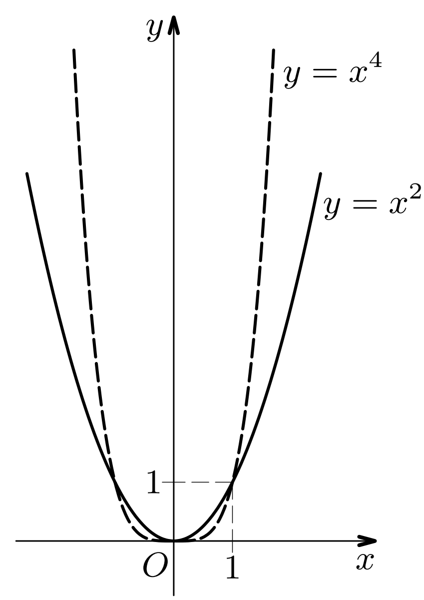
kde $n \in \mathsf{N}$.

Definiční obor mocninné funkce s přirozeným exponentem je $D(f) = \mathsf{R}$.

Grafy mocninných funkcí s přirozeným exponentem jsou na obr. 1a pro n liché a na obr. 1b pro n sudé.



Obr. 1a



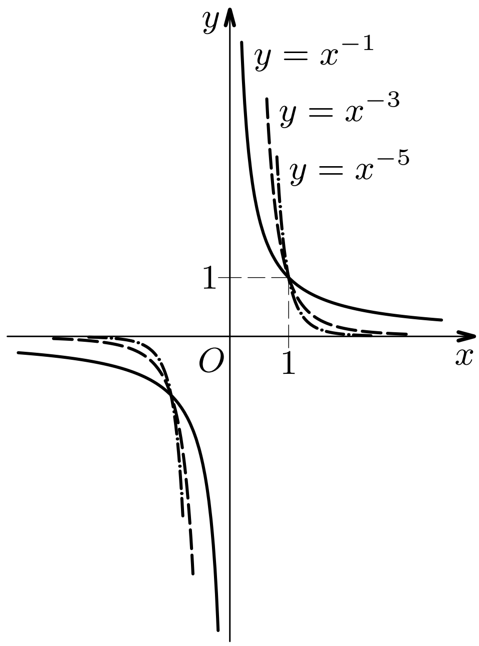
Obr. 1b

Mocninná funkce s celým záporným exponentem je každá funkce

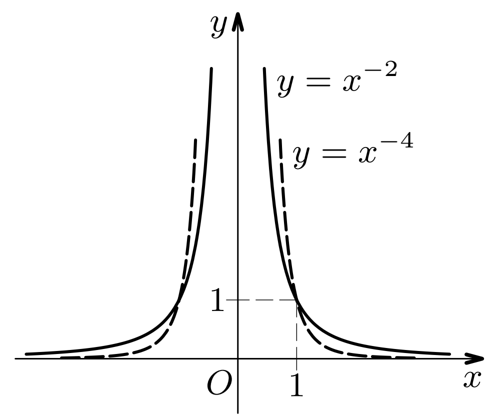
$$f\colon\ y = x^{-n} \ \left(= \frac{1}{x^n}\right), \quad n \in \mathsf{N}.$$

Definiční obor mocninné funkce f s celým záporným exponentem je $D(f) = \mathsf{R} - \{0\}$.

Grafy mocninných funkcí s celým záporným exponentem jsou na obr. 2a pro n liché a na obr. 2b pro n sudé.



Obr. 2a

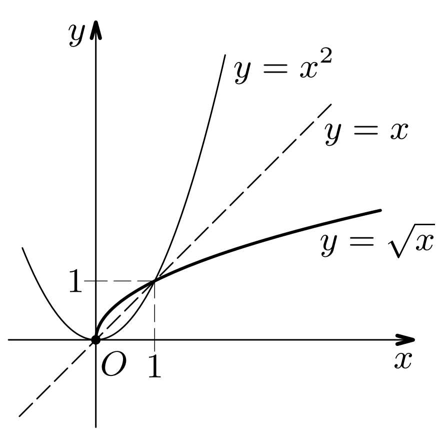


Obr. 2b

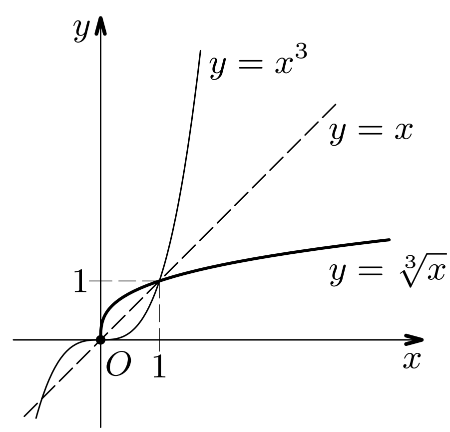
Mocninná funkce (tzv. *funkce n-tá odmocnina*)

$$f\colon\ y = x^{1/n}\ \bigl(= \sqrt[n]{x}\,\bigr), \quad n \in \mathsf{N},$$

je inverzní funkce k funkci $y = x^n$, $\underline{x \in \langle 0, \infty)}$. Definiční obor n-té odmocniny je $D(f) = \langle 0, \infty)$.



Obr. 3a



Obr. 3b

Graf funkce $y = \sqrt{x}$ $(= \sqrt[2]{x})$ je na obr. 3a. Graf funkce $y = \sqrt[3]{x}$ je na obr. 3b.

Mocninná funkce

$$f\colon\ y = x^{1/(-n)}\ \left(= \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right), \quad n \in \mathsf{N},$$

je inverzní funkce k funkci $y = x^{-n}$, $\underline{x \in (0, \infty)}$. Definiční obor této funkce f je $D(f) = (0, \infty)$.

Uvedené funkce $y = \sqrt[n]{x}$ a $y = 1/\sqrt[n]{x}$ patří mezi mocninné funkce s racionálním exponentem.

Mocninná funkce s racionálním exponentem je každá funkce

$$f\colon\ y = x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \underbrace{\sqrt[q]{x} \cdot \sqrt[q]{x} \cdots \sqrt[q]{x}}_{p\text{-krát}},$$

kde $p \in \mathsf{N}$, $q \in \mathsf{Z} - \{0\}$.

Definiční obor mocninné funkce f s racionálním exponentem p/q je $D(f) = \langle 0, \infty)$ pro $p/q > 0$, $D(f) = (0, \infty)$ pro $p/q < 0$.

Protože pro liché přirozené číslo n můžeme definovat $\sqrt[n]{x}$ i pro $x < 0$, např. $\sqrt[3]{-8} = -2$, můžeme také funkci $y = \sqrt[n]{x}$ definovat pro všechna reálná čísla x. Podobně funkci $y = \sqrt[q]{x^p}$ pro q liché a $p/q > 0$ definujeme na množině R a pro q liché a $p/q < 0$ na množině $\mathsf{R} - \{0\}$. Ve všech úlohách této sbírky budeme uvažovat uvedené funkce s těmito definičními obory.

Připomeňme si, že při úpravách předpisů mocninných funkcí používáme následující pravidla pro počítání s mocninami. Pro $x > 0$ a $r, s \in \mathsf{Q}$ platí:

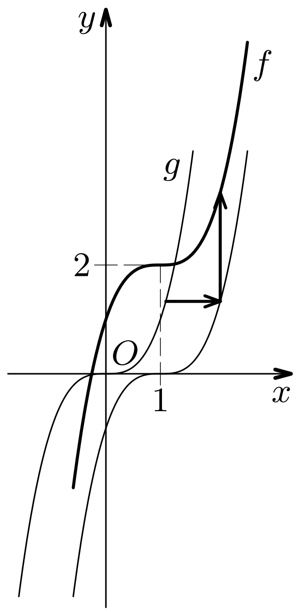
$$x^r x^s = x^{r+s}, \qquad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}, \qquad (x^r)^s = x^{rs}.$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Sestrojme graf funkce

$$f\colon\ y = (x-1)^3 + 2.$$

Řešení. K sestrojení grafu funkce f použijeme graf funkce g: $y = x^3$, neboť platí $f(x) = g(x-1) + 2$. Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce g o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x a o 2 jednotky ve směru kladné poloosy y. Graf je na obr. 4.



Obr. 4

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme definiční obory funkcí

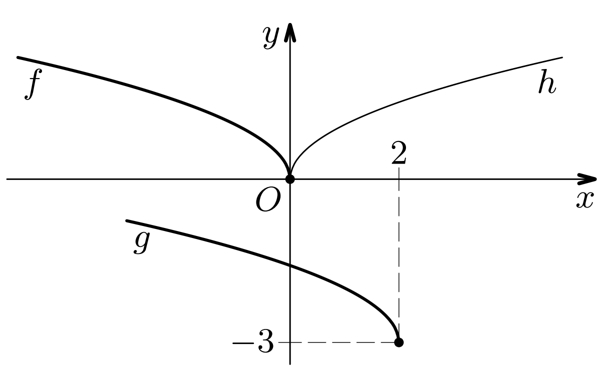
$$f\colon\ y = \sqrt{-x}, \qquad g\colon\ y = \sqrt{2-x} - 3$$

a sestrojme grafy těchto funkcí.

Řešení. Podle definice funkce druhá odmocnina je $D(f)$ množina všech reálných čísel, pro která je $-x \geqq 0$, $D(g)$ je množina všech reálných čísel, pro která $2 - x \geqq 0$. Tedy $D(f) = (-\infty, 0\rangle$, $D(g) = (-\infty, 2\rangle$.

Graf funkce f je souměrně sdružený ke grafu funkce $h\colon y = \sqrt{x}$ podle osy y, neboť pro $x \in D(f)$ je bod $[x, f(x)]$ souměrně sdružený s bodem $[-x, h(-x)] = [-x, f(x)]$ podle osy y.

Graf funkce g získáme posunutím grafu funkce f o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x a o 3 jednotky ve směru záporné poloosy y. Graf je na obr. 5.



Obr. 5

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–8 určete definiční obory daných funkcí a sestrojte jejich grafy.

1. $f\colon\ y = \dfrac{1}{(x+2)^2} - 1$

2. $f\colon\ y = 1 + \sqrt{x-4}$

3. $f\colon\ y = \dfrac{1}{\sqrt{-x-1}} - 2$

4. $f\colon\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

5. $f\colon\ y = \dfrac{1}{(|x|-1)^2} + 1$

6. $f\colon\ y = (x+1)^{-2} + 3$

7. $f\colon\ y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}}$

8. $f\colon\ y = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x}}\right)^3$

* * *

9. Napište název rovinné křivky, která je grafem funkce

$$f\colon\ y = \left(\frac{\sqrt[3]{x^5} \cdot x}{\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

10. Napište název rovinné křivky, která je grafem funkce

$$f\colon\ y = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x^3}}\right)^3}.$$

11. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)^2.$$

Jaká křivka tvoří graf funkce?

12. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}\,.$

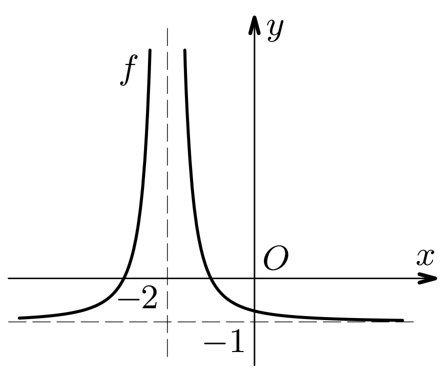
13. Načrtněte graf funkce

$$f\colon\ y = \sqrt{2x - |2x - 4|}\,.$$

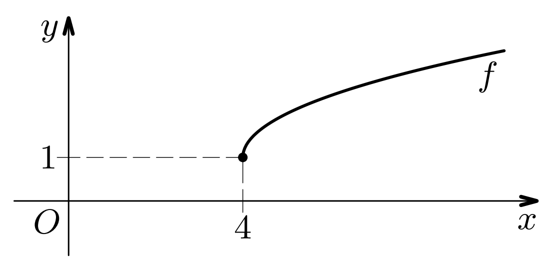
Napište názvy křivek, z jejichž částí se skládá.

Výsledky

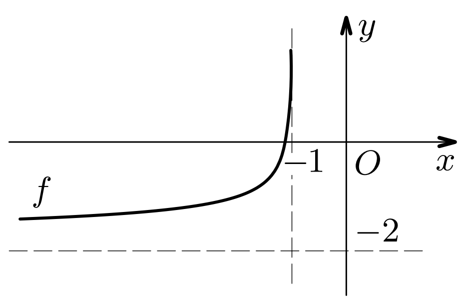
1. $D(f) = \mathsf{R} - \{-2\}$



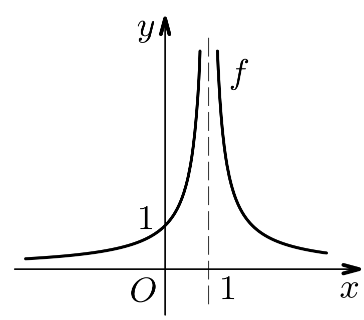
2. $D(f) = \langle 4, \infty)$



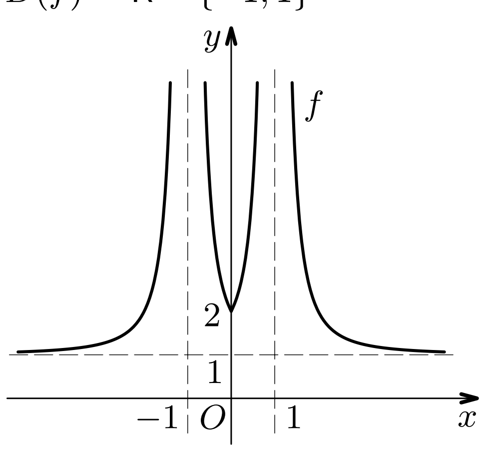
3. $D(f) = (-\infty, -1)$



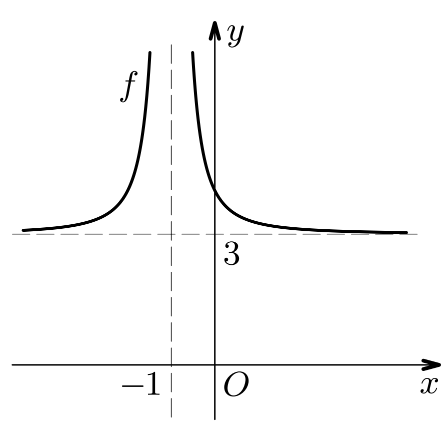
4. $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$



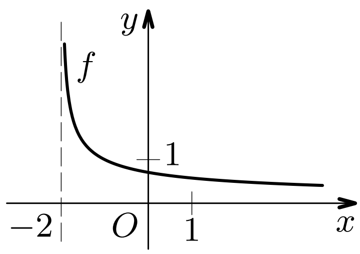
5. $D(f) = \mathsf{R} - \{-1, 1\}$



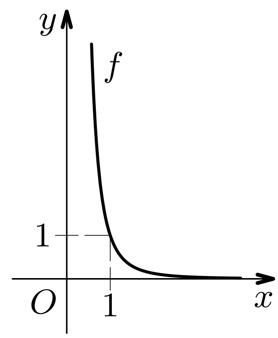
6. $D(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$



7. $D(f) = (-2, \infty)$



8. $D(f) = (0, \infty)$,
po úpravě je $f\colon y = \dfrac{1}{x^3}$



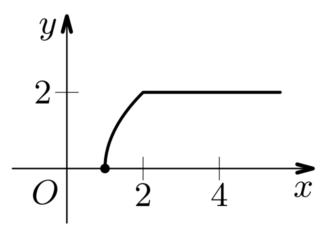
9. polopřímka bez počátečního bodu

10. jedna větev rovnoosé hyperboly

11. $D(f) = (0, \infty)$, část paraboly

12. $D(f) = (1, 2\rangle$

13.



parabola, přímka

2.5. Goniometrické funkce

Základní goniometrické funkce:

$$
\begin{array}{lll}
y = \sin x, & D = (-\infty, \infty), & H = \langle -1, 1\rangle, \\
y = \cos x, & D = (-\infty, \infty), & H = \langle -1, 1\rangle, \\
y = \operatorname{tg} x, & D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} (-\tfrac{1}{2}\pi + k\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi + k\pi), & H = (-\infty, \infty), \\
y = \operatorname{cotg} x, & D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} (k\pi,\ (k+1)\pi), & H = (-\infty, \infty).
\end{array}
$$

Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou periodické s periodou 2π, funkce $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$ jsou periodické s periodou π. Části grafů těchto funkcí jsou na obr. 1a, b, c, d.

Některé vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in \mathsf{R}$$

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x, \end{aligned} \qquad \sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x), \quad x \in \mathsf{R}$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, \end{aligned} \quad x \in \mathsf{R}$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y, \end{aligned} \quad x \in \mathsf{R}, \quad y \in \mathsf{R}$$

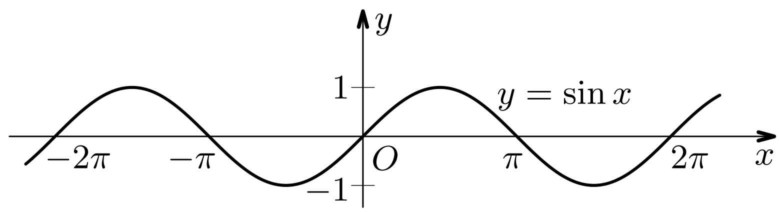
$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \end{aligned} \quad x \in \mathsf{R}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\tfrac{1}{2}\pi + k\pi\} \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\pi\} \end{aligned}$$

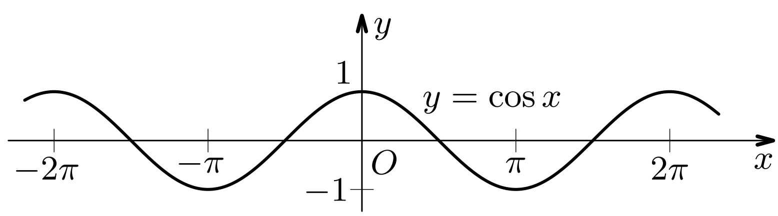
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1, \quad x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\tfrac{1}{2}k\pi\}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg}(\pi + x) &= \operatorname{tg} x, \end{aligned} \quad x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\tfrac{1}{2}\pi + k\pi\}$$

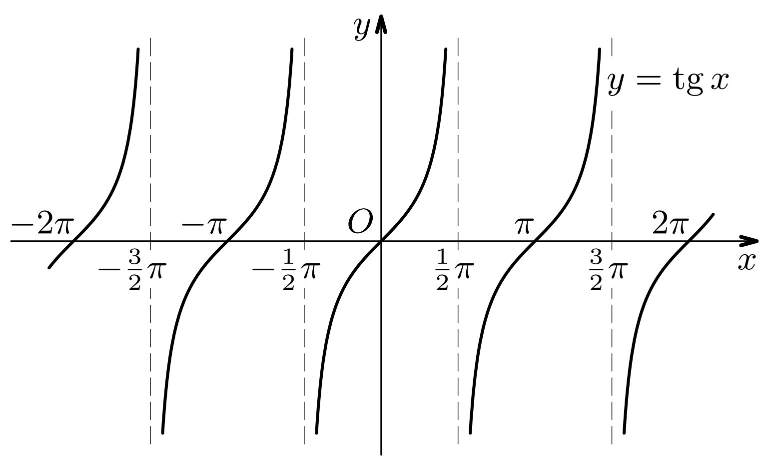
$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(\pi - x) &= -\operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{cotg}(\pi + x) &= \operatorname{cotg} x, \end{aligned} \quad x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$$



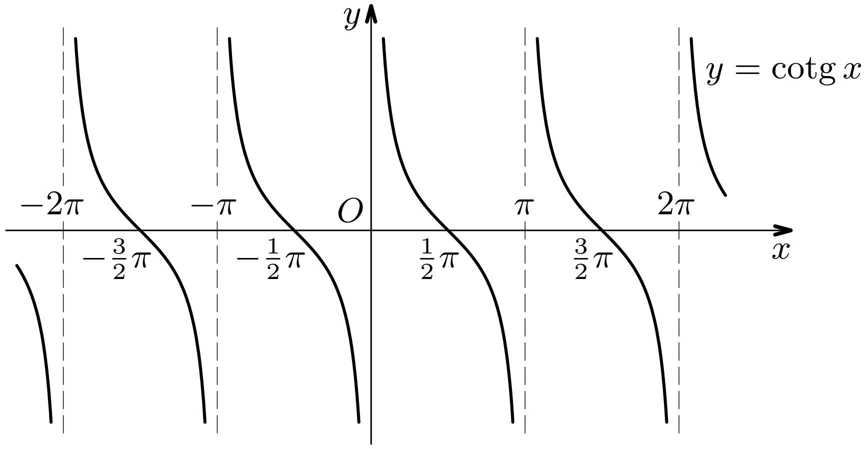
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c



Obr. 1d

Hodnoty goniometrických funkcí vybraných úhlů $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$:

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.
$\operatorname{cotg}\alpha$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme $\sin 2\alpha$, jestliže $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Řešení. Jestliže $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (0,\pi)$, pak $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Odtud $2\alpha = \frac{4}{3}\pi$. Pak

$$\sin 2\alpha = \sin(\tfrac{4}{3}\pi) = \sin(\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = -\sin(\tfrac{1}{3}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

▷ **PŘÍKLAD 2.** Uveďme podmínky, za nichž má výraz

$$\log(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2\log|\cos x|$$

smysl, a zjednodušme ho.

Řešení. První sčítanec $\log(1+\operatorname{tg}^2 x)$ je definován pro všechna $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, protože $1+\operatorname{tg}^2 x > 0$. Druhý sčítanec $2\log|\cos x|$ je definován, pokud $\cos x \neq 0$, tj. pro stejná x jako první sčítanec. Daný výraz má tedy smysl pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$.

Protože $2\log|\cos x| = \log(|\cos x|)^2 = \log(\cos^2 x)$, je

$$\begin{aligned}
\log(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2\log|\cos x| &= \log(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \log(\cos^2 x) = \\
&= \log[(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cdot(\cos^2 x)] = \log\left[\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot\cos^2 x\right] = \\
&= \log(\cos^2 x + \sin^2 x) = \log 1 = 0.
\end{aligned}$$

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$, jestliže $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$ platí

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x = \\ = \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

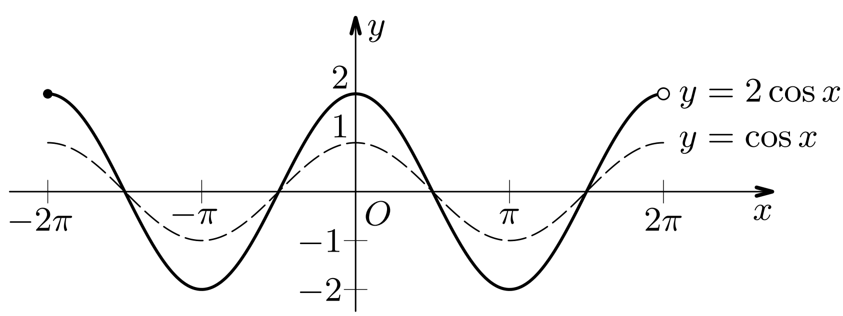
V našem případě $4 = \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{cotg}^2 x$, tj. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Načrtněme grafy funkcí

$$f\colon\ y = 2\cos x, \quad x \in \langle -2\pi, 2\pi),$$
$$g\colon\ y = \sin x + |\sin x|\,, \quad x \in \langle -2\pi, 2\pi).$$

Řešení. $H(f) = \langle -2,\, 2\rangle$. Graf funkce f dostaneme z grafu funkce $y = \cos x$ „oddálením“ bodů tohoto grafu na dvojnásobnou vzdálenost od osy x; osu x oba tyto grafy protínají ve stejných bodech.

Graf funkce f je na obr. 2a.



Obr. 2a

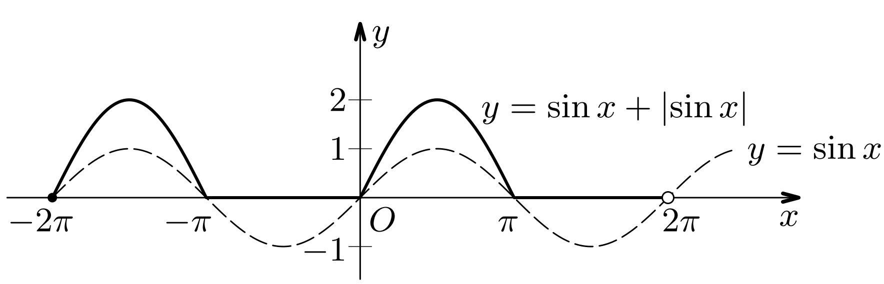
Pro $x \in \langle -2\pi, -\pi\rangle \cup \langle 0, \pi\rangle$ je $\sin x \geqq 0$, $|\sin x| = \sin x$, a tedy

$$g(x) = \sin x + |\sin x| = \sin x + \sin x = 2\sin x.$$

Pro $x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi)$ je $\sin x < 0$, $|\sin x| = -\sin x$, a proto

$$g(x) = \sin x + |\sin x| = \sin x - \sin x = 0.$$

Graf funkce g je na obr. 2b.



Obr. 2b

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete $\operatorname{tg}\alpha$, jestliže $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

2. Určete $\cos 2\alpha$ a $\sin^2 2\alpha$, jestliže $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$.

3. Určete $\sin 2\alpha$ a $\cos 2\alpha$, jestliže $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

4. Určete $\operatorname{tg}\alpha$, jestliže $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

5. Určete $\operatorname{cotg}\alpha$, jestliže $\cos 2\alpha = -1$.

6. Určete $\operatorname{tg}\alpha$, jestliže $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = 1$.

7. Určete $\operatorname{tg}\alpha$, jestliže $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

8. Uveďte podmínky, za nichž mají následující výrazy smysl, a výrazy zjednodušte:

a) $\dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$, b) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$,

c) $\operatorname{cotg} x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$, d) $\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x - 1}$.

9. Určete $\sin x \cdot \cos x$, jestliže $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$.

10. Načrtněte grafy funkcí

$$f\colon\ y = 3\cos x, \quad x \in \langle -2\pi, 2\pi),$$
$$g\colon\ y = 2\cos 2x, \quad x \in \langle -2\pi, 2\pi).$$

V úlohách 11–17 určete definiční obory daných funkcí.

11. $f\colon y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

12. $f\colon y = \log_2(\sin x)$

13. $f\colon y = \dfrac{1}{\sin x}$

14. $f\colon y = \log(\cos^2 x)$

15. $f\colon y = \log_4 |\sin x|$

16. $f\colon y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$

17. $f\colon\ y = \dfrac{\sqrt{2 + \sin^2 x}}{1 + \cos x}$

Výsledky

1. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

2. $\cos 2\alpha = \frac{1}{2},\ \ \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4}$

3. $\sin 2\alpha = 1,\ \ \cos 2\alpha = 0$

4. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

5. $\operatorname{cotg}\alpha = 0$

6. $\operatorname{tg}\alpha = 0$

7. $\operatorname{tg}\alpha = -1$

8. a) $x \in \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\};\quad 1 - \sin x$

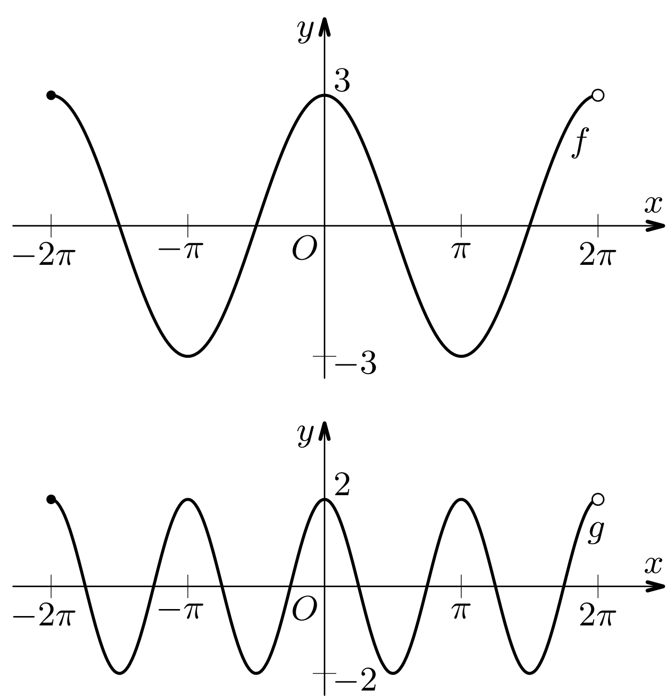
b) $x \in \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\};\quad \dfrac{2}{\sin x}$

c) $x \in \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\};\quad \dfrac{1}{\sin x}$

d) $x \in \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\};\quad -\operatorname{cotg} x$

9. $\sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$

10.



11. $D(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \langle k\pi,\ \frac{1}{2}\pi + k\pi)$

12. $D(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} (2k\pi,\ (2k+1)\pi)$

13. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\}$

14. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$

15. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\}$

16. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$

17. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{(2k+1)\pi\}$

2.6. Exponenciální funkce

Exponenciální funkce o základu a je funkce

$$f\colon\ y = a^x,$$

kde $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

Platí $D(f) = \mathsf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$. Funkce $y = a^x$ je pro $0 < a < 1$ klesající a pro $a > 1$ rostoucí. Grafy funkcí $y = a^x$ a $y = (1/a)^x$ jsou souměrně sdružené podle osy y, protínají se v bodě $[0, 1]$.

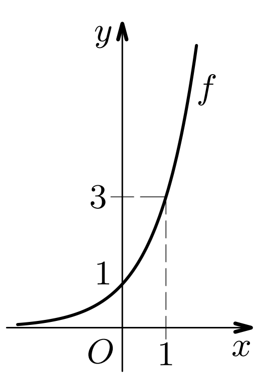
ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme definiční obory a obory hodnot funkcí

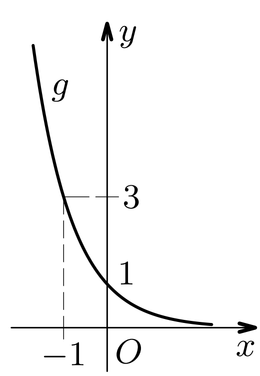
$$f\colon\ y = 3^x \quad \text{a} \quad g\colon\ y = \left(\tfrac{1}{3}\right)^x$$

a sestrojme jejich grafy.

Řešení. $D(f) = D(g) = \mathsf{R}$, $H(f) = H(g) = (0,\infty)$. Grafy jsou na obr. 1a, b.



Obr. 1a



Obr. 1b

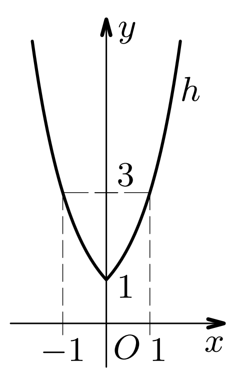
▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme definiční obory a obory hodnot funkcí

$$h\colon\ y = 3^{|x|} \quad \text{a} \quad r\colon\ y = 3^{-|x|}$$

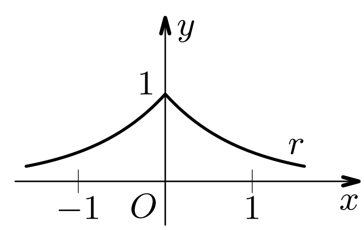
a sestrojme jejich grafy.

Řešení. $D(h) = D(r) = \mathsf{R}$. Grafy funkcí h a r sestrojíme užitím grafů funkcí f a g z úlohy 1. Protože pro funkci h platí $h(x) = 3^{|x|} = f(|x|)$, je pro $x \geqq 0$ graf funkce h shodný s grafem funkce f, pro $x < 0$ jej doplníme souměrně podle osy y. Přitom je $H(h) = \langle 1, \infty)$. Obdobně, protože pro funkci r platí $r(x) = 3^{-|x|} = (\frac{1}{3})^{|x|} = g(|x|)$, je pro $x \geqq 0$ graf funkce r shodný s grafem funkce g, pro $x < 0$ jej doplníme souměrně podle osy y. Je zřejmé, že $H(r) = (0, 1\rangle$.

Grafy jsou na obr. 2a, b.



Obr. 2a



Obr. 2b

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme všechny hodnoty parametru $p \in \mathsf{R}$, pro něž je funkce

$$f\colon\ y = \left(\frac{p+2}{1-p}\right)^x$$

klesající.

Řešení. Základ dané exponenciální funkce je $a = \dfrac{p+2}{1-p}$. Exponenciální funkce je klesající pro $a \in (0, 1)$, zjišťujeme tedy, pro jaká p je

$$\frac{p+2}{1-p} \in (0, 1),$$

tj. řešíme soustavu nerovnic $0 < \dfrac{p+2}{1-p} < 1$. Řešeními nerovnice $\dfrac{p+2}{1-p} > 0$ jsou $p \in (-2, 1)$. Nerovnici $\dfrac{p+2}{1-p} < 1$ postupně upravíme na tvar $\dfrac{p+2}{1-p} - 1 < 0$, a tedy $\dfrac{2p+1}{1-p} < 0$. Řešeními této nerovnice jsou $p \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$. Podmínka $0 < \dfrac{p+2}{1-p} < 1$ je tedy splněna, právě když $p \in (-2, -\frac{1}{2})$. Pro tato čísla p je daná exponenciální funkce klesající.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme definiční obory funkcí

$$f\colon\ y = 3^{\frac{x}{x^2-6x+8}} \quad \text{a} \quad g\colon\ y = \sqrt{4 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^x}.$$

Řešení. Funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla x, pro která má smysl zlomek $\dfrac{x}{x^2-6x+8}$, tj. pro všechna reálná čísla x, pro která $x^2 - 6x + 8 \neq 0$. Kvadratický trojčlen $x^2 - 6x + 8$ je nenulový, pokud $x \neq 2$ a zároveň $x \neq 4$. Tedy $D(f) = \mathsf{R} - \{2, 4\}$.
Funkce g je definovaná, jestliže $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq 0$. Tuto nerovnici postupně upravíme na tvar $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Řešeními poslední nerovnice jsou všechna reálná čísla x, pro která platí $x \geqq -2$ (funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ je klesající). Tedy $D(g) = \langle -2, \infty)$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby graf funkce $f\colon\ y = (a+2)\,3^x + b$ procházel body $[0, -5]$ a $[1, 1]$.
2. Nakreslete grafy funkcí $f\colon\ y = 2^x - 4$ a $g\colon\ y = |2^x - 4|$.
3. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathsf{R}$, pro něž je funkce $f\colon\ y = \left(\dfrac{1-p^2}{2+p}\right)^x$ rostoucí.

4. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathsf{R}$, pro něž je funkce $f\colon\ y = \left(\dfrac{2p^2}{p^2+1}\right)^x$ klesající.

V úlohách 5–10 určete definiční obory daných funkcí.

5. $f\colon\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2^x - 1}}$

6. $f\colon\ y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9}$

7. $f\colon\ y = \dfrac{1}{4^x + 1}$

8. $f\colon\ y = \dfrac{1}{4^x - 1}$

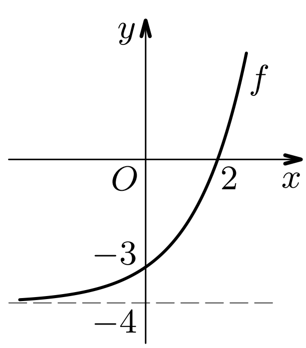
9. $f\colon\ y = \dfrac{1}{5^{x^2-1} - 1}$

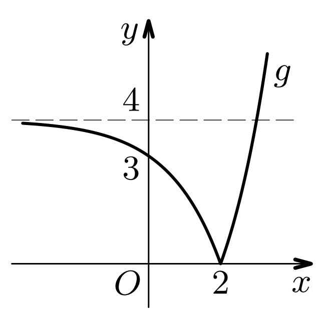
10. $f\colon\ y = \dfrac{2^{1/x}}{3^x - 27}$

Výsledky

1. $a = 1 \wedge b = -8$

2.





3. $p < -2$

4. $p \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

5. $D(f) = (0, \infty)$

6. $D(f) = (-\infty, -2\rangle$

7. $D(f) = \mathsf{R}$

8. $D(f) = \mathsf{R} - \{0\}$

9. $D(f) = \mathsf{R} - \{-1, 1\}$

10. $D(f) = \mathsf{R} - \{0, 3\}$

2.7. Logaritmická funkce

Logaritmická funkce
$$f\colon\ y = \log_a x,$$
kde $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, je inverzní k exponenciální funkci $g\colon y = a^x$. Grafy těchto funkcí jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

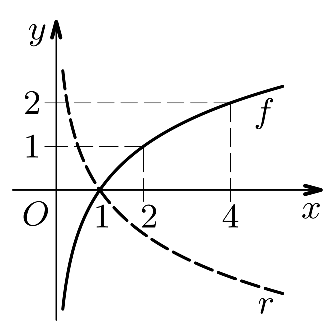
Platí $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathsf{R}$. Funkce $y = \log_a x$ je pro $0 < a < 1$ klesající, pro $a > 1$ rostoucí. Grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{1/a} x$ jsou souměrně sdružené podle osy x, protínají se v bodě $[1, 0]$.

Speciálním případem logaritmické funkce je logaritmická funkce se základem 10 a logaritmická funkce se základem $\mathrm{e} \doteq 2{,}718$ (tzv. Eulerovo číslo); označení: $\log_{10} x = \log x$, $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Do jednoho obrázku sestrojme grafy funkcí
$$f\colon\ y = \log_2 x \quad \text{a} \quad r\colon\ y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

Řešení. Grafy jsou na obr. 1.



Obr. 1

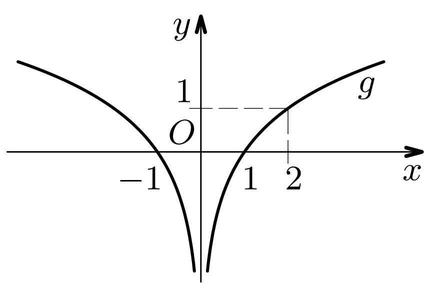
▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme definiční obory a sestrojme grafy funkcí
$$g\colon\ y = \log_2 |x| \quad \text{a} \quad h\colon\ y = \bigl|\log_2 |x|\bigr|.$$

Řešení. Funkce h i g jsou definované pro $|x| > 0$, proto

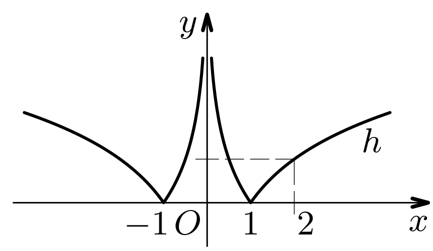
$$D(g) = D(h) = \mathsf{R} - \{0\}.$$

Přitom je $g(x) = f(|x|)$, kde f je funkce z úlohy 1. Pro $x > 0$ je tedy graf funkce g shodný s grafem funkce f, pro $x < 0$ jej doplníme souměrně podle osy y. Graf je na obr. 2a.

Dále je $h(x) = |g(x)|$, tedy pro $g(x) \geqq 0$ je $h(x) = g(x)$, pro $g(x) < 0$ je $h(x) = -g(x)$ (pro $g(x) < 0$ vznikne graf funkce h „překlopením“ grafu funkce g podle osy x). Graf je na obr. 2b.



Obr. 2a



Obr. 2b

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme definiční obory funkcí

$$f\colon\ y = \sqrt{2 - \log|x|} \quad \text{a} \quad g\colon\ y = \frac{1}{1 - \ln^2 x}.$$

Řešení. Funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla x, pro která platí $|x| > 0$, tj. $x \neq 0$, a zároveň $2 - \log|x| \geqq 0$, tj. $\log|x| \leqq 2$, čili $|x| \leqq 100$. Tedy $D(f) = \langle -100, 0) \cup (0, 100\rangle$.

Funkce g je definovaná pro všechna reálná čísla x, pro která platí $x > 0$ a zároveň $1 - \ln^2 x \neq 0$, tj. $\ln x \neq \pm 1$, čili $x \notin \{\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}\}$. Tedy $D(g) = (0, 1/\mathrm{e}) \cup (1/\mathrm{e}, \mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby graf funkce $y = b + \log_{\frac{1}{3}}(x + a)$ procházel body $[2, 1]$ a $[8, 0]$.

2. Určete definiční obory a sestrojte grafy funkcí

$$f\colon y = \ln(x-3), \quad g\colon y = \ln|x-3|, \quad h\colon y = |\ln(x-3)|\,.$$

3. Určete definiční obor funkce

$$f\colon y = \ln\frac{x+3}{4-x}$$

a vypočtěte souřadnice průsečíků jejího grafu s osami souřadnic.

4. Určete definiční obory funkcí

$$f\colon\ \ y = \log_3(x^2+x+1) \quad \text{a} \quad g\colon\ \ y = \log_3(4-x)$$

a vypočtěte souřadnice průsečíků jejich grafů.

5. Určete definiční obor funkce

$$f\colon y = \log_3(x^2+5)$$

a určete průsečíky jejího grafu s přímkou o rovnici $y = 2$.

6. Určete definiční obor funkce

$$f\colon y = \ln(\sin x)$$

a vypočtěte souřadnice průsečíků jejího grafu s osou x.

7. Určete definiční obory funkcí

$$f\colon y = \log_4(x+1) + \log_4(x-1), \quad g\colon y = \log(x^2-1).$$

8. Určete definiční obory funkcí

$$f\colon y = \log^{-1} x, \quad g\colon y = \log^{-1} x^2, \quad h\colon y = \log^{-1}|x|.$$

9. Určete definiční obory funkcí

$$f\colon y = \sqrt{\log x}, \quad g\colon y = \sqrt{\big|\log|x|\big|}.$$

10. Určete definiční obor funkce

$$f\colon y = \ln \frac{2-x}{|x+2|}$$

a ukažte, že její graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

11. Určete definiční obor funkce

$$f\colon y = \frac{x+1}{\log_4(x+5)}$$

a vypočtěte souřadnice průsečíků jejího grafu s osami souřadnic.

V úlohách 12–21 určete definiční obory daných funkcí.

12. $f\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_3 9x}}$

13. $f\colon y = \sqrt{\log_4(x^2) - 1}$

14. $f\colon y = \log(6x - x^2 - 9)$

15. $f\colon y = \sqrt{\log_3 x - \log_3 2}$

16. $f\colon y = \sqrt{\log(2x - x^2)}$

17. $f\colon y = \ln(\cos^2 x)$

18. $f\colon y = \dfrac{1}{\ln(\sin^2 x + 1)}$

19. $f\colon y = \ln(\ln x)$

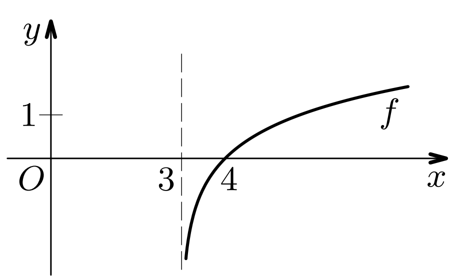
20. $f\colon y = \dfrac{\log_5(x^2 + x)}{x + 4}$

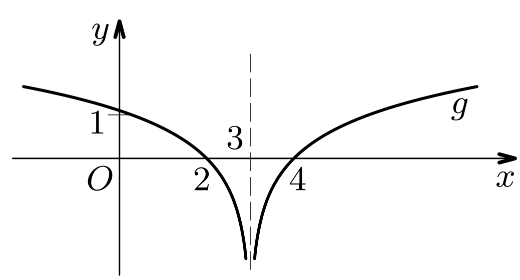
21. $f\colon y = \sqrt{\ln(x^2)}$

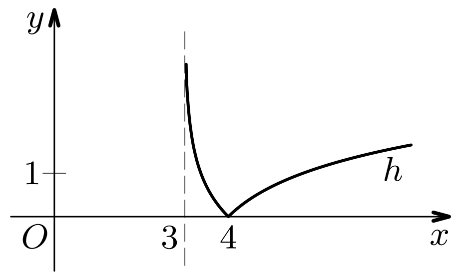
Výsledky

1. $a = 1 \wedge b = 2$

2. $D(f) = (3, \infty)$, $D(g) = \mathsf{R} - \{3\}$, $D(h) = (3, \infty)$







3. $D(f) = (-3, 4)$, $[\frac{1}{2}, 0]$, $[0, \ln \frac{3}{4}]$

4. $D(f) = \mathsf{R}$, $D(g) = (-\infty, 4)$, $[1, 1]$, $[-3, \log_3 7]$

5. $D(f) = \mathsf{R}$, $[2, 2]$, $[-2, 2]$

6. $D(f) = \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $[\frac{1}{2}\pi + 2k\pi, 0]$

7. $D(f) = (1, \infty)$, $D(g) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

8. $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$, $D(g) = \mathsf{R} - \{-1, 0, 1\}$, $D(h) = \mathsf{R} - \{-1, 0, 1\}$

9. $D(f) = \langle 1, \infty)$, $D(g) = \mathsf{R} - \{0\}$

10. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

11. $D(f) = (-5, -4) \cup (-4, \infty)$, $[-1, 0]$, $0, \dfrac{1}{\log_4 5}$

12. $D(f) = (\frac{1}{9}, \infty)$

13. $D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

14. $\emptyset$

15. $D(f) = \langle 2, \infty)$

16. $D(f) = \{1\}$

17. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$

18. $D(f) = \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$

19. $D(f) = (1, \infty)$

20. $D(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (0, \infty)$

21. $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$

Kapitola 3.

ROVNICE

3.1. Lineární rovnice

Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$, se nazývá *lineární rovnice*. Tato rovnice má právě jedno řešení $x = -b/a$.

V následujících úlohách budeme řešit rovnice obsahující absolutní hodnoty lineárních dvojčlenů. Ve vhodných intervalech, v nichž bude možné absolutní hodnoty odstranit, budeme řešit lineární rovnice.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Řešme rovnici $|2x+3| - |x-1| = -1$.

Řešení. Nejprve určíme nulové body výrazů v absolutní hodnotě:

$$\begin{aligned} 2x + 3 = 0 \quad &\text{pro} \quad x = -\tfrac{3}{2}, \\ x - 1 = 0 \quad &\text{pro} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Nulovými body $-\frac{3}{2}$, 1 rozdělíme množinu R na tři intervaly, v každém z nich „odstraněním“ absolutních hodnot převedeme danou rovnici na rovnici lineární.

	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$\langle -\frac{3}{2}, 1)$	$\langle 1, \infty)$
$\|2x+3\|$	$-2x-3$	$2x+3$	$2x+3$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\|2x+3\| - \|x-1\|$	$-x-4$	$3x+2$	$x+4$

1. Pro $x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$ má rovnice tvar

$$\begin{aligned} -x - 4 &= -1, \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Protože $-3 \in (-\infty, -\frac{3}{2})$, je číslo $x = -3$ řešení dané rovnice.

2. Pro $x \in \langle -\frac{3}{2}, 1)$ má rovnice tvar

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= -1, \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Protože $-1 \in \langle -\frac{3}{2}, 1)$, je číslo $x = -1$ řešení dané rovnice.

3. Pro $x \in \langle 1, +\infty)$ má rovnice tvar

$$\begin{aligned} x + 4 &= -1, \\ x &= -5. \end{aligned}$$

Protože $-5 \notin \langle 1, +\infty)$, v uvažovaném intervalu nemá daná rovnice řešení.

Závěr: Daná rovnice má dvě řešení $x_1 = -3$ a $x_2 = -1$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Řešte rovnici $|2x - 5| - |4x + 7| = 0$.

2. Řešte rovnici $|x - 4| + |2x - 3| = 10$.

3. Kolik řešení má rovnice $|x + 2| + |x - 3| = 7$ v intervalu $\langle -4, 4 \rangle$?

4. Řešte rovnici $|x + 5| - |x - 1| = 0$.

5. Určete všechna řešení rovnice $|x + 1| - |3x + 1| = 0$ v intervalu $\langle -1, 0)$.

Výsledky

1. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -6$

2. $x_1 = \frac{17}{3}$, $x_2 = -1$

3. dvě řešení

4. $x = -2$

5. $x = -\frac{1}{2}$

3.2. Kvadratická rovnice

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$, se nazývá *kvadratická rovnice.*

Dělíme-li rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ nenulovým číslem a, dostaneme kvadratickou rovnici v normovaném tvaru $x^2 + px + q = 0$, $p = b/a$, $q = c/a$.

O řešitelnosti kvadratické rovnice rozhoduje číslo $D = b^2 - 4ac$, tzv. *diskriminant.*

1. Je-li $D > 0$, má kvadratická rovnice právě dva různé reálné kořeny

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

3. Je-li $D = 0$, má kvadratická rovnice jeden (tzv. dvojnásobný) reálný kořen

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Je-li $D < 0$, nemá kvadratická rovnice v oboru reálných čísel řešení.

Jsou-li reálná čísla x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, lze rovnici psát ve tvaru $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. (Levou stranu rovnice jsme rozložili na součin kořenových činitelů.)

Jsou-li reálná čísla x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$, pak platí $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 2.** Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$25x^2 - 6px + p^2 - 64 = 0$$

(s neznámou x) dvojnásobný kořen?

Řešení. Kvadratická rovnice má dvojnásobný kořen právě tehdy, když její diskriminant je roven nule. V našem případě

$$D = (-6p)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (p^2 - 64) = 36p^2 - 100p^2 + 6400 = 6400 - 64p^2,$$
$$D = 0 \iff 6400 - 64p^2 = 0 \iff (p = 10 \vee p = -10).$$

Daná rovnice má dvojnásobný kořen právě tehdy, když $p = 10$ nebo $p = -10$.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$8x^2 - 4x + 1 - p = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny menší než 1?

Řešení. Kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny právě tehdy, když její diskriminant je kladný. V našem případě

$$D = 16 - 32(1 - p) = 16(2p - 1),$$
$$D > 0 \iff p \in (\tfrac{1}{2}, +\infty).$$

Kořeny dané rovnice pak jsou

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{D}}{16} = \frac{1 - \sqrt{2p - 1}}{4}, \qquad x_2 = \frac{4 + \sqrt{D}}{16} = \frac{1 + \sqrt{2p - 1}}{4}.$$

Tyto kořeny jsou menší než 1, jestliže

$$\frac{1 - \sqrt{2p - 1}}{4} < 1 \quad \text{a zároveň} \quad \frac{1 + \sqrt{2p - 1}}{4} < 1.$$

Po úpravě

$$-\sqrt{2p - 1} < 3 \quad \text{a zároveň} \quad \sqrt{2p - 1} < 3.$$

První z těchto nerovností je splněna pro každé $p \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Druhá nerovnice je pro $p \in (\frac{1}{2}, \infty)$ nerovností mezi kladnými čísly, proto

$$\sqrt{2p - 1} < 3 \iff 2p - 1 < 9 \iff p < 5.$$

Daná kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny menší než 1 pro $p \in (\frac{1}{2}, 5)$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$x^2 + 2x + 2 - m = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny, které jsou menší než 3?

2. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 + (1 - a)x + 4 - a = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné nenulové kořeny?

3. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$$

(s neznámou x) dva různé záporné kořeny?

4. Jeden kořen rovnice

$$x^2 - m^2x - m + 1 = 0$$

(s neznámou x) je číslo $x_1 = 1$. Určete její druhý kořen x_2.

5. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$x^2 + (2m + 4)x + m - 1 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

6. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 2 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

7. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 - 2ax + a^2 - 3 = 0$$

(s neznámou x) dva různé kladné kořeny?

8. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 + (a + 3)x + 2a + 1 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

9. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 + 2ax + a^2 - 8 = 0$$

(s neznámou x) dva různé záporné kořeny?

10. Pro které hodnoty parametru p nemá rovnice

$$x^2 + (p - 1)x + 4 - p = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

11. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$x^2 + (a + 3)x + 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

12. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 + x + a = 0$$

(s neznámou x) dva různé záporné kořeny?

13. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$x^2 + ax + a + 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

14. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$x^2 + x + m^2 + 4m - 5 = 0$$

(s neznámou x) nulový kořen?

15. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$2x^2 + ax + a^2 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

16. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$4x^2 - 12x + 9m^2 - 12m + 4 = 0$$

(s neznámou x) nulový kořen?

17. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$3x^2 - x + 3m^2 - m - 4 = 0$$

(s neznámou x) nulový kořen?

18. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$3x^2 + a^2 + a + 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

19. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$ax^2 + (2a + 1)x + 1 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

20. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$(a + 1)x^2 + ax + 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

21. Pro které hodnoty parametru c nemá rovnice

$$cx^2 + (2c - 1)x + c + 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

22. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$ax^2 + ax + 5 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

23. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$ax^2 - 2x - 2 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

24. Pro které hodnoty parametru m má rovnice

$$x^2 + 2x + 1 - m = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny, které jsou oba menší než 2?

25. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$2x^2 + x + 1 - a = 0$$

(s neznámou x) dva různé záporné kořeny?

26. Jeden kořen rovnice

$$x^2 + 5mx + m + 3 = 0$$

(s neznámou x) je číslo $x_1 = 1$. Určete její druhý kořen x_2.

27. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$(a - 8)x^2 + a + 3 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

28. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 + (a + 1)x + a = 0$$

(s neznámou x) alespoň jeden reálný kořen?

29. Pro které hodnoty parametru a nemá rovnice

$$(5 - a)x^2 - 4x + a = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

30. Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$25x^2 + 8px + p^2 - 225 = 0$$

(s neznámou x) dvojnásobný kořen?

31. Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$10x^2 + (6p - 20)x + p^2 - 8p + 10 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

32. Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$25x^2 + 32px + 16p^2 - 144 = 0$$

(s neznámou x) dva různé reálné kořeny?

33. Pro které hodnoty parametru p má rovnice

$$5x^2 + x(4p - 10) + p^2 - p + 15 = 0$$

(s neznámou x) dvojnásobný kořen?

34. Určete parametr p tak, aby rovnice

$$x^2 + px - 6 = 0$$

(s neznámou x) měla jeden kořen o 5 větší než druhý.

35. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$2ax^2 - 7(a + 1)x + a - 1 = 0$$

(s neznámou x) nulový kořen? Určete druhý kořen.

36. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$4x^2 - 8ax - 6a + 9 = 0$$

(s neznámou x) jeden kořen třikrát větší než druhý?

37. Řešte rovnici $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

38. Řešte rovnici $x^2 - 8|x - 1| + 7 = 0.$

39. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$x^2 - 3x + a^2 - a - 6 = 0$$

(s neznámou x) kořen $x = 3$?

40. Pro které hodnoty parametru a má rovnice

$$(a - 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$$

(s neznámou x) jediný kořen?

41. Pro které hodnoty parametru p nemá rovnice

$$12x^2 + (8p+8)x + p^2 - 1 = 0$$

(s neznámou x) žádný reálný kořen?

42. Určete parametr a tak, aby rovnice

$$9x^2 - 6ax + 9a = 0$$

(s neznámou x) měla dva různé kladné kořeny.

Výsledky

1. $m \in (1, 17)$

2. $a \in (-\infty, -5) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$

3. $m > 1$

4. $x_2 = 0 \vee x_2 = 3$

5. $m \in \mathsf{R}$

6. $a \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$

7. $a > \sqrt{3}$

8. $a \in \mathsf{R}$

9. $a > 2\sqrt{2}$

10. $p \in (-5, 3)$

11. $a \in (-5, -1)$

12. $a \in (0, \frac{1}{4})$

13. $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$

14. $m = 1 \vee m = -5$

15. $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

16. $m = \frac{2}{3}$

17. $m = -1 \vee m = \frac{4}{3}$

18. $a \in \mathsf{R}$

19. $a \neq 0$

20. $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$

21. $c > \frac{1}{8}$

22. $a \in (-\infty, 0) \cup (20, +\infty)$

23. $a \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$

24. $m \in (0, 9)$

25. $a \in (\frac{7}{8}, 1)$

26. $x_2 = \frac{7}{3}$

27. $a \in (-3, 8)$

28. $a \in \mathsf{R}$

29. $a \in (1, 4)$

30. $p = 25 \vee p = -25$

31. $p \in (0, 20)$

32. $p \in (-5, 5)$

33. $p = -5 \vee p = -10$

34. $p = -1 \vee p = 1$

35. $a = 1, \; x_2 = 7$

36. $a = -3 \vee a = 1$

37. $x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = 2, \; x_4 = -2$

38. $x_1 = 3, \; x_2 = 5, \; x_3 = -4 - \sqrt{17}, \; x_4 = -4 + \sqrt{17}$

39. $a = 3 \vee a = -2$

40. $a = \frac{1}{5} \vee a = 1$

41. $p \in (-7, -1)$

42. $a \in (9, \infty)$

3.3. Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, v nichž je neznámá obsažena v argumentu jedné nebo více goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens.

Všechny goniometrické rovnice v tomto odstavci jsou zadány tak, aby je bylo možno řešit bez použití kalkulaček, pouze na základě znalostí vztahů mezi goniometrickými funkcemi a znalostí hodnot goniometrických funkcí vybraných úhlů (viz 2.5).

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme množinu všech řešení rovnice

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

Řešení. a) Při řešení rovnice $\sin 2x = \frac{1}{2}$ položíme $2x = u$. Tím dostaneme rovnici $\sin u = \frac{1}{2}$. Reálné číslo u je jejím řešením právě tehdy, když $u = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ nebo $u = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$. Protože $x = \frac{1}{2}u$, je číslo x řešením rovnice $\sin 2x = \frac{1}{2}$ právě tehdy, když $x = \frac{1}{12}\pi + k\pi$ nebo $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Množina všech řešení je tedy

$$\bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \left\{ \tfrac{1}{12}\pi + k\pi, \; \tfrac{5}{12}\pi + k\pi \right\}.$$

b) Rovnici $\operatorname{tg} 3x = -1$ řešíme analogicky. Položíme-li $3x = u$, dostaneme rovnici $\operatorname{tg} u = -1$ s neznámou u. Všechna její řešení můžeme zapsat ve tvaru $u = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$. Odtud $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Množina všech řešení je

$$\bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{3}k\pi\}.$$

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme množinu všech řešení rovnice

$$\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0.$$

Řešení. Dosadíme-li ze vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ za $\cos^2 x$ do dané rovnice, dostaneme „kvadratickou rovnici s neznámou $\sin x$“:

$$1 - \sin^2 x + 3\sin x + 3 = 0, \qquad \text{po úpravě} \qquad \sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0.$$

Položíme-li $\sin x = u$, získáme kvadratickou rovnici $u^2 - 3u - 4 = 0$. Reálné číslo u je jejím řešením právě tehdy, když $u = 4$ nebo $u = -1$. Dosazením za u do vztahu $u = \sin x$ dostaneme dvě goniometrické rovnice: $\sin x = 4$ a $\sin x = -1$. Rovnice $\sin x = 4$ nemá řešení. Řešeními rovnice $\sin x = -1$ (a tedy i dané rovnice) jsou všechna čísla $x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Množina všech řešení rovnice $\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$ je tedy

$$\bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{-\tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi\}.$$

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme počet řešení rovnice

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

v intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar $\sin x(\sin x - 1) = 0$. Součin na levé straně rovnice je roven nule, jestliže je buď $\sin x = 0$, nebo $\sin x - 1 = 0$. Řešeními rovnice $\sin x = 0$ jsou právě všechna čísla $x = k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$. V intervalu $\langle 0, 2\pi)$ leží dvě z nich: $x = 0$ a $x = \pi$. Úpravou rovnice $\sin x - 1 = 0$ dostaneme rovnici $\sin x = 1$. Řešeními jsou právě všechna čísla $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$. V intervalu $\langle 0, 2\pi)$ leží jedno z nich, $x = \frac{1}{2}\pi$.

Rovnice $\sin^2 x - \sin x = 0$ má tedy v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ tři řešení.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme množinu všech řešení rovnice

$$\operatorname{cotg}^3 x = \operatorname{cotg} x.$$

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar $\operatorname{cotg} x(\operatorname{cotg}^2 x - 1) = 0$. Součin na levé straně rovnice je roven nule, jestliže je buď $\operatorname{cotg} x = 0$, nebo $\operatorname{cotg}^2 x - 1 = 0$. Řešeními rovnice $\operatorname{cotg} x = 0$ jsou právě všechna čísla $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$. Rovnice $\operatorname{cotg}^2 x = 1$ je ekvivalentní s rovnicí $|\operatorname{cotg} x| = 1$. Jejími řešeními jsou právě všechna čísla $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Množina všech řešení rovnice $\operatorname{cotg}^3 x = \operatorname{cotg} x$ je tedy

$$\bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\tfrac{1}{2}\pi + k\pi,\ \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi\}.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–24 určete množiny všech řešení daných rovnic.

1. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

2. $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

3. $\operatorname{tg}(x + \frac{1}{4}\pi) = 0$

4. $\operatorname{cotg}(x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$

5. $\cos 2x + \sin x = 1$

6. $2\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$

7. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

8. $\sin^2 2x - \sin 2x = 0$

9. $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

10. $\cos 2x - \cos x = 0$

11. $\cos^2 x - 5\sin x - 7 = 0$

12. $\sin^2 x - 4\cos x - 4 = 0$

13. $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

14. $\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$

15. $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 = 0$

16. $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$

17. $\sin 2x - 2\sin x = 0$

18. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$

19. $\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 2\sin x$

20. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$

21. $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x - 1 = 0$

22. $\sin 2x = \operatorname{cotg} x$

23. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = -1$

24. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

* * *

V úlohách 25–35 určete počty všech řešení daných rovnic v daných intervalech.

25. $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

26. $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

27. $\sin 2x - \cos x = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

28. $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

29. $\cos^2 2x - \cos 2x = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

30. $\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

31. $\cos^2 2x - 4\cos 2x = 0, \quad (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

32. $\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

33. $2\cos^2 2x + \sin^2 2x - 2 = 0, \quad \langle -\pi, \pi\rangle$

34. $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0, \quad (-2\pi, 2\pi)$

35. $\cos^2 x + \cos 2x + 1 = 0, \quad \langle 0, 2\pi)$

* * *

36. Určete největší záporný kořen rovnice $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

37. Určete největší záporný kořen a nejmenší kladný kořen rovnice $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

38. Určete největší záporný kořen a nejmenší kladný kořen rovnice $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$.

39. Určete největší kořen rovnice $\cos 2x = 2 + \cos x$ ležící v intervalu $\langle 0, 10\rangle$.

40. Určete největší záporný kořen a nejmenší kladný kořen rovnice $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - 4\operatorname{tg} x = 0$.

V úlohách 41–49 určete množiny všech řešení daných rovnic.

41. $|\sin x| = 1$

42. $\left|\cos(x + \frac{1}{2}\pi)\right| = \frac{1}{2}$

43. $|\operatorname{tg} x| = 1$

44. $|\operatorname{cotg} x| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

45. $|\cos x| = 2 - \cos^2 x$

46. $|\sin x| = \sin x + 2$

47. $|\sin x + 2| = \sin^2 x$

48. $|3 - \cos x| = 2 + \sin^2 x$

49. $\sin^2 x - 4\cos x - 4 = 0$

Výsledky

1. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{7}{12}\pi + k\pi,\ \frac{11}{12}\pi + k\pi\}$

2. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{-\frac{1}{3}\pi + k\pi,\ k\pi\}$

3. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{-\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$

4. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{12}\pi + k\pi\}$

5. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi,\ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$

6. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$

7. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(2k+1)\pi\}$

8. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi,\ \frac{1}{2}k\pi\}$

9. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\}$

10. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{2k\pi,\ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$

11. $\emptyset$

12. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(2k+1)\pi\}$

13. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(2k+1)\pi\}$

14. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 2k\pi,\ -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\}$

15. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi,\ -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi,\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$

16. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$

17. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$

18. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{-\frac{1}{4}\pi+k\pi,\ k\pi\}$

19. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{6}\pi+2k\pi,\ \frac{11}{6}\pi+2k\pi,\ k\pi\}$

20. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{6}\pi+k\pi,\ \frac{2}{3}\pi+k\pi\}$

21. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{2}\pi+k\pi,\ \frac{3}{4}\pi+k\pi\}$

22. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{2}\pi+k\pi,\ \frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}k\pi\}$

23. $\emptyset$

24. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{5}{6}\pi+k\pi,\ \frac{2}{3}\pi+k\pi\}$

25. 3 **26.** 1 **27.** 4 **28.** 4 **29.** 6

30. 1 **31.** 2 **32.** 3 **33.** 5 **34.** 6

35. 2

36. $-\frac{1}{2}\pi$

37. $-\frac{7}{6}\pi$ a $\frac{1}{6}\pi$

38. $-\pi$ a $\frac{1}{3}\pi$

39. 3π

40. $-\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{1}{6}\pi$

41. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{2}\pi+k\pi\}$

42. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{6}\pi+k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+k\pi\}$

43. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}k\pi\}$

44. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{3}\pi+k\pi,\ \frac{2}{3}\pi+k\pi\}$

45. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$

46. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi\}$

47. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi\}$

48. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{2}\pi+k\pi,\ 2k\pi\}$

49. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(2k+1)\pi\}$

3.4. Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální, resp. logaritmické rovnice jsou rovnice, v nichž neznámá je obsažena v exponentu jedné nebo více mocnin, resp. v argumentu jednoho nebo více logaritmů.

Při řešení takových rovnic využíváme pravidla pro počítání s mocninami a s logaritmy:

- Jestliže je $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, pak platí:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

- Jestliže je $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $r \in \mathsf{R}$, pak platí:

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y, \\ \log_a(x^r) &= r \log_a x. \end{aligned}$$

- Jestliže je $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, pak platí:

$$a^x = a^y, \quad \text{právě když} \quad x = y.$$

- Jestliže je $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, pak platí:

$$\log_a x = \log_a y, \quad \text{právě když} \quad x = y.$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Řešme rovnici

$$5^{x+1} \cdot 25^{x-3} = 125^{2x-1}.$$

Řešení. Rovnici upravíme tak, aby na obou stranách rovnice byly mocniny o stejném základu. Postupně dostaneme:

$$5^{x+1} \cdot 5^{2(x-3)} = 5^{3(2x-1)}, \quad \text{a tedy} \quad 5^{3x-5} = 5^{6x-3}.$$

Z rovnosti mocnin plyne rovnost exponentů, tj. $3x - 5 = 6x - 3$, a tedy $x = -\frac{2}{3}$. Jediným řešením dané exponenciální rovnice je $x = -\frac{2}{3}$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Řešme rovnici

$$2^{2x^2+3x+1} = 1$$

a) v Z, b) v R, c) v N.

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $2^{2x^2+3x+1} = 2^0$. Z rovnosti mocnin plyne rovnost exponentů, tj. $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Řešením získané kvadratické rovnice je $x_1 = -1$ a $x_2 = -\frac{1}{2}$. Jediným řešením dané exponenciální rovnice v Z je tedy $x = -1$, v R má daná rovnice dvě řešení $x = -1$ a $x = -\frac{1}{2}$, v N nemá žádné řešení.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Řešme rovnici

$$2^{2/x} - 9 \cdot 2^{1/x} + 8 = 0.$$

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar $(2^{1/x})^2 - 9 \cdot 2^{1/x} + 8 = 0$. Užijeme substituci $u = 2^{1/x}$ a dostaneme kvadratickou rovnici

$$u^2 - 9u + 8 = 0,$$

jejímiž kořeny jsou $u_1 = 1$, $u_2 = 8$. Zpětným dosazením dostaneme rovnice $2^{1/x} = 1$ a $2^{1/x} = 8$. Rovnici $2^{1/x} = 1$ upravíme na tvar $2^{1/x} = 2^0$, odkud plyne $1/x = 0$. Neexistuje žádné x, které by splňovalo tuto rovnici. Řešením rovnice $2^{1/x} = 8$ je $x = \frac{1}{3}$. Daná exponenciální rovnice má tedy jediné řešení $x = \frac{1}{3}$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme číslo y, jestliže

$$\log_3 y = \tfrac{1}{2}\log_3(x+1) - \log_3(x-3) - 1.$$

Řešení. Užijeme základních vlastností logaritmů. Postupnými úpravami dostaneme

$$\log_3 y = \log_3 \sqrt{x+1} - \log_3(x-3) - \log_3 3, \quad \log_3 y = \log_3 \frac{\sqrt{x+1}}{3(x-3)},$$

a tedy

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{3(x-3)}.$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** Řešme rovnici

$$\log(\tfrac{1}{2} + x) = \log\tfrac{1}{2} - \log x.$$

Řešení. Všechny výrazy v dané rovnici mají smysl za předpokladu, že $x > 0$. Rovnici upravíme na tvar

$$\log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{1}{2x},\quad \text{odkud}\quad \frac{1}{2}+x=\frac{1}{2x},\quad \text{a tedy}\quad 2x^2+x-1=0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$. Protože $x_2 < 0$, má daná logaritmická rovnice jediné řešení $x_1 = \frac{1}{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 6.** Řešme rovnici

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-12)=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+1.$$

Řešení. Argumenty obou logaritmů jsou kladné, pokud

$$x>-3 \wedge x^2-x-12>0.$$

Řešeními nerovnice $x^2 - x - 12 > 0$ jsou $x \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$. Všechny výrazy v dané rovnici mají tedy smysl za předpokladu, že $x \in (4, \infty)$. Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-12)&=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+\log_{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2},\\
\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-12)&=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{2},\\
x^2-x-12&=\frac{x+3}{2},\\
2x^2-3x-27&=0.
\end{aligned}$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = -3$. Protože $x_1 \in (4, \infty)$, $x_2 \notin (4, \infty)$, má daná logaritmická rovnice jediný kořen $x_1 = \frac{9}{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 7.** Řešme rovnici

$$\log_{x+7}(x^2+3x+5)=2.$$

Řešení. Základ i argument logaritmu mají smysl, pokud

$$x > -7 \wedge x \neq -6 \wedge x^2 + 3x + 5 > 0.$$

Řešeními nerovnice $x^2 + 3x + 5 > 0$ jsou všechna $x \in \mathsf{R}$, danou logaritmickou rovnici řešíme tedy za předpokladu, že $x \in (-7, -6) \cup \cup (-6, \infty)$. Z definice logaritmu dostaneme rovnici

$$(x+7)^2 = x^2 + 3x + 5.$$

Jejím jediným řešením je $x = -4$, což je zároveň řešení dané logaritmické rovnice.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Řešte rovnici $3^x + 3^{2x+1} = 4$.

2. Řešte rovnici $5^x + 3 \cdot 5^{x-1} = 8 \cdot 5^{-2}$.

3. Řešte rovnici $20 \cdot 2^{2x-2} - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} = 16 - 8 \cdot 2^{2x-1}$.

4. Řešte rovnici $8 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 9^{\sqrt{x+1}} = -9$.

5. Určete všechna záporná řešení rovnice $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + \frac{8}{3}x} = 4^{\frac{2}{3}}$.

6. Určete všechna nenulová řešení rovnice $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$.

7. Určete počet nenulových řešení rovnice $2^{2x+1} = 2^{x-1} + \frac{3}{2}$.

8. Řešte rovnici $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$.

9. Řešte rovnici $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{|x-1|}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3}$.

10. Řešte rovnici $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x+2} = \frac{4}{25}$.

11. Řešte rovnici $\dfrac{6^{x^2}}{2^{-2}} = \dfrac{3^{-2}}{6^{2-5x}}$.

12. Řešte rovnici $2^{\frac{14}{\log_2 x}} = \frac{1}{128}$.

13. Určete číslo y, jestliže $\log_2 y = 1 - 2\log_2 x + \log_2(x-1)$.

14. Určete číslo y, jestliže

$$\log_3 y = 2 + \log_3 x - \log_3(x-1) - \tfrac{1}{2}\log_3(x+2).$$

15. Řešte rovnici $\log_4 x - \log_4(2-x) = 1$.

16. Řešte rovnici $\log_5 x = \dfrac{1}{\log_5 x}$.

17. Řešte rovnici $\dfrac{\log_5(13-2x)}{\log_5(5-x)} = 2$.

18. Řešte rovnici $\dfrac{\log_2 8x}{\log_2(2-x)} = 2$.

19. Řešte rovnici $\log_2 \dfrac{1}{|x+2|} = 1$.

20. Řešte rovnici $\log_4 x - \log_4 \sqrt{x} + \log_4 \dfrac{2}{x} = -2$.

21. Řešte rovnici $\log_{x+1}(13-x^2) = 2$.

22. Určete počet řešení rovnice $\log_5(2x-5) + \log_5 3x = \log_5(x-4)$.

23. Určete všechny kladné kořeny rovnice

$$\log_3^2(x+2) - \log_3(x+2) = 0.$$

24. Určete počet řešení rovnice $\log_x(x+4) = -1$.

25. Řešte rovnici $2(\log_x \sqrt{7})^2 - \log_x \sqrt{7} - 1 = 0$.

26. Řešte rovnici $\log \sqrt{x^2+x-2} = \frac{1}{2}$.

27. Určete všechny záporné kořeny rovnice

$$\log_2^2(x+3) - \log_2(x+3) - 6 = 0.$$

28. Určete počet řešení rovnice $\log_{2x+1}(x^2+5) = 2$.

29. Určete počet reálných řešení rovnice $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = 3$.

30. Určete číslo y, jestliže $\log_4 y = \frac{1}{2}\log_4(3x) - 2\log_4(x+1) + \frac{1}{2}$.

Výsledky

1. $x = 0$

2. $x = -1$

3. $x = \frac{3}{2}$

4. $x = 3$

5. $x_1 = -2, \;\; x_2 = -\frac{2}{3}$

6. $x = -2$

7. žádné

8. $x_1 = 0, \;\; x_2 = 1$

9. $x_1 = 2 - \sqrt{2}, \;\; x_2 = 2$

10. $x_1 = -2 - \sqrt{5}, \;\; x_2 = -2 + \sqrt{5}$

11. $x_1 = 1, \;\; x_2 = 4$

12. $x = \frac{1}{4}$

13. $y = \dfrac{2(x-1)}{x^2}$

14. $y = \dfrac{9x}{(x-1)\sqrt{x+2}}$

15. $x = \frac{8}{5}$

16. $x_1 = \frac{1}{5}, \;\; x_2 = 5$

17. $x = 2$

18. $x = 6 - 4\sqrt{2}$

19. $x_1 = -\frac{5}{2}, \;\; x_2 = -\frac{3}{2}$

20. $x = 1024$

21. $x = 2$

22. žádné

23. $x = 1$

24. jedno

25. $x_1 = \frac{1}{7}, \;\; x_2 = \sqrt{7}$

26. $x_1 = -4, \;\; x_2 = 3$

27. $x = -\frac{11}{4}$

28. jedno

29. tři

30. $y = \dfrac{2\sqrt{3x}}{(x+1)^2}$

Kapitola 4.
NEROVNICE

Při řešení nerovnic se používá následujících vět:

1. Je-li $x < y$ a a libovolné reálné číslo, pak platí:
$$x + a < y + a.$$
2. Je-li $x < y$ a a libovolné kladné číslo, pak platí:
$$ax < ay.$$
3. Je-li $x < y$ a a libovolné záporné číslo, pak platí:
$$ax > ay.$$
4. Pro každé reálné číslo a platí:
$$-a \leqq |a|,$$
$$a \leqq |a|.$$
5. Pro libovolná reálná čísla platí:
$$|x \pm y| \leqq |x| + |y|.$$

4.1. Lineární nerovnice

Lineární nerovnicí se rozumí především nerovnice tvaru $ax + b < 0$ (příp. $\leqq 0$, příp. > 0, příp. $\geqq 0$), kde a, b jsou daná reálná čísla a $a \neq 0$. V této části se nebudeme zabývat pouze touto jednoduchou nerovnicí, ale takovými nerovnicemi, které obsahují lineární výrazy $ax + b$. Řešení těchto složitějších nerovnic se převádí na sled úloh s lineárními nerovnicemi.

Zde připomeňme, že lineární výraz mění znaménko v bodě $x_1 = -b/a$ $(a \neq 0)$ a platí:

α) je-li $a > 0$, pak výraz $ax + b$ je kladný napravo od bodu x_1, a záporný nalevo od bodu x_1.

β) je-li $a < 0$, pak výraz $ax + b$ je kladný nalevo od bodu x_1, a záporný napravo od bodu x_1.

Pozor: Je-li výraz $ax + b$ ve jmenovateli nějakého zlomku, pak nikdy bod x_1 není v definičním oboru daného výrazu.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$3 - \frac{3x}{2} < \frac{5}{8} - \frac{4x - 3}{6}\,.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany nerovnice společným jmenovatelem zlomků a dále upravíme:

$$\begin{aligned} 72 - 36x &< 15 - (16x - 12) \\ -20x &< -45 \\ x &> \tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

Množina všech řešení dané nerovnice je interval $(\frac{9}{4}, \infty)$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$x - \frac{1 - 1{,}5x}{4} < \frac{20 - 2{,}5x}{30} + 2$$

na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Řešení. Postupujeme stejným způsobem, jako v předchozím příkladě. Nejprve odstraníme zlomky a pak upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{4x-(1-1{,}5x)}{4} &< \frac{20-2{,}5x+60}{30}\\ 30(4x-1+1{,}5x) &< 4(20-2{,}5x+60)\\ 175x &< 350\\ x &< 2\end{aligned}$$

Množina všech řešení dané nerovnice na intervalu je průnik zadaného intervalu s řešením nerovnice: $x \in \langle 0,\infty) \cap (-\infty,2) = \langle 0,2)$.

Metoda intervalů se používá pro nerovnosti typu

$$\frac{(V_1)(V_2)\dots(V_n)}{(U_1)(U_2)\dots(U_m)} < 0$$

(příp. > 0, příp. $\leqq 0$, příp. $\geqq 0$), kde V_i $(i = 1,\dots,n)$ a U_j $(j = 1,\dots,m)$ jsou výrazy, jejichž znaménka umíme snadno určit. Metoda intervalů spočívá v nalezení takových intervalů, kde výrazy V_i a U_j nemění znaménko. V každém takovém intervalu pak snadno nalezneme znaménko výrazu na levé straně nerovnosti. Neboť má-li lichý počet výrazů záporné znaménko, pak výsledek je záporný. Má-li sudý počet výrazů záporné znaménko, pak výsledek je kladný.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$\frac{(2x-1)(x+2)}{x-3} > 0.$$

Řešení. Řešíme metodou intervalů.

Hledané intervaly zjistíme tak, že nalezneme nulové body lineárních výrazů. Vzhledem k tomu, že jde o lineární výrazy, v nulových bodech se mění znaménka.

$$\begin{aligned}2x-1=0 &\implies x=\tfrac{1}{2}\\ x+2=0 &\implies x=-2\\ x-3=0 &\implies x=3\end{aligned}$$

Nulové body -2, $\frac{1}{2}$, 3 rozdělí definiční obor $\mathsf{R} - \{3\}$ na čtyři intervaly.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 3)$	$(3, \infty)$
$2x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(2x-1)(x+2)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Množina všech řešení dané nerovnice je $(-2, \frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$\frac{(3x+1)(x-2)}{1-x} \leqq 0.$$

Řešení. Řešíme metodou intervalů. Definičním oborem dané nerovnice je množina $D = \mathsf{R} - \{1\}$. Určíme nulové body lineárních dvojčlenů.

$$\begin{aligned} 3x + 1 = 0 &\implies x = -\tfrac{1}{3} \\ x - 2 = 0 &\implies x = 2 \\ x - 1 = 0 &\implies x = 1 \end{aligned}$$

Musíme vzít v úvahu i bod $x = 1$, i když nepatří do definičního oboru (proto se v uvedené tabulce vyskytují polootevřené intervaly s krajním bodem 1. Nulové body rozdělí definiční obor na čtyři intervaly.

	$(-\infty, -\frac{1}{3}\rangle$	$\langle -\frac{1}{3}, 1)$	$(1, 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
$3x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{(3x+1)(x-2)}{1-x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

Množina všech řešení dané nerovnice je $\langle -\frac{1}{3}, 1) \cup \langle 2, \infty)$.

▷ **PŘÍKLAD 5.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$\frac{x-5}{x+1} \leqq 4.$$

Řešení. Definičním oborem dané nerovnice je množina $D = \mathsf{R} - \{-1\}$. Tuto nerovnici můžeme řešit dvěma způsoby.

První způsob:

Číslo 4 převést z pravé strany nerovnice na levou stranu a dále upravovat na tvar zlomku, u kterého budeme určovat znaménko pomocí nulových bodů. Chceme dostat nerovnici do podobného tvaru, jako v předchozím příkladě.

$$\frac{x-5}{x+1} - 4 \leqq 0$$

$$\frac{x-5-4x-4}{x+1} \leqq 0$$

$$\frac{-3x-9}{x+1} \leqq 0$$

$$\frac{x+3}{x+1} \geqq 0$$

Nyní můžeme řešit zase metodou nulových bodů.

	$(-\infty, -3\rangle$	$\langle -3, -1)$	$(-1, \infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+3}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Při zápisu intervalů do tabulky jsme vzali v úvahu definiční obor nerovnice ($x \neq -1$). Množina všech řešení dané nerovnice je $(-\infty, -3\rangle \cup$ $\cup\, (-1, \infty)$.

Druhý způsob:

Druhý postup spočívá v tom, že nejprve odstraníme zlomek. To znamená vynásobit nerovnici výrazem $(x+1)$. Avšak musíme rozlišovat dva případy:

1) $x+1>0$ (symbol $\leqq$ v původní nerovnici se po vynásobení nemění)
2) $x+1<0$ (symbol $\leqq$ v původní nerovnici po vynásobení přejde na symbol $\geqq$)

ad 1) $\quad x+1>0 \implies x>-1,\;$ tj. $\;x\in(-1,\infty)$

$$\begin{aligned} x-5 &\leqq 4(x+1)\\ x-5 &\leqq 4x+4\\ -9 &\leqq 3x\\ -3 &\leqq x \end{aligned}$$

$$x\in(-1,\infty)\cap\langle -3,\infty) = (-1,\infty)$$

ad 2) $\quad x+1<0 \implies x<-1,\;$ tj. $\;x\in(-\infty,-1)$

$$\begin{aligned} x-5 &\geqq 4(x+1)\\ x-5 &\geqq 4x+4\\ -9 &\geqq 3x\\ -3 &\geqq x \end{aligned}$$

$$x\in(-\infty,-1)\cap(-\infty,-3\rangle = (-\infty,-3\rangle$$

Množinu M všech řešení dané nerovnice získáme jako sjednocení množin řešení v jednotlivých případech:

$$M=(-\infty,-3\rangle\cup(-1,\infty).$$

* * *

V nerovnostech s absolutní hodnotou nejprve musíme odstranit absolutní hodnotu. To uděláme tak, že použijeme definice absolutní hodnoty:

$$|\{\text{výraz}\}| = \begin{cases} -\{\text{výraz}\} & \text{pro } \{\text{výraz}\}\leqq 0\\ \{\text{výraz}\} & \text{pro } \{\text{výraz}\}\geqq 0 \end{cases}$$

Abychom to mohli udělat, musíme určit intervaly, na kterých je výraz uvnitř absolutní hodnoty nezáporný a na kterých nekladný.

▷ **PŘÍKLAD 6.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$|x-1|+2x>4.$$

Řešení. Uvažujeme dva případy:

1) $x-1 \geqq 0 \implies |x-1| = x-1$
2) $x-1 \leqq 0 \implies |x-1| = -(x-1)$

ad 1) $\quad x-1 \geqq 0 \implies x \geqq 1, \;$ tj. $\; x \in \langle 1, \infty)$

$$\begin{aligned} x-1+2x &> 4 \\ x &> \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Množina všech řešení nerovnice v intervalu $\langle 1, \infty)$ je

$$M_1 = \langle 1, \infty) \cap (\tfrac{5}{3}, \infty) = (\tfrac{5}{3}, \infty).$$

ad 2) $\quad x-1 \leqq 0 \implies x \leqq 1, \;$ tj. $\; x \in (-\infty, 1\rangle$

$$\begin{aligned} 1-x+2x &> 4 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Množina všech řešení nerovnice v intervalu $(-\infty, 1\rangle$ je

$$M_2 = (-\infty, 1) \cap (3, \infty) = \emptyset.$$

To znamená, že na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ nemá zadaná nerovnice žádné řešení. Množina M všech řešení dané nerovnice je sjednocení množin M_1 a M_2:

$$M = (\tfrac{5}{3}, \infty) \cup \emptyset = (\tfrac{5}{3}, \infty).$$

▷ **PŘÍKLAD 7.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$10|x-1| - 6|2-x| + 2|x-4| > 10-2x.$$

Řešení. První krok k odstranění absolutních hodnot je určení intervalů, na kterých jsou jednotlivé výrazy uvnitř absolutních hodnot nezáporné (příp. nekladné).

$$x-1=0 \implies x=1$$
$$2-x=0 \implies x=2$$
$$x-4=0 \implies x=4$$

Body, v kterých výrazy v absolutních hodnotách mění znaménka, jsou 1, 2, 4. Ty rozdělí definiční obor R dané nerovnice do čtyř intervalů.

	$(-\infty,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,\infty)$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$2-x$	$x-2$	$x-2$
$\lvert x-4\rvert$	$4-x$	$4-x$	$4-x$	$x-4$

1) $x \in (-\infty,1\rangle$

$$\begin{aligned} 10(1-x)-6(2-x)+2(4-x) &> 10-2x \\ -4x &> 4 \\ x &< -1 \end{aligned}$$

Množina P_1 všech řešení dané nerovnice na intervalu $(-\infty,1\rangle$ je

$$P_1 = (-\infty,1\rangle \cap (-\infty,-1) = (-\infty,-1).$$

2) $x \in \langle 1,2\rangle$

$$\begin{aligned} 10(x-1)-6(2-x)+2(4-x) &> 10-2x \\ x &> \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Množina P_2 všech řešení dané nerovnice na intervalu $\langle 1,2\rangle$ je

$$P_2 = \langle 1,2\rangle \cap (\tfrac{3}{2},\infty) = (\tfrac{3}{2},2\rangle.$$

3) $x \in \langle 2, 4\rangle$

$$\begin{aligned} 10(x-1) - 6(x-2) + 2(4-x) &> 10 - 2x \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Množina P_3 všech řešení dané nerovnice na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ je

$$P_3 = \langle 2, 4\rangle \cap (0, \infty) = \langle 2, 4\rangle.$$

4) $x \in \langle 4, \infty)$

$$\begin{aligned} 10(x-1) - 6(x-2) + 2(x-4) &> 10 - 2x \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Množina P_4 všech řešení dané nerovnice na intervalu $\langle 4, \infty)$ je

$$P_4 = (2, \infty) \cap \langle 4, \infty) = \langle 4, \infty).$$

Množina P všech řešení dané nerovnice v R je

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = (-\infty, -1) \cup (\tfrac{3}{2}, \infty).$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–24 určete množiny všech řešení daných rovnic.

1. $10x + \dfrac{5}{2} \geqq 3(x-1) + \dfrac{3x}{4}$

2. $\dfrac{2x+1}{3} + x < x + \dfrac{3x+2}{6}$

3. $\dfrac{x-1}{x+1} > 1$

4. $\dfrac{6x+4}{2x-1} + 1 > -13$

5. $\dfrac{5+x}{3-x} < 0$

6. $\dfrac{5x+12}{0{,}3x-10} \geqq 0$

7. $|x| + x \geqq 1$

8. $2|x| + |2x| > 0$

9. $|x+2| \geqq x + 2$

10. $|x-1| \leqq |x-3|$

11. $|x| \geqq |x-1|$

12. $|x+2| \geqq |x-2|$

13. $3|x+1| - |3x+2| < 0$

14. $2x+1-2|x+1|+x \geqq 4|1-x|$

15. $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 3$

16. $\left|\dfrac{2x+1}{x-3}+1\right| < 1$

17. $\left|\dfrac{12x-1}{x-\pi}+1\right| < 2$

18. $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x+1} \leqq 1$

19. $|2x-3| \geqq |3x-2|$

20. $3^{|x-1|} \leqq 1$

21. $\dfrac{1}{|x+1|} > \dfrac{1}{4}$

22. $|3-4x| \leqq 2$

23. $|x+3| > |x-2|$

24. $|x-3|-1 \leqq |x-1|$

* * *

25. Určete množinu všech řešení nerovnice v intervalu $(0, 12)$

$$3x - 5 > 15 - 8x.$$

26. Určete množinu všech řešení nerovnice v intervalu $(0, \infty)$

$$324x + \tfrac{1}{12} > -2(3x+7).$$

27. Určete množinu všech řešení nerovnice v intervalu $\langle -1, 1\rangle$

$$x + x^2 - |3x-2| + 2|x-1| \leqq (x-1)^2.$$

Výsledky

1. $\langle -\frac{22}{25}, \infty)$

2. $(-\infty, 0)$

3. $(-\infty, -1)$

4. $(-\infty, \frac{5}{17}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

5. $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$

6. $(-\infty, -\frac{12}{5}\rangle \cup (\frac{100}{3}, \infty)$

7. $\langle \frac{1}{2}, \infty)$

8. $\mathsf{R} - \{0\}$

9. R

10. $(-\infty, 2\rangle$

11. $\langle \frac{1}{2}, \infty)$

12. $\langle 0, \infty)$

13. $(-\infty, -\frac{5}{6})$ **14.** $\{1\}$

15. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$ **16.** $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

17. $\frac{1}{11}(1-\pi),\ \frac{1}{15}(1+3\pi)$ **18.** $(-1, 2) \cup \langle 8, \infty)$

19. $\langle -1, 1\rangle$ **20.** $\{1\}$ **21.** $(-5, -1) \cup (-1, 3)$

22. $\langle \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\rangle$ **23.** $(-\frac{1}{2}, \infty)$ **24.** $\langle \frac{3}{2}, \infty)$

25. $(\frac{20}{11}, 12)$ **26.** $(0, \infty)$ **27.** $\langle -1, \frac{1}{4}\rangle$

4.2. Kvadratické nerovnice

V této části se budeme věnovat nejenom kvadratickým nerovnicím, ale také nerovnicím, které se na kvadratické nerovnice dají převést. Určování znaménka hodnoty kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ usnadňuje řešení rozmanitých nerovnic. Připomeňme, že a je libovolné reálné číslo různé od nuly, b, c jsou libovolná reálná čísla, x je nezávisle proměnná. Při řešení kvadratické rovnice hraje důležitou úlohu diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

Při řešení kvadratických nerovnic můžeme v zásadě postupovat dvěma způsoby.

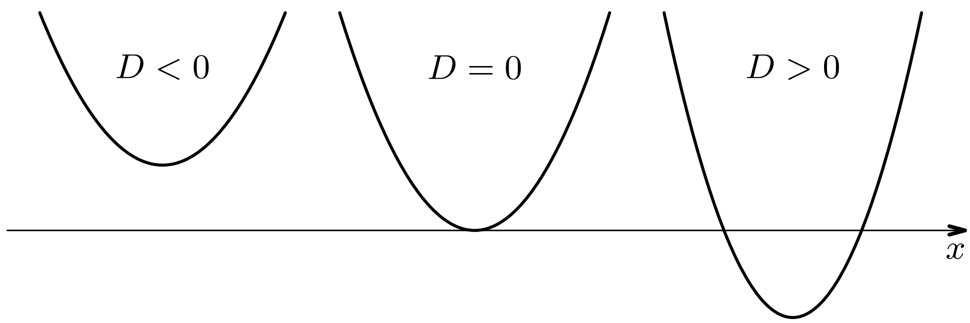
První způsob je možný jen za předpokladu, že diskriminant je kladný. Pomocí diskriminantu vypočteme kořeny příslušné kvadratické rovnice x_1, x_2. Kvadratický trojčlen upravíme na součin dvou lineárních členů $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Dále postupujeme metodou nulových bodů, jak bylo ukázáno v předchozí kapitole.

Druhý postup předpokládá znalost vlastností grafu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$. Grafem je parabola.

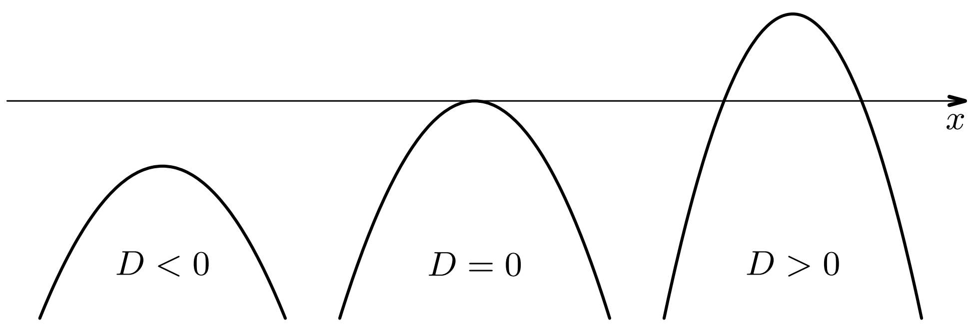
1) Je-li $a > 0$, je parabola „zdola omezená“.
2) Je-li $a < 0$, je parabola „shora omezená“.
3) Je-li $D > 0$, parabola protíná osu x ve dvou různých bodech.
4) Je-li $D = 0$, parabola se osy x dotýká v jednom bodě.
5) Je-li $D < 0$, parabola osu x neprotíná.

Mohou nastat tyto případy:

- pro $a > 0$



- pro $a < 0$



ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

Řešení. Ukážeme oba výše zmíněné postupy.

První způsob:

Kvadratický trojčlen na levé straně nerovnice zapíšeme jako součin kořenových činitelů. K výpočtu použijeme diskriminant $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$. Rovnice $x^2 + x - 2 = 0$ má dva kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Nerovnici přepíšeme do tvaru

$$(x + 2)(x - 1) < 0.$$

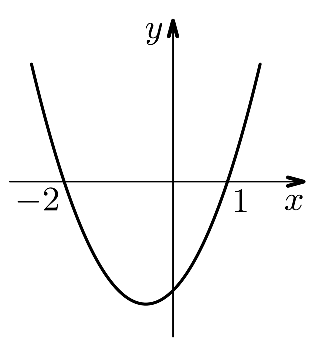
Dále postupujeme metodou nulových bodů, které určují na číselné ose tři intervaly.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Množina všech řešení zadané nerovnice je interval $(-2, 1)$.

Druhý způsob řešení:

Vyřešíme příslušnou kvadratickou rovnici $x^2 + x - 2 = 0$. Koeficient u kvadratického členu $a = 1$, parabola leží nad vrcholovou tečnou. Protože diskriminant $D > 0$ $(D = 9)$, má parabola dva průsečíky s osou x, $x = 1$ a $x = -2$. Načrtneme příslušnou parabolu:



Z obrázku určíme, že množina všech reálných čísel x, pro něž platí $x^2 + x - 2 < 0$, je interval $(-2, 1)$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$\frac{x+1}{x+2} > x.$$

Řešení. Nerovnici můžeme řešit dvěma způsoby.

První způsob:

Od obou stran nerovnice odečteme x a levou stranu upravíme na zlomek. Upravenou nerovnici budeme řešit metodou nulových bodů.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x+2} - x &> 0 \\
\frac{x+1-x(x+2)}{x+2} &> 0 \\
\frac{-x^2-x+1}{x+2} &> 0 \\
\frac{x^2+x-1}{x+2} &< 0 \\
\frac{\left(x-\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right)\left(x-\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right)}{x+2} &< 0
\end{aligned}$$

Nulové body -2, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ rozdělí číselnou osu na čtyři intervaly.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\infty)$
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x+2}-x$	$-$	$+$	$-$	$+$

Množina M všech řešení zadané nerovnice je

$$M=(-\infty,-2)\cup\left(\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}),\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right).$$

Druhý způsob:

„Odstraníme“ zlomek na levé straně nerovnice. Nerovnici vynásobíme výrazem $(x+2)$. Rozlišíme dva případy:

1) $x + 2 > 0$ (symbol $<$ v původní nerovnici se po vynásobení nemění)

2) $x + 2 < 0$ (symbol $>$ po vynásobení přejde na $<$)

ad 1) $x + 2 > 0 \implies x \in (-2, \infty)$

$$\begin{aligned} x + 1 &> x(x+2) \\ 0 &> x^2 + x - 1 \\ 0 &> \bigl(x - \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\bigr)\bigl(x - \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\bigr) \end{aligned}$$

Množina M_1 všech řešení v tomto případě je

$$\begin{aligned} M_1 &= (-2, \infty) \cap \bigl(\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\bigr) = \\ &= \bigl(\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\bigr). \end{aligned}$$

ad 2) $x + 2 < 0 \implies x \in (-\infty, -2)$

$$\begin{aligned} x + 1 &< x(x+2) \\ 0 &< x^2 + x - 1 \\ 0 &> \bigl(x - \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\bigr)\bigl(x - \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\bigr) \end{aligned}$$

Množina M_2 všech řešení v tomto případě je

$$\begin{aligned} M_2 &= (-\infty, -2) \cap \Bigl[\bigl(-\infty, \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\bigr) \cup \bigl(\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \infty\bigr)\Bigr] = \\ &= (-\infty, -2). \end{aligned}$$

Množina M všech řešení zadané nerovnice je sjednocení množin M_1 a M_2:

$$M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, -2) \cup \bigl(\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\bigr).$$

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme množinu všech řešení nerovnice

$$|3x - 1| < x^2 + 2x.$$

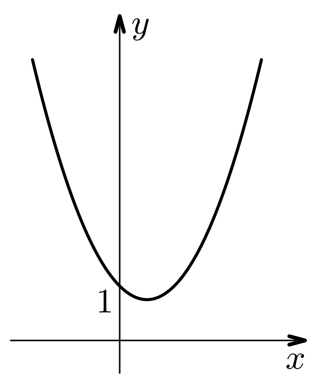
Řešení. Podle definice absolutní hodnoty rozdělíme řešení příkladu na dva případy:

1) $3x - 1 \geqq 0 \implies |3x - 1| = 3x - 1$
2) $3x - 1 \leqq 0 \implies |3x - 1| = -(3x - 1)$

ad 1) $\quad 3x - 1 \geqq 0 \iff x \geqq \frac{1}{3} \implies |3x - 1| = 3x - 1$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< x^2 + 2x \\ 0 &< x^2 + 2x - 3x + 1 \\ 0 &< x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Nyní vyřešíme příslušnou kvadratickou rovnici. Diskriminant ($D = 1 - 4 = -3$) je záporný. Z toho plyne, že parabola neprotíná osu x. Koeficient u kvadratického členu je kladný, tudíž parabola leží nad osou x.



Jak je vidět z obrázku, naše nerovnice je splněna vždy. Množina P_1 všech řešení v tomto případě je průnik intervalu, v kterém řešíme, s řešením nerovnice:

$$P_1 = \langle \tfrac{1}{3}, \infty) \cap \mathsf{R} = \langle \tfrac{1}{3}, \infty)$$

ad 2) $\quad 3x - 1 \leqq 0 \iff x \leqq \frac{1}{3} \implies |3x - 1| = 1 - 3x$

$$\begin{aligned} 1 - 3x &< x^2 + 2x \\ 0 &< x^2 + 5x - 1 \\ 0 &< \big(x - \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{29})\big)\big(x - \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{29})\big) \end{aligned}$$

Nyní máme nerovnici převedenou na tvar, kdy můžeme postupovat metodou nulových bodů (nebo pomocí náčrtku paraboly). Nulové body

$x_{12} = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{29})$ číselnou osu rozdělí na tři intervaly.

	$(-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2})$	$(\frac{-5-\sqrt{29}}{2}, \frac{-1+\sqrt{29}}{2})$	$(\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, \infty)$
$x - \frac{-5-\sqrt{29}}{2}$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 5x - 1$	$+$	$-$	$+$

Množina P_2 je průnik intervalu, v kterém řešíme, s řešením nerovnice:

$$P_2 = (-\infty, \tfrac{1}{3}\rangle \cap \left[\left(-\infty, \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{29})\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{29}), \infty\right)\right] =$$
$$= \left(-\infty, \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{29}\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{29}), \tfrac{1}{3}\right\rangle$$

Množina P všech řešení dané nerovnice je sjednocení množin P_1 a P_2:

$$P = P_1 \cup P_2 = \left(-\infty, \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{29})\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{29}), \infty\right)$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–13 určete množiny všech řešení daných nerovnic.

1. $x^2 - 3x - 28 \leqq 0$

2. $-x^2 + x - 17 < 0$

3. $-x^2 + x - 17 \geqq 0$

4. $x^2 + 8x + 16 \leqq 0$

5. $|x^2 + 2x + 3| > -x^2 + 3x - 2$

6. $5x^2 + |x + 1| > 0$

7. $|x^2 - 4x + 3| < 2(x + 1)$

8. $|x^2 + x + 2| < x$

9. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} \leqq 5 - x$

10. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geqq 2 - x$

11. $-2x^2 + 9{,}8x + 1 > 0$

12. $x^2 - 2{,}5x + 0{,}5 < 2x^2 - 1$

13. $x^2 - 5x + 2 \geqq 2x^2 - 6x - 10$

Výsledky

1. $\langle -4, 7 \rangle$
2. R
3. $\emptyset$
4. $\{-4\}$
5. R
6. R
7. $(3 - 2\sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2})$
8. $\emptyset$
9. $(-\infty, 1\rangle$
10. $\langle 2, \infty)$
11. $(-\frac{1}{10}, 5)$
12. $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
13. $\langle -3, 4 \rangle$

Kapitola 5.

POSLOUPNOSTI

Nekonečná posloupnost je reálná funkce, jejímž definičním oborem je množina N přirozených čísel. Hodnota posloupnosti v bodě n se nazývá n-tý člen posloupnosti. Hodnotami svých členů je posloupnost plně určena. Posloupnost, jejíž n-tý člen je a_n, budeme označovat symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zadání posloupnosti. Posloupnost máme obvykle zadánu jedním z těchto způsobů:

a) vzorcem pro hodnotu n-tého členu a_n, např. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, nebo $a_n = 2 + (-1)^n$;

b) rekurentní formulí, která je vztahem pro dva nebo více sousedních členů posloupnosti a hodnotami prvních členů, např.

$$a_{n+1} = 2a_n - 5, \quad a_1 = 5,$$

nebo

$$a_{n+2} = na_{n+1} + 2a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4.$$

Vlastnosti posloupností. Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

- *rostoucí*, jestliže $a_{n+1} > a_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;
- *klesající*, jestliže $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;
- *neklesající*, jestliže $a_{n+1} \geqq a_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;
- *nerostoucí*, jestliže $a_{n+1} \leqq a_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$.

Posloupnost, která má některou z uvedených vlastností, se nazývá *monotonní*.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

- *shora omezená*, jestliže existuje reálné číslo m takové, že $a_n \leqq m$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;
- *zdola omezená*, jestliže existuje reálné číslo m takové, že $a_n \geqq m$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;
- *omezená*, jestliže existuje reálné číslo m takové, že $|a_n| \leqq m$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$.

Aritmetická posloupnost je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí

$$a_{n+1} = a_n + d$$

pro všechna $n \in \mathsf{N}$. Číslo d je *diference* a v aritmetické posloupnosti platí pro všechna $n, m \in \mathsf{N}$:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$;
- $a_n = a_m + (n-m)d$;
- součet s_n prvních n členů posloupnosti je

$$s_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n) = na_1 + \tfrac{1}{2}n(n-1)d.$$

Geometrická posloupnost je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je

$$a_{n+1} = qa_n,$$

$q \neq 0$. Číslo q je *kvocient* geometrické posloupnosti. V geometrické posloupnosti platí pro všechna $n, m \in \mathsf{N}$:

- $a_n = a_1 q^{n-1}$;
- $a_n = a_m q^{n-m}$;
- součet s_n prvních n členů posloupnosti je

$$s_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{je-li } q \neq 1, \\ na_1, & \text{je-li } q = 1. \end{cases}$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme člen a_5 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n - 3$ a členem $a_1 = 3$.

Řešení. Dosazením do rekurentní formule postupně dostaneme:

$$a_2 = 2 \cdot 3 - 3 = 3, \quad a_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3,$$
$$a_4 = 2 \cdot 3 - 3 = 3, \quad a_5 = 2 \cdot 3 - 3 = 3.$$

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme součet $a_3 + a_4$ členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2na_n + 3$ a členem $a_1 = -1$.

Řešení. Dosazením do rekurentní formule postupně dostaneme

$$a_2 = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 = 1, \quad a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 = 7, \quad a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 3 = 45.$$

Je tedy

$$a_3 + a_4 = 7 + 45 = 52.$$

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme člen a_1 posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = na_n + 3$ a členem $a_4 = 24$.

Řešení. Je $a_n = \dfrac{1}{n}(a_{n+1} - 3)$, a tudíž postupně dostaneme:

$$a_3 = \tfrac{1}{3}(24 - 3) = 7, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(7 - 3) = 2, \quad a_1 = 2 - 3 = 1.$$

▷ **PŘÍKLAD 4.** V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = 2$ a diference $d = 5$. Určeme členy a_4 a a_{30}.

Řešení. V aritmetické posloupnosti je $a_{n+1} = a_1 + (n-1)d$, tedy

$$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17 \quad \text{a} \quad a_{30} = a_1 + 29d = 2 + 29 \cdot 5 = 147.$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_8 = 15$ a diference $d = 2$. Určeme členy a_1 a a_{25}.

Řešení. V aritmetické posloupnosti je $a_n = a_m + (n-m)d$, a tedy $a_1 = a_8 + (1-8)d = 15 - 7 \cdot 2 = 1$. Dále je

$$a_{25} = a_1 + 24d = 1 + 24 \cdot 2 = 49.$$

▷ **PŘÍKLAD 6.** V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = 3$ a diference $d = 4$. Určeme součet s_{20}.

Řešení. Pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí: $s_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$, tedy

$$s_{20} = 20 \cdot 3 + \tfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 4 = 820.$$

▷ **PŘÍKLAD 7.** V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_3 = 7$ a člen $a_7 = 4$. Určeme součet s_{15}.

Řešení. Je $a_7 = a_3 + 4d$, tedy $4 = 2 + 4d \implies d = \frac{1}{2}$. Odtud dostaneme $a_1 = a_3 - 2d = 2 - 1 = 1$, a tudíž

$$s_{15} = 15 \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 \cdot 12 = 67{,}5.$$

▷ **PŘÍKLAD 8.** V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_3 = 5$ a součet $s_8 = 76$. Určeme člen a_1 a diferenci d.

Řešení. Je $a_3 = a_1 + 2d$ a $s_8 = 8a_1 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot d$, tedy $5 = a_1 + 2d$ a $76 = 8a_1 + 28d$. Soustava má řešení $a_1 = -1$ a $d = 3$.

▷ **PŘÍKLAD 9.** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = 3$ a kvocient $q = 2$. Určeme členy a_5 a a_7.

Řešení. V geometrické posloupnosti je $a_n = a_1q^{n-1}$, tedy $a_5 = a_1q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$ a $a_7 = a_1q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$.

▷ **PŘÍKLAD 10.** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_4 = 36$ a kvocient $q = 3$. Určeme členy a_1 a a_6.

Řešení. V geometrické posloupnosti je $a_n = a_mq^{n-m}$, a tedy $a_1 = a_4q^{-3} = 36 \cdot \frac{1}{27} = \frac{4}{3}$. Člen $a_6 = a_4q^2 = 36 \cdot 9 = 324$.

▷ **PŘÍKLAD 11.** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = 3$ a člen $a_4 = 24$. Určeme kvocient q a člen a_5.

Řešení. Je $a_4 = a_1q^3$, tedy $24 = 3q^3$. Odtud $q^3 = 8 \iff q = 2$. Tudíž je $a_5 = a_4q = 24 \cdot 2 = 48$.

▷ **PŘÍKLAD 12.** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_2 = 1$ a člen $a_6 = 16$. Určeme člen a_8.

Řešení. Je $a_6 = a_2 q^4$, tedy $16 = q^4$, a tudíž $q = \pm 2$. Dále je $a_8 = a_6 q^2 = 16 \cdot 4 = 64$ pro obě hodnoty kvocientu q.

▷ **PŘÍKLAD 13.** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = 3$ a kvocient $q = 2$. Určeme součet s_5.

Řešení. Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí:
$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{tedy} \quad s_5 = 3 \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 31 = 93.$$

▷ **PŘÍKLAD 14.** Mezi čísla -2 a 13 vložme čtyři čísla tak, aby spolu s vloženými čísly tvořila šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Které je první vložené číslo a kolik je součet všech šesti čísel?

Řešení. V dané posloupnosti je: $a_1 = -2$ a $a_6 = 13$. Tudíž $a_6 = a_1 + 5d \iff 13 = -2 + 5d$, tedy $d = 3$. První vložené číslo je $a_2 = a_1 + d = -2 + 3 = 1$ a součet všech šesti čísel je: $s_6 = 6a_1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot d = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \cdot 3 = 33$.

▷ **PŘÍKLAD 15.** Určeme součet přirozených čísel, která jsou dělitelná sedmi a leží mezi čísly 5 a 95.

Řešení. Přirozená čísla dělitelná 7 tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 7$. Prvním členem je $a_1 = 7$ a posledním členem je $a_n = 91$. Je $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $91 = 7 + (n-1)7 \iff n = 13$. Odtud $s_{13} = \frac{13}{2}(a_1 + a_{13}) = \frac{13}{2}(7 + 91) = 637$.

▷ **PŘÍKLAD 16.** Mezi čísla -1 a -32 vložme čtyři čísla tak, aby spolu s vloženými čísly tvořila šest členů geometrické posloupnosti. Které je třetí vložené číslo?

Řešení. V hledané posloupnosti je dáno: $a_1 = -1$ a $a_6 = -32$. Tudíž $a_6 = a_1 q^5 \iff -32 = -1 \cdot q^5 \iff q = 2$. Třetí vložené číslo je: $a_4 = a_1 q^3 = -1 \cdot 8 = -8$.

▷ **PŘÍKLAD 17.** Mezi čísla 32 a $\frac{1}{2}$ vložme pět čísel tak, aby spolu s vloženými čísly tvořila sedm po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Které je prostřední z vložených čísel?

Řešení. V posloupnosti je dáno $a_1 = 32$ a $a_7 = \frac{1}{2}$. Tedy $a_7 = a_1 q^6 \iff \iff \frac{1}{2} = 32q^6 \iff q^6 = \frac{1}{64} \iff q = \pm\frac{1}{2}$. Prostřední vložené číslo je $a_4 = a_1 q^3$. Úloha má dvě řešení $a_4 = \pm 4$.

▷ **PŘÍKLAD 18.** Určeme, zda posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená, zdola omezená, omezená a monotonní, kde

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, b) $a_n = n(-1)^n$,

c) $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, d) $a_n = \sqrt{\dfrac{1}{n+2}}$.

Řešení. a) Je patrné, že $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$ pro všechna přirozená čísla n. Posloupnost je tudíž omezená. Dosazením dostaneme vyjádření prvních členů posloupnosti: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... Ověříme hypotézu, že posloupnost je rostoucí:

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \iff$$
$$\iff n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \iff 0 < 1.$$

Podmínka je splněna pro všechna přirozená čísla n, posloupnost je tedy rostoucí.

b) Dosazením získáme vyjádření několika členů posloupnosti: -1, 2, -3, 4, ... Vidíme, že posloupnost není omezená, a tedy není monotonní.

c) Protože funkce sinus je periodická, dostaneme, že posloupnost je tvořena řadou čísel 1, 0, -1, 0, která se opakuje. Posloupnost je tudíž omezená a není monotonní.

d) Pro několik prvních členů posloupnosti dostaneme vyjádření: $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, ... Pro členy posloupnosti platí: $0 < a_n < 1$, posloupnost je omezená. Hodnoty prvních členů naznačují, že posloupnost je klesající. Pro všechna přirozená čísla n platí

$$a_n > a_{n+1} \iff \sqrt{\frac{1}{n+2}} > \sqrt{\frac{1}{n+3}} \iff$$
$$\iff \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \iff n+3 > n+2 \iff 1 > 0$$

Posloupnost je tedy klesající.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete člen a_6 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2na_n - 3$ a členem $a_1 = 2$.

2. Určete člen a_1 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = na_n + 3$ a členem $a_5 = 99$.

3. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n - 3$ a členem $a_1 = 2$.

4. Určete člen a_1 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 3a_n + 4$ a členem $a_4 = 25$.

5. Určete člen a_5 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} + a_n = 3$ a členem $a_1 = 1$.

6. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = a_n^2 - 4$ a členem $a_1 = 1$.

7. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2na_n - 1$ a členem $a_1 = 3$.

8. Určete člen a_2 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = (n+1)a_n + 3$ a členem $a_4 = 7$.

9. Určete součet prvních čtyř členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 3a_n - 2$ a členem $a_2 = 7$.

10. Určete součet prvních čtyř členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n - 4$ a členem $a_4 = 8$.

11. Určete součet prvních tří členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n - 5$ a členem $a_2 = 2$.

12. Určete součet prvních tří členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 10a_n - n$ a členem $a_1 = 10$.

13. Určete člen a_1 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 3a_n - n$ a členem $a_5 = -5$.

14. Určete člen a_3 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = (n-1)a_n + 3$ a členem $a_1 = -2$.

15. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n + 4$ a členem $a_2 = -1$.

16. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = (n+1)a_n - 5$ a členem $a_1 = 0$.

17. Určete člen a_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} + 3a_n = 4$ a členem $a_1 = 2$.

18. Určete součet $a_4 + a_5$ v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} - 2a_n = -4$ a členem $a_2 = 3$.

19. Určete součet s_4 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} + 2a_n = 5$ a členem $a_1 = 1$.

20. Určete součet $a_2 + a_4$ v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} - na_n = 3$ a členem $a_2 = -3$.

21. Určete součet $a_1 + a_4$ v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 1 + a_n^2$ a členem $a_1 = 1$.

22. Určete člen a_1 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} + a_n = 2n - 1$ a členem $a_4 = 3$.

23. Určete člen a_2 v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 3a_n - 1$ a členem $a_4 = 14$.

24. Určete součet $a_2 + a_4$ v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 2a_n + 3$ a členem $a_1 = -5$.

25. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -2$ a diference $d = 3$. Určete členy a_5 a a_{10}.

26. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -1$ a $a_7 = 17$. Určete diferenci d a člen a_{15}.

27. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 = 4$ a $a_{21} = 18$. Určete člen a_1 a diferenci d.

28. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -4$ a diference $d = 3$. Určete součet s_{12}.

29. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_3 = -1$ a $a_7 = 1$. Určete součet s_{16}.

30. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_3 = 8$ a $s_7 = 77$. Určete člen a_1 a diferenci d.

31. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 3$ a $s_9 = 99$. Určete diferenci d.

32. Určete člen a_{21} v aritmetické posloupnosti, kde člen $a_3 = 5$ a diference $d = 3$.

33. Určete člen a_3 v aritmetické posloupnosti, kde člen $a_{10} = 25$ a diference $d = 4$.

34. Určete diferenci d v aritmetické posloupnosti, kde člen $a_2 = 3$ a člen $a_8 = -15$.

35. Určete diferenci d v aritmetické posloupnosti, kde člen $a_1 = 2$ a součet $s_4 = 26$.

36. Určete člen a_{30} aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_1 = -3$ a diference $d = 3$.

37. Určete člen a_1 aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_{20} = 34$ a diference $d = 2$.

38. Určete člen a_{21} aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_1 = -5$ a diference $d = -2$.

39. Určete člen a_3 aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_{20} = 20$ a diference $d = 3$.

40. Mezi čísla 2 a 6 je vloženo jedenáct čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří třináct po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete diferenci d, druhé z vložených čísel a součet všech třinácti členů posloupnosti.

41. Mezi čísla -1 a 8 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

42. Mezi čísla -3 a 12 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete druhé z vložených čísel.

43. Mezi čísla -1 a 13 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete součet těchto pěti čísel.

44. Mezi čísla 0,5 a 10,5 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete osmý člen této posloupnosti.

45. Mezi čísla -1 a 13 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete součet vložených čísel.

46. Mezi čísla 9 a 17 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

47. Mezi čísla 7 a 17 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete součet vložených čísel.

48. Mezi čísla -2 a 28 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete druhé z vložených čísel.

49. Mezi čísla 6 a 30 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

50. Mezi čísla 27 a 41 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

51. Mezi čísla $\frac{1}{2}$ a 3 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

52. Přirozená čísla dělitelná čtyřmi tvoří aritmetickou posloupnost. Určete součet těchto čísel, která leží mezi čísly 7 a 97.

53. Přirozená čísla dělitelná sedmi tvoří aritmetickou posloupnost. Určete prostřední z těchto čísel, která leží mezi čísly 12 a 86.

54. Určete součet všech sudých čísel, která leží mezi čísly 3 a 37.

55. Určete součet všech lichých čísel, která leží mezi čísly 2 a 40.

56. Určete součet všech čísel dělitelných třemi, která leží mezi čísly 2 a 38.

57. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 81$ a kvocient $q = \frac{2}{3}$. Určete členy a_4 a a_5.

58. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 = 5$ a $a_5 = \frac{5}{8}$. Určete kvocient q a členy a_1 a a_3.

59. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 2$ a $a_5 = -10$. Určete kvocient q.

60. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 3$ a kvocient $q = 2$. Určete součet s_5.

61. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_3 = -9$ a kvocient $q = -3$. Určete součet s_6.

62. V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ a členem $a_3 = 12$ určete člen a_6.

63. V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 3$ a členem $a_6 = 486$ určete člen a_1.

64. V geometrické posloupnosti je člen $a_5 = -8$ a člen $a_6 = 16$. Určete člen a_1.

65. V geometrické posloupnosti je člen $a_2 = -\frac{1}{2}$ a člen $a_5 = 4$. Určete kvocient této posloupnosti.

66. Určete kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_3 = -5$ a $a_6 = 40$.

67. Určete kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_2 = 1$ a $a_5 = -27$.

68. Mezi čísla 2 a 128 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel, součet vložených čísel a součet všech sedmi čísel.

69. Mezi čísla 3 a 96 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete součet vložených čísel.

70. Mezi čísla -1 a -81 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

71. Mezi čísla 2 a -64 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete součet vložených čísel.

72. Mezi čísla -1 a 1 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete součet těchto šesti čísel.

73. Mezi čísla 4 a 108 jsou vložena dvě čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete součet vložených čísel.

74. Mezi čísla 4 a 108 jsou vložena dvě čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří první čtyři členy geometrické posloupnosti. Určete pátý člen této posloupnosti.

75. Mezi čísla 3 a 648 jsou vložena dvě čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří první čtyři členy geometrické posloupnosti. Určete třetí člen této posloupnosti.

76. Mezi čísla 2 a 162 jsou vložena tři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete prostřední vložené číslo.

77. Mezi čísla -25 a -9 je vloženo pět čísel tak, že spolu s danými čísly tvoří sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Určete prostřední z vložených čísel.

78. Určete, zda posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená, zdola omezená, omezená a monotonní, kde

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, b) $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+2}}$,

c) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, d) $a_n = \sqrt{n+1}$.

79. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = -1$ a diference $d = 2$. Určete členy a_8 a a_{10}.

80. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou členy $a_2 = 3$ a $a_5 = \frac{1}{9}$. Určete člen a_1.

Výsledky

1. 207 **2.** -1 **3.** -5 **4.** -1 **5.** 1 **6.** 21

7. 113 **8.** $-\frac{2}{3}$ **9.** 84 **10.** $\frac{47}{2}$ **11.** $\frac{9}{2}$ **12.** 1097

13. $\frac{53}{81}$ **14.** 6 **15.** 8 **16.** -85 **17.** -26 **18.** -4

19. 10 **20.** -9 **21.** 27 **22.** 0 **23.** 2 **24.** -26

25. $a_5 = 10,\ \ a_{10} = 25$ **26.** $d = 3,\ \ a_{15} = 41$

27. $a_1 = \frac{62}{19},\ \ d = \frac{14}{19}$ **28.** $s_{12} = 150$

29. $s_{16} = 28$ **30.** $a_1 = 2,\ \ d = 3$

31. $d = 2$ **32.** 59 **33.** -3 **34.** -3

35. 3 **36.** 84 **37.** -4 **38.** -45

39. -31 **40.** $d = \frac{1}{3},\ \ a_3 = \frac{8}{3},\ \ s_{13} = 52$

41. $\frac{7}{2}$ **42.** 2 **43.** 30 **44.** 14,5 **45.** 18 **46.** 13

47. 36 **48.** 10 **49.** 18 **50.** 34 **51.** $\frac{7}{4}$ **52.** 1196

53. 49 **54.** 340 **55.** 399 **56.** 234

57. $a_4 = 24,\ \ a_5 = 16$ **58.** $q = \frac{1}{2},\ \ a_1 = 10,\ \ a_3 = \frac{5}{2}$

59. Úloha nemá řešení.

60. $s_5 = 93$ **61.** 182 **62.** 96 **63.** 2

64. $-\frac{1}{2}$ **65.** -2 **66.** -2 **67.** -3

68. 16, 124, 254 **69.** 90

70. -9 **71.** 20 **72.** 0 **73.** 48

74. 324 **75.** 108 **76.** 18 **77.** -17

78. a) omezená a klesající; b) omezená a rostoucí;
c) omezená; d) zdola omezená a rostoucí

79. $a_8 = 13,\ \ a_{10} = 17$

80. $a_1 = 9$

Kapitola 6.

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexním číslem z nazveme výraz tvaru $z = x + y\mathrm{i}$, kde x a y jsou reálná čísla a i je číslo, pro které platí $\mathrm{i}^2 = -1$. Vyjádření komplexního čísla $z = x + y\mathrm{i}$ se nazývá *algebraický tvar*. Číslo x se nazývá *reálná část* a číslo y *imaginární část* komplexního čísla z. Číslo i se nazývá *imaginární jednotka*. Množinu všech komplexních čísel označujeme C.

Komplexní čísla tvaru $z = x + 0\mathrm{i}$, $x \in \mathsf{R}$, ztotožňujeme s reálnými čísly a v tomto smyslu je množina R podmnožinou C. Čísla tvaru $z = 0 + y\mathrm{i}$, $y \in \mathsf{R}$, se nazývají *ryze imaginární* a čísla tvaru $z = x + y\mathrm{i}$, $y \neq 0$, kde $y \in \mathsf{R}$, se nazývají *imaginární*.

Rovnost v množině C definujeme vztahem

$$x_1 + y_1\mathrm{i} = x_2 + y_2\mathrm{i} \iff x_1 = x_2 \quad \text{a} \quad y_1 = y_2.$$

Aritmetické operace v množině C definujeme takto:

- *Součet*

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}.$$

- *Rozdíl*

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) - (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

  Opačné číslo k číslu $z = x + y\mathrm{i}$ je číslo $-x - y\mathrm{i}$ a označuje se $-z$. Je pak $z + (-z) = 0$ a $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

- *Součin*

$$(x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}.$$

  Je-li $z = x + y\mathrm{i} \neq 0$, pak pro číslo $z^{-1} = \dfrac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}$ platí, že $zz^{-1} = {} = z^{-1}z = 1$, a z^{-1} se nazývá *převrácené číslo* k číslu z.

- *Podíl*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{pro} \quad z_2 \neq 0.$$

Pro sčítání, odčítání, násobení a dělení platí stejné zákony jako pro operace s reálnými čísly.

Číslo $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ se nazývá *komplexně sdružené číslo* k číslu $z = x + y\mathrm{i}$. Platí:

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad \text{a} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right).$$

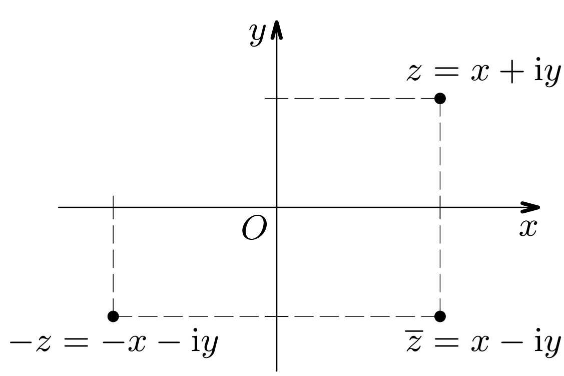
Gaussova rovina je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel, viz obr 1.

Absolutní hodnotu komplexního čísla $z = x + y\mathrm{i}$ definujeme vztahem

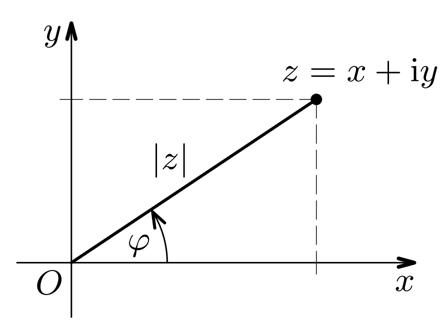
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Poznamenejme, že $|z|^2 = z\bar{z}$ a pro čísla $z = x + 0\mathrm{i}$ je $|z| = |x|$. Dále je $|z| = 0 \iff z = 0$.

Všimněme si, že absolutní hodnota $|z|$ je vzdálenost obrazu čísla z od počátku, obraz čísla $\bar{z}$ je souměrně sdružený s obrazem čísla z podle reálné osy a obraz čísla $-z$ je souměrně sdružený s obrazem čísla z podle počátku. Viz obr. 1 a 2.



Obr. 1



Obr. 2

Goniometrický tvar komplexního čísla, argument. Každé komplexní číslo $z = x + y\mathrm{i} \neq 0$ v Gaussově rovině je určeno také svou vzdáleností od počátku a velikostí φ orientovaného úhlu, který svírá průvodič bodu z s kladnou poloosou x. Číslo $z = x + y\mathrm{i}$ lze zapsat jako

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Uvedený tvar komplexního čísla se nazývá *goniometrický tvar*. Číslo φ se nazývá *argument* komplexního čísla z. Argument komplexního čísla není jednoznačně určen, hodnot velikostí úhlu, které mají popsanou vlastnost, je nekonečně mnoho a rozdíl libovolných dvou hodnot je roven celistvému násobku čísla 2π.

Argument komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ určíme jako řešení soustavy rovnic

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}\,.$$

Násobení a dělení čísel v goniometrickém tvaru se řídí pravidly, která snadno odvodíme z vlastností goniometrických funkcí. Platí:

$$\begin{aligned}|z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) &=\\ = |z_1 z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),\end{aligned}$$

$$\frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Speciálně pro $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ je:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi), \quad n \in \mathsf{N} \qquad (\textit{Moivreova věta})$$

a

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Odmocnina komplexního čísla. Je-li $z \in \mathsf{C}$, $z \neq 0$, pak existuje n různých hodnot *n-té odmocniny* $\sqrt[n]{z}$, která je definována vztahem

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n, \quad n \in \mathsf{N}.$$

Z Moivreovy věty snadno odvodíme vyjádření n-té odmocniny. Je-li $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Grafické znázornění odmocniny. Čísla tvaru $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ leží v Gaussově rovině na jednotkové kružnici se středem v počátku. Nazývají se *komplexní jednotky*. Odmocniny z nich jsou opět komplexní jednotky. Čísla $\sqrt[n]{1}$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice, který má jeden vrchol v bodě 1.

Řešení kvadratické rovnice. Pro řešení kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

s reálnými koeficienty v oboru reálných čísel jsme odvodili vzorec pro její kořeny. Je

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pokud odmocnina v oboru reálných čísel existuje. Vzorec pro řešení rovnice zůstává v platnosti i pro rovnice s komplexními koeficienty, kde odmocninu počítáme v komplexním oboru. Pokud je diskriminant $D = b^2 - 4ac$ rovnice různý od nuly, má kvadratická rovnice vždy dvě řešení, v opačném případě má jeden dvojnásobný kořen.

Speciálně platí pro rovnici s reálnými koeficienty:

- Je-li $D > 0$, pak $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ a rovnice má dva různé reálné kořeny.
- Je-li $D = 0$, pak $x = -\dfrac{b}{2a}$ a rovnice má jeden dvojnásobný kořen.
- Je-li $D < 0$, pak $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$ a rovnice má dva imaginární, komplexně sdružené kořeny.

Výpočet druhé odmocniny. Hodnotu druhé odmocniny lze nalézt jako řešení dvou kvadratických rovnic s reálnými koeficienty a při výpočtu používáme pouze druhou odmocninu z kladného reálného čísla. Popišme stručně algoritmus výpočtu.

Hodnota $z = \sqrt{a + b\mathrm{i}}$ je řešením rovnice $z^2 = a + b\mathrm{i}$. Označíme-li $z = x + y\mathrm{i}$, pak čísla x a y jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b. \end{aligned}$$

Viz příklad 16.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = (-2 + \mathrm{i}) + \overline{(3 + 4\mathrm{i})} - \overline{(7 + 5\mathrm{i})}.$$

Řešení. Je $z = -2+\mathrm{i}+3-4\mathrm{i}-7+5\mathrm{i} = (-2+3-7)+\mathrm{i}(1-4+5) = -6+2\mathrm{i}$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = (1 + 2\mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i})^2.$$

Řešení. Je $z = 3 + 6\mathrm{i} - 5\mathrm{i} - 10\mathrm{i}^2 + 1 - 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 = (3 + 10 + 1 - 4) + {}$ $+ \mathrm{i}(6 - 5 - 4) = 10 - 3\mathrm{i}$.

▷ **PŘÍKLAD 3.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = \frac{3 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}\,.$$

Řešení. Po rozšíření zlomku číslem $1 + 2\mathrm{i}$ dostaneme

$$z = \frac{(3 + 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{3 + 2\mathrm{i} + 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2}{1 - 4\mathrm{i}^2} = \frac{-1 + 8\mathrm{i}}{5}\,.$$

▷ **PŘÍKLAD 4.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = 3 + \mathrm{i} - \frac{4 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} + (5 - \mathrm{i})\overline{(-2 + \mathrm{i})}.$$

Řešení. Je

$$\begin{aligned} z &= 3 + \mathrm{i} - \frac{(4 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} + (5 - \mathrm{i})(-2 - \mathrm{i}) = \\ &= 3 + \mathrm{i} - \frac{4 + 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{1 - \mathrm{i}^2} - 10 + 2\mathrm{i} - 5\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = \\ &= 3 + \mathrm{i} - 1 - 3\mathrm{i} - 11 - 3\mathrm{i} = -9 - 5\mathrm{i}. \end{aligned}$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexně sdružené číslo k číslu
$$z = 2 - 3\mathrm{i} + \frac{4 - 2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} + (2 - 5\mathrm{i})(3\mathrm{i}^4 + 2).$$

Řešení. Je
$$\begin{aligned} z &= 2 - 3\mathrm{i} + \frac{(4 - 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} + (2 - 5\mathrm{i})(3 + 2) = \\ &= 2 - 3\mathrm{i} + \frac{4 - 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{1 - \mathrm{i}^2} + 10 - 25\mathrm{i} = \\ &= 12 - 28\mathrm{i} + 1 - 3\mathrm{i} = 13 - 31\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Je tedy $\overline{z} = 13 + 31\mathrm{i}$.

▷ **PŘÍKLAD 6.** Určeme absolutní hodnotu komplexního čísla
$$z = (1 + \mathrm{i})^2(3 - 4\mathrm{i}).$$

Řešení. Je $z = (1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2)(3 - 4\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i}) = 8 + 6\mathrm{i}$, tedy $|z| = \sqrt{64 + 36} = 10$.

▷ **PŘÍKLAD 7.** Řešme rovnici $(3 + \mathrm{i})(2z - \mathrm{i}) = 5 - 7\mathrm{i}$.

Řešení. Je $(3+\mathrm{i})(2z-\mathrm{i}) = 5-7\mathrm{i} \iff 6z - 3\mathrm{i} + 2z\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 5 - 7\mathrm{i} \iff z(6 + 2\mathrm{i}) = 4 - 4\mathrm{i} \iff z = \dfrac{4 - 4\mathrm{i}}{6 + 2\mathrm{i}}$. Tedy $z = \dfrac{2 - 4\mathrm{i}}{5}$.

▷ **PŘÍKLAD 8.** Řešme rovnici $(2 + \mathrm{i})z = (3 - \mathrm{i})(\overline{z}\mathrm{i} + 5)$.

Řešení. Označme $z = x + \mathrm{i}y$. Pak
$$\begin{aligned} &(2 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (3 - \mathrm{i})((x - \mathrm{i}y)\mathrm{i} + 5) \iff \\ &\qquad \iff 2x + 2\mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y = (3 - \mathrm{i})(y + 5 + \mathrm{i}x) \iff \\ &\qquad \iff 2x - y + \mathrm{i}(x + 2y) = 3y + 15 + x + \mathrm{i}(3x - y - 5) \iff \\ &\qquad \iff 2x - y = 3y + 15 - x \ \wedge\ x + 2y = 3x - y - 5. \end{aligned}$$

Rovnice je ekvivalentní soustavě,
$$\begin{aligned} x - 4y &= 15, \\ 2x - 3y &= 5, \end{aligned}$$

která má řešení $x = -5$, $y = -5$, tedy řešením rovnice je $z = -5 - 5\mathrm{i}$.

▷ **PŘÍKLAD 9.** V goniometrickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = \frac{-5 - \mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}}\,.$$

Řešení. Je

$$z = \frac{(-5-\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \frac{-10-3-2\mathrm{i}+15\mathrm{i}}{13} = -1+\mathrm{i},$$

tedy $|z| = \sqrt{2}$. Odtud

$$-1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \implies \cos\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{a} \quad \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

tedy $\varphi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, k je celé. Tudíž

$$z = \sqrt{2}\,\left[\cos(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi)\right].$$

▷ **PŘÍKLAD 10.** V algebraickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = \left(3\left[\cos(\tfrac{7}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{7}{6}\pi)\right]\right)^8.$$

Řešení. Podle Moivreovy věty je

$$\begin{aligned} z &= 3^8\left[\cos(\tfrac{56}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{56}{6}\pi)\right] = \\ &= 3^8\left[\cos(\tfrac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{4}{3}\pi)\right] = -\tfrac{6561}{2}\,(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}), \end{aligned}$$

když uvážíme, že $\frac{56}{6}\pi = 4\cdot 2\pi + \frac{4}{3}\pi$.

▷ **PŘÍKLAD 11.** V goniometrickém tvaru vyjádřeme řešení rovnice

$$z^3 = 4 - 4\mathrm{i}.$$

Řešení. Je $|4-4\mathrm{i}| = \sqrt{32}$ a pro argument φ platí: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tedy $\varphi = \frac{7}{4}\pi$ a hodnoty odmocniny dostaneme z vyjádření $4-4\mathrm{i} = \sqrt{32}\,[\cos(\frac{7}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{4}\pi)]$. Je pak

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{32}\ \left[\cos(\tfrac{7}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{7}{12}\pi)\right],\\
z_2 &= \sqrt[6]{32}\ \left[\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{4}\pi)\right],\\
z_3 &= \sqrt[6]{32}\ \left[\cos(\tfrac{23}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{23}{12}\pi)\right].
\end{aligned}
$$

▷ **PŘÍKLAD 12.** V goniometrickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = 3\left[\cos(\tfrac{1}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{6}\pi)\right]^2 \cdot 2\left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right].$$

Řešení. Je

$$
\begin{aligned}
z &= 6\left[\cos(\tfrac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi)\right] \cdot \left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right] =\\
&= 6\left[\cos(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\right] =\\
&= 6\left[\cos(\tfrac{5}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{6}\pi)\right].
\end{aligned}
$$

▷ **PŘÍKLAD 13.** V goniometrickém tvaru vyjádřeme komplexní číslo

$$z = \frac{5\left[\cos(\frac{2}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{2}{3}\pi)\right]}{2\left[\cos(\frac{5}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{4}\pi)\right]^3}.$$

Řešení. Je

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{5\left[\cos(\frac{2}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{2}{3}\pi)\right]}{2\left[\cos(\frac{15}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{15}{4}\pi)\right]} =\\
&= \tfrac{5}{2}\left[\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{15}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{15}{4}\pi\right)\right] =\\
&= \tfrac{5}{2}\left[\cos\left(-\tfrac{37}{12}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{37}{12}\pi\right)\right] = \tfrac{5}{2}\left[\cos\left(\tfrac{11}{12}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{11}{12}\pi\right)\right].
\end{aligned}
$$

▷ **PŘÍKLAD 14.** V komplexním oboru řešme kvadratickou rovnici:

a) $z^2 + 2z + 17 = 0$, b) $\mathrm{i}z^2 + 2z - 5\mathrm{i} = 0$.

Řešení. K určení kořenů použijeme vzorce pro kořeny kvadratické rovnice:

a) $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}\,) = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{-64}\,)$,
$z_1 = -1 + 4\mathrm{i}, \ \ z_2 = -1 - 4\mathrm{i}$.
Rovnice má dva imaginární, komplexně sdružené kořeny z_1 a z_2.

b) $z_{1,2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\mathrm{i}(-5\mathrm{i})}\,\big) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(-2 \pm 4\mathrm{i})$,
$z_1 = 2 + \mathrm{i}, \ \ z_2 = -2 + \mathrm{i}$.

▷ **PŘÍKLAD 15.** Proveďme diskusi řešení kvadratické rovnice vzhledem k reálnému parametru p:

a) $x^2 + (2p + 8)x + p^2 - 6p = 0$, b) $x^2 + 2px + p^2 - 4 = 0$.

Řešení. Jde o kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, kde počet a druh kořenů určíme pomocí znaménka diskriminantu.

a) $D = (2p + 8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 - 6p) = 4p^2 + 32p + 64 - 4p^2 + 24p =$
$= 56p + 64 = 8(7p + 8)$.

$D > 0 \iff p > -\frac{8}{7}$ … rovnice má dva reálné kořeny,
$D = 0 \iff p = -\frac{8}{7}$ … rovnice má jeden dvojnásobný kořen,
$D < 0 \iff p < -\frac{8}{7}$ … rovnice má dva imaginární kořeny.

b) $D = 4p^2 - 4(p^2 - 4) = 4$.

Pro všechny hodnoty parametru $p \in \mathsf{R}$ je $D = 4 > 0$, rovnice má vždy dva různé reálné kořeny.

▷ **PŘÍKLAD 16.** V algebraickém tvaru nalezněme řešení kvadratické rovnice:

a) $z^2 = 5 + 12\mathrm{i}$, b) $(z + 2\mathrm{i})^2 = 3 - 4\mathrm{i}$.

Řešení. Řešení určíme pomocí algoritmu popsaného v závěru úvodního odstavce.

a) Označme $z = x + \mathrm{i}y$, pak $z^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}2xy$. Tedy $x^2 - y^2 = 5$ a $xy = 6$. Dosadíme za $y = 6/x$ a dostaneme rovnici pro x^2:

$$(x^2)^2 - 5x^2 - 36 = 0 \iff x^2 = 9 \quad \text{nebo} \quad x^2 = -4.$$

Reálné řešení má pouze rovnice $x^2 = 9$, a to $x_1 = 3$ a $x_2 = -3$. Pak je $y_1 = 2$ a $y_2 = -2$. Rovnice má dvě řešení $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ a $z_2 = -3 - 2\mathrm{i}$.

b) Označme $z + 2\mathrm{i} = x + \mathrm{i}y$, tedy $(z + 2\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy$. Odtud plyne, že $x^2 - y^2 = 3$ a $xy = -2$. Dosadíme za $y = -2/x$ a dostaneme rovnici pro x^2:

$$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \quad \text{nebo} \quad x^2 = -1.$$

Reálné řešení má rovnice $x^2 = 4$, a to $x_1 = 2$ a $x_2 = -2$. Je tedy $y_1 = -1$ a $y_2 = 1$. Rovnice má dvě řešení $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ a $z_2 = -2 - \mathrm{i}$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

V úlohách 1–23 vyjádřete dané komplexní číslo z v algebraickém tvaru.

1. $z = (-2 + \mathrm{i}) + \overline{(3 + 4\mathrm{i})}$

2. $z = (3 - \mathrm{i})^2(4 + 2\mathrm{i})$

3. $z = \dfrac{3 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$

4. $z = \dfrac{14 + 8\mathrm{i}}{2 + 4\mathrm{i}}$

5. $z = \dfrac{11 - 7\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$

6. $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}^9}{1 + \mathrm{i}^3}$

7. $z = \dfrac{2}{1 + \mathrm{i}^7}$

8. $z = \dfrac{2 + 4\mathrm{i}^7}{1 + \mathrm{i}^8}$

9. $z = (2 - \mathrm{i})\overline{(3 + \mathrm{i})}$

10. $z = \overline{\left(\dfrac{-5 + 14\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}\right)} + \overline{(3 - 2\mathrm{i})}$

11. $z = \dfrac{11 + 7\mathrm{i}}{5 - 3\mathrm{i}} + 2 - \mathrm{i}$

12. $z = (1 + \mathrm{i})^2 + 2 - \mathrm{i}$

13. $z = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} - 1 + 2\mathrm{i}$ **14.** $z = (1-2\mathrm{i})^2 + \overline{(3-2\mathrm{i})}$

15. $z = (1+\mathrm{i}^9) + (3-\mathrm{i}^6) - (2+7\mathrm{i}^7)(2+\mathrm{i}^{-3})$

16. $z = 3 + \mathrm{i} - \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + (5-\mathrm{i})\overline{(-2+\mathrm{i})}$

17. $z = (1+2\mathrm{i})\big[\cos(\frac{1}{4}\pi) - \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)\big]$

18. $z = \big[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)\big]^3$

19. $z = (1+\mathrm{i})\big[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)\big]$

20. $z = \dfrac{2[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)]}{1-\mathrm{i}}$

21. $z = \big(\sqrt{2}\,[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)]\big)^4$

22. $z = 2\big[\cos(\frac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{3}\pi)\big] \cdot \big[\cos(\frac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi)\big]^2$

23. $z = \dfrac{\sqrt{2}\,\big[\cos(\frac{3}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{2}\pi)\big]}{\big[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)\big]^3}$

* * *

24. Pro $z = 2 - 3\mathrm{i}$ vypočtěte v algebraickém tvaru

$$(1-\mathrm{i})z + (3+\mathrm{i})\overline{z} - (4+2\mathrm{i})\,.$$

25. Zapište v algebraickém tvaru číslo z^{-1}, je-li $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{7+4\mathrm{i}}$.

26. Zapište v algebraickém tvaru číslo z^{-1}, je-li $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

27. Zapište v algebraickém tvaru číslo z^{-1}, je-li $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{11-7\mathrm{i}}$.

28. Zapište v algebraickém tvaru číslo $\dfrac{z}{\overline{z}}$, je-li $z = 2 + \mathrm{i}$.

29. Určete algebraický tvar komplexního čísla z, je-li

$$z + (3\mathrm{i}-1)^2 = 2 + 3\mathrm{i}.$$

30. Určete algebraický tvar komplexního čísla z, je-li $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2} + z = 0.$

31. Řešte rovnici $(1-\mathrm{i})(3-\mathrm{i}\overline{z}) = 4+3\mathrm{i}$ s neznámou z.

32. Řešte rovnici $5\mathrm{i}z = (4-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})$ s neznámou z.

33. V algebraickém tvaru vyjádřete řešení kvadratické rovnice:

a) $z^2 = -8-6\mathrm{i}$, b) $z^2 = -45+28\mathrm{i}$.

V úlohách 34–42 vyjádřete v algebraickém tvaru komplexně sdružené číslo $\overline{z}$ k danému číslu z.

34. $z = \dfrac{7+4\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$

35. $z = (1+2\mathrm{i})\overline{(3+2\mathrm{i})}$

36. $z = (2-\mathrm{i})^2 + 1 + 2\mathrm{i}$

37. $z = \dfrac{-5+14\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$

38. $z = (2+9\mathrm{i})^2 + 7 - 6\mathrm{i}$

39. $z = \dfrac{11-7\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

40. $z = (1+2\mathrm{i})(5-3\mathrm{i}) - 5 + 2\mathrm{i}$

41. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

42. $z = 2+3\mathrm{i} + \dfrac{11-7\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}}$

* * *

43. Určete imaginární část komplexního čísla $z = 5\,\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

44. Určete reálnou část komplexního čísla $\overline{z}$, je-li $z = (1+2\mathrm{i})^2(3-\mathrm{i})$.

V úlohách 45–55 určete absolutní hodnotu komplexního čísla z.

45. $z = \dfrac{7-4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

46. $z = 6+10\mathrm{i} + (2-3\mathrm{i})^2$

47. $z = (3-2\mathrm{i})^2 - \overline{(2+10\mathrm{i})}$

48. $z = (3+2\mathrm{i})(-1-4\mathrm{i}) - 2 + 10\mathrm{i}$

49. $z = \dfrac{11-7\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

50. $z = \dfrac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

51. $z = \dfrac{11-7\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}} - 3$

52. $z = 2\big[\cos(\tfrac{1}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{6}\pi)\big]$

53. $z = (1 + 2\mathrm{i})(5 - 3\mathrm{i})$

54. $z = (2 - \mathrm{i})^2 + 3 - 4\mathrm{i}$

55. $z = (3 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})^2 + 20\mathrm{i}$

* * *

V úlohách 56–74 vyjádřete dané komplexní číslo z v goniometrickém tvaru.

56. $z = 3 + \mathrm{i} + (1 - 2\mathrm{i})^2$

57. $z = (2 - 3\mathrm{i})^2(-1 + 2\mathrm{i}) - 28 - 3\mathrm{i}$

58. $z = 6\mathrm{i} - 4 + (3 - \mathrm{i})^2$

59. $z = (2\mathrm{i} - 3)^2 - 6 + 13\mathrm{i}$

60. $z = 2\mathrm{i}\,\dfrac{1 + \mathrm{i}^{13}}{1 + \mathrm{i}^3}$

61. $z = \dfrac{-14 - 2\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}}$

62. $z = \dfrac{7 - \mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}}$

63. $z = \dfrac{6 + 15\mathrm{i}}{5 - 2\mathrm{i}}$

64. $z = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{1 + 3\mathrm{i}}$

65. $z = \dfrac{3 + \mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}}$

66. $z = \dfrac{1 - \mathrm{i}^{10}}{1 + \mathrm{i}^5}$

67. $z = \dfrac{\mathrm{i} - 3}{2 + \mathrm{i}}$

68. $z = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$

69. $z = \dfrac{-2 + 4\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$

70. $z = 2\left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right]^3 \cdot 3\left[\cos(\tfrac{2}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{2}{3}\pi)\right]$

71. $z = \dfrac{5\left[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)\right]}{2\left[\cos(\frac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{3}\pi)\right]}$

72. $z = 3\mathrm{i}\left[\cos(\tfrac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{4}\pi)\right]^3$

73. $z = 2\left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right] \cdot 3\left[\cos(\tfrac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{4}\pi)\right]$

74. $z = 2\left[\cos(\tfrac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi)\right] \cdot \left(3\left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right]\right)^2$

* * *

75. V goniometrickém tvaru vyjádřete řešení rovnice

$$z^2 = 2\left[\cos(\tfrac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi)\right].$$

76. V goniometrickém tvaru vyjádřete řešení rovnice

$$z^3 = 27\left[\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right].$$

77. Řešte kvadratické rovnice:

a) $z^2 + 2\mathrm{i}z + 8 = 0$, b) $z^2 - (4 + 6\mathrm{i})z + 11 + 12\mathrm{i} = 0$,

c) $z^2 - 4\mathrm{i}z - 20 = 0$, d) $z^2 - 2z + 10 = 0$.

78. Proveďte diskusi řešení kvadratické rovnice vzhledem k reálnému parametru p:

a) $x^2 + 2(p + 1)x + 2(p + 5) = 0$,

b) $4x^2 - 6px + 2p^2 - 4p - 15 = 0$,

c) $x^2 + 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$,

d) $px^2 + 2(p - 1)x + p - 5 = 0$.

Výsledky

1. $1 - 3\mathrm{i}$ **2.** $44 - 8\mathrm{i}$ **3.** $\frac{1}{5}(-1 + 8\mathrm{i})$ **4.** $3 - 2\mathrm{i}$

5. $5 + 3\mathrm{i}$ **6.** i **7.** $1 + \mathrm{i}$ **8.** $1 - 2\mathrm{i}$

9. $5 - 5\mathrm{i}$ **10.** $4 + 6\mathrm{i}$ **11.** $3 + \mathrm{i}$ **12.** $2 + \mathrm{i}$

13. $1 + \mathrm{i}$ **14.** $-2\mathrm{i}$ **15.** $-6 + 13\mathrm{i}$ **16.** $-9 - 5\mathrm{i}$

17. $\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ **18.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ **19.** $\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ **20.** $\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

21. -4 **22.** $-1 - \sqrt{3}\,i$ **23.** $-1 + \mathrm{i}$ **24.** $-2 + 4\mathrm{i}$

25. $3 - 2\mathrm{i}$ **26.** $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$ **27.** $5 + 3\mathrm{i}$ **28.** $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$

29. $10 + 9\mathrm{i}$ **30.** $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}\,\mathrm{i}$ **31.** $-\frac{7}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$ **32.** $\frac{1}{13}(10 - 11\mathrm{i})$

33. a) $z_1 = 1 - 3\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + 3\mathrm{i}$; b) $z_1 = 2 + 7\mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 7\mathrm{i}$

34. $1 - 2\mathrm{i}$ **35.** $7 - 4\mathrm{i}$ **36.** $4 + 2\mathrm{i}$ **37.** $1 - 4\mathrm{i}$

38. $-70 - 30\mathrm{i}$ **39.** $5 - 3\mathrm{i}$ **40.** $6 - 9\mathrm{i}$ **41.** $-\frac{1}{5}(1 + 3\mathrm{i})$

42. $3 - \mathrm{i}$ **43.** 3 **44.** -5 **45.** $\sqrt{13}$

46. $\sqrt{5}$ **47.** $\sqrt{13}$ **48.** 5 **49.** $\sqrt{34}$

50. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **51.** $2\sqrt{2}$ **52.** 2 **53.** $\sqrt{170}$

54. 10 **55.** $5\sqrt{2}$

56. $3[\cos(\frac{3}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{2}\pi)]$

57. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{7}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{4}\pi)]$

58. $4(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$

59. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$

60. $2[\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi]$

61. $2\sqrt{2}\,[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$

62. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{7}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{4}\pi)]$

63. $3[\cos(\frac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi)]$

64. $\cos(\frac{3}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{2}\pi)$

65. $\cos(\frac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi)$

66. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{7}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{4}\pi)]$

67. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$

68. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)]$

69. $\sqrt{2}\,[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$

70. $6[\cos(\frac{1}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi)]$

71. $\frac{5}{2}[\cos(\frac{5}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{12}\pi)]$

72. $3[\cos(\frac{5}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{4}\pi)]$

73. $6[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$

74. $18[\cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi)]$

75. $z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(\frac{1}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi)]$,
$z_2 = \sqrt{2}\,[\cos(\frac{7}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{6}\pi)]$

76. $z_1 = 3[\cos(\frac{2}{9}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{2}{9}\pi)]$,
$z_2 = 3[\cos(\frac{8}{9}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{8}{9}\pi)]$,
$z_3 = 3[\cos(\frac{14}{9}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{14}{9}\pi)]$

77. a) $z_1 = 2\mathrm{i}$, $z_2 = -4\mathrm{i}$; b) $z_1 = 2 + 7\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - \mathrm{i}$;
c) $z_1 = 4 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -4 + 2\mathrm{i}$; d) $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$.

78. a) $p \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ … dva reálné kořeny,
$p \in \{-3, 3\}$ … jeden dvojnásobný kořen,
$p \in (-3, 3)$ … dva imaginární kořeny;

b) $p \in (-\infty, -10) \cup (-6, \infty)$ … dva reálné kořeny,
$p \in \{-6, -10\}$ … jeden dvojnásobný kořen,
$p \in (-10, -6)$ … dva imaginární kořeny;

c) $p \in (-8, \infty)$ … dva reálné kořeny,
$p = -8$ … jeden dvojnásobný kořen,
$p \in (-\infty, -8)$ … dva imaginární kořeny;

d) $p = 0$ … rovnice není kvadratická, je pouze lineární
a má jeden reálný kořen,
$p \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \infty)$ … dva reálné kořeny,
$p = -\frac{1}{3}$ … jeden dvojnásobný kořen,
$p \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ … dva imaginární kořeny.

Kapitola 7.

GEOMETRIE V ROVINĚ

Zobrazení roviny na sebe se nazývá *shodné zobrazení* (také jenom shodnost), jestliže zachovává vzdálenost bodů, tj. vzdálenost libovolných dvou bodů A, B je rovna vzdálenosti jejich obrazů A', B'.

– *Osová souměrnost* O_o s osou o je shodné zobrazení, které každému bodu $A \in o$ přiřadí bod $A' = A$ a každému bodu $X \notin o$ přiřadí bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na ose o.

– *Středová souměrnost* S_S se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřadí bod S a každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'.

– *Posunutí* T_{AB} neboli translace o vektor $B - A$ je shodné zobrazení, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky AB a XX' jsou shodné, rovnoběžné a stejně orientované.

– *Otočení* $\mathsf{R}_{S,\varphi}$ neboli rotace kolem středu S o orientovaný úhel φ je shodné zobrazení, které bodu S přiřadí bod S a každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ.

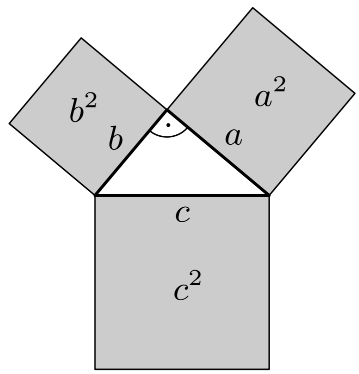
Podobné zobrazení neboli podobnost s koeficientem podobnosti $k > 0$ je zobrazení, ve kterém pro každé dva body X, Y platí $|X'Y'| = k \cdot |XY|$, kde X', Y' jsou obrazy bodů X, Y.

– *Stejnolehlost* $\mathsf{H}_{S,\kappa}$ neboli homotetie se středem S a koeficientem $\kappa \in \mathsf{R}$, $\kappa \neq 0$, je zobrazení, které bodu S přiřadí bod S a každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tak, že $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$ a pro $\kappa > 0$ je polopřímka SX totožná s polopřímkou SX', pro $\kappa < 0$ je polopřímka SX opačná k polopřímce SX'.

V každém pravoúhlém trojúhelníku platí:

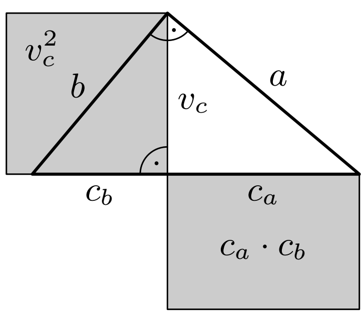
Pythagorova věta

$$a^2 + b^2 = c^2$$



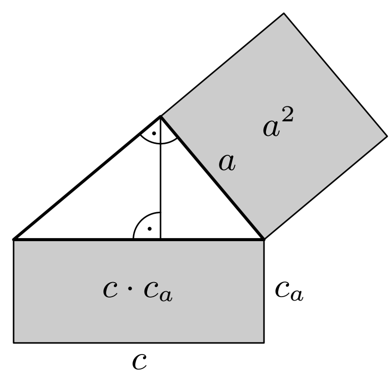
Euklidova věta o výšce

$$c_a c_b = v_c^2$$



Euklidova věta o odvěsně

$$c c_a = a^2$$



Sinová věta pro trojúhelník ABC:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

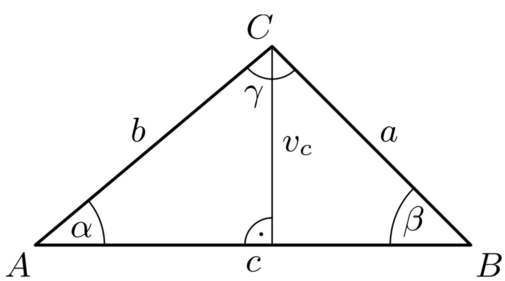
Kosinová věta pro trojúhelník ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Obvod o a obsah S některých rovinných obrazců

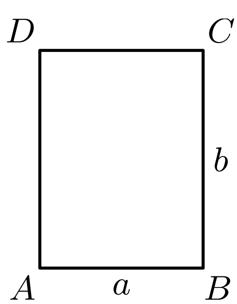
Písmeny $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ označujeme délky stran a velikosti úhlů, ale i samotné strany a úhly.

– Trojúhelník:



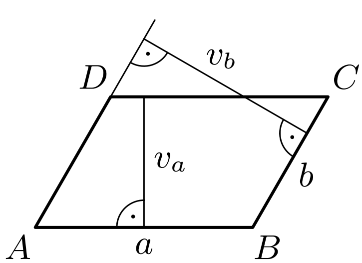
$$o = a + b + c$$
$$S = \tfrac{1}{2}a \cdot v_a = \tfrac{1}{2}b \cdot v_b = \tfrac{1}{2}c \cdot v_c$$
$$S = \tfrac{1}{2}a \cdot b \sin\gamma = \tfrac{1}{2}a \cdot c \sin\beta = $$
$$= \tfrac{1}{2}b \cdot c \sin\alpha$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$
$$\text{kde } s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

– Obdélník:



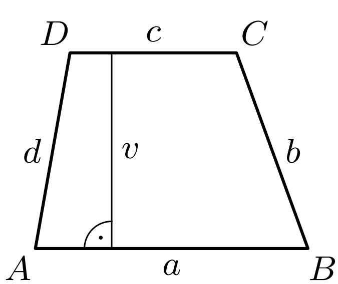
$$o = 2(a + b)$$
$$S = ab$$

– Kosodélník:



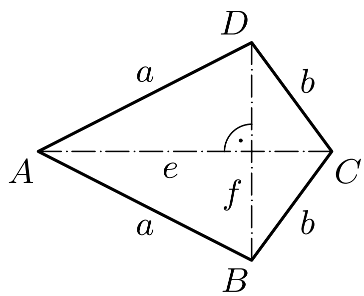
$$o = 2(a + b)$$
$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

– Lichoběžník:



$$o = a + b + c + d$$
$$S = \tfrac{1}{2}(a + c) \cdot v$$

– Deltoid:



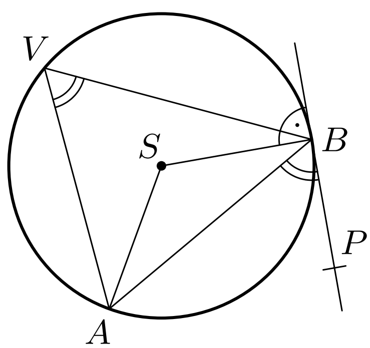
$o = 2(a + b)$

$S = \frac{1}{2}ef$

– Kruh:

$o = 2\pi r$

$S = \pi r^2$



– Délka kružnicového oblouku o středovém úhlu α (ve stupňové míře):

$$o = \frac{\alpha}{180}\pi r$$

– Obsah kruhové výseče o středovém úhlu α (ve stupňové míře):

$$S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$$

Velikost středového úhlu ASB je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu AVB příslušného ke stejnému kružnicovému oblouku AB.

Velikost úsekového úhlu ABP je rovna velikosti obvodového úhlu AVB.

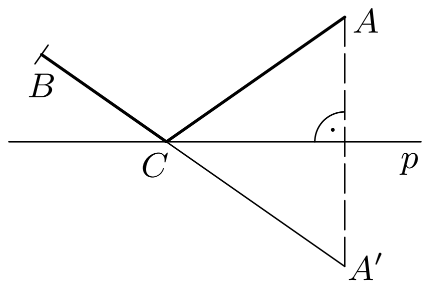
ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Body A, B leží v jedné polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p najděme bod C tak, aby součet jeho vzdáleností od bodů A, B byl nejmenší.

Řešení. Jestliže oba body leží na hraniční přímce p, je hledaný bod C libovolným bodem úsečky AB.

Jestliže právě jeden z bodů A, B je na hraniční přímce p, potom je hledaným bodem C.

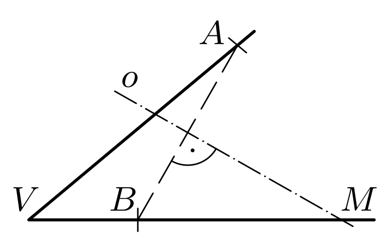
Nechť žádný z bodů A, B neleží na přímce p. V osové souměrnosti S_p (s osou p) bodu A odpovídá bod A' a bodu C zase bod C. Protože $|AC| = |A'C|$, je také $|BC| + |CA| = |BC| + |CA'|$. Součet $|BC| + |CA'|$ bude nejmenší, jestliže body B, C, A' budou na jedné přímce.



Konstrukce: K bodu A určíme bod A' v osové souměrnosti S_p. Bod C je průsečíkem přímek p a $A'B$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Je dán ostrý úhel AVB, $|AV| > |BV|$. Na rameni VB najděme bod M tak, aby platilo: $|MV| - |MA| = |VB|$.

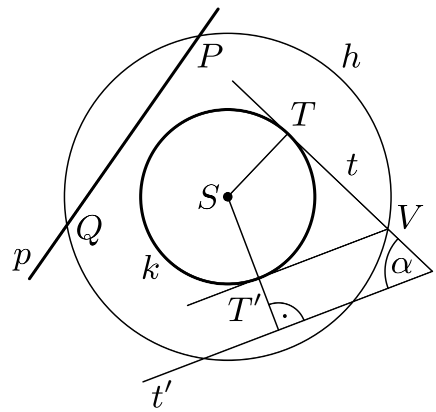
Řešení.



Pro vzdálenost bodu M od vrcholu V podle dané podmínky musí platit $|MV| = |VB| + |MA| = |VB| + |MB|$. Hledaný bod M leží na ose o souměrnosti úsečky AB, je tedy průsečíkem osy o s přímkou VB.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Na přímce p najděme body, z kterých je kružnice $k(S; r)$ vidět pod úhlem α.

Řešení. Všechny body, ze kterých je kružnice k vidět pod úhlem α, leží na kružnici h soustředné s kružnicí k. Ramena úhlu α jsou tečnami kružnice k. Jeho vrchol označíme V. Pro určení kružnice h stačí jeden takový bod V. Hledané body P, Q potom budou průsečíky přímky p s kružnicí h.



Konstrukce: Zvolíme libovolnou tečnu t kružnice k jako jedno rameno úhlu α. Druhé rameno t' úhlu α posuneme po přímce t tak, aby bylo tečnou kružnice k. Vrchol V úhlu α otočíme kolem středu S na přímku p.

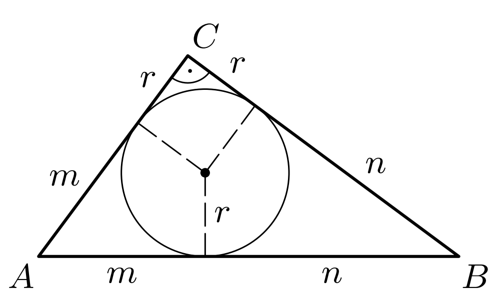
Jiné řešení je zřejmé z obrázku. V deltoidu $STVT'$ má úhel při vrcholu S velikost $\pi - \alpha$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Dokažme, že obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven součinu úseků, na které přeponu AB rozdělí bod dotyku kružnice trojúhelníku ABC vepsané.

Řešení. Označíme-li m, n úseky na přeponě AB a r poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané, potom $|AB| = m + n$, $|AC| = r + m$, $|BC| = r + n$. Podle Pythagorovy věty je

$$(m+n)^2 = (r+m)^2 + (r+n)^2$$

a po úpravě $mn = r^2 + r(m+n)$.

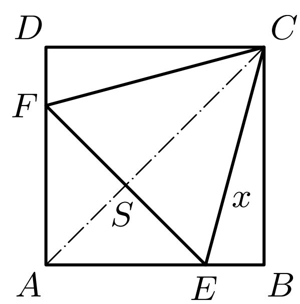


Obsah trojúhelníku ABC je potom

$$S = \tfrac{1}{2}(r+m)(r+n) = \tfrac{1}{2}\big(mn + r^2 + r(m+n)\big) = mn.$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** Do čtverce $ABCD$ o straně a je vepsán rovnostranný trojúhelník EFC tak, aby $E \in AB$, $F \in AD$. Určeme poměr stran čtverce a trojúhelníku.

Řešení.



Označme x stranu trojúhelníku EFC. Protože přímka AC je osou strany EF, jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky AES, AFS shodné. Jejich odvěsny mají velikost $\frac{1}{2}x$. Pro výšku CS trojúhelníku EFC platí

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,x = a\sqrt{2} - \frac{x}{2}.$$

Odtud vypočítáme

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\,a.$$

Hledaný poměr stran čtverce a trojúhelníku tedy je

$$a : x = (\sqrt{3}+1) : 2\sqrt{2}\,.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Je dána úsečka AB a přímka p. Na přímce p určete bod C tak, aby trojúhelník ABC měl minimální obvod.
2. Je dán ostrý úhel AVB, $|AV| > |BV|$. Na rameni VA určete bod N tak, aby platilo: $|BN| + |VN| = |AV|$.

3. Je dána kružnice $k(O; r)$ a bod $M \neq O$. Určete množinu středů všech tětiv kružnice k, které leží na přímkách procházejících bodem M. Proveďte diskusi řešení vzhledem ke vzájemné poloze bodu M a kružnice k.

4. Vně pásu určeného rovnoběžkami a, b jsou dány dva různé body M, N (oddělené pásem). Sestrojte lomenou čáru $MABN$ nejmenší délky takovou, že $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$.

5. Úhly při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC mají velikost $30°$. Průsečíky os ramen AC a BC se základnou AB označíme M, N. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku MNC.

6. Úhly při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC mají velikost α. K bodu A je sestrojen bod A' středově souměrný podle bodu C. Určete velikost úhlu ABA'.

7. Tětiva AB a střed S kružnice k určují rovnoramenný trojúhelník. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je sestrojen bod C tak, aby platilo $|BS| = |BC|$. Polopřímka opačná k polopřímce SC protne kružnici k v bodě C'. Určete poměr velikostí úhlů ACS, ASC'.

8. Osy vnitřních, resp. vnějších úhlů (vnější úhel je úhel vedlejší k úhlu vnitřnímu) rovnoběžníku $MNPQ$ se buď protínají v jediném bodě, nebo určují čtyřúhelník. Jaký musí být rovnoběžník $MNPQ$, aby tyto osy určovaly bod, čtverec, obdélník?

9. Určete všechny body M, ze kterých tečny sestrojené ke dvěma nesoustředným kružnicím $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$ mají délku d ($d = |MT|$, kde T je bod dotyku tečny s kružnicí).

10. Je dána kružnice k a na ní tři body A, B, C. Je-li $A'B'$ její libovolná tětiva rovnoběžná s AB a $B'C'$ její tětiva rovnoběžná s BC, potom tětiva AC' je rovnoběžná s tětivou $A'C$. Dokažte!

11. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ je dán úhel $\alpha = 60°$ (při základně), ramena c a střední příčka d. Určete obě základny a, b a úhlopříčku u.

12. Nad úsečkou AB je sestrojena půlkružnice k a té je opsán obdélník $ABCD$. Určete poměr úseček, které na úhlopříčce AC určuje průsečík M s půlkružnicí k.

13. Do čtvrtkruhu o středu S a poloměru r je vepsán kruh o středu O a poloměru ϱ. Určete poměr obsahů čtvrtkruhu a kruhu.

14. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno v_a, t_a a víte-li, že $a = 2b$.

15. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b$, c, α.

16. Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed E ramene BC s protějším ramenem AD určují trojúhelník ADE. Určete poměr obsahů lichoběžníku a trojúhelníku ADE.

17. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou c je vepsán čtverec $MNPQ$ tak, že jeho strana MN je na přeponě a zbývající vrcholy P, Q leží na odvěsnách. Určete obsah čtverce $MNPQ$.

18. Dva rovnostranné trojúhelníky si odpovídají v otočení o středu v jejich těžišti a úhlu otočení $60°$. Vyjádřete obsah jejich sjednocení pomocí poloměru r kružnice trojúhelníkům opsané.

19. Úsečka AB je rozdělena na n dílů o velikostech $2r_1$, $2r_2$, …, $2r_n$. Nad každým dílkem je sestrojena půlkružnice. Určete součet délek všech sestrojených půlkružnic.

20. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí: $|CD| : |DB| = b : c$, kde D je průsečík osy úhlu α se stranou BC.

21. Do úhlu velikosti $60°$ jsou vepsány dva dotýkající se kruhy. Vzdálenost středu menšího kruhu od vrcholu úhlu je $5j$. Určete poměr obsahů obou kruhů.

22. V trojúhelníku ABC určete velikost úhlu γ, jestliže platí

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

23. Pomocí stran a, b, c trojúhelníku ABC určete obvod o' trojúhelníku $A'B'C$, kde $A'B' \parallel AB$ je příčka v trojúhelníku ABC procházející středem S kružnice do trojúhelníku ABC vepsané.

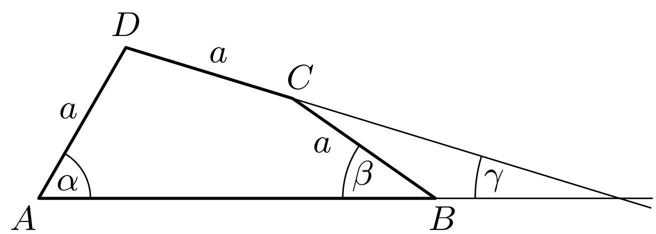
24. Tětiva kružnice o poloměru r, které odpovídají obvodové úhly velikosti $60°$, dělí kruh na dvě úseče. Určete součet obsahů kruhů, které jsou vepsány do těchto úsečí.

25. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou dány body M, N tak, že $|AM| = |AC|$, $|BN| = |BC|$. Určete velikost úhlu MCN.

26. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ úhly $|\sphericalangle DAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a stranami $|BC| = |CD| = |AD| = a$. Dokažte, že platí

$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma,$$

kde γ je odchylka přímek AB a CD.



27. Určete vnitřní úhly rovnoramenného trojúhelníku ABC o základně AB, který osa úhlu při základně AB dělí na dva rovnoramenné trojúhelníky.

28. V rovnoramenném trojúhelníku ABC má úhel při základně AB velikost 3γ. Příčky AM, AN, které dělí úhel CAB na tři shodné úhly, rozdělí trojúhelník na tři trojúhelníky. Pomocí úhlu γ vyjádřete vnitřní úhly všech tří trojúhelníků.

29. V trojúhelníku ABC, ve kterém je těžnice t_c rovna polovině strany c, určete úhel γ.

30. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme D průsečík výšky z vrcholu C s přeponou AB a E průsečík osy úhlu DCB s přeponou. Pomocí úhlu α vyjádřete vnitřní úhly trojúhelníku EAC.

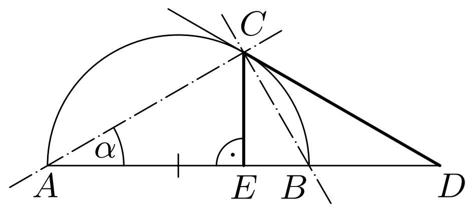
31. Body dotyku kružnice trojúhelníku ABC vepsané určují trojúhelník $A'B'C'$. Pomocí úhlů α, β a γ vyjádřete vnitřní úhly trojúhelníku $A'B'C'$.

32. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte kružnici se středem na jeho přeponě AB, která prochází bodem B a dotýká se přímky AC.

33. V půlkružnici nad průměrem AB je dána tětiva AC a v bodě C tečna c tak, že $|AC| = |CD|$, $D = AB \cap c$. Určete velikost úhlu CAB.

34. Bod M je společným bodem tečen kružnice k v koncových bodech její tětivy TT'. Vyjádřete úhel TMT' pomocí středových úhlů ω a ω' příslušných k tětivě TT'.

35. Tečna kružnice v bodě C protíná její průměr AB v bodě D (viz obrázek). Patu kolmice z bodu C na průměr AB označme E. Dokažte, že přímka BC je osou úhlu DCE a přímka AC je osou úhlu vedlejšího k úhlu DCE.



36. Zvětšíme-li každou stranu obdélníku o 3 cm, zvětší se jeho úhlopříčka o 4 cm a obsah o 60 cm^2. Určete rozměry obdélníku.

37. V kružnici $k(S, 7j)$ jsou dány dvě kolmé tětivy $|AB| = 6j$, $|CD| = 10j$. Určete velikost úsečky SP, kde P je průsečík přímek AB a CD.

38. Jakou podmínku musí splňovat strana b čtverce $EFGH$, který je vepsán do čtverce $ABCD$ o straně a tak, že každý jeho vrchol leží právě na jedné straně čtverce $ABCD$?

39. Určete stranu b rovnostranného trojúhelníku DEF, který je vepsán do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně a tak, že jeho obsah je roven polovině obsahu trojúhelníku ABC.

40. Protější vrcholy A, C čtverce $ABCD$ o straně a jsou středy kružnicových oblouků, které procházejí vrcholy B, D. Určete obsah průniku čtvrtkruhů určených těmito oblouky.

41. Ve čtverci $ABCD$ příčka AE, kde E je střed strany CD, protíná úhlopříčku BD v bodě F. Určete poměr úseček EF a AF.

42. Dokažte, že v každém rovnoramenném trojúhelníku ABC součet vzdáleností libovolného bodu L základny AB od obou jeho ramen je konstantní.

43. V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém jsou základny v poměru $1 : 2$, úhlopříčky dělí střední příčku na tři úsečky. Určete poměr těchto úseček.

44. Body, které dělí strany rovnostranného trojúhelníku vždy na tři stejné úsečky, jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Jestliže je strana trojúhelníku a, určete obsah S šestiúhelníku.

45. Obsah S čtverce, jehož strany leží na úhlopříčkách AD, BG, CF, EH pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$, vyjádřete pomocí poloměru r kružnice osmiúhelníku opsané.

46. Trojúhelník CEF, který je vepsán do čtverce $ABCD$ o straně a tak, že bod E je střed strany AB a bod F je na straně CD, má obsah $S = \frac{1}{6}a^2$. Určete velikost úsečky CF.

47. Do rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku ABC o přeponě c je vepsán čtverec $CDEF$ se stranami na odvěsnách trojúhelníku. Určete velikost strany a vepsaného čtverce.

48. Body A', B', C', které leží v jedné třetině od vrcholů A, B, C na stranách AB, BC, CA rovnostranného trojúhelníku ABC, určují rovnostranný trojúhelník. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.

49. Určete obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC, který je vepsán do kružnice $k(S;r)$ tak, že základna AB je tětiva příslušná středovému úhlu $90°$.

50. Určete úhel α v trojúhelníku ABC, platí-li pro jeho strany

a) $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, b) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

51. Jsou dány tři různé přímky m, n, p se společným bodem T. Na přímce p je dán bod P, $P \neq T$. Sestrojte trojúhelník MNP takový, aby na přímkách m, n, p ležely jeho těžnice.

52. V trojúhelníku ABC sestrojte příčku $A'B'$, $A'B' \parallel AB$ a $|A'B'| = |AA'|$. Její velikost vyjádřete pomocí stran trojúhelníku ABC.

53. Je dána kružnice $k(O;r)$, přímka p a bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$ s vrcholem B na kružnici k a vrcholem D na přímce p.

54. Zvolte tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Existují tři různé přímky takové, že každá z nich je od všech tří bodů stejně vzdálena. Sestrojte tyto přímky. Označte M, N, P průsečíky sestrojených přímek se stranami trojúhelníku ABC a vypočtěte poměr obsahů trojúhelníků ABC a MNP.

55. V rovnoramenném trojúhelníku ABC o dané základně AB určete velikost ramen, jestliže platí $a + v_c = 2c$.

56. Určete poměr úseček, na které základnu rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí kolmice procházející středem S ramene na tuto základnu.

57. Do kosočtverce $ABCD$ vepište čtverec $MNPQ$ tak, aby vždy jeden jeho vrchol ležel na jedné straně kosočtverce. Jestliže e, f jsou úhlopříčky kosočtverce, vypočítejte poměr obsahů čtverce a kosočtverce.

58. Ve čtverci $ABCD$ o straně a příčka AE, kde E je střed strany CD, protíná úhlopříčku BD v bodě F. Určete velikost úsečky EF.

59. Určete poměr obsahu pravidelného šestiúhelníku kružnici $k(S;r)$ opsaného a obsahu pravidelného šestiúhelníku kružnici k vepsaného.

60. Určete stranu b pravidelného osmiúhelníku, který je vepsán do čtverce o straně a tak, že čtyři jeho strany leží na stranách čtverce.

61. Vyšetřete množinu středů tětiv kružnice $k(O;r)$, které procházejí jejím vnitřním bodem $M \neq O$.

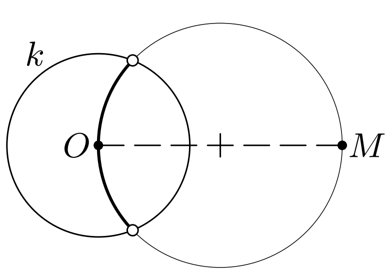
62. Vypočtěte obsah čtverce, který je vepsán do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou c tak, že jedna jeho strana je na přeponě a zbývající dva vrcholy na odvěsnách.

Výsledky

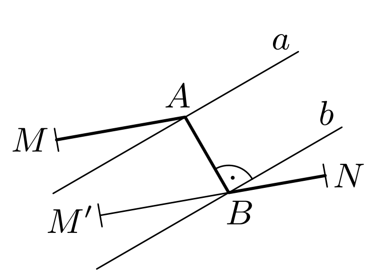
1. Řešte podle příkladu 1.

2. Řešte podle příkladu 2.

3. Hledaná množina $\mathcal{M}$ je kružnice nebo kružnicový oblouk. Je-li $|MO| < r$, je $\mathcal{M}$ kružnice nad průměrem OM. Je-li $|MO| = r$, je $\mathcal{M}$ kružnice nad průměrem OM bez bodu M. Je-li $|MO| > r$, je $\mathcal{M}$ oblouk kružnice nad průměrem OM, který leží uvnitř kruhu s hraniční kružnicí k. (Viz obr. 1.)



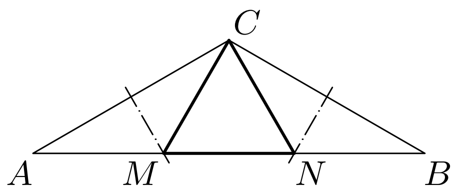
Obr. 1



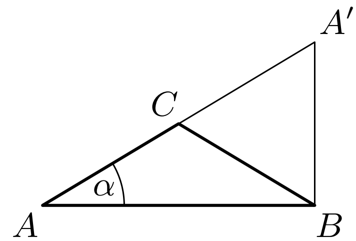
Obr. 2

4. V posunutí T_{B-A} je obrazem přímky a přímka b, bodu A bod B a bodu M bod M'. Bod B je tedy průsečíkem přímky $M'N$ s přímkou b. (Viz obr. 2.)

5. Trojúhelník MNC je rovnostranný, všechny úhly mají velikost $60°$. (Viz obr. 3.)



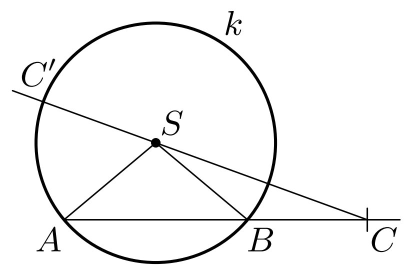
Obr. 3



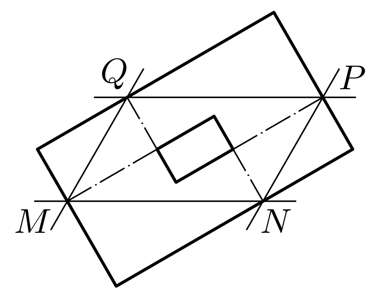
Obr. 4

6. $|\sphericalangle ABA'| = 90°$. (Viz obr. 4.)

7. Označíme-li $\gamma = |\sphericalangle BCS|$, je $|\sphericalangle ABS| = 2\gamma$ a $|\sphericalangle ASC'| = 3\gamma$. Hledaný poměr je $1 : 3$. (Viz obr. 5.)



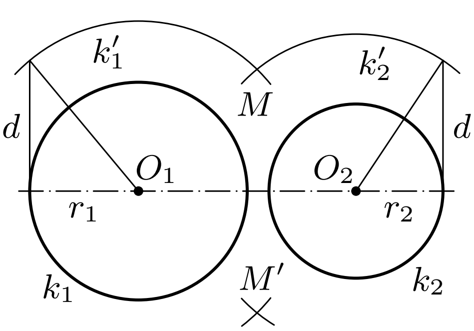
Obr. 5



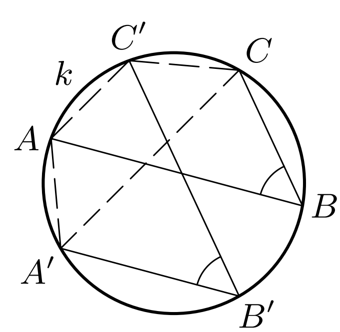
Obr. 6

8. Osy vnitřních úhlů čtverce a kosočtverce se protínají v jediném bodě. Osy vnějších úhlů čtverce, osy vnitřních a vnějších úhlů obdélníku určují čtverec. Osy vnitřních i vnějších úhlů ostatních rovnoběžníků určují obdélník. (Viz obr. 6.)

9. Množina všech bodů M v rovině, ze kterých tečny sestrojené ke kružnici k_1 mají délku d, je kružnice $k_1'(O_1; \sqrt{r_1^2 + d^2})$. Analogicky pro kružnici k_2. Úloha má 2, 1, 0 řešení. (Viz obr. 7.)



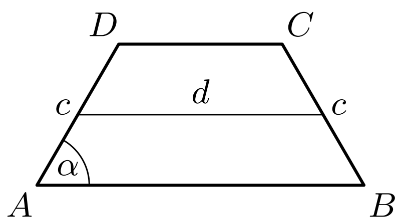
Obr. 7



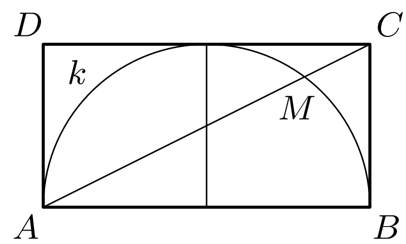
Obr. 8

10. Protože $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$, je $|\widehat{AC}| = |\widehat{A'C'}|$, tedy i $|AC| = |A'C'|$ a čtyřúhelník $AC'CA'$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AC', $A'C$. (Viz obr. 8.)

11. $a = \frac{1}{2}(c + 2d)$, $b = \frac{1}{2}(2d - c)$, $u = \frac{3}{4}c^2 + d^2$ (Viz obr. 9.)



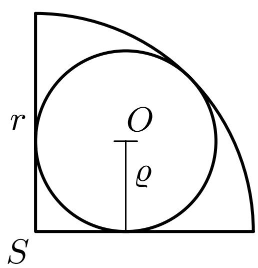
Obr. 9



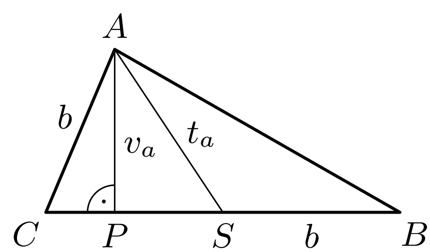
Obr. 10

12. 1 : 4 (Viz obr. 10.)

13. $4 : (3 + 2\sqrt{2})$ (Viz obr. 11.)

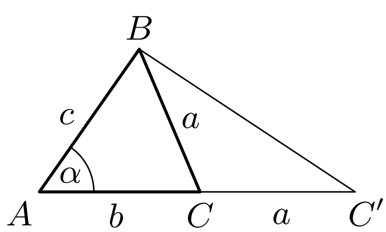


Obr. 11

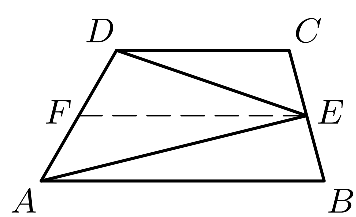


Obr. 12

14. V pravoúhlém trojúhelníku ASP známe přeponu $t_a = |AS|$ a odvěsnu $v_a = |AP|$. Vrchol C je průsečíkem osy těžnice AS a přímky BS. (Viz obr. 12.)



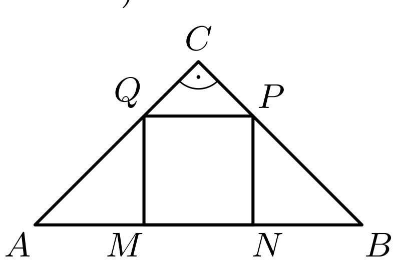
Obr. 13



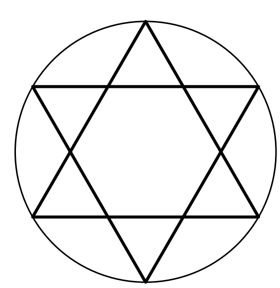
Obr. 14

15. V trojúhelníku ABC' známe dvě strany $|AB| = c$, $|AC'| = a + b$ a úhel α jimi sevřený. Vrchol C je průsečíkem osy strany BC' se stranou AC'. (Viz obr. 13.)

16. Střední příčka EF lichoběžníku rozdělí trojúhelník ADE na dva trojúhelníky AEF a DEF, které mají společnou stranu EF a stejnou výšku rovnou polovině výšky lichoběžníku. Poměr obsahů je 2 : 1. (Viz obr. 14.)



Obr. 15

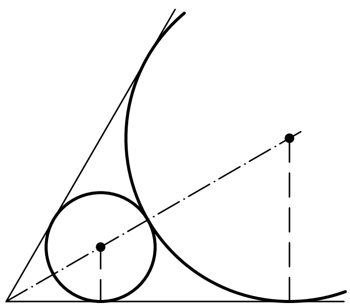

Obr. 16

17. $\frac{1}{9}\,c^2$ (Viz obr. 15.)

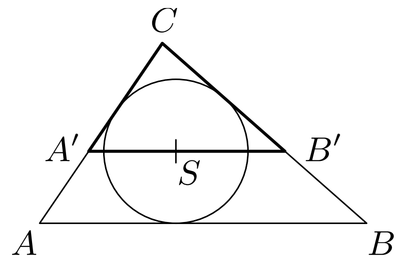
18. $\sqrt{3}\,r^2$ (Viz obr. 16.)

19. $\pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = \frac{1}{2}\pi|AB|$

20. Pro trojúhelníky ABD a ACD použijte sinovou větu.



Obr. 17

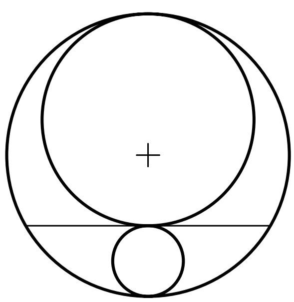


Obr. 18

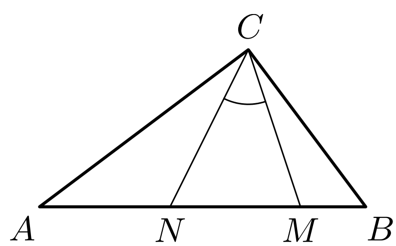
21. 1 : 9 (Viz obr. 17.)

22. $\gamma = 60°$

23. $o' = a + b$ (Viz obr. 18.)



Obr. 19

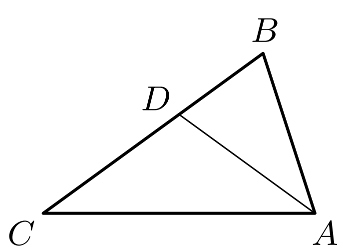


Obr. 20

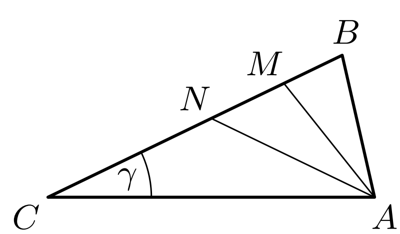
24. $\frac{5}{8}\pi r^2$ (Viz obr. 19.)

25. $|\sphericalangle MCN| = 45°$ (Viz obr. 20.)

27. $\alpha = \beta = \frac{2}{5}\pi,\ \ \gamma = \frac{1}{5}\pi$ (Viz obr. 21.)



Obr. 21

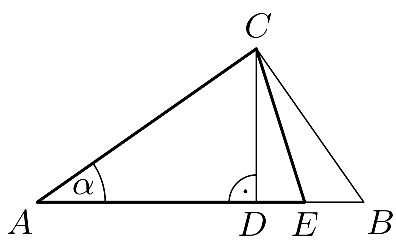


Obr. 22

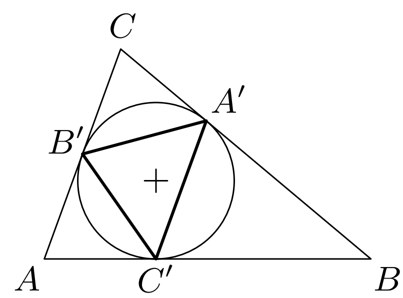
28. $\triangle ACN$: $\gamma, \gamma, 5\gamma$; $\triangle ANM$: $\gamma, 2\gamma, 4\gamma$; $\triangle AMB$: $\gamma, 3\gamma, 3\gamma$,
kde $\gamma = \frac{1}{7}\pi$. (Viz obr. 22.)

29. $\gamma = 90°$

30. $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ECA| = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ (Viz obr. 23.)



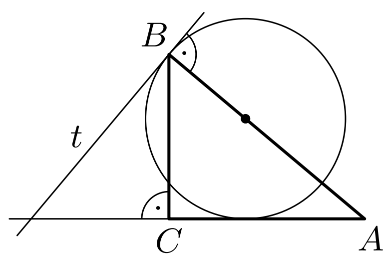
Obr. 23



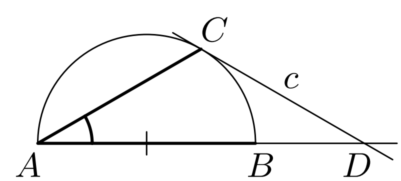
Obr. 24

31. $\alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $\beta' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, $\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (Viz obr. 24.)

32. Tečna t kružnice v bodě B je kolmá na přeponu AB. Střed kružnice je průsečíkem osy odchylky přímek t a AC s přeponou AB. (Viz obr. 25.)



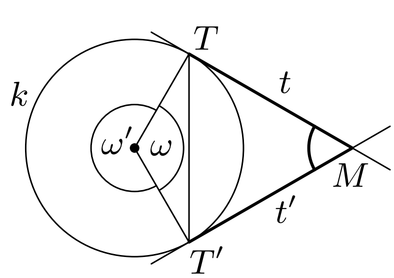
Obr. 25



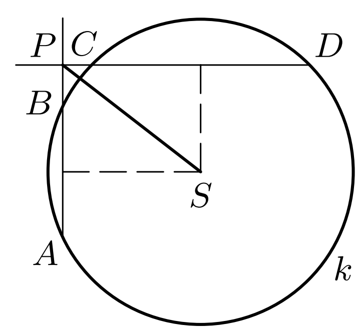
Obr. 26

33. $|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{6}\pi$ (Viz obr. 26.)

34. $|\sphericalangle TMT'| = \frac{1}{2}|\omega' - \omega|$ (Viz obr. 27.)



Obr. 27



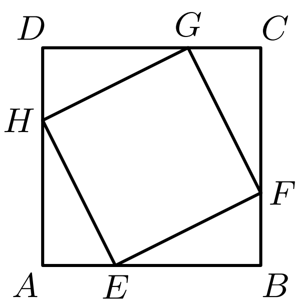
Obr. 28

35. $\sphericalangle ECD$ je úsekový k obvodovému úhlu 2α, $\sphericalangle DCB$ je úsekový k obvodovému úhlu α

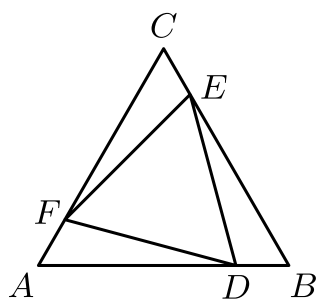
36. $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 12\,\mathrm{cm}$

37. $|SP| = 8j$ (Viz obr. 28.)

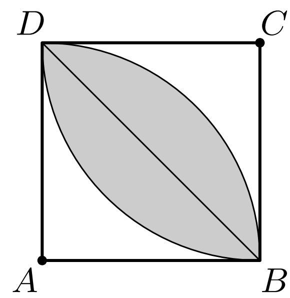
38. Vrcholy čtverce $EFGH$ o nejmenším obsahu jsou středy stran čtverce $ABCD$, proto $b \geqq a/\sqrt{2}$. Přitom b je maximálně rovno a. Proto $a/\sqrt{2} \leqq b \leqq a$. (Viz obr. 29.)



Obr. 29



Obr. 30

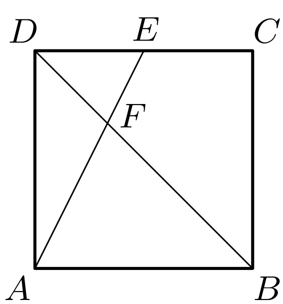


Obr. 31

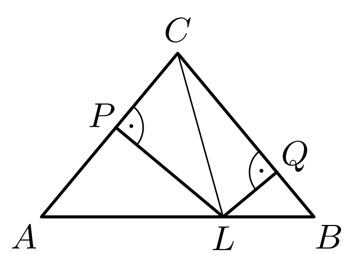
39. $b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (Viz obr. 30.)

40. $\frac{1}{2}(\pi - 2)a^2$ (Viz obr. 31.)

41. Trojúhelníky ABF a EDF jsou podobné s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$, $|EF| : |AF| = 1 : 2$. (Viz obr. 32.)

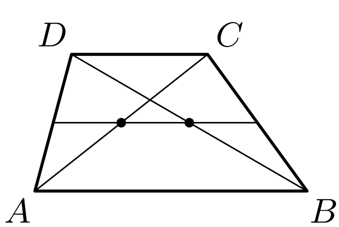


Obr. 32

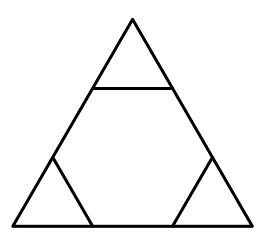


Obr. 33

42. Obsah trojúhelníku ABC vyjádřete pomocí obsahů trojúhelníků ALC a LBC. (Viz obr. 33.)

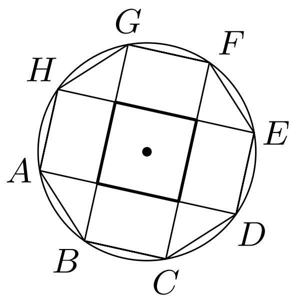


Obr. 34

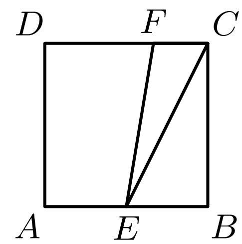

Obr. 35

43. Všechny tři úsečky mají stejnou velikost. (Viz obr. 34.)

44. $S = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^2$ (Viz obr. 35.)

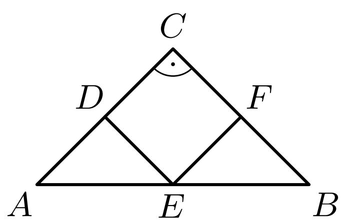


Obr. 36

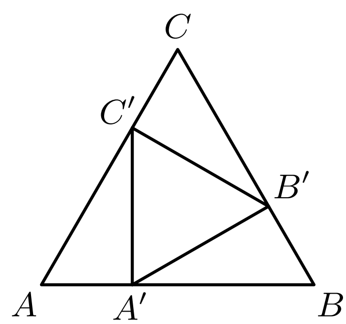


Obr. 37

45. $S = r^2(2 - \sqrt{2})$ (Viz obr. 36.) **46.** $|FC| = \frac{1}{3}a$ (Viz obr. 37.)

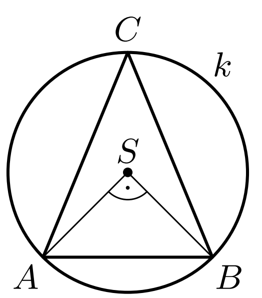


Obr. 38

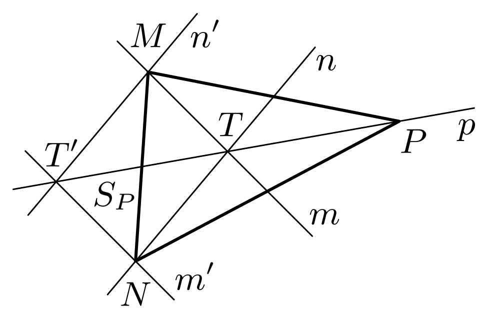


Obr. 39

47. $a = \frac{1}{4}\sqrt{2}\, c$ (Viz obr. 38.) **48.** $3 : 1$ (Viz obr. 39.)



Obr. 40



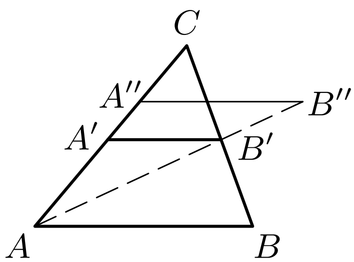
Obr. 41

49. $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)r^2$ (Viz obr. 40.) **50.** a) $\alpha = 120^\circ$, b) $\alpha = 60^\circ$

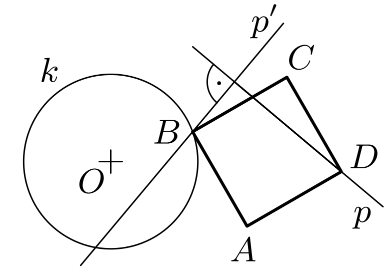
51. Střed S_P strany MN leží na polopřímce opačné k polopřímce TP, $|TS_P| = \frac{1}{2}|TP|$ a je středem rovnoběžníku $MT'NT$. (Viz obr. 41.)

52. Zvolíme-li libovolně úsečku $A''B'' \parallel AB$ takovou, aby $A'' \in AC$ a $|A''B''| = |AA''|$, odpovídá ve stejnolehlosti o středu A hledané úsečce $A'B'$, $|A'B'| = \dfrac{bc}{b+c}$. (Viz obr. 42.)

53. Otočíme-li čtverec $ABCD$ kolem bodu A o 90°, bod D se otočí do bodu B a přímka p do přímky p'. Bod B je průsečíkem přímky p' s kružnicí k. Úloha má 0, 1, 2 řešení. (Viz obr. 43.)

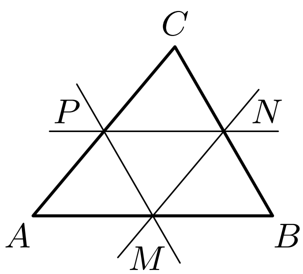


Obr. 42

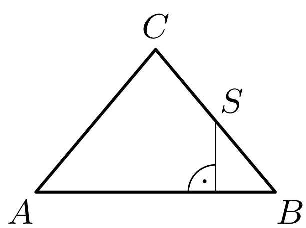


Obr. 43

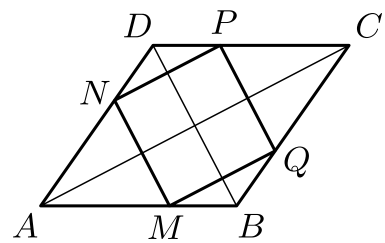
54. Strany trojúhelníku MNP jsou středními příčkami trojúhelníku ABC, proto poměr jejich obsahů je 1 : 4. (Viz obr. 44.)



Obr. 44



Obr. 45

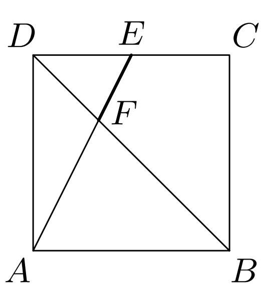


Obr. 46

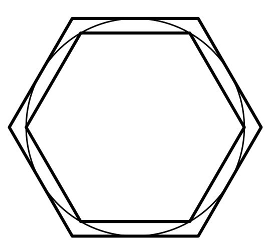
55. $a = \frac{17}{16}\,c$

56. 1 : 3 (Viz obr. 45.)

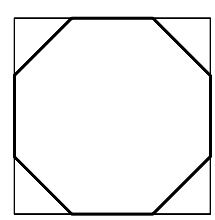
57. Střední příčky čtverce $MNPQ$ jsou na úhlopříčkách kosočtverce. Čtverec $MNPQ$ a libovolný čtverec $M'N'P'Q'$, který má vrcholy M', N' na ramenech úhlu o vrcholu A, strany rovnoběžné s úhlopříčkami kosočtverce, si odpovídají ve stejnolehlosti o středu A. Poměr obsahů je roven $(e+f)^2 : 2ef$. (Viz obr. 46.)



Obr. 47



Obr. 48



Obr. 49

58. $|EF| = \frac{1}{6}\sqrt{5}\,a$ (Viz obr. 47.)

59. 4 : 3 (Viz obr. 48.)

60. $b = (\sqrt{2}-1)a$ (Viz obr. 49.)

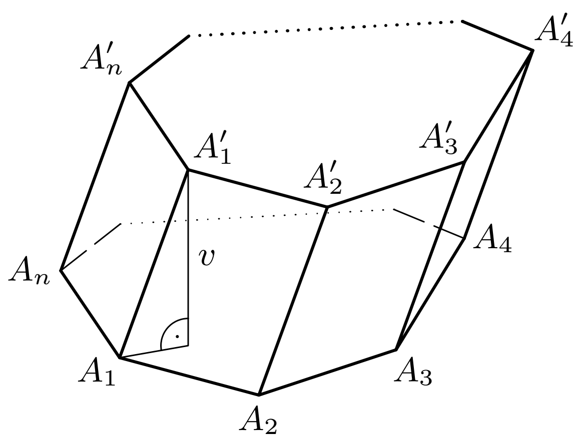
61. kružnice nad průměrem OM

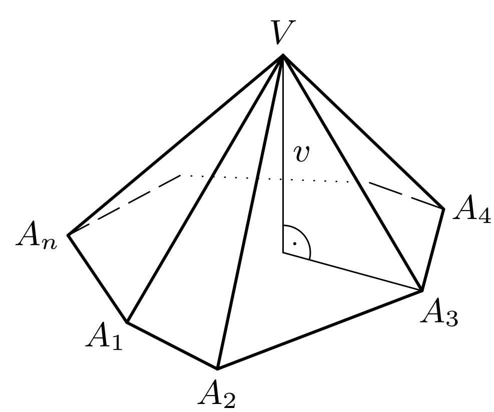
62. $\frac{1}{9}\,c^2$

Kapitola 8.

GEOMETRIE V PROSTORU

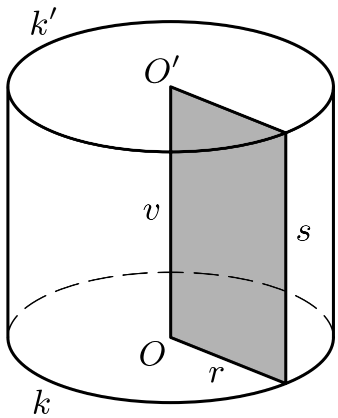
a) n-boký hranol a jehlan

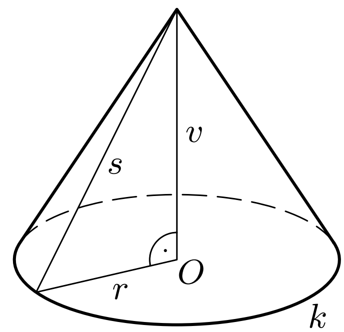




- $A_1A_2\ldots A_n$; $A'_1A'_2\ldots A'_n$ $(n \geqq 3)$ jsou podstavy; jejich obsah značíme S_p
- $A_1A_2A'_2A'_1$; $A_2A_3A'_3A'_2$; $\ldots$; A_1A_2V; A_2A_3V; $\ldots$ jsou stěny, sjednocení stěn je plášť, jeho obsah značíme S_{pl}
- A_1A_2; A_2A_3; $\ldots$; $A'_1A'_2$; $\ldots$ jsou podstavné hrany
- $A_1A'_1$; $A_2A'_2$; $\ldots$; A_1V; A_2V; $\ldots$ jsou boční hrany
- Písmeny a, b, c, $\ldots$ označujeme délky hran, ale i přímo hrany
- v je výška hranolu, resp. jehlanu
- Pro hranol je povrch $S = 2S_p + S_{pl}$ a objem $V = S_p \cdot v$
- Pro jehlan je povrch $S = S_p + S_{pl}$ a objem $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v$

b) Rotační válec a rotační kužel





– $k(O;r)$, $k'(O';r)$ jsou podstavné hrany
– kruh určený podstavnou hranou k je podstava
– r je poloměr podstavy
– v je výška válce, resp. kužele
– s je strana válce, resp. kužele;
jestliže je $s = 2r$, je válec, resp. kužel rovnostranný
– Pro rotační válec je povrch $S = 2\pi r(r + v)$ a objem $V = \pi r^2 v$
– Pro rotační kužel je povrch $S = \pi r(r + s)$ a objem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

c) Koule

– Pro kouli poloměru r je povrch $S = 4\pi r^2$ a objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

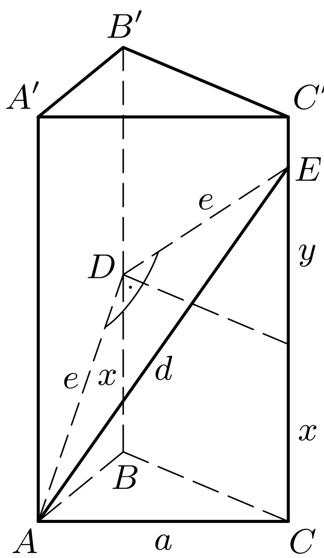
ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** V pravidelném trojbokém hranolu $ABCA'B'C'$ na hranách BB' a CC' určeme body D a E tak, aby trojúhelník ADE byl pravoúhlý rovnoramenný. Určeme také minimální výšku hranolu, pro kterou má úloha řešení.

Řešení. V trojúhelníku ADE nemůže být pravý úhel při vrcholu A (body D a E by byly v opačných poloprostorech s hraniční rovinou ABC). Předpokládejme, že pravý úhel je při vrcholu D. Označme $|AB| = |AC| = |BC| = a$, $|DE| = |DA| = e$, $|AE| = d$, $|BD| = x$, $|CE| = x + y$. Potom

$$e^2 = a^2 + x^2 = a^2 + y^2 \implies x^2 - y^2 = 0.$$

Protože $x + y \neq 0$, je $x = y$.



Dále platí

$$d^2 = a^2 + (x + y)^2 = a^2 + 4x^2$$

a zároveň

$$d^2 = 2e^2 = 2(a^2 + x^2).$$

Potom

$$a^2 + 4x^2 = 2a^2 + 2x^2 \implies x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

a $x + y = 2x = a\sqrt{2}$.

Trojúhelník ADE bude rovnoramenný pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu D, právě když

$$|BD| = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad |CE| = a\sqrt{2}.$$

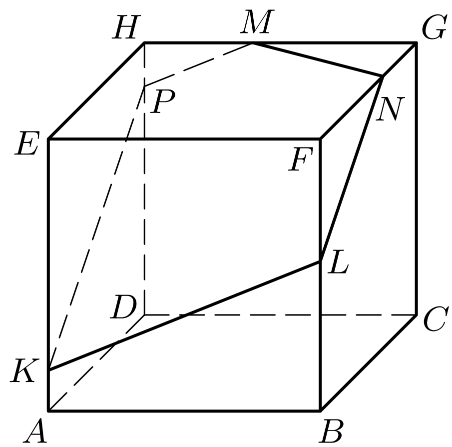
Analogicky pro případ pravého úhlu při vrcholu E je

$$|CE| = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad |BD| = a\sqrt{2}.$$

Minimální výška hranolu je rovna $a\sqrt{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Na hranách krychle $ABCDEFGH$ jsou dány tři body $K \in AE$, $L \in BF$, $M \in GH$. Sestrojme řez krychle rovinou KLM.

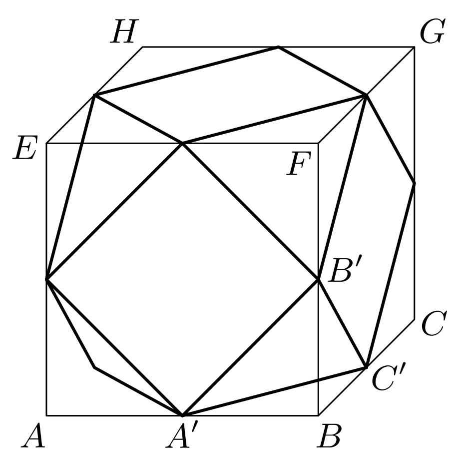
Řešení. Úsečka KL leží ve stěně $ABFE$, je tedy jednou stranou řezu. Protější stěnu $CDHG$ daná rovina protíná v úsečce $MP \parallel KL$. Analogicky řez dané roviny se stěnou $BCGF$ je úsečka $LN \parallel KP$.



Řez roviny KLM s danou krychlí je pětiúhelník $KLNMP$.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Středy všech hran krychle $ABCDEFGH$ o hraně a určují polopravidelný mnohostěn. Sestrojme ho, určeme, kolik má stěn a jaké mnohoúhelníky jsou jeho stěny. Vypočítejme objem polopravidelného mnohostěnu.

Řešení. Středy hran krychle určují polopravidelný čtrnáctistěn. Osm jeho stěn jsou shodné rovnostranné trojúhelníky a šest stěn jsou shodné čtverce. Čtrnáctistěn vytvoříme, odřízneme-li z krychle osm shodných trojbokých jehlanů.



Objem jednoho jehlanu, např. jehlanu $A'BC'B'$, je roven

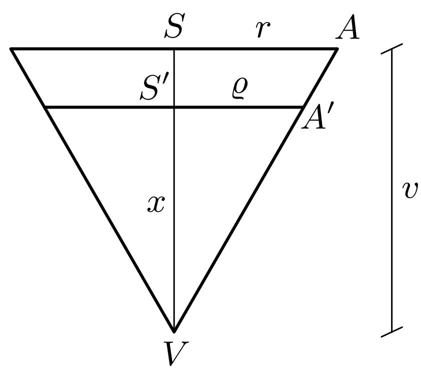
$$V_1 = \tfrac{1}{3} S_p \cdot \tfrac{1}{2}\, a = \tfrac{1}{48}\, a^3.$$

Potom objem čtrnáctistěnu je

$$V = a^3 - 8V_1 = \tfrac{5}{6}\,a^3.$$

▷ **PŘÍKLAD 4.** Do nálevky tvaru rovnostranného rotačního kužele o poloměru podstavy r je nalito množství vody rovnající se polovině objemu nálevky. Určeme výšku hladiny vody od ústí nálevky.

Řešení.



Výška kužele $v = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}\,r$. Poloměr hladiny při její výšce x určíme z podobných trojúhelníků $VS'A'$ a VSA:

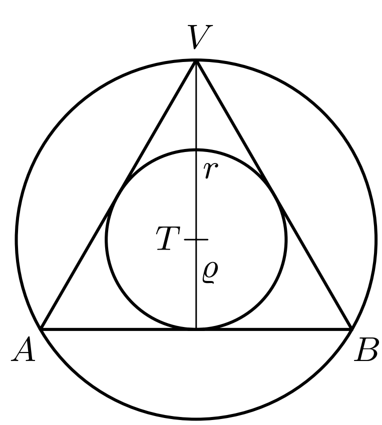
$$\varrho = \frac{xr}{v} = \frac{x}{\sqrt{3}}\,.$$

Potom objem vody je $\frac{1}{3}\pi\varrho^2 x = \frac{1}{6}\pi r^2 v$. Odtud $x^3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,r^3$ a výška hladiny

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\,r.$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** Rovnostrannému rotačnímu kuželi o straně s je opsána koule a vepsána koule. Vypočítejme poměr objemů obou koulí.

Řešení.



Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník ABV o straně s. Střed koule kuželi opsané i koule vepsané bude v těžišti osového řezu. Proto poloměr r koule opsané je roven $\frac{2}{3}$ těžnice osového řezu, tj.

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, s = \frac{\sqrt{3}}{3}\, s.$$

Poloměr ϱ koule vepsané je

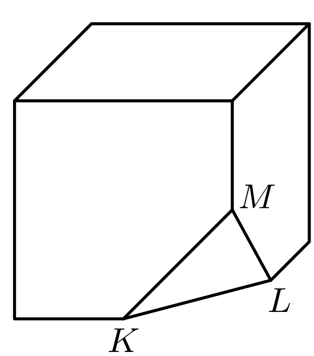
$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, s.$$

Potom poměr objemu V_o koule opsané a objemu V_v koule vepsané je

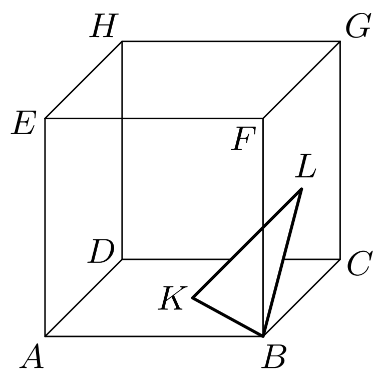
$$V_o : V_s = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, s\right)^3 : \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\, s\right)^3 = 8 : 1.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

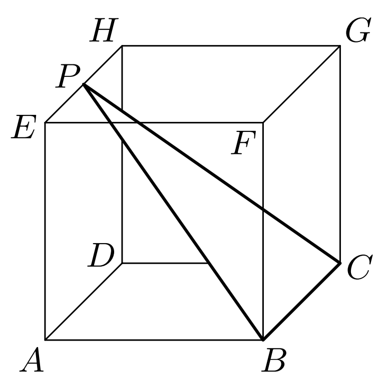
1. Obsahy tří stěn kvádru, které mají společný právě jeden vrchol, jsou S_1, S_2, S_3. Vypočítejte objem V kvádru.
2. Kvádr má jednu hranu $a = 4\,\mathrm{cm}$, objem $V = 140\,\mathrm{cm}^3$ a povrch $S = 166\,\mathrm{cm}^2$. Určete zbývající hrany b, c.
3. Kvádr má podstavu o rozměrech 3 cm, 4 cm a výšku 5 cm. Určete tělesovou úhlopříčku u a její odchylku α od podstavy.
4. V krychli označíme K, L, M středy tří hran, které vycházejí z jednoho jejího vrcholu. Rovina KLM dělí krychli na dvě části. Určete poměr objemů obou částí.



5. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně a označme K střed stěny $ABCD$ a L střed stěny $BCGF$. Určete obsah S trojúhelníku KLB.



6. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně a označme P střed hrany EH. Určete obsah S trojúhelníku BCP.



7. Pravidelný čtyřboký jehlan má úhlopříčku podstavy velikosti $4\sqrt{2}\,\text{cm}$ a boční hranu velikosti $2\sqrt{5}\,\text{cm}$. Určete jeho objem V.

8. Pravidelný čtyřboký jehlan má úhlopříčku podstavy velikosti $4\sqrt{2}\,\text{cm}$ a boční hranu velikosti $2\sqrt{5}\,\text{cm}$. Určete jeho povrch S.

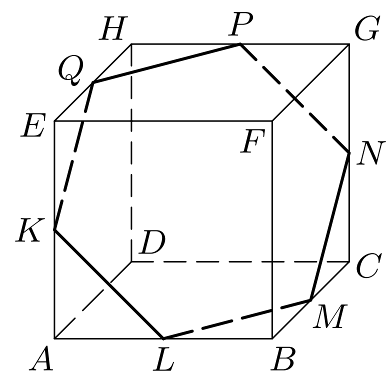
9. Určete tělesovou úhlopříčku u krychle, která má objem $64\,\text{cm}^3$.

10. Určete tělesovou úhlopříčku u krychle, která má povrch $96\,\text{cm}^2$.

11. Podstavou čtyřbokého jehlanu je stěna krychle o hraně a. Jeho vrcholem je střed protější stěny krychle. Určete povrch S jehlanu.

12. Podstavou čtyřbokého jehlanu je stěna krychle o hraně a. Jeho vrchol je jeden z vrcholů protější stěny této krychle. Určete povrch S jehlanu.

13. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně a je bod K střed hrany AE, bod M střed hrany BC a bod N střed hrany CG. Sestrojte řez krychle rovinou KMN a určete jeho obsah.



14. Určete středový úhel α kruhové výseče, do které se rozvine plášť rovnostranného rotačního kužele o poloměru podstavy r.

15. Určete výšku v a objem V pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ o hraně a.

16. Krychle a koule mají stejný objem. Určete poměr jejich povrchů.

17. Krychle a koule mají stejný povrch. Určete poměr jejich objemů.

18. Do pravidelného čtyřbokého hranolu, který má hranu a a výšku $2a$, je vepsán rotační válec. Určete poměr povrchů obou těles.

19. Do krychle je vepsán válec. Určete poměr povrchů obou těles.

20. Pravidelnému čtyřbokému hranolu je opsán rotační válec. Určete poměr objemů obou těles.

21. Kvádru o hranách velikosti 2 cm, 3 cm, 4 cm jsou opsány tři válce tak, že protější stěny kvádru jsou vepsány do podstav válců. Určete poměr objemů všech tří opsaných válců.

22. Určete objem V a povrch S pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož jedna podstava má hranu velikosti 10 m, druhá 8 m a odchylka bočních stěn od podstavy je 45°.

23. Obdélník o stranách a, b ($a \neq b$) je rozvinutým pláštěm dvou různých válců. Vypočítejte jejich objemy.

24. Obdélník o stranách a, b ($a \neq b$) je rozvinutým pláštěm dvou různých válců. Vypočítejte jejich povrchy.

25. Obdélník o stranách a, b ($a \neq b$) je rozvinutým pláštěm dvou různých válců. Vypočítejte poměr jejich povrchů.

26. Obdélník o stranách a, b ($a \neq b$) je rozvinutým pláštěm dvou různých válců. Vypočítejte poměr jejich objemů.

27. Vypočítejte objem V a povrch S krychle vepsané do koule o poloměru r.

28. Do koule o poloměru r jsou vepsány dva shodné rotační kužele se společnou podstavou o poloměru r. Vypočítejte poměr povrchu sjednocení obou kuželů a povrchu koule.

29. Do koule o poloměru r jsou vepsány dva shodné rotační kužele se společnou podstavou o poloměru r. Vypočítejte poměr objemu sjednocení obou kuželů a objemu koule.

30. Podstava rotačního kužele je kruh opsaný stěně krychle o hraně a a jeho vrcholem je střed protější stěny krychle. Vypočítejte povrch S rotačního kužele.

31. Do krychle o hraně a je vepsán rotační kužel tak, že jeho podstava je kruh vepsaný do stěny krychle a jeho vrchol je střed protější stěny. Vypočítejte povrch S kužele.

32. Střed stěny krychle je společným vrcholem dvou rotačních kuželů. Podstava prvního kužele je opsána a podstava druhého kužele je vepsána protější stěně krychle. Určete poměr objemů kuželů.

33. Vypočítejte povrch S rovnostranného rotačního válce, jehož objem je $1\,\mathrm{cm}^3$.

34. Vypočítejte poměr objemů krychle kouli vepsané a krychle této kouli opsané.

35. Zmenšíme-li poloměr podstavy kužele o polovinu a jeho výšku zvětšíme o $20\,\%$, o kolik procent se zmenší jeho objem?

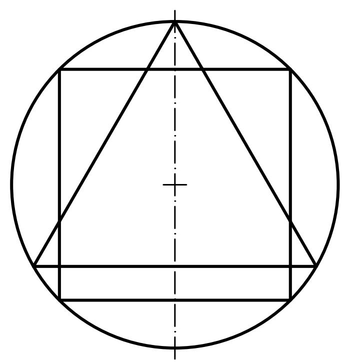
36. Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací čtverce o straně a kolem jeho úhlopříčky.

37. Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací rovnostranného trojúhelníku o straně a kolem jeho strany.

38. Do polokoule o poloměru r je vepsána krychle tak, že jedna její stěna leží v podstavě polokoule a zbývající vrcholy na kulovém vrchlíku. Určete hranu a krychle.

39. Vypočtěte hranu a krychle vepsané do rovnostranného kužele $(s = 2r)$.

40. Do koule o poloměru r je vepsán rovnostranný rotační válec a rovnostranný rotační kužel (viz obrázek osového řezu). Vyjádřete objem V_v válce pomocí objemu V_s koule a objemu V_k kužele.



41. Do koule o poloměru r je vepsán rovnostranný rotační válec a rovnostranný rotační kužel (viz obrázek z úlohy 40). Vyjádřete povrch S_v válce pomocí povrchu S_s koule a povrchu S_k kužele.

42. Dva rotační válce o poloměrech podstav r_1, r_2 mají stejný objem. Určete poměr obsahů jejich plášťů.

43. Rovnostrannému rotačnímu kuželi je opsána a vepsána koule. Určete poměr povrchů obou koulí.

44. Jsou dány dva souosé rotační kužele takové, že vrchol jednoho kužele je středem podstavy druhého kužele. Jestliže poloměry jejich podstav jsou r_1, r_2, určete poloměr r kružnice, ve které se protínají jejich pláště.

45. Určete poměr obsahů plášťů dvou rotačních válců o poloměrech podstav r_1, r_2 a výškách v_1, v_2, pro které platí $r_1 : r_2 = v_1 : v_2$.

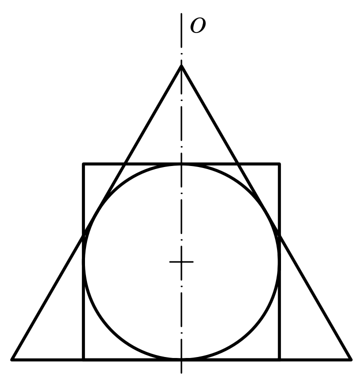
46. Určete poměr obsahů plášťů dvou rotačních kuželů o poloměrech podstav r_1, r_2 a výškách v_1, v_2, pro které platí $r_1 : r_2 = v_1 : v_2$.

47. Kouli o poloměru r je opsán rotační kužel o výšce $v = 4r$. Vypočítejte objem kužele pomocí objemu V koule.

48. Určete poměr povrchů tří těles, která vzniknou rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC o přeponě c a odvěsnách a, b, kolem jeho stran.

49. Určete poměr objemů tří těles, která vzniknou rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC o přeponě c a odvěsnách a, b, kolem jeho stran.

50. Kružnici o poloměru r je opsán čtverec a rovnostranný trojúhelník tak, že mají společnou osu o souměrnosti kolmou na jejich stranu (viz obrázek). Při otáčení kolem osy o vzniká rotační válec, rotační kužel a koule. Určete poměr povrchů všech tří těles.

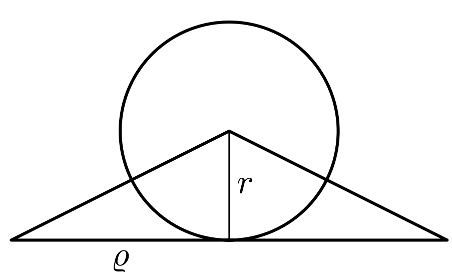


51. Kružnici o poloměru r je opsán čtverec a rovnostranný trojúhelník tak, že mají společnou osu o souměrnosti kolmou na jejich stranu (viz obrázek z úlohy 50). Při otáčení kolem osy o vzniká rotační válec, rotační kužel a koule. Určete poměr objemů všech tří těles.

52. Určete poměr poloměrů tří koulí, z nichž první je krychli o hraně a opsána a druhá je krychli vepsána, třetí koule se dotýká všech hran krychle.

53. Ukažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle o hraně a, je roven rozdílu povrchů koulí této krychli opsané a vepsané.

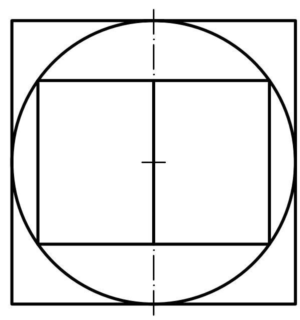
54. Střed koule o poloměru r je vrcholem rotačního kužele, jehož podstava se koule dotýká. Určete poloměr ϱ podstavy kužele, je-li objem koule a kužele stejný.



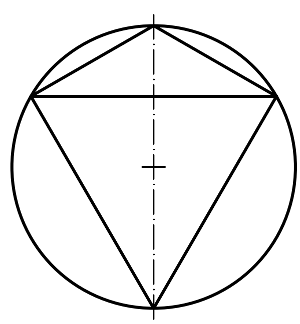
55. Střed koule o poloměru r je vrcholem rotačního kužele, jehož podstava se koule dotýká. Určete poloměr ϱ podstavy kužele, je-li povrch koule a kužele stejný.

56. Pravidelný trojboký jehlan $ABCV$ je vepsaný do polokoule o poloměru r tak, že jeho podstava ABC je vepsaná hraničnímu kruhu polokoule. Určete objem jehlanu.

57. Kouli je opsána a vepsána krychle (viz obrázek osového řezu). Vypočítejte poloměr r koule, je-li dán rozdíl S povrchů obou krychlí.



58. Do koule o poloměru r jsou vepsány dva rotační kužele se společnou podstavou (viz obrázek osového řezu). Určete objem sjednocení kuželů, jestliže poměr jejich výšek je $1 : 3$.



59. Do koule o poloměru r jsou vepsány dva rotační kužele se společnou podstavou (viz obrázek z úlohy 58). Určete povrch sjednocení kuželů, jestliže poměr jejich výšek je $1 : 3$.

60. Do rotačního kužele je vepsán rotační válec o poloviční výšce. Určete poměr jejich objemů.

61. Vypočtěte poměr objemu krychle $ABCDEFGH$ a objemu jehlanu $ABCF$.

62. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s ramenem a kolem jeho přepony.

Výsledky

1. $V = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$

2. $b = 5\,\mathrm{cm}, \quad c = 7\,\mathrm{cm}$

3. $u = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}, \quad \alpha = 45^\circ$

4. $1 : 47$

5. $S = \frac{1}{8}\sqrt{3}\,a^2$

6. $S = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a^2$

7. $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$

8. $S = 48\,\mathrm{cm}^2$

9. $u = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

10. $u = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

11. $S = a^2(1 + \sqrt{5})$

12. $S = a^2(2 + \sqrt{2})$

13. Řezem krychle je pravidelný šestiúhelník $KLMNPQ$. Strana šestiúhelníku je $s = a/\sqrt{2}$ a jeho obsah $S = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$.

14. $\alpha = \pi$

15. $v = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,a, \quad V = \frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3$

16. $\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{\pi}$

17. $\sqrt{\pi} : \sqrt{6}$

18. $4 : \pi$

19. $4 : \pi$

20. $2 : \pi$

21. $26 : 25 : 30$

22. $V = \frac{244}{3}\,\mathrm{m}^3, \quad S = (164 + 36\sqrt{2})\,\mathrm{m}^2$

23. $\dfrac{a^2 b}{4\pi}, \quad \dfrac{ab^2}{4\pi}$

24. $\dfrac{a(a + 2\pi b)}{2\pi}, \quad \dfrac{b(b + 2\pi a)}{2\pi}$

25. $a(a + 2\pi b) : b(b + 2\pi a)$

26. $a : b$

27. $V = \frac{8}{9}\sqrt{3}\,r^3, \quad S = 8r^2$

28. $\sqrt{2} : 2$

29. $1 : 2$

30. $S = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\pi a^2$

31. $S = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\pi a^2$

32. $2 : 1$

33. $S = 3\sqrt[3]{2\pi}\,\mathrm{cm}^2$

34. $\sqrt{3} : 9$

35. $70\,\%$

36. $V = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,\pi a^3$

37. $V = \frac{1}{4}\pi a^3$

38. $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,r$

39. $a = \dfrac{\sqrt{6}\,r}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

40. $V_v = \sqrt{V_s \cdot V_k}$

41. $S_v = \sqrt{S_s \cdot S_k}$

42. $r_2 : r_1$

43. $1 : 4$

44. $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

45. $r_1^2 : r_2^2$ **46.** $r_1^2 : r_2^2$ **47.** $2V$

48. Jestliže označíme S_a povrch tělesa s osou a, další analogicky, potom platí $S_a : S_b : S_c = bc(b+c) : ac(a+c) : ab(a+b)$.

49. Jestliže označíme V_a objem tělesa s osou a, další analogicky, potom platí $V_a : V_b : V_c = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$.

50. $9 : 6 : 4$ **51.** $9 : 6 : 4$ **52.** $\sqrt{3} : 1 : \sqrt{2}$

53. $S_o = 3\pi a^2$ je povrch koule opsané, $S_v = \pi a^2$ je povrch koule vepsané a povrch třetí koule je $S = 2\pi a^2$.

54. $\varrho = 2r$ **55.** $\varrho = \frac{4}{3}r$ **56.** $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,r^3$

57. $r = \frac{1}{4}\sqrt{S}$ **58.** $V = \frac{1}{2}\pi r^3$ **59.** $S = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+3)\pi r^2$

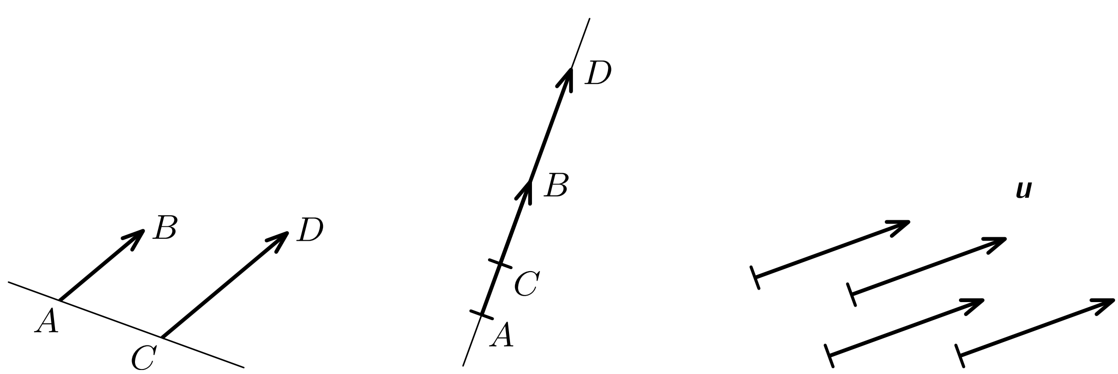
60. $3 : 8$ **61.** $6 : 1$ **62.** $\dfrac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}$

Kapitola 9.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

9.1. Vektory

Dvě nenulové orientované úsečky AB a CD mají stejný směr, jestliže buď přímky AB a CD jsou rovnoběžné různé a body B, D leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC, nebo přímky AB a CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB a CD je opět polopřímka.



Nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou délku a stejný směr. Každá orientovaná úsečka z této množiny se nazývá umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$.

Nulový vektor $\boldsymbol{o}$ je množina všech nulových orientovaných úseček.

Je-li $\boldsymbol{u} = B - A$, potom vektor $A - B$ se nazývá *opačný vektor k vektoru* $\boldsymbol{u}$ a značí se $-\boldsymbol{u}$.

Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

Pro každé tři vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ platí $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Orientované úsečky AB a CD určují týž vektor, jestliže mají úsečky AD a BC stejný střed.

V rovině (prostoru) máme zvolenou kartézskou soustavu souřadnic.

Je-li vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou AB, kde $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$, potom jeho souřadnice jsou čísla $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ a píšeme $\boldsymbol{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Součet vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - B$ je vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = C - A$. V souřadnicích: $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

Násobek nulového vektoru číslem α je nulový vektor.

Násobek nenulového vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$ *číslem* α je vektor $C - A$, přičemž C je bod, pro který platí: $|AC| = |\alpha| \cdot |AB|$ a pro $\alpha \geqq 0$ je bod C na polopřímce AB, pro $\alpha < 0$ je bod C na polopřímce opačné k polopřímce AB. V souřadnicích: $C - A = \alpha\boldsymbol{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.

Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a každá čísla α, β platí:

$$0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}, \quad (-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}, \quad \alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u},$$
$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}, \quad (\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}.$$

Vektor $\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathsf{R}$, se nazývá *lineární kombinace vektorů* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Dva nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou *lineárně závislé*, jestliže $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$ (vektor $\boldsymbol{u}$ je k-násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$).

Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ jsou vektory $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{u}$ lineárně závislé ($\boldsymbol{o} = 0 \cdot \boldsymbol{u}$).

Jestliže vektory nejsou lineárně závislé, nazýváme je *lineárně nezávislé*.

Velikost $|\boldsymbol{u}|$ *vektoru* $\boldsymbol{u}$ je délka kterékoliv orientované úsečky AB, která určuje vektor $\boldsymbol{u}$. Jestliže $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, je $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Jestliže $|\boldsymbol{u}| = 1$, nazývá se vektor $\boldsymbol{u}$ *jednotkový vektor*.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je číslo $\boldsymbol{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ a každé reálné číslo α platí:

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}, \quad (\alpha\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{uv}), \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv},$$
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{uw} + \boldsymbol{uz} + \boldsymbol{vw} + \boldsymbol{vz}.$$

Jsou-li nenulové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ určeny orientovanými úsečkami AB a AC, nazýváme velikost φ konvexního úhlu BAC *úhel vektorů* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Platí $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$. Jsou-li přímky AB a AC kolmé, říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou kolmé.

Skalární součin $\boldsymbol{uv} = 0$ právě tehdy, je-li buď aspoň jeden z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nulový vektor, nebo jsou oba vektory nenulové a kolmé.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Je dán trojúhelník ABC. Označme $\boldsymbol{u} = B-A$, $\boldsymbol{v} = C-B$ a T těžiště trojúhelníku ABC. Vyjádřeme vektor $\boldsymbol{t} = T - A$ pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Řešení. Platí: $C - A = (B - A) + (C - B) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Označme S střed strany AB. Protože $T - S = \frac{1}{3}(C - S) = \frac{1}{3}\big(\frac{1}{2}(C - A) + (C - B)\big) = = \frac{1}{6}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) = \frac{1}{6}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v})$, je

$$\boldsymbol{t} = (S - A) + (T - S) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{6}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}) = \frac{2}{3}\boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}.$$

▷ **PŘÍKLAD 2.** Vypočítejme reálné číslo a tak, aby pro dané vektory $\boldsymbol{u} = (a, 2)$ a $\boldsymbol{v} = (3, -1)$ platilo $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = 5$.

Řešení. Platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (a, 2) + (3, -1) = (3 + a, 1)$ a

$$\begin{gathered}
|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = \sqrt{(3 + a)^2 + 1} = 5,\\
|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = (3 + a)^2 + 1 = 25,\\
a^2 + 6a - 15 = 0,\\
a = -3 + 2\sqrt{6}, \text{ nebo } a = -3 - 2\sqrt{6}.
\end{gathered}$$

Proto $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = 5$ právě tehdy, je-li $a = -3 + 2\sqrt{6}$, nebo $a = -3 - 2\sqrt{6}$.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Úhel vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Vypočtěme skalární součin $(4\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v})$, jestliže $|\boldsymbol{u}| = 5$ a $|\boldsymbol{v}| = 7$.

Řešení. Zřejmě $\boldsymbol{uu} = 25$, $\boldsymbol{vv} = 49$ a $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi = 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$. Potom $(4\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) = 4\boldsymbol{uu} - 2\boldsymbol{vv} + \boldsymbol{uv} - 8\boldsymbol{uv} = -\frac{241}{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Vypočtěme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, $A[-1, -3]$, $B[11, 6]$, $C[-13, 2]$.

Řešení. Velikosti vnitřních úhlů můžeme vyjádřit pomocí velikostí úhlů vektorů stran trojúhelníku ABC:

$$\cos\alpha = \frac{(B-A)(C-A)}{|B-A||C-A|} = -\frac{33}{65} \implies \alpha \doteq 120°31',$$
$$\cos\beta = \frac{(A-B)(C-B)}{|A-B||C-B|} = \frac{27}{5\sqrt{37}} \implies \beta \doteq 27°24',$$
$$\gamma \doteq 32°05'.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o středu S. Dokažte, že platí $(C-A)+(D-A)+(E-A) = 5(S-A)$.

2. Určete vnitřní bod X v trojúhelníku ABC takový, aby
$$X - A = \tfrac{1}{2}(B-A) + \tfrac{1}{6}(C-A) + \tfrac{1}{6}(C-B).$$

3. Určete souřadnice vrcholu D rovnoběžníku $ABCD$, je-li $A[4, 7]$, $B[2, 8]$, $C[-1, 4]$.

4. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{u} = (19, 8)$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a} = (5, 4)$ a $\boldsymbol{b} = (-3, 0)$.

5. Jsou dány body $A[-2, -1]$, $B[2, -4]$ a $C[0, 2]$. Jestliže $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - A$, vypočtěte $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$, $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$.

6. Vypočtěte $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$, je-li $|\boldsymbol{u}| = 13$, $|\boldsymbol{v}| = 19$ a $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| = 24$.

7. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (5, -3)$ a $\boldsymbol{v} = (1, m)$. Určete reálné číslo m tak, aby $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}| = 5$.

8. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (5, 2)$ a $\boldsymbol{v} = (7, -3)$. Určete všechny vektory $\boldsymbol{x}$, pro které platí $\boldsymbol{u}\boldsymbol{x} = 38$ a současně $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = 30$.

9. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (3, 5)$ a $\boldsymbol{v} = (6, 2)$. Určete vektor $\boldsymbol{w}$ kolmý k vektoru $\boldsymbol{v}$, pro který platí $\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} = 4$.

10. Určete všechny vektory $\boldsymbol{v}$, které jsou kolmé k vektoru $\boldsymbol{u} = (5, 12)$ a mají velikost $|\boldsymbol{v}| = \frac{65}{2}$.

11. Vypočtěte $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$, je-li $|\boldsymbol{u}| = 3$, $|\boldsymbol{v}| = 4$ a úhel vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

12. Ukažte, že trojúhelník KLM, $K[4, 3]$, $L[12, 9]$, $M[1, 7]$, je pravoúhlý.

13. Určete reálné číslo t tak, aby vektor $\boldsymbol{w} = (4, 1, t)$ byl lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u} = (2, -1, 3)$ a $\boldsymbol{v} = (0, 1, -5)$.

14. Určete reálné číslo a tak, aby vektory $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 2)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 4, a)$ byly kolmé.

15. Určete všechny vektory $\boldsymbol{u}$ v prostoru, které jsou kolmé k vektorům $\boldsymbol{a} = (1, -1, 3)$ a $\boldsymbol{b} = (2, 0, 5)$.

Výsledky

2. Bod X je těžiště trojúhelníku ABC.

3. $D[1, 3]$

4. $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$

5. $(6, 0)$, $(2, -6)$, 6, $2\sqrt{10}$, -1

6. 22

7. $m = 0$ nebo $m = -6$

8. $(6, 4)$

9. $(-\frac{1}{3}, 1)$

10. $(-30, \frac{25}{2})$, $(30, -\frac{25}{2})$

11. 13

13. $t = -9$

14. $a = -1$

15. $\boldsymbol{u} = (-5t, t, 2t)$, $t \in \mathsf{R}$

9.2. Analytická geometrie v rovině

a) Body a vektory v kartézské soustavě souřadnic v rovině

- souřadnice bodů:

$$A[a_1, a_2], \quad B[b_1, b_2], \quad C[c_1, c_2]$$

- délka úsečky AB (vzdálenost bodů A, B):

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

- souřadnice středu S úsečky AB:

$$S[\tfrac{1}{2}(a_1 + b_1),\, \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2)]$$

- souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC:

$$T[\tfrac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1),\, \tfrac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2)]$$

b) Lineární útvary v rovině

Směrový vektor přímky p je každý nenulový vektor, jehož umístěním je úsečka rovnoběžná s přímkou p.

Směrovým vektorem přímky určené různými body A, B je například vektor $\boldsymbol{u} = B - A$.

Každý bod $X[x, y]$ přímky p určené body A, B lze vyjádřit pomocí t-násobku směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ přímky $p\colon X = A + t\boldsymbol{u}$. Vyjádření v souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \end{aligned} \quad t \in \mathsf{R},$$

se nazývá *parametrické rovnice přímky* p, proměnná t se nazývá parametr.

Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ je rovnice $X = A + t(B - A)$ rovnicí úsečky AB, pro $t \in \langle 0, +\infty)$ je rovnicí polopřímky $\overrightarrow{AB}$, pro $t \in (-\infty, 0\rangle$ je rovnicí polopřímky opačné k polopřímce $\overrightarrow{AB}$.

Obecná rovnice přímky p je rovnice $ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové.

Směrový vektor přímky $p\colon ax + by + c = 0$ je například vektor $\boldsymbol{u} = (-b, a)$. Normálový vektor $\boldsymbol{n}$ přímky p je vektor kolmý ke směrovému vektoru této přímky, například $\boldsymbol{n} = (a, b)$.

Vzdálenost d bodu $P[p_1, p_2]$ od přímky $p\colon\ ax + by + c = 0$ je číslo

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Odchylka přímek $p\colon\ a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ q\colon\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ je úhel $\varphi \in \langle 0°, 90° \rangle$, pro který platí

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\,.$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Určeme vzájemnou polohu přímek $p\colon\ 6x - 8y + 13 = 0$ a $q\colon\ x = 1 + 4t,\ \ y = 2 + 3t,\ \ t \in \mathsf{R}$.

Řešení. Vzájemnou polohu dvou přímek můžeme vyšetřovat dvěma způsoby.

a) Určíme počet společných bodů přímek p, q. Z parametrického vyjádření přímky q dosadíme za x a y do obecné rovnice přímky p:

$$6(1 + 4t) - 8(2 + 3t) + 13 = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici pro neznámý parametr t společného bodu přímek p, q

$$0 \cdot t + 3 = 0.$$

Rovnice nemá řešení, a tedy přímky p, q nemají společný bod, jsou rovnoběžné různé.

b) Vyšetříme, zda směrové vektory jsou lineárně závislé nebo nezávislé. Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u} = (8, 6)$, směrový vektor přímky q je $\boldsymbol{v} = (4, 3)$. Protože $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v}$, jsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineárně závislé a přímky p, q jsou rovnoběžné. Je-li některý bod přímky q i bodem přímky p, jsou přímky totožné. Zjistíme, zda bod $Q[1, 2]$ přímky q (pro $t = 0$) je i bodem přímky p:

$$6 \cdot 1 - 8 \cdot 2 + 13 = 3 \neq 0.$$

Bod Q neleží na přímce p, přímky p, q jsou tedy rovnoběžné a různé.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Vypočítejme hodnotu parametru $a \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky $p\colon\ 2x - ay - 7 = 0$ a $q\colon\ x = 3 + t,\quad y = 4 + (a-1)t,\quad t \in \mathsf{R}$, byly rovnoběžné.

Řešení. Směrové vektory rovnoběžných přímek p, q musí být lineárně závislé. Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u} = (a, 2)$, směrový vektor přímky q je $\boldsymbol{v} = (1, a-1)$. Nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje číslo $k \in \mathsf{R}$ takové, že $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
a &= k \cdot 1,\\
2 &= k(a-1).
\end{aligned}
$$

Z první rovnice dosadíme za k do druhé:

$$2 = a(a-1).$$

Řešíme kvadratickou rovnici

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

Řešením rovnice je $a = -1$ a $a = 2$, pro $a = -1$ je $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$, pro $a = 2$ je $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v}$. Tedy přímky p, q jsou rovnoběžné, jestliže $a = -1$ nebo $a = 2$. Stejně jako v příkladu 1 můžeme ověřit, že pro $a = -1$ i pro $a = 2$ jsou přímky p, q rovnoběžné a různé.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Určeme, zda přímka $p\colon\ x + 2y - 7 = 0$ protíná úsečku AB, kde $A[1, 1]$, $B[5, 3]$.

Řešení. Pro libovolný bod X úsečky AB je $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. V souřadnicích máme

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 4t,\\
y &= 1 + 2t,
\end{aligned}
\qquad t \in \langle 0, 1\rangle.
$$

Z parametrického vyjádření úsečky dosadíme za x a za y do rovnice přímky p:

$$1 + 4t + 2(1 + 2t) - 7 = 0.$$

Po úpravě dostáváme: $8t = 4$, tedy $t = \frac{1}{2}$.
Protože $\frac{1}{2} \in \langle 0, 1\rangle$, má úsečka AB s přímkou p společný bod, jehož souřadnice můžeme vypočítat:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 3,\\
y &= 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

Bod $[3, 2]$ je průsečíkem přímky p a úsečky AB.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Je dán trojúhelník ABC, kde $A[0, 0]$, $B[6, 2]$, $C[1, 4]$. Určeme

a) obecnou rovnici přímky p, na které leží výška v_c trojúhelníku ABC,

b) parametrické rovnice přímky q, na které leží těžnice t_a trojúhelníku ABC.

Řešení.

a) Přímka p je kolmá k přímce AB a prochází bodem C. Vektor

$$\boldsymbol{n} = B - A = (6, 2)$$

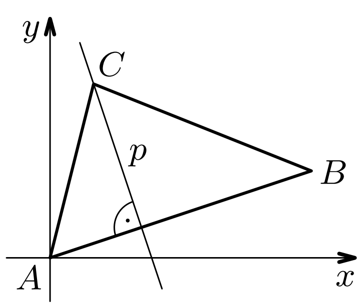
je tedy normálovým vektorem přímky p. Obecná rovnice přímky p je

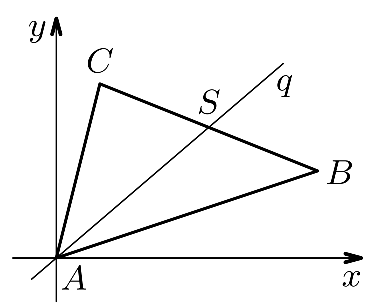
$$6x + 2y + c = 0.$$

Konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu C:

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + c = 0, \quad \text{odtud} \quad c = -14.$$

Obecná rovnice přímky p je $6x + 2y - 14 = 0$ nebo (po vydělení číslem 2) $3x + y - 7 = 0$.





b) Přímka q je určena bodem A a středem S úsečky BC,

$$S[\tfrac{1}{2}(6 + 1), \tfrac{1}{2}(2 + 4)] = [\tfrac{7}{2}, 3].$$

Směrový vektor $\boldsymbol{v}$ přímky q je například $\boldsymbol{v} = S - A = (\frac{7}{2}, 3)$ nebo také vektor $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v} = (7, 6)$.

Parametrické rovnice přímky q jsou $(X = A + t\boldsymbol{w})$:

$$\begin{aligned} x &= 7t, \\ y &= 6t, \end{aligned} \qquad t \in \mathsf{R}.$$

▷ **PŘÍKLAD 5.** Vypočítejme souřadnice bodu Q, který je souměrně sdružený s bodem $R[-1, -3]$ podle přímky $p\colon\ x + y - 2 = 0$.

Řešení. Bodem R vedeme přímku q kolmou k přímce p a určíme průsečík P přímek p, q. Dále určíme souřadnice bodu Q tak, aby bod P byl středem úsečky RQ.

Směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky q je zároveň normálovým vektorem přímky p, tedy například $\boldsymbol{u} = (1, 1)$. Parametrické rovnice přímky q jsou

$$\begin{aligned} x &= -1 + t, \\ y &= -3 + t, \end{aligned} \qquad t \in \mathsf{R}.$$

Vypočítáme průsečík přímek p a q:

$$-1 + t - 3 + t - 2 = 0, \qquad \text{odtud} \qquad t = 3;$$

souřadnice průsečíku P jsou $p_1 = 2$, $p_2 = 0$.

Pro souřadnice bodu $Q[q_1, q_2]$ musí platit:

$$\tfrac{1}{2}(q_1 - 1) = 2, \qquad \tfrac{1}{2}(q_2 - 3) = 0,$$

tedy $Q[5, 3]$.

▷ **PŘÍKLAD 6.** Určeme odchylku φ přímek

$$p\colon\ 2x - 2y + 7 = 0 \qquad \text{a} \qquad q\colon\ x = 1 - 4t, \quad y = 5, \quad t \in \mathsf{R}.$$

Řešení. Abychom mohli použít vzorec pro kosinus odchylky dvou přímek, uvědomme si, že obecná rovnice přímky q je $y - 5 = 0$. Dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Protože odchylka dvou přímek je úhel ostrý nebo nulový nebo pravý, je v našem případě $\varphi = 45°$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Určete hodnotu parametru $p \in \mathsf{R}$ tak, aby body $A[-1, 2]$, $B[3, 0]$, $C[p + 1, 2p - 1]$ ležely na jedné přímce.

2. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby bod $A[1, -2]$ ležel na přímce $mx - (m+1)y - 1 = 0$.

3. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x = 2 + mt$, $y = -1 + t$, $t \in \mathsf{R}$, procházela bodem $A[-4, 1]$.

4. Určete hodnoty parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $x + 4y + m^2 - 5m + 9 = 0$ procházela bodem $A[1, -1]$.

5. Vypočtěte hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby dané body $A[2a+3, 3b-9]$, $B[5a-4, 5b+7]$ byly souměrně sdružené podle osy y.

6. Vypočtěte hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby dané body $A[3a-1, 2b+3]$, $B[2a+3, 3b-1]$ byly souměrně sdružené podle osy x.

7. Vypočtěte hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby dané body $A[2a-3, 3b+1]$, $B[a+1, 2b-3]$ byly souměrně sdružené podle počátku.

8. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $3x - 2y - 1 = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[a, 3]$, $B[4, b]$.

9. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $ax - 2y + c = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[1, 5]$, $B[-3, 3]$.

10. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p\colon\ x = 1 + t,\ \ y = -2 - 2t$, $t \in \mathsf{R}$, a $q\colon\ x + 2y - 1 = 0$.

11. Ověřte, že přímky $x + 2y - 1 = 0$ a AB, kde $A[1, \frac{5}{2}]$, $B[-1, -\frac{3}{2}]$, jsou navzájem kolmé, a vypočtěte souřadnice jejich průsečíku P.

12. Strany trojúhelníku leží na daných přímkách $p\colon\ 5x + 6y - 23 = 0$, $q\colon\ 4x + 3y - 22 = 0$ a $r\colon\ x = 4 + 3t,\ \ y = -4 - 7t,\ \ t \in \mathsf{R}$. Vypočtěte souřadnice vrcholů trojúhelníku.

13. Vypočtěte souřadnice průsečíku úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$, kde $A[1, 3]$, $B[4, 1]$, $C[5, 3]$, $D[4, 5]$.

14. Určete všechny hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky $ax + y + c = 0$ a AB, kde $A[-1, 1]$, $B[1, 0]$, byly navzájem různé rovnoběžky.

15. Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby se přímky $p\colon\ x - 2y + m = 0$ a $q\colon\ 3x + 5y - 2 = 0$ protínaly v 1. kvadrantu.

16. Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby se přímky $p\colon\ 3x - y + m = 0$ a $q\colon\ x = 1 + t,\ y = -1 + 2t,\ t \in \mathsf{R}$, protínaly ve 3. kvadrantu.

17. Určete hodnotu parametru $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka p o rovnici $3x + by + 1 = 0$ a přímka AB, kde $A[-1, 1]$, $B[1, 2]$, byly navzájem kolmé.

18. Určete hodnotu parametru $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka p o rovnici $2x - (b + 2)y + 1 = 0$ a přímka $q\colon\ x = 1 + bt$, $y = -1 - 4t$, $t \in \mathsf{R}$, byly navzájem kolmé.

19. Napište rovnici přímky, která je kolmá k přímce r o rovnici $7x - 2y + 14 = 0$ a prochází průsečíkem přímek $p\colon\ x = 6 + 3t$, $y = 6 + 2t$, $t \in \mathsf{R}$, a $q\colon\ x = 7 + 4s$, $y = 1 - 3s$, $s \in \mathsf{R}$.

20. Napište rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou r o rovnici $2x - 3y + 5 = 0$ a prochází průsečíkem přímek $p\colon\ 9x - 5y - 29 = 0$ a $q\colon\ 7x + 3y + 5 = 0$.

21. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M[1, 4]$ a je kolmá k přímce AB, kde $A[2, 1]$, $B[-3, 2]$.

22. Určete hodnoty parametrů $b \in \mathsf{R}$, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $t \in \mathsf{R}$, a $6x + by + c = 0$ byly totožné.

23. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $ax - 5y + c = 0$ a přímka AB, kde $A[-2, -1]$, $B[3, 1]$, byly totožné.

24. Určete hodnoty parametrů $b \in \mathsf{R}$, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $2x + by + 1 = 0$ a přímka AB, kde $A[-3, c]$, $B[2, -1]$, byly totožné.

25. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $5x + 4y - 27 = 0$ a přímka AB, kde $A[a, 3]$, $B[-1, b]$, byly totožné.

26. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby rovnice

$$(a - 2)x + (2b + 1)y - 1 = 0 \quad \text{a} \quad ax + (2 - 3b)y + 3 = 0$$

byly rovnicemi téže přímky.

27. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky

$$\begin{aligned} p&\colon\ 3x + 2y - 1 = 0,\\ q&\colon\ x = -1 + t,\quad y = -3 + t,\quad t \in \mathsf{R},\\ r&\colon\ 4x - 3y + m = 0 \end{aligned}$$

měly právě jeden společný bod.

28. Určete hodnotu parametru $c \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky

$$p\colon\ x + 2y - 1 = 0,\qquad q\colon\ 2x + y + 1 = 0,\qquad r\colon\ x + y + c = 0$$

měly právě jeden společný bod.

29. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky

$$\begin{aligned} p&\colon\ x = -1 + t,\quad y = 3 - t,\quad t \in \mathsf{R},\\ q&\colon\ x = 3 + s,\quad y = 7 + 3s,\quad s \in \mathsf{R},\\ r&\colon\ x + 3y + m = 0 \end{aligned}$$

měly právě jeden společný bod.

30. Zjistěte, zda přímka o rovnici $3x + y + 11 = 0$ a úsečka $x = 1 + 3t$, $y = -1 + 4t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, mají aspoň jeden společný bod.

31. Zjistěte, zda přímka $2x - 3y - 3 = 0$ a úsečka $x = -2 + 5t$, $y = 2 - t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice.

32. Zjistěte, zda přímka $x + y - 6 = 0$ a polopřímka $x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $t \in \langle 0, \infty)$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice.

33. Zjistěte, zda úsečky AB a CD, kde $A[1, -2]$, $B[3, 2]$, $C[6, 3]$, $D[5, 2]$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice.

34. Zjistěte, zda polopřímky $x = 1 + t$, $y = -2 + 3t$, $t \in \langle 0, \infty)$, a $x = 2 + s$, $y = -1 + 5s$, $s \in \langle 0, \infty)$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice.

35. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[-1, 1]$, $B[3, 2]$, $C[2, 5]$. Určete rovnici přímky, na níž leží výška v_c.

36. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[1, -1]$, $B[4, 2]$, $C[2, -6]$. Určete rovnici přímky, na níž leží těžnice t_a.

37. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[1, -4]$, $B[4, 5]$, $C[-3, 5]$. Určete souřadnice průsečíku P os stran tohoto trojúhelníku.

38. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[-3, 8]$, $B[0, 2]$, $C[3, 6]$. Určete souřadnice průsečíku P výšek tohoto trojúhelníku.

39. Čtverec $ABCD$ má střed $S[-3, -2]$ a vrchol $A[1, -3]$. Určete souřadnice ostatních vrcholů čtverce.

40. Rozhodněte, zda čtyřúhelník $ABCD$, kde $A[1, 3]$, $B[-1, 9]$, $C[-2, -4]$, $D[0, -10]$, je rovnoběžník.

41. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, kde $A[-3, 8]$, $B[1, 0]$, je x-ová souřadnice vrcholu C rovna 3. Určete jeho y-ovou souřadnici.

42. Určete souřadnice vrcholu C rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, kde $A[-4, 3]$, $B[2, 5]$, jestliže vrchol C leží

a) na ose x, b) na ose y.

43. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, kde $A[2, -1]$, $B[4, 3]$, leží vrchol C na přímce $x + y - 1 = 0$. Určete souřadnice vrcholu C.

44. Najděte obraz A' bodu $A[4, 0]$ v osové souměrnosti s osou $p\colon$ $x - 2y + 1 = 0$.

45. Najděte obraz A' bodu $A[1, 2]$ v osové souměrnosti s osou $p\colon$ $x = -1 + 3t$, $y = -2 + t$, $t \in \mathsf{R}$.

46. Určete vzdálenost d bodu $B[1, -3]$ od kolmého průmětu bodu $A[3, -2]$ na přímku $p\colon\ 2x + y + 1 = 0$.

47. Určete vzdálenost d bodu $A[0, 2]$ od přímky BC, kde $B[9, 5]$, $C[1, -1]$.

48. Určete vzdálenost d rovnoběžek

$$p\colon\ 4x - 4y + 3 = 0 \quad \text{a} \quad q\colon\ x - y - 7 = 0.$$

49. Určete vzdálenost d rovnoběžek

$$p\colon\ x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad t \in \mathsf{R}, \quad \text{a} \quad q\colon\ x - \tfrac{1}{3}y + 1 = 0.$$

50. Určete vzdálenost d rovnoběžek $p\colon\ x = 2t$, $y = -2 + t$, $t \in \mathsf{R}$, a $q\colon\ x = -1 + 2s$, $y = 1 + s$, $s \in \mathsf{R}$.

51. Na ose x určete všechny body X, jejichž vzdálenost od bodu $A[2, 3]$ je rovna 5.

52. Na ose y určete všechny body Y, jejichž vzdálenost od bodu $A[4, 5]$ je rovna 5.

53. Na přímce $p\colon\ x = 4 + t,\ \ y = 3 + 2t,\ \ t \in \mathsf{R},$ určete bod C, který má stejnou vzdálenost od bodů $A[1, 2]$ a $B[-1, 0]$.

54. Na přímce $p\colon\ 3x - 4y - 3 = 0$ určete bod C, který má stejnou vzdálenost od bodů $A[4, 4]$ a $B[7, 1]$.

55. Na přímce $p\colon\ x - 2y + 1 = 0$ určete všechny body, které mají od bodu $A[1, 1]$ vzdálenost $d = \sqrt{5}$.

56. Vypočtěte vzdálenost bodu $X[1, 3]$ od středu úsečky $x = 2 - 6t$, $y = 1 - 4t,\ \ t \in \langle 0, 1\rangle$.

57. Určete hodnoty parametru a tak, aby těžnice t_a trojúhelníku ABC, kde $A[a, 3]$, $B[4, -1]$, $C[-2, -3]$, měla délku $\sqrt{26}$.

58. Určete velikost výšky lichoběžníku $ABCD$, kde $A[2, 1]$, $B[8, 5]$, $C[5, 5]$, $D[2, 3]$.

59. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[1, 2]$, $B[3, 5]$, $C[3, -8]$. Určete velikost výšky v_c.

60. Je dán trojúhelník ABC, kde $A[2, 3]$, $B[6, -1]$, $C[5, 3]$. Určete velikost úhlu α.

61. Ukažte, že trojúhelník PQR, kde $P[2, 1]$, $Q[4, 2]$, $R[0, 5]$, je pravoúhlý, a určete, u kterého vrcholu je pravý úhel.

62. Určete odchylku φ přímek $p\colon\ \sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$ a $q\colon\ y = \sqrt{3}\,x$.

63. Určete odchylku φ přímek AB a CD, kde $A[2, 4]$, $B[4, 5]$, $C[3, 4]$, $D[4, 7]$.

64. Určete odchylku φ daných přímek $p\colon\ x = 1 + 2t,\ y = 3 + t,\ t \in \mathsf{R}$, a $q\colon\ 3x - y + 2 = 0$.

65. Určete rovnici osy úhlu AVB, kde $V[1, 2]$, $A[4, 6]$, $B[6, 2]$.

66. Určete rovnice os souměrnosti daných různoběžek $p\colon\ 2x + y - 1 = 0$ a $q\colon\ x + 2y - 3 = 0$.

67. Určete rovnice os souměrnosti různoběžek $p\colon\ x + 3y + 5 = 0$ a $q\colon\ x = 1 + t,\ \ y = -1 - 3t,\ \ t \in \mathsf{R}$.

68. Určete rovnice os souměrnosti daných různoběžek $p\colon\ x = 1 + 2t$, $y = -1 + 3t,\ \ t \in \mathsf{R}$, a $q\colon\ x = 2 + 3s,\ \ y = 2s,\ \ s \in \mathsf{R}$.

69. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p = AB$, $A[-1, 1]$, $B[2, -1]$, a $q\colon\ 3x - 2y + 1 = 0$.

70. Určete hodnoty parametrů $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka o rovnici $x + 4y - 14 = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[1, -1]$, $B[a, b]$.

Výsledky

1. $p = \frac{4}{5}$

2. $m = -\frac{1}{3}$

3. $m = -3$

4. $m = 2 \vee m = 3$

5. $a = \frac{1}{7} \wedge b = -8$

6. $a = 4 \wedge b = -\frac{2}{5}$

7. $a = \frac{2}{3} \wedge b = \frac{2}{5}$

8. $a = -2 \wedge b = -1$

9. $a = -4 \wedge c = 4$

10. Přímky p a q jsou různoběžné (nikoliv kolmé).

11. $P[0, \frac{1}{2}]$

12. $[7, -2]$, $[-2, 10]$, $[1, 3]$

13. $[4, 3]$

14. $a = \frac{1}{2} \wedge c \neq -\frac{1}{2}$

15. $m \in (-\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$

16. $m \in (-3, \infty)$

17. $b = \frac{3}{2}$

18. $b = 2 \vee b = -4$

19. $2x + 7y - 34 = 0$

20. $2x - 3y - 14 = 0$

21. $5x - y - 1 = 0$

22. $b = 2 \wedge c = -10$

23. $a = 2 \wedge c = -1$

24. $b = 5 \wedge c = 1$

25. $a = 3 \wedge b = 8$

26. $a = \frac{3}{2} \wedge b = -\frac{5}{3}$

27. $m = -7$

28. $c = 0$

29. $m = -4$

30. Ne.

31. Ano, $[3, 1]$.

32. Ano, $[5, 1]$.

33. Ne.

34. Ano, $[3, 4]$.

35. $4x + y - 13 = 0$

36. $x + 2y + 1 = 0$

37. $P[\frac{1}{2}, \frac{7}{6}]$

38. $P[1, 5]$

39. $B[-2, 2]$, $C[-7, -1]$, $D[-4, -6]$
40. Ano.
41. $y = 6$
42. a) $C[\frac{1}{3}, 0]$, b) $C[0, 1]$
43. $C[-3, 4]$
44. $A'[2, 4]$
45. $A'[3, -4]$
46. $d = 0$
47. $d = 3$
48. $d = \frac{31}{8}\sqrt{2}$
49. $d = \frac{4}{5}\sqrt{10}$
50. $d = \frac{7}{5}\sqrt{5}$
51. $X_1[6, 0]$, $X_2[-2, 0]$
52. $Y_1[0, 8]$, $Y_2[0, 2]$
53. $C[2, -1]$
54. $C[9, 6]$
55. $[-1, 0]$ a $[3, 2]$
56. $2\sqrt{5}$
57. $a = 2 \vee a = 0$
58. $\frac{6}{13}\sqrt{13}$
59. $2\sqrt{13}$
60. $\frac{1}{4}\pi$
61. Pravý úhel je u vrcholu P.
62. $\varphi = \frac{1}{3}\pi$
63. $\varphi = \frac{1}{4}\pi$
64. $\varphi = \frac{1}{4}\pi$
65. $x - 2y + 3 = 0$
66. $x - y + 2 = 0$, $3x + 3y - 4 = 0$
67. $2x - 2y - 7 = 0$, $4x + 4y + 3 = 0$
68. $x - y - \frac{9}{5} = 0$, $x + y - 1 = 0$
69. Přímky p a q jsou navzájem kolmé různoběžky.
70. $a = 3 \wedge b = 7$

9.3. Kuželosečky

a) Kružnice

Rovnice kružnice o středu $S[m, n]$ a poloměru r – středový tvar rovnice:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Rovnice tečny kružnice v jejím bodě $T[x_0, y_0]$:

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2.$$

b) Elipsa

Rovnice elipsy o středu $S[m, n]$, velikostech poloos a (hlavní poloosa) a b (vedlejší poloosa) – středový tvar rovnice:

– Je-li hlavní osa elipsy rovnoběžná s osou x, má elipsa rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

– Je-li hlavní osa elipsy rovnoběžná s osou y, má elipsa rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Číslo $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$ nazýváme excentricitou elipsy. Excentricita je vzdálenost ohniska elipsy od středu elipsy.

Rovnice tečny elipsy v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ (hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x):

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$$

Obdobně v případě hlavní osy rovnoběžné s osou y.

c) Hyperbola

Rovnice hyperboly o středu $S[m, n]$, velikostech poloos a (hlavní poloosa) a b (vedlejší poloosa) – středový tvar rovnice:

– Je-li hlavní osa hyperboly rovnoběžná s osou x, má hyperbola rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

– Je-li hlavní osa hyperboly rovnoběžná s osou y, má hyperbola rovnici

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Číslo $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme excentricitou hyperboly. Excentricita je vzdálenost ohniska hyperboly od středu hyperboly.

Asymptoty hyperboly jsou přímky, které procházejí středem hyperboly a mají směrnice $k = b/a$, resp. $k = -b/a$ (v případě hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou x, analogicky v případě hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou y).

- Rovnice asymptot hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou x jsou

$$a_1\colon\ \frac{x-m}{a} + \frac{y-n}{b} = 0, \qquad a_2\colon\ \frac{x-m}{a} - \frac{y-n}{b} = 0.$$

- Rovnice asymptot hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou y jsou

$$a_1\colon\ -\frac{x-m}{b} + \frac{y-n}{a} = 0, \qquad a_2\colon\ \frac{x-m}{b} + \frac{y-n}{a} = 0.$$

Rovnice tečny hyperboly v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ (hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x):

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$$

Rovnoosá hyperbola s asymptotami v osách souřadnic má rovnici

$$xy = k, \quad k \neq 0.$$

Rovnoosá hyperbola s asymptotami rovnoběžnými s osami souřadnic a středem v bodě $S[m, n]$ má rovnici

$$(x-m)(y-n) = k, \quad k \neq 0.$$

Rovnice tečny této rovnoosé hyperboly v jejím bodě $T[x_0, y_0]$:

$$\frac{1}{2}\big((y-n)(x_0-m) + (x-m)(y_0-n)\big) = k.$$

d) Parabola

Vrcholová rovnice paraboly s osou rovnoběžnou s osou y, vrcholem $V[m, n]$ a parametrem p, $p > 0$:

$$2p(y - n) = (x - m)^2.$$

Číslo p je vzdálenost ohniska F paraboly od řídicí přímky d paraboly.

Vrcholová rovnice paraboly s osou rovnoběžnou s osou x, vrcholem $V[m, n]$ a parametrem p, $p > 0$, je

$$2p(x - m) = (y - n)^2.$$

– Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y, je tečna paraboly v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ přímka o rovnici

$$p(y - n) + p(y_0 - n) = (x - m)(x_0 - m).$$

– Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x, je tečna paraboly v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ přímka o rovnici

$$p(x - m) + p(x_0 - m) = (y - n)(y_0 - n).$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** V rovině jsou dány kružnice k_1 a k_2 o rovnicích

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 + 18x + 4y + 21 = 0.$$

Vyšetřeme jejich vzájemnou polohu.

Řešení. Rovnice kružnic upravíme na středový tvar

$$k_1\colon\ (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25, \qquad k_2\colon\ (x + 9)^2 + (y + 2)^2 = 64.$$

Bod $S_1[-3, 5]$ je středem kružnice k_1 a bod $S_2[-9, -2]$ je středem kružnice k_2. Protože $|S_1S_2| = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$ a $r_1 = 5$, $r_2 = 8$, je

$$|r_1 - r_2| = 3 < \sqrt{85} < r_1 + r_2 = 13.$$

Kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Určeme reálné číslo c tak, aby přímka $x - y + c = 0$ byla tečnou kružnice o rovnici $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 45 = 0$.

Řešení. Přímka je tečnou kružnice právě tehdy, když má s kružnicí právě jeden společný bod. To nastane právě tehdy, když soustava rovnic

$$x - y + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 6x + 4y - 45 = 0$$

má právě jedno řešení. Vypočítáme-li z první rovnice neznámou y a dosadíme do druhé rovnice, dostaneme

$$x^2 + (x + c)^2 - 6x + 4(x + c) - 45 = 0,$$

po úpravě

$$2x^2 + x(2c - 2) + (c^2 + 4c - 45) = 0.$$

Tato kvadratická rovnice s neznámou x má právě jedno řešení právě tehdy, když pro její diskriminant platí

$$D = 4(c - 1)^2 - 8(c^2 + 4c - 45) = 0.$$

Poslední rovnice má dva reálné různé kořeny $c_1 = -5 + 2\sqrt{29}$ a $c_2 = -5 - 2\sqrt{29}$, kterým odpovídají dvě tečny.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Napišme rovnici kružnice, která prochází body $A[3, 5]$ a $B[2, 6]$ a jejíž střed leží na přímce p o rovnici $2x + 3y - 4 = 0$.

Řešení. Ukážeme dva způsoby řešení.

I. První bude „kopírovat“ syntetický postup řešení. Střed S kružnice k leží na ose o úsečky AB. Přímka o prochází středem O úsečky AB, $O = \frac{1}{2}(A + B) = [\frac{5}{2}, \frac{11}{2}]$. Vektor $B - A = (-1, 1)$ je kolmý k přímce o. Rovnice přímky o je $-x + y - 3 = 0$.

Bod S je průsečíkem přímek o a p. Jeho souřadnice dostaneme řešením soustavy rovnic

$$2x + 3y - 4 = 0, \qquad -x + y - 3 = 0.$$

Středem kružnice k je bod $S[-1, 2]$. Pro její poloměr r platí $r = |AS| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Středový tvar rovnice kružnice k je $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

II. Označme $S[m, n]$ střed hledané kružnice k. Bod S leží na přímce p, proto platí $2m + 3n - 4 = 0$. Na kružnici k leží bod A, proto $r^2 = |AS|^2 = (m-3)^2 + (n-5)^2$, a bod B, proto $r^2 = |BS|^2 = (m-2)^2 + (n-6)^2$. Odtud dostaneme druhou podmínku pro souřadnice středu S: $m - n + 3 = 0$. Středem kružnice k je bod $S[-1, 2]$, poloměr je $r = |AS| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Středový tvar rovnice kružnice k je $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

▷ **PŘÍKLAD 4.** Napišme rovnici kružnice, která je vepsána kosočtverci $ABCD$, kde $A[1, -2]$, $B[8, -3]$ a $C[9, 4]$.

Řešení. Středem hledané kružnice je střed S kosočtverce. Bod S je středem úsečky AC, $S[5, 1]$. Vzdálenost bodu S od strany kosočtverce je poloměr kružnice. Např. strana AB je přímka o rovnici $x + 7y + 13 = 0$.
Proto $r = \dfrac{|5 + 7 + 13|}{\sqrt{1 + 49}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Rovnice hledané kružnice je $(x-5)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 5.** U elipsy o rovnici $16x^2 + 25y^2 - 64x - 200y + 64 = 0$ určeme souřadnice středu, délky poloos a délku tětivy, kterou daná elipsa vytíná na přímce $y = 1$.

Řešení. Rovnici elipsy upravíme do středového tvaru

$$\begin{aligned} 16(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 8y) + 64 &= 0, \\ 16(x-2)^2 - 64 + 25(y-4)^2 - 400 + 64 &= 0, \\ \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Bod $S[2, 4]$ je středem elipsy, $a = 5$, $b = 4$, hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x.

Průsečíky elipsy s přímkou $y = 1$ určíme dosazením $y = 1$ do rovnice elipsy. Dostaneme

$$\begin{aligned} 16x^2 - 64x + 25 - 200 + 64 &= 0, \\ 16x^2 - 64x - 111 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud $x = 2 + \frac{5}{4}\sqrt{7}$ nebo $x = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{7}$. Krajní body tětivy jsou $[2 + \frac{5}{4}\sqrt{7}, 1]$ a $[2 - \frac{5}{4}\sqrt{7}, 1]$. Délka tětivy je $\frac{5}{2}\sqrt{7}$.

▷ **PŘÍKLAD 6.** Je dána elipsa o rovnici $9x^2 + 16y^2 = 144$. Napišme rovnici tečny této elipsy, která má směrnici $k = -1$.

Řešení. Budou existovat dvě tečny elipsy dané vlastnosti. Jejich rovnice budou $y = -x + q$. Přímka je tečnou elipsy právě tehdy, když má s elipsou společný právě jeden bod. To nastane právě tehdy, když soustava rovnic

$$x + y - q = 0, \qquad 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$

má právě jedno řešení. To nastane právě tehdy, když $q = 5$ nebo $q = -5$. Rovnice tečen jsou $y = -x + 5$ a $y = -x - 5$.

▷ **PŘÍKLAD 7.** Napišme souřadnice vrcholů čtverce $MNPQ$ vepsaného do elipsy o rovnici $x^2 + 4y^2 = 20$. Vypočítejme obsah tohoto čtverce.

Řešení. Vrcholy čtverce $MNPQ$ leží na elipse. Vzhledem k souměrnosti elipsy podle jejích os a poloze elipsy vzhledem k osám souřadnic budou body M, N, P, Q ležet na přímkách $y = x$ a $y = -x$. Odtud

$$y = x \wedge x^2 + 4y^2 = 20 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2.$$

Na přímce $y = x$ jsou body $M[2, 2]$ a $P[-2, -2]$, body $N[-2, 2]$ a $Q[2, -2]$ na přímce $y = -x$ jsou s nimi souměrné podle os elipsy. Obsah čtverce je 16.

▷ **PŘÍKLAD 8.** Napišme rovnice asymptot dané hyperboly o rovnici $x^2 - 2y^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ a vypočítejme obsah trojúhelníku, jehož dvě strany leží na jejích asymptotách a zbývající strana na tečně hyperboly v jejím hlavním vrcholu.

Řešení. Daná hyperbola má střed $S[2, 2]$ a poloosy $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$. Rovnici hyperboly napíšeme ve středovém tvaru

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{8} = 1.$$

Její asymptoty mají tedy rovnice

$$a_1\colon\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-2}{2\sqrt{2}} = 0, \quad \text{tj.} \quad x - \sqrt{2}y - 2 + 2\sqrt{2} = 0,$$

$$a_2\colon\ \frac{x-2}{4} + \frac{y-2}{2\sqrt{2}} = 0, \quad \text{tj.} \quad x + \sqrt{2}y - 2 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Obsah trojúhelníku je $S = ab = 8\sqrt{2}$.

▷ **PŘÍKLAD 9.** Určeme střed a velikosti poloos rovnoosé hyperboly $xy - 4x + 6y - 12 = 0$.

Řešení. Zadanou rovnici přepíšeme do tvaru

$$(x+6)(y-4) + 24 - 12 = 0, \quad \text{po úpravě} \quad (x+6)(y-4) = -12.$$

Má-li rovnoosá hyperbola rovnici $xy = k$ nebo $(x-m)(y-n) = k$, je délka její hlavní poloosy rovna $a = \sqrt{2|k|}$. Naopak, je-li a délka hlavní poloosy hyperboly, je $k = \pm\frac{1}{2}a^2$.

V našem případě je $a = \sqrt{2 \cdot |-12|} = 2\sqrt{6}$.

▷ **PŘÍKLAD 10.** Napišme rovnici paraboly, která má osu o rovnici $x + 1 = 0$, dotýká se přímky o rovnici $y + 9 = 0$ a prochází bodem $M[-3, -5]$.

Řešení. Protože osa paraboly je rovnoběžná s osou y a přímka o rovnici $y + 9 = 0$ je tečnou ve vrcholu paraboly, je vrcholová rovnice paraboly ve tvaru

$$2p(y+9) = (x+1)^2.$$

Bod $M[-3, -5]$ leží na parabole, a tedy

$$2p(-5+9) = (-3+1)^2 \implies p = \tfrac{1}{2}.$$

Rovnice paraboly je $y + 9 = (x+1)^2$.

▷ **PŘÍKLAD 11.** Určeme takový bod paraboly o rovnici $x^2 = 12y$, který má nejmenší vzdálenost od přímky o rovnici $y - x + 5 = 0$.

Řešení. Hledaný bod je bodem dotyku tečny paraboly, která je rovnoběžná se zadanou přímkou. Tato tečna má rovnici $y - x + q = 0$. K nalezení společného bodu tečny a paraboly budeme řešit soustavu rovnic

$$y - x + q = 0, \qquad x^2 = 12y$$

pro neznámé x, y s parametrem q. Ten určíme tak, aby soustava měla jediné řešení. Dostaneme $q = 3$. Odtud pak $x = 6$ a $y = 3$. Hledaným bodem je bod $M[6, 3]$.

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Napište rovnici kružnice opsané obdélníku $ABCD$, kde $A[2, -3]$, $C[8, 3]$.
2. Vypočítejte poměr vzdáleností nejbližšího a nejvzdálenějšího bodu kružnice o rovnici $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 75 = 0$ od počátku soustavy souřadnic.
3. Napište rovnici kružnice vepsané čtverci $ABCD$, kde $A[2, 1]$, $C[4, 11]$.
4. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, kde $A[1, 5]$, $B[9, 1]$ a $C[1, 1]$.
5. Kružnice k má střed $S[-1, 3]$ a přímka t o rovnici $x-2y+2 = 0$ je její tečnou. Napište rovnici kružnice k a napište souřadnice bodu dotyku T tečny t.
6. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A[8, 9]$ a dotýká se obou os souřadnic.
7. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A[2, 1]$ a dotýká se osy y v bodě $B[0, 3]$.
8. Určete vzdálenost d bodu $M[-3, -8]$ od kružnice o rovnici $x^2 - 10x + y^2 - 14y - 151 = 0$.
9. Vypočtěte délku d tětivy, kterou vytíná kružnice $x^2 + y^2 = 25$ na přímce o rovnici $x - 7y + 25 = 0$.
10. Určete počet společných bodů elipsy o rovnici $x^2 + 9y^2 = 9$ a kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $r = 2$.
11. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABO, kde $A[6, 0]$, $B[0, 12]$, $O[0, 0]$.
12. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[3, 1]$ a $B[4, 8]$ a má střed na ose y.
13. Napište rovnici kružnice, která má průměr AB, kde $A[-2, -1]$, $B[4, 3]$.
14. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[5, 4]$, $B[7, 0]$ a má střed na ose x.

15. Určete střed S a poloměr r kružnice $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$.

16. Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic a osy souřadnic protíná v bodech $[3, 0]$ a $[0, 4]$.

17. Napište rovnici kružnice vepsané kosočtverci $OABC$, kde $O[0, 0]$, $A[5, 0]$, $C[3, 4]$.

18. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek o rovnicích $x = 18$ a $x = -8$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

19. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[-1, 0]$ a $B[7, 0]$ a jejíž střed leží na přímce o rovnici $2x - y - 4 = 0$.

20. Napište rovnici největší kružnice, která má vnitřní dotyk s elipsou o rovnici $x^2 - 8x + 4y^2 = 0$, dotýká se osy x a leží v polorovině $y \geqq 0$.

21. Vypočtěte vzdálenost d bodu $M[3, 4]$ od středu elipsy o rovnici $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y - 31 = 0$.

22. Vypočtěte délku d tětivy, kterou na elipse o rovnici $x^2 + 2y^2 = 27$ vytíná osa 1. a 3. kvadrantu.

23. Vrcholy čtverce leží na elipse o rovnici $2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 102 = 0$. Vypočtěte délku a strany tohoto čtverce.

24. Napište středový tvar rovnice elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic, která prochází body $M[1, 3]$ a $N[3, 2]$.

25. Napište středový tvar rovnice elipsy, která má střed v počátku soustavy souřadnic, excentricitu $e = 2\sqrt{2}$ a prochází bodem $M[2, \sqrt{6}]$.

26. Vypočtěte délku d tětivy, kterou určují průsečíky přímky o rovnici $x + 2y - 6 = 0$ s elipsou $x^2 + 2y^2 - 18 = 0$.

27. Určete všechna reálná čísla q, pro která je přímka $x - y + q = 0$ sečnou elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$.

28. Elipsa se dotýká osy x v bodě $M[-4, 0]$ a osy y v bodě $N[0, 3]$. Napište rovnici elipsy, víte-li, že její osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic.

29. Osy elipsy jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Elipsa se dotýká osy x v bodě $M[4, 0]$ a protíná osu y v bodech $N[0, 3]$ a $P[0, 9]$. Napište středovou rovnici elipsy.

30. Najděte společné body kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = 5$ a elipsy o rovnici $x^2 + 4y^2 = 17$. Napište rovnice tečen obou křivek, které procházejí jejich společným bodem ležícím v 1. kvadrantu.

31. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek o rovnicích $y = 8$ a $y = -2$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

32. Napište rovnici kružnice o největším poloměru vepsané do elipsy o rovnici $2(x-3)^2 + 5(y+1)^2 = 10$.

33. Napište rovnici elipsy vepsané do obdélníku ležícího v 1. kvadrantu, jehož jedním vrcholem je počátek soustavy souřadnic, jehož strany leží na osách souřadnic a jejich délky jsou 10 (strana na ose x) a 8.

34. Určete střed S a délky poloos a, b elipsy o rovnici

$$x^2 + 4x + 5y^2 - 20y + 20 = 0.$$

35. Určete střed S a délky poloos a, b elipsy o rovnici

$$x^2 - 6x + 3y^2 + 18y + 27 = 0.$$

36. Vypočtěte souřadnice ohnisek E, F elipsy o rovnici

$$9x^2 + 36x + 25y^2 - 150y + 36 = 0.$$

37. Vypočtěte obsah trojúhelníku, jehož strany leží na asymptotách hyperboly $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ a přímce $x - 6 = 0$.

38. Napište rovnice asymptot hyperboly

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0.$$

39. Rovnoosá hyperbola, jejíž asymptoty jsou osy souřadnic, má tečnu o rovnici $3x - 4y - 12 = 0$. Napište rovnici hyperboly.

40. Napište středový tvar rovnice hyperboly, která prochází bodem $M[9, 2\sqrt{5}]$, má asymptotu o rovnici $2x - 3y = 0$ a má hlavní osu v ose x.

41. Vypočtěte odchylku asymptot hyperboly $16x^2 - 25y^2 = 400$.

42. Je rovnice $x^2 - 2y^2 - 4x - 16y - 28 = 0$ analytickým vyjádřením hyperboly? Načrtněte množinu bodů v rovině, kterou rovnice popisuje.

43. Hyperbola má osy v osách souřadnic, tečnu o rovnici $x - y - 3 = 0$ a asymptotu o rovnici $x - 2y = 0$. Napište středový tvar rovnice hyperboly.

44. Napište rovnici hyperboly, která se dotýká přímky $5x - 6y - 8 = 0$ a jejíž asymptoty mají rovnice $x - 2y = 0$ a $x + 2y = 0$.

45. Napište rovnici hyperboly, je-li délka její hlavní poloosy $a = 12$ a její ohniska jsou body $E[-13, 2]$ a $F[13, 2]$.

46. Napište rovnici hyperboly s vrcholy $A[-5, 2]$ a $B[3, 2]$ a ohniskem $E[4, 2]$.

47. Napište rovnici hyperboly, která má střed v počátku soustavy souřadnic, jejíž hlavní osou je osa x, délka hlavní poloosy $a = 5$ a excentricita $e = 7$.

48. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejímiž osami jsou přímky $y = x$ a $y = -x$ a která má délku hlavní poloosy $a = 2\sqrt{2}$.

49. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, která má střed v počátku soustavy souřadnic, jejíž hlavní osou je osa x a tečnou je přímka o rovnici $y = 2x + 6$.

50. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, která má střed v počátku soustavy souřadnic, jejíž hlavní osou je osa y a tečnou je přímka o rovnici $x - 2y - 9 = 0$.

51. Vypočtěte souřadnice středu S a délky poloos a, b hyperboly, která má rovnici $x^2 + 4x - 3y^2 + 6y + 28 = 0$.

52. Určete souřadnice vrcholu, parametr a načrtněte parabolu o rovnici $x^2 - 4x - 4y + 20 = 0$.

53. Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y a prochází body $A[0, -6]$, $B[-4, 10]$, $C[-3, 0]$.

54. Určete reálné číslo k tak, aby se přímka o rovnici $x = ky + 2$ dotýkala paraboly $x^2 = 4y$.

55. Určete souřadnice ohniska a parametr paraboly, která má rovnici $y^2 - 8y - 12x - 8 = 0$.

56. Napište vrcholovou rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V[1, -3]$, prochází bodem $L[5, -9]$ a má osu rovnoběžnou s některou z os souřadnic.

57. Napište vrcholovou rovnici paraboly, která má ohnisko v bodě $F[2, 0]$ a řídicí přímku o rovnici $y = 2$.

58. Napište rovnici tečny paraboly $2x^2 - 9y = 0$, která je rovnoběžná s přímkou o rovnici $8x + 3y + 12 = 0$.

59. Napište rovnici tečny paraboly o rovnici $x^2 - 6x - 8y - 7 = 0$ v jejím bodě $T[7, ?]$.

60. Vypočtěte délku d tětivy, kterou na parabole $x^2 = 8y$ vytíná přímka $x - y + 2 = 0$.

61. Určete reálná čísla a, b tak, aby rovnicí $x^2 + bx - y + a = 0$ byla určena parabola s vrcholem $V[2, -3]$.

62. Napište rovnici paraboly s vrcholem $V[-2, 1]$, která prochází bodem $M[2, -3]$ a má osu rovnoběžnou s osou x.

63. Vypočtěte souřadnice vrcholu V a ohniska F paraboly o rovnici $y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.

64. Vyšetřete, zda přímka o rovnicích $x = t + 1$, $y = -2t$, $t \in \mathsf{R}$, je tečnou paraboly o rovnici $x^2 + 4y - 8 = 0$.

65. Určete reálné číslo m tak, aby přímka o rovnici $2x - y + 4 = 0$ byla tečnou paraboly o rovnici $x^2 - mx + y = 0$.

66. Určete reálné číslo b tak, aby přímka o rovnici $x - 2y + 2b = 0$ měla s parabolou o rovnici $y^2 = 5(x + 1)$ společný právě jeden bod.

67. Určete reálné číslo a tak, aby přímka o rovnici $x + ay + 1 = 0$ byla tečnou paraboly o rovnici $y^2 + 2y = x$.

68. Vypočtěte souřadnice vrcholu V a ohniska F a parametr p paraboly o rovnici $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$.

Výsledky

1. $(x - 5)^2 + y^2 = 18$

2. $1 : 3$

3. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 13$

4. $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 20$

5. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$, $T[0, 1]$

6. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ nebo $(x-29)^2+(y-29)^2=841$

7. $x^2-4x+y^2-6y+9=0$

8. $d=2$

9. $d=5\sqrt{2}$

10. 4

11. $x^2-6x+y^2-12y=0$

12. $x^2+y^2-10y=0$

13. $x^2+y^2-2x-2y=11$

14. $x^2-4x+y^2=21$

15. $S[-4,3]$, $r=4$

16. $x^2-3x+y^2-4y=0$

17. $x^2-8x+y^2-4y+16=0$

18. $x^2-10x+y^2-24y=0$ nebo $x^2-10x+y^2+24y=0$

19. $x^2-6x+y^2-4y-7=0$

20. $x^2-8x+y^2-2y+16=0$

21. $d=2\sqrt{10}$

22. $d=6\sqrt{2}$

23. $a=12$

24. $5x^2+8y^2=77$

25. $x^2+2y^2=16$

26. $d=2\sqrt{5}$

27. $q\in(-5,5)$

28. $9(x+4)^2+16(y-3)^2=144$

29. $108(x-4)^2+64(y-6)^2=64\cdot 36$

30. $M_1[1,2]$, $M_2[-1,2]$, $M_3[1,-2]$, $M_4[-1,-2]$,
$x+2y-5=0$, $x+8y-17=0$

31. $x^2-8x+y^2-6y=0$ nebo $x^2+8x+y^2-6y=0$

32. $x^2-6x+y^2+2y+8=0$

33. $16x^2-160x+25y^2-200y+400=0$

34. $S[-2,2]$, $a=2$, $b=\frac{2}{5}\sqrt{5}$

35. $S[3,-3]$, $a=3$, $b=\sqrt{3}$

36. $E[2,3]$, $F[-6,3]$

37. 54

38. $2x-3y+5=0$, $2x+3y-13=0$

39. $xy+3=0$

40. $4x^2-9y^2=144$

41. $\alpha \doteq 77^\circ\,19'$

42. Různoběžné přímky $x-\sqrt{2}y-2+4\sqrt{2}=0$, $x+\sqrt{2}y-2-4\sqrt{2}=0$.

43. $x^2-4y^2=12$

44. $x^2-4y^2=4$

45. $25x^2-144(y-2)^2=144\cdot 25$

46. $9(x+1)^2-16(y-2)^2=144$

47. $24x^2-25y^2=600$

48. $xy=4$ nebo $xy=-4$

49. $x^2 - y^2 = 12$

50. $-x^2 + y^2 - 27 = 0$

51. $S[-2, 1]$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$

52. $V[2, 4]$, $p = 2$, $o \parallel y$

53. $y = 2x^2 + 4x - 6$

54. $k = \frac{1}{2}$

55. $F[1, 4]$, $p = 6$

56. $(y + 3)^2 = 9(x - 1)$ nebo $(x - 1)^2 = -\frac{8}{3}(y + 3)$

57. $(x - 2)^2 = -4(y - 1)$

58. $8x + 3y + 24 = 0$

59. $x - y - 7 = 0$

60. $d = 16$

61. $a = 1$, $b = -4$

62. $y^2 - 2y - 4x = 7$

63. $V[0, -2]$, $F[\frac{3}{2}, -2]$

64. Daná přímka je sečnou paraboly.

65. $m = 6$ nebo $m = -2$

66. $b = 3$

67. $a = 0$ nebo $a = -4$

68. $V[4, -2]$, $F[4, -\frac{5}{4}]$, $p = 1{,}5$

9.4. Přímky a roviny v prostoru

- Parametrické rovnice roviny:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 r + v_1 s,\\ y &= a_2 + u_2 r + v_2 s,\\ z &= a_3 + u_3 r + v_3 s, \end{aligned}\right\} \quad r, s \in \mathsf{R};$$

  $A[a_1, a_2, a_3]$ je bod roviny, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou směrové vektory roviny (lineárně nezávislé).

- Obecný tvar rovnice roviny:

$$ax + by + cz + d = 0;$$

  $\boldsymbol{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ je normálový vektor roviny.

- Parametrické rovnice přímky:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t,\\ y &= a_2 + u_2 t,\\ z &= a_3 + u_3 t, \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathsf{R};$$

  $A[a_1, a_2, a_3]$ je bod přímky, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ je směrový vektor přímky.

- Přímka jako průsečnice dvou rovin:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

ŘEŠENÉ ÚLOHY

▷ **PŘÍKLAD 1.** Vyšetřeme vzájemnou polohu přímky p, $p = AB$, kde $A[3, 4, 1]$, $B[2, 7, 6]$, a přímky q, která je průsečnicí rovin α o rovnici $x - 2y + z - 1 = 0$ a β o rovnici $x + y - z + 4 = 0$.

Řešení. Existuje několik postupů řešení. Zvolíme ten, který bude využívat parametrické rovnice obou přímek. Nejprve určíme směrový vektor $\boldsymbol{u} = B - A = (-1, 3, 5)$ přímky p. Její parametrické rovnice jsou $x = 3 - t,\ \ y = 4 + 3t,\ \ z = 1 + 5t,\ \ t \in \mathsf{R}$.

K odvození parametrických rovnic přímky q určíme nejprve její směrový vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor $\boldsymbol{v}$ je kolmý k oběma normálovým vektorům $\boldsymbol{v}_\alpha$ a $\boldsymbol{v}_\beta$ zadaných rovin, a tedy $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_\beta = 0$. Protože je $\boldsymbol{v}_\alpha = (1, -2, 1)$ a $\boldsymbol{v}_\beta = (1, 1, -1)$, platí

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 0, \qquad v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Pro souřadnice v_1, v_2, v_3 vektoru $\boldsymbol{v}$ jsme získali soustavu 2 rovnic o 3 neznámých. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení $v_1 = m$, $v_2 = 2m$, $v_3 = 3m$, $m \in \mathsf{R}$. Směrovým vektorem přímky q je každý vektor $\boldsymbol{v} = (m, 2m, 3m)$, $m \neq 0$. Budeme volit $m = 1$.

Určíme jeden bod přímky q. Zvolíme-li jeho x-ovou souřadnici rovnou 0, dosazením do rovnic rovin α a β dostaneme $y = 3$ a $z = 7$. Přímka q má parametrické rovnice

$$x = t', \quad y = 3 + 2t', \quad z = 7 + 3t', \quad t' \in \mathsf{R}.$$

Vektory $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 5)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)$ jsou lineárně nezávislé, proto zadané přímky nejsou rovnoběžné.

Abychom zjistili, zda jsou různoběžné, budeme hledat jejich společný bod. Existuje-li takový bod, pak pro jeho parametr t na přímce p a parametr t' na přímce q platí

$$3 - t = t', \quad 4 + 3t = 3 + 2t', \quad 1 + 5t = 7 + 3t'.$$

První dvě rovnice mají řešení $t = 1$, $t' = 2$. Tato dvojice však nevyhovuje třetí rovnici. Společný bod přímek p a q neexistuje, přímky jsou tedy mimoběžné.

▷ **PŘÍKLAD 2.** Napišme obecnou rovnici roviny α, která prochází počátkem soustavy souřadnic a je kolmá k přímce $p = AB$, kde $A[3, 4, 7]$ a $B[2, -1, 3]$.

Řešení. Protože rovina prochází počátkem soustavy souřadnic, je absolutní člen v obecné rovnici roviny roven 0. Hledáme rovnici ve tvaru $ax + by + cz = 0$. Směrový vektor $\boldsymbol{v} = A - B = (1, 5, 4)$ přímky p je normálovým vektorem roviny α. Rovnice roviny je $x + 5y + 4z = 0$.

▷ **PŘÍKLAD 3.** Napišme rovnici přímky p, která prochází bodem $A[3, 4, -1]$, je kolmá k přímce m o rovnicích $x = 2 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = 1 + 3t$ a protíná přímku n o rovnicích $x = -1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - 2t$.

Řešení. Označme $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ směrový vektor přímky p. Je-li $\boldsymbol{v} = (1, -2, 3)$ směrový vektor přímky m, je $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0$.

Přímka p leží v rovině α, určené přímkou n a bodem A. Směrové vektory této roviny jsou například vektory $\boldsymbol{a} = (2, 1, -2)$ a $\boldsymbol{b} = M - A = (-4, -3, 2)$, kde $M[-1, 1, 1]$ je bod přímky q. Vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \lambda(2, 1, -2) + \mu(-4, -3, 2).$$

Odtud dostaneme

$$u_1 = 2\lambda - 4\mu, \quad u_2 = \lambda - 3\mu, \quad u_3 = -2\lambda + 2\mu.$$

Dosadíme-li do podmínky $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0$, dostaneme

$$(2\lambda - 4\mu) - 2(\lambda - 3\mu) + 3(-2\lambda + 2\mu) = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení $\lambda = 8r$, $\mu = 6r$, kde r je libovolné reálné číslo. Pak každý vektor $\boldsymbol{u} = (-8r, -10r, -4r)$, $r \neq 0$, je směrovým vektorem přímky p. Volíme-li $r = -\frac{1}{2}$, dostaneme parametrické rovnice přímky p ve tvaru

$$x = 3 + 4t, \quad y = 4 + 5t, \quad z = -1 + 2t.$$

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

1. Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin o rovnicích $x + y - 2z - 4 = 0$ a $2x - y + z + 3 = 0$.

2. Napište parametrické rovnice těžnice t_c v trojúhelníku ABC, kde $A[2, 3, 7]$, $B[4, 7, 3]$, $C[2, 1, 1]$.

3. Určete reálné číslo m tak, aby přímka p o rovnicích $x = 2 + mt$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 3t$, $t \in \mathsf{R}$, protínala přímku q o rovnicích $x = 1 - t'$, $y = -2 + 3t'$, $z = 2 - t'$, $t' \in \mathsf{R}$.

4. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[-2, 3, 6]$, $B[1, 0, -5]$ a je rovnoběžná s osou y.

5. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A[5, -1, 2]$ a je kolmá k přímce AB, $B[3, 2, -1]$.

6. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[4, 0, 0]$, $B[0, 5, 0]$ a $C[2, 2, 1]$.

7. Napište parametrické rovnice roviny, která prochází body $A[4, 3, -11]$, $B[-1, 2, 4]$ a $C[-2, 2, 2]$.

8. Vyšetřte vzájemnou polohu roviny o rovnici $x + 2y - 3z - 4 = 0$ a přímky o rovnicích $x = 1 - 9t$, $y = 2 + 3t$, $z = 2 - t$.

9. Určete reálné číslo a tak, aby přímka o rovnicích $x = 1 + 4t$, $y = -2 + 3t$, $z = t$ byla rovnoběžná s rovinou $ax + 3y - 5z = 0$.

10. Určete reálná čísla a, b tak, aby rovina $ax + by + 6z - 7 = 0$ byla kolmá k přímce o rovnicích $x = 2 + 2t$, $y = -5 - 4t$, $z = -1 + 3t$.

11. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M[9, 3, -4]$ a je kolmá k rovině o rovnici $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

12. Vypočtěte souřadnice průsečíku P přímky p s rovinou ϱ. Přímka p je kolmá k rovině ϱ o rovnici $x + 2y + 3z - 30 = 0$ a prochází bodem $A[3, 1, -1]$.

13. Ukažte, že přímka p o rovnicích $x = -5 + 3t$, $y = 2 + t$, $z = 4t$ je rovnoběžná s rovinou o rovnici $x + y - z + 15 = 0$.

14. Rozhodněte, zda přímky p o rovnicích $x = 2 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + 4t$ a q o rovnicích $x = 4 + 2t'$, $y = 2 - 3t'$, $z = 2 + 2t'$ jsou kolmé a různoběžné.

15. Rozhodněte zda přímka p o rovnicích $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2 + t$ je rovnoběžná s přímkou q, která je průsečnicí roviny α o rovnici $x + y - 2z + 3 = 0$ a roviny β o rovnici $2x + y - z - 1 = 0$.

Výsledky

1. $x = t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -1 + 3t$

2. $x = 2 + t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 1 + 4t$

3. $m = -\frac{19}{3}$

4. $11x + 3z + 4 = 0$

5. $2x - 3y + 3z - 19 = 0$

6. $5x + 4y + 2z - 20 = 0$

7. $x = 4 + 5u + 6v, \ y = 3 + u + v, \ z = -11 - 15u - 13v$

8. $p \parallel \varrho$

9. $a = -1$

10. $a = 4, \ b = -8$

11. $x = 9 + 5t, \ y = 3 + 3t, \ z = -4 - 7t$

12. $P[5, 5, 5]$

14. Nejsou.

15. Je rovnoběžná.

Kapitola 10.

TESTY

Poslední kapitola obsahuje ukázky testů. V celé sbírce jsou úlohy formulovány jako otevřené úlohy, tzn. úlohy, jejichž řešení neznáme, řešení nám není nabídnuto a musíme je vytvořit a odpověď formulovat sami. V testech v této kapitole jsou úlohy formulovány jako uzavřené. Je nabídnuto pět možností odpovědí, z nichž právě jedna je správná. První dva testy jsou sestaveny z příkladů sbírky a u většiny testových úloh jsou odkazy na úlohy, které jsou v předcházejících kapitolách formulovány jako otevřené. Pokud budete pozorně číst, jsou úlohy 13 v testu č. 1 a 15 v testu č. 2 bez odkazů. Ve třech typech úloh, které jsme označili v předmluvě, jsme uvedli pouze typy úloh a v testech se tyto typy úloh mohou lišit numerickým zadáním. Ostatní úlohy testu jsou vybírány pouze z úloh v předcházejících kapitolách a jsou pouze převedeny do uzavřené podoby.

10.1. Test č. 1

1. (*Převod úlohy* 62 *z kap.* 1.)

Výraz $\left(\dfrac{u}{u-v} - \dfrac{v}{u+v}\right) : \left(\dfrac{v}{u-v} + \dfrac{u}{u+v}\right)$ je roven

a) 0 pro $u \neq v \wedge u \neq -v$,

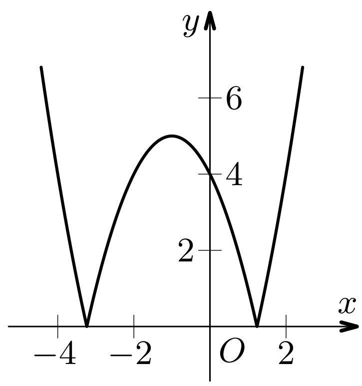
b) 1 pro $u \neq v \wedge u \neq -v$,

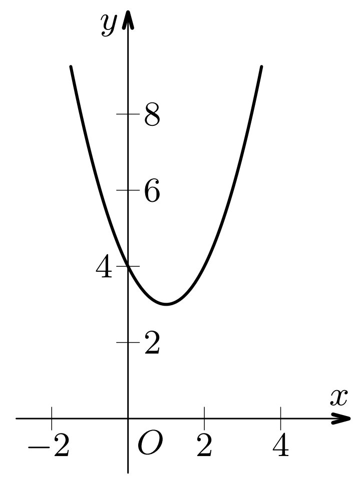
c) $\dfrac{u+v}{u-v}$ pro $u \neq v \wedge u \neq -v$,

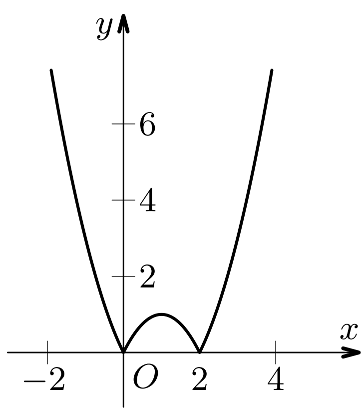
d) $\dfrac{u-v}{u+v}$ pro $u \neq v \wedge u \neq -v$,

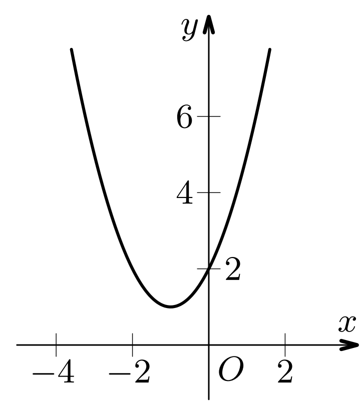
e) $\dfrac{1}{u^2-v^2}$ pro $u \neq v \wedge u \neq -v$.

2. (*Převod úlohy* 12 *z kap.* 2.2.)
Který z následujících grafů je graf funkce $f\colon\ y = |(x+1)^2 + 1|$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) žádný z grafů a) – d).

3. (*Převod úlohy* 35 *z kap.* 3.3.)
Rovnice $\cos^2 x + \cos 2x + 1 = 0$

a) má v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ právě jedno řešení,
b) má v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ právě čtyři řešení,
c) nemá v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ žádné řešení,
d) má v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ právě dvě řešení,
e) má v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ právě tři řešení.

4. (*Převod úlohy* 29 *z kap.* 3.4.)
Rovnice $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = 3$

a) má v R právě jedno řešení, b) má v R právě dvě řešení,

c) nemá žádné řešení v R, d) má v R právě tři řešení,
e) má v R právě čtyři řešení.

5. (*Převod úlohy* 23 *z kap.* 4.1.)
Množina všech řešení nerovnice $|x+3| > |x-2|$ je

a) $(-\frac{1}{2}, \infty)$, b) $(0, \infty)$, c) $(-3, -\frac{1}{2})$,
d) $(-\frac{1}{2}, 2)$, e) $\langle 2, \infty)$.

6. (*Převod úlohy* 79 *z kap.* 5.)
V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je člen $a_1 = -1$ a diference $d = 2$. Členy a_8 a a_{10} jsou:

a) 13 a 17, b) 12 a 16, c) 12 a 17, d) 14 a 18, e) 12 a 17.

7. (*Převod úlohy* 74 *z kap.* 6.)
Goniometrický tvar komplexního čísla

$$z = 2\left[\cos(\tfrac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi)\right] \cdot \left(3\left[\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)\right]\right)^2$$

je

a) $18[\cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi)]$, b) $6[\cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi)]$,
c) $5[\cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi)]$, d) $6[\cos(\frac{7}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{12}\pi)]$,
e) $18[\cos(\frac{7}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{12}\pi)]$.

8. (*Převod úlohy* 61 *z kap.* 7.)
Středy tětiv kružnice $k(O; r)$, které procházejí jejím vnitřním bodem $M \neq O$, leží

a) na parabole o vrcholu O a ohnisku M,
b) na ose úsečky OM,
c) na kružnici $l(M; |OM|)$,
d) na kružnici nad průměrem OM,
e) na parabole o vrcholu M a ohnisku O.

9. (*Převod úlohy* 61 *z kap.* 8.)
Poměr objemu krychle $ABCDEFGH$ a objemu jehlanu $ABCF$ je

a) $3:1$, b) $6:1$, c) $4:1$, d) $8:1$, e) $9:1$.

10. (*Převod úlohy* 69 *z kap.* 9.2.)
Přímky $p = AB$, $A[-1, 1]$, $B[2, -1]$, a $q\colon 3x - 2y + 1 = 0$ jsou

a) totožné,
b) rovnoběžné různé,
c) navzájem kolmé různoběžky,
d) různoběžné, nikoliv kolmé,
e) mimoběžné.

11. (*Převod úlohy* 67 *z kap.* 9.3.)
Přímka o rovnici $x + ay + 1 = 0$ je tečnou paraboly o rovnici $y^2 + 2y = x$ pro

a) $a = 1$,
b) $a = 0$ nebo $a = -4$,
c) $a = 1$ nebo $a = -1$,
d) $a = 3$,
e) $a = 4$.

12. (*Převod úlohy* 17 *z kap.* 2.5.)
Jestliže $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$, pak

a) $\operatorname{tg}\alpha = 0$,
b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$,
c) $\operatorname{tg}\alpha$ není definován,
d) $\operatorname{tg}\alpha = 1$,
e) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

13. Množinou všech řešení nerovnice $3^{|x+1|} \leqq 9$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

a) $\langle -3, 1\rangle$,
b) $\langle -4, 2\rangle$,
c) $\langle -3, -1) \cup (-1, 1\rangle$,
d) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$,
e) $\langle -1, 0\rangle$.

14. (*Převod úlohy* 41 *z kap.* 3.2.)
Rovnice $12x^2 + (8p + 8)x + p^2 - 1 = 0$ (s neznámou x) nemá žádný reálný kořen právě tehdy, když

a) $p \in (-7, -1)$,
b) $p \in \mathsf{R}$,
c) $p \in (-\infty, -7) \cup (-1, +\infty)$,
d) $p \neq -7 \wedge p \neq -1$,
e) $p > -1$.

15. (*Převod úlohy* 21 *z kap.* 2.7.)
Definičním oborem funkce $f\colon y = \sqrt{\ln(x^2)}$ je množina

a) $\mathsf{R} - \{-1,\ 0,\ 1\}$,
b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
c) $(0, \infty)$,
d) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$,
e) $\langle 1, \infty)$.

Výsledky: 1b, 2d, 3d, 4d, 5a, 6a, 7a, 8d, 9b, 10c, 11b, 12e, 13a, 14a, 15d.

10.2. Test č. 2

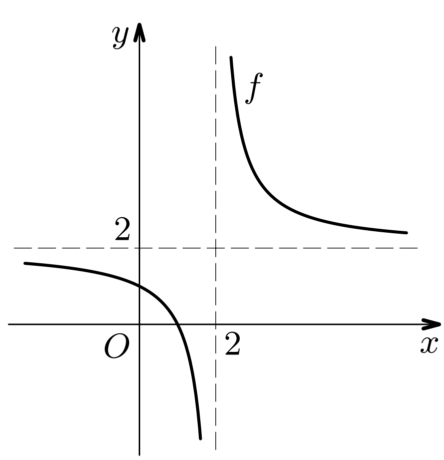
1. (*Převod úlohy* 63 *z kap.* 1.)
Množina všech reálných čísel x, pro která je výraz

$$\frac{4x^{-\frac{1}{2}}}{1-(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^{-2}} \cdot \frac{x}{(1-\sqrt{x})^2}$$

roven -1, je:

a) $(0, \infty)$,
b) $(0, 1)$,
c) $(0, 1) \cup (1, \infty)$,
d) $\emptyset$,
e) $(1, \infty)$.

2. (*Převod úlohy* 11 *z kap.* 2.3.)



Na obrázku je graf funkce:

a) $y = \dfrac{2}{x-2} + 1,\ \ x \in \mathsf{R} - \{2\}$,

b) $y = (x-2)^2,\ \ x \in \mathsf{R}$,

c) $y = \dfrac{2x-2}{x-2},\ \ x \in \mathsf{R} - \{2\}$,

d) $y = \dfrac{-3}{x-2},\ \ x \in \mathsf{R} - \{2\}$,

e) $y = \dfrac{1+x}{x-2},\ \ x \in \mathsf{R} - \{2\}$.

3. (*Převod úlohy* 49 *z kap.* 3.3.)
Množinou všech řešení rovnice $\sin^2 x - 4\cos x - 4 = 0$ je

a) $\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, b) $\emptyset$, c) $\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{2k\pi\}$,
d) $\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{(2k+1)\pi\}$.

4. (*Převod úlohy* 30 *z kap.* 3.4.)
Jestliže $\log_4 y = \frac{1}{2}\log_4(3x) - 2\log_4(x+1) + \frac{1}{2}$, pak číslo y je rovno

a) $\dfrac{\sqrt{3x}}{2(x+1)^2}$, b) $\dfrac{2\sqrt{3x}}{(x+1)^2}$, c) $\dfrac{3x}{2(x+1)}$,
d) $\dfrac{3x}{4(x+1)}$, e) $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.

5. (*Převod úlohy* 24 *z kap.* 4.1.)
Množina všech řešení nerovnice $|x-3| - 1 \leqq |x-1|$ je

a) $\langle \frac{3}{2}, \infty)$, b) $\langle \frac{3}{2}, 3\rangle$, c) $(-\infty, \frac{3}{2}\rangle$,
d) $\langle 3, \infty)$, e) $\langle 1, \infty)$.

6. (*Převod úlohy* 80 *z kap.* 5.)
V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou členy $a_2 = 3$ a $a_5 = \frac{1}{9}$.
Člen a_1 je:

a) 9, b) 27, c) 1, d) $\frac{1}{3}$, e) -9.

7. (*Převod úlohy* 69 *z kap.* 6.)
Goniometrický tvar komplexního čísla $z = \dfrac{-2+4\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$ je

a) $2[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)]$, b) $2[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$,
c) $[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$, d) $\sqrt{2}[\cos(\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)]$,
e) $\sqrt{2}[\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)]$.

8. (*Převod úlohy* 62 *z kap.* 7.)

Obsah čtverce, který je vepsán do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou c tak, že jedna jeho strana je na přeponě a zbývající dva vrcholy na odvěsnách, je roven

a) $\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}$, b) $\dfrac{c^2}{8}$, c) $\dfrac{c^2}{4}$, d) $\dfrac{c^2}{9}$, e) $\dfrac{c^2}{\sqrt{3}}$.

9. (*Převod úlohy* 62 *z kap.* 8.)

Objem tělesa, které vznikne rotací rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s ramenem a kolem přepony, je

a) $\dfrac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$, b) $\dfrac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}$, c) $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{3}}$, d) $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$, e) $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

10. (*Převod úlohy* 70 *z kap.* 9.2.)

Přímka $x + 4y - 14 = 0$ je osou úsečky AB, kde $A[1, -1]$, $B[a, b]$, právě v případě, že

a) $a = 7 \wedge b = 6$, b) $a = 3 \wedge b = 7$, c) $a = -1 \wedge b = 8$,
d) $a = 1 \wedge b = -1$, e) $a = -1 \wedge b = 2$.

11. (*Převod úlohy* 68 *z kap.* 9.3.)

Parabola o rovnici $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$ má vrchol V a ohnisko F a parametr p, pro které platí

a) $V[-4, 2]$, $F[-4, \frac{5}{4}]$, $p = 3$,
b) $V[4, -2]$, $F[4, -\frac{5}{4}]$, $p = 3$,
c) $V[4, -2]$, $F[4, -\frac{5}{4}]$, $p = 1{,}5$,
d) $V[-4, 2]$, $F[-4, \frac{1}{2}]$, $p = 1{,}5$,
e) $V[4, -2]$, $F[4, \frac{1}{2}]$, $p = 1{,}5$.

12. (*Převod úlohy* 17 *z kap.* 2.5.)

Definičním oborem funkce $f\colon\ y = \dfrac{\sqrt{2 + \sin^2 x}}{1 + \cos x}$ je množina

a) $\mathsf{R} - \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \{2k\pi\}$, b) $\mathsf{R} - \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$,

c) $\mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{(2k+1)\pi\}$,

d) $\mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\}$,

e) $\mathsf{R} - \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$.

13. Množinou všech řešení nerovnice $\dfrac{2}{|x-3|} > 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

a) $(1,3)\cup(3,5)$,

b) $(5,\infty)$,

c) $(1,5)$,

d) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$,

e) $(1,\infty)$.

14. (*Převod úlohy* 42 *z kap.* 3.2.)
Rovnice $9x^2 - 6ax + 9a = 0$ (s neznámou x) má dva různé kladné kořeny právě tehdy, když

a) $a \in (0,\infty)$,

b) $a \in (9,\infty)$,

c) $a \in \mathsf{R}$,

d) $a \in (-\infty,0)\cup(9,\infty)$,

e) $a \in (0,9)$.

15. Jestliže $\sin 2\alpha = 1$, pak

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$,

b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = -1$,

d) $\operatorname{tg}\alpha$ není definován,

e) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Výsledky: 1c, 2c, 3e, 4b, 5a, 6a, 7e, 8d, 9b, 10b, 11c, 12c, 13a, 14b, 15a.

10.3. Test č. 3

1. Výraz $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2$ je pro všechna $x, y \in \mathsf{R}$ roven:

a) $2y^4$,

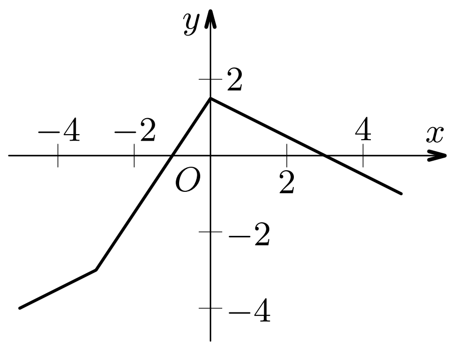
b) $2xy$,

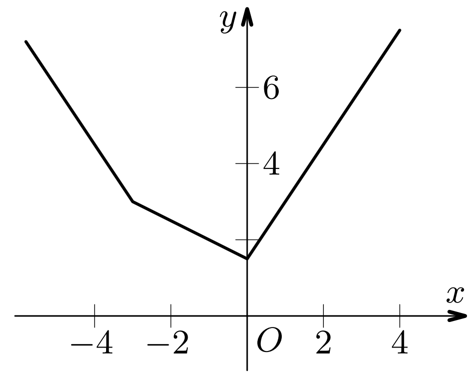
c) $4x^4y^4$,

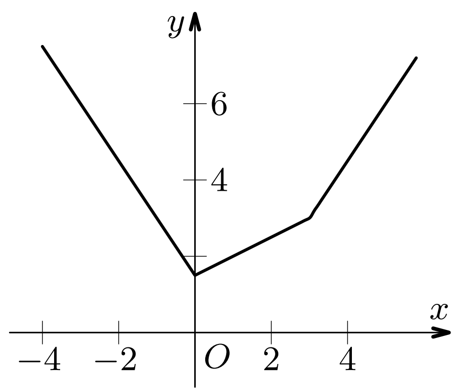
d) $4x^2y^2$,

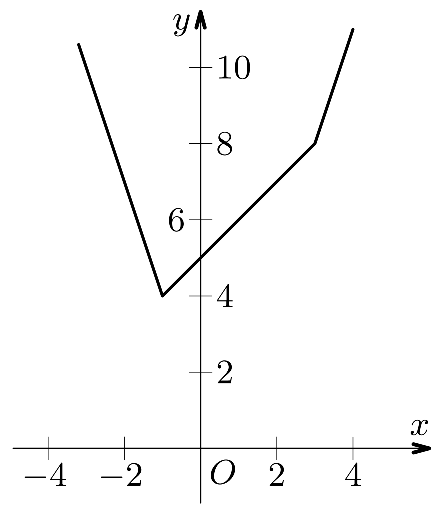
e) $4x^2y^2 + 2y^4$.

2. Který z následujících grafů je grafem funkce $f\colon\ y = \frac{1}{2}|x-3| + |x|$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) žádný z grafů a) – d).

3. Největší záporný kořen a nejmenší kladný kořen rovnice

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 = 0$$

jsou

a) $-\frac{1}{2}\pi$ a π, b) $-\frac{1}{3}\pi$ a π, c) $-\pi$ a π,
d) $-\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$, e) $-\frac{1}{3}\pi$ a $\frac{1}{3}\pi$.

4. Rovnice $\dfrac{\log_3(2x-5)}{\log_3(x^2-8)} = \dfrac{1}{2}$

a) má právě jedno řešení x_1, ležící v intervalu $(\frac{5}{2}, \sqrt{8})$,
b) má právě jedno řešení x_1, ležící v intervalu $(3, \infty)$,
c) nemá žádné reálné řešení,

d) má právě dvě řešení, obě z intervalu $(3, \infty)$,
e) má právě dvě řešení, x_1, ležící v intervalu $(\frac{5}{2}, \sqrt{8})$, a x_2, ležící v intervalu $(3, \infty)$.

5. Množina všech řešení nerovnice $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$ je

a) $(-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$,
b) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$,
c) $(-2, 1)$,
d) $(-5, \infty)$,
e) $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

6. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou členy $a_2 = -2$ a $a_5 = 13$. Člen a_1 je:

a) -5, b) -4, c) -6, d) -3, e) -7.

7. Komplexně sdružené číslo k číslu $z = \dfrac{5-5\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} + 2\mathrm{i} - 3$ je

a) $-1+3\mathrm{i}$, b) $-1-3\mathrm{i}$, c) $1-3\mathrm{i}$, d) $1+3\mathrm{i}$, e) $2 - \frac{11}{6}\,\mathrm{i}$.

8. Rozdělíme-li úsečku AB na n stejných dílů a nad každým z nich sestrojíme půlkružnici, je součet délek všech sestrojených půlkružnic roven

a) $\dfrac{\pi|AB|}{\sqrt{6}}$, b) $\dfrac{\pi|AB|}{3}$, c) $\dfrac{\pi|AB|}{\sqrt{2}}$, d) $\dfrac{\pi|AB|}{\sqrt{3}}$, e) $\dfrac{\pi|AB|}{2}$.

9. Kvádr, který má jednu hranu $a = 4\,\mathrm{m}$, objem $V = 140\,\mathrm{m}^3$ a povrch $S = 166\,\mathrm{m}^2$, má zbývající rozměry

a) $3\,\mathrm{m}$, $6\,\mathrm{m}$, b) $5\,\mathrm{m}$, $6\,\mathrm{m}$, c) $5\,\mathrm{m}$, $7\,\mathrm{m}$,
d) $5\,\mathrm{m}$, $8\,\mathrm{m}$, e) $7\,\mathrm{m}$, $8\,\mathrm{m}$.

10. Trojúhelník s vrcholy $A[1, a]$, $B[b, c]$, $C[3, \frac{7}{2}]$, jehož základna AB leží na přímce $x + 2y - 5 = 0$, je rovnoramenný právě tehdy, když

a) $a = 2 \wedge b = 2 \wedge c = \frac{3}{2}$, b) $a = 2 \wedge b = 6 \wedge c = -\frac{1}{2}$,
c) $a = 2 \wedge b = -1 \wedge c = 3$, d) $a = 2 \wedge b = 3 \wedge c = 1$,
e) $a = 2 \wedge b = 5 - 2c$, $c \in \mathsf{R}$.

11. Přímka p o rovnici $x - y + m = 0$ je sečnou kružnice o rovnici $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ pro všechna m z množiny

a) $\langle -3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10} \rangle$, b) $(-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10})$,
c) $\{-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}\}$, d) $(-3, 3)$,
e) $(-6 - \sqrt{10}, -6 + \sqrt{10})$.

12. Výraz $\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x - 1}$ je roven

a) $-\operatorname{cotg} x$ pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\}$,

b) $-\operatorname{tg} x$ pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$,

c) $-\operatorname{cotg} x$ pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$,

d) $-\operatorname{tg} x$ pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$,

e) $-\operatorname{cotg} x$ pro $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$.

13. Množinou všech řešení nerovnice $|1 - 3x| \geqq 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

a) $(-\infty, 0\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \infty)$, b) $(-\infty, 0)$,
c) $\langle 1, \infty)$, d) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$,
e) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

14. Jestliže jedním kořenem rovnice $x^2 + (3p + 4)x + 2p^2 + 7p + 3 = 0$ (s neznámou x) je číslo $x_1 = -1$, pak druhý kořen je

a) $x_2 = 3$, b) $x_2 = -2 \vee x_2 = 0$,
c) $x_2 = 0 \vee x_2 = 3$, d) $x_2 = -3 \vee x_2 = 3$,
e) $x_2 = -3$.

15. Jestliže $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = 1$, pak

a) $\operatorname{cotg} \alpha = 0$, b) $\operatorname{cotg} \alpha = -1$, c) $\operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{3}$,
d) $\operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{3}$, e) $\operatorname{cotg} \alpha$ není definován.

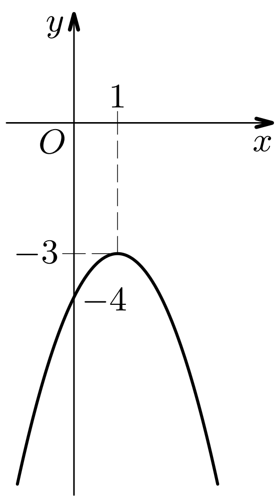
Výsledky: 1d, 2c, 3b, 4b, 5a, 6e, 7b, 8e, 9c, 10d, 11b, 12e, 13a, 14d, 15a.

10.4. Test č. 4

1. Pro každé $x \geqq 0$ je výraz $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}$ roven

a) $x^{\frac{1}{12}}$, b) $\sqrt[6]{x}$, c) $x^{\frac{2}{9}}$, d) $x^{\frac{1}{24}}$, e) $x^{\frac{5}{9}}$.

2.



Na obrázku je graf funkce:

a) $f\colon\ y = x^2 + 3x - 2,\ x \in \mathsf{R}$,
b) $g\colon\ y = -x^2 + 2x - 4,\ x \in \mathsf{R}$,
c) $h\colon\ y = x^2 - 3x - 2,\ x \in \mathsf{R}$,
d) $k\colon\ y = -x^2 - 2x - 3,\ x \in \mathsf{R}$,
e) $l\colon\ y = \dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathsf{R} - \{0\}$.

3. Množinou všech řešení rovnice $|\sin x - 2| = \cos^2 x + 1$ je

a) $\bigcup\limits_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, b) $\bigcup\limits_{k\in \mathsf{Z}} \{k\pi,\ \frac{3}{2}\pi + k\pi\}$,

c) $\bigcup\limits_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi,\ k\pi\}$, d) $\{-\frac{1}{2}\pi,\ 0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi\}$,

e) R.

4. Rovnice $\log_7(2x-3) + \log_7 3x = \log_7(8x-12)$

a) má právě jedno řešení x_1, ležící v intervalu $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$,
b) nemá žádné reálné řešení,
c) má právě dvě řešení v intervalu $\langle\frac{3}{2}, \infty)$,
d) má právě jedno řešení v intervalu $\langle\frac{3}{2}, \infty)$,
e) má právě jedno řešení v intervalu $(\frac{4}{3}, \infty)$.

5. Množina všech řešení nerovnice $4|x| + |2-x| < 3$ je

a) $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$, b) $(-\frac{1}{5}, 0\rangle$, c) $(-\infty, \frac{1}{3})$, d) $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, e) $(-\frac{1}{5}, 2)$.

6. Mezi čísla 32 a 2 vložte tři čísla tak, aby spolu s vloženými čísly tvořila pět členů geometrické posloupnosti. Prostřední z vložených čísel je:

a) 8, b) -8, c) 4, d) -4, e) 16.

7. Algebraický tvar komplexního čísla

$$z = (-1 + 2\mathrm{i})^2 + (3 - 4\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$$

je

a) $10 - 15\mathrm{i}$, b) $19 - 15\mathrm{i}$, c) $-1 - 15\mathrm{i}$, d) $6 + 7\mathrm{i}$, e) $7 + 8\mathrm{i}$.

8. Do úhlu velikosti $60°$ jsou vepsány dva dotýkající se kruhy. Vzdálenost středu menšího kruhu od vrcholu úhlu je $5\,j$. Potom poměr obsahů obou kruhů je roven

a) $1 : 4$, b) $1 : 8$, c) $1 : 3$, d) $1 : 9$, e) $1 : 5$.

9. Zmenšíme-li poloměr podstavy kužele o polovinu a jeho výšku zvětšíme o 20 %, zmenší se objem kužele o

a) 30 %, b) 20 %, c) 80 %, d) 70 %, e) 60 %.

10. Rovnice výšky v_b v rovnostranném trojúhelníku ABC, $A[0, 0]$, $B[6, 0]$, je

a) $\sqrt{3}\,x + y + 6 = 0$, b) $x + \sqrt{3}\,y - 6 = 0$,
c) $\sqrt{3}\,x - y - 6\sqrt{3} = 0$, d) $x - \sqrt{3}\,y - 6 = 0$,
e) $x + \sqrt{3}\,y = 0$.

11. Ohnisko elipsy o rovnici $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$, jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je větší než 4, je bod

a) $[2, 3]$, b) $[2, 4]$, c) $[-2, 5]$, d) $[2, -5]$, e) $[2, 5]$.

12. Jestliže $\cos(\alpha + \pi) = 1$, pak

a) $\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3}$, b) $\operatorname{cotg}\alpha$ není definován,
c) $\operatorname{cotg}\alpha = 1$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = -1$,
e) $\operatorname{cotg}\alpha = 0$.

13. Množinou všech řešení nerovnice $2^{|x-1|} > 4$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

a) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$,
b) $\emptyset$,
c) $(-\infty, -3) \cup (5, \infty)$,
d) $(5, \infty)$,
e) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

14. Rovnice $(p-10)x^2 + 6x - p = 0$ (s neznámou x) má alespoň jeden reálný kořen právě tehdy, když

a) $p \in (-\infty, 1) \cup (9, 10) \cup (10, +\infty)$,
b) $p \in (1, 9)$,
c) $p \in \langle 1, 9 \rangle$,
d) $p \in \mathsf{R} - \{1, 9, 10\}$,
e) $p \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 9, +\infty)$.

15. Maximální definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\log(x-1)}$ je

a) $\emptyset$,
b) $\{1\}$,
c) $\mathsf{R} - \{1\}$,
d) $(-1, 1)$,
e) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Výsledky: 1a, 2b, 3c, 4b, 5a, 6a, 7c, 8d, 9d, 10b, 11e, 12b, 13a, 14e, 15a.

10.5. Test č. 5

1. Množina všech reálných čísel a, pro která je výraz

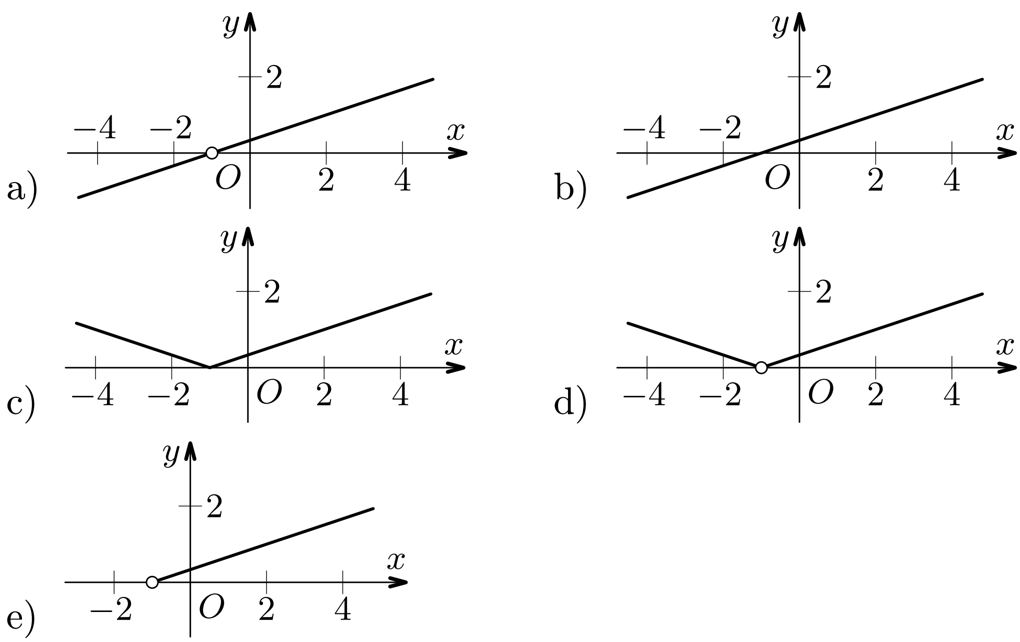
$$(a^{-1} + \sqrt{3^{-1}}) : \left[(a + \sqrt{3})(a\sqrt{3})^{-1}\right]$$

roven 1, je

a) $(0, \infty)$,
b) $(-\infty, 0)$,
c) $\mathsf{R} - \{0\}$,
d) $\emptyset$,
e) různá od množin uvedených v a)–d).

2. Který z následujících grafů je graf funkce

$$f\colon\ y = \sqrt{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{9x+9}}\ ?$$



3. V intervalu $\langle 0,\, 4\pi)$ má rovnice $\operatorname{tg} x + 2\sin^2 x = 0$ právě

a) 8 řešení, b) 4 řešení, c) 12 řešení,
d) 7 řešení, e) 6 řešení.

4. Jestliže $\log_2 y = 2\log_2(x-2) - 2\log_2(x+2) - 2$, pak číslo y je rovno

a) $\dfrac{x-2}{4(x+2)}$, b) $\dfrac{x-2}{2(x+2)}$, c) $\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$,
d) $\dfrac{(x-2)^2}{4(x+2)^2}$, e) $\dfrac{(x-2)^2}{2(x+2)^2}$.

5. Množina všech řešení nerovnice $|x| + |x-5| < 8$ je

a) $(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$, b) $(-\frac{3}{2}, 0\rangle \cup \langle 5, \frac{13}{2})$,
c) $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0,5)$, d) $(0,5)$,
e) $(-\frac{3}{2}, 5)$.

6. Člen a_4 posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentní formulí $a_{n+1} = 3a_n - 2$ a členem $a_1 = 2$, je:

a) 28, b) 10, c) 26, d) 30, e) 22.

7. Absolutní hodnota komplexního čísla $z = \dfrac{-11 + 13\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$ je

a) 3, b) 29, c) 7, d) $\sqrt{29}$, e) $\sqrt{3}$.

8. Jestliže v trojúhelníku ABC je úhel $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, potom je jeho velikost rovna

a) $30°$, b) $45°$, c) $60°$, d) $120°$, e) $135°$.

9. Povrch rotačního kužele vepsaného do krychle o hraně a tak, že podstava je vepsána do stěny krychle, je

a) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\pi a^2$, b) $\frac{1}{3}(1 + \sqrt{5})\pi a^2$,
c) $\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})\pi a^2$, d) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\pi a^2$,
e) $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\pi a^2$.

10. Čtverec $ABCD$ leží v 1. kvadrantu, $A[0, 3]$, $B[4, 0]$. Přímka, na které leží strana CD čtverce, má rovnici

a) $4x + 3y + 25 = 0$, b) $3x + 4y + 12 = 0$,
c) $3x + 4y - 37 = 0$, d) $4x - 3y + 12 = 0$,
e) $-4x + 3y + 13 = 0$.

11. Přímka p o rovnici $x - y + 2 = 0$ je tečnou paraboly o rovnici $y + x^2 + ax + b = 0$ v bodě $T[-1, ?]$ pro

a) $a = 1,\ b = 1$, b) $a = 3,\ b = 1$,
c) $a = 1,\ b = -1$, d) $a = 2,\ b = 2$,
e) $a \in \mathsf{R},\ b = 2$.

12. Jestliže $\sin 2\alpha = 1$, pak

a) $\operatorname{tg} \alpha = 0$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 1$,
c) $\operatorname{tg} \alpha$ není definován, d) $\operatorname{tg} \alpha = -1$,
e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

13. Množinou všech řešení nerovnice $\dfrac{3}{|x+3|} \geqq 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

a) $\langle -6, -3) \cup (-3, 0\rangle$, b) $\langle 0, 6\rangle$,
c) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, d) $\langle -6, 0\rangle$,
e) $(-\infty, 0\rangle$.

14. Rovnice $x^2 + ax - 6a^2 = 0$ (s neznámou x) má jeden kořen o pět větší než druhý kořen právě tehdy, když

a) $a = 1$, b) $a = -1$,
c) $a = 1$ nebo $a = -1$, d) $a = 0$,
e) a je libovolné reálné číslo.

15. Maximální definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ je

a) $\bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} (-\frac{1}{2}\pi + k\pi,\ \frac{1}{2}\pi + k\pi)$, b) R,
c) $\bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, d) $\bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} (-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi,\ \frac{1}{2}\pi + 2k\pi)$,
e) $\mathsf{R} - \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$.

Výsledky: 1e, 2d, 3a, 4d, 5a, 6a, 7d, 8c, 9e, 10c, 11c, 12b, 13a, 14c, 15a.

Argument
Jiný výraz pro nezávisle proměnnou, říkáme např. je dána funkce f argumentu x. Pojem argument používáme v tomto smyslu často u logaritmů, např.: argument logaritmu je kladný.

Číselná osa
Na libovolné přímce p zvolíme dva různé body O a I tak, aby $|OI| = 1$. Každému bodu X přímky p přiřadíme reálné číslo x tak, že $x = |OX|$, leží-li bod X na polopřímce OI a číslo $x = -|OX|$, leží-li bod X na polopřímce opačné k polopřímce OI.

Čtyřúhelník
Čtyřúhelník je mnohoúhelník pro n = 4.
Rovnoběžník (kosodélník) je čtyřúhelník, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, úhlopříčky se půlí.
Lichoběžník je čtyřúhelník, jehož dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné – základny lichoběžníku, druhé dvě protilehlé strany jsou různoběžné – ramena lichoběžníku. Jsou-li ramena shodná, nazýváme lichoběžník rovnoramenný. Střední příčka lichoběžníku je úsečka s krajními body ve středech jeho ramen.
Deltoid je čtyřúhelník, jehož úhlopříčky deltoidu jsou navzájem kolmé. Deltoid, jehož strany jsou shodné je kosočtverec.
Příčka čtyřúhelníku je úsečka, která neleží na jeho straně a jejíž krajní body leží na stranách čtyřúhelníku.

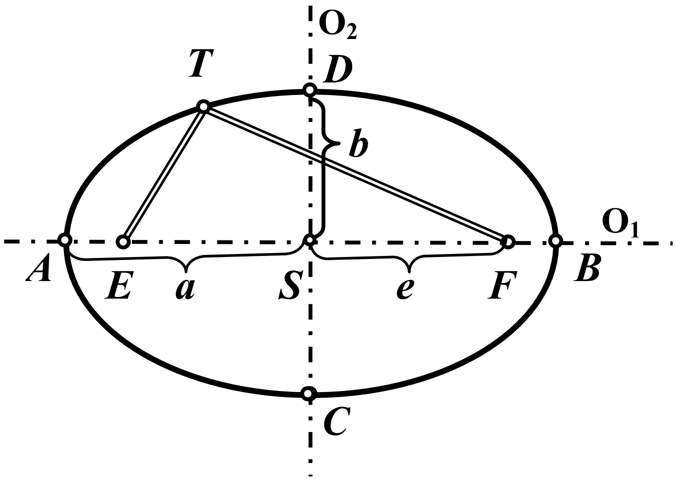
Definiční obor výrazu
Definiční obor je množina všech čísel, pro které má výraz smysl. Příklad: Definiční obor výrazu $V(x) = ln(x + 1) + 1/x$ je množina $D(x) = (-1,0) \cup (0,\infty)$.

Dělitelnost celých kladných čísel – vybrané případy
Existuje-li pro celá kladná čísla a, b celé číslo x takové, že $a = bx$, říkáme, že číslo b je dělitelem čísla a nebo že číslo a je dělitelné číslem b nebo také, že číslo a je násobkem čísla b.
Číslo je dělitelné dvěma, jestliže na základním místě (místo jednotek v desítkové soustavě) je sudá číslice nebo nula, tj. číslo je sudé.
Číslo je dělitelné třemi, jestliže jeho ciferný součet je dělitelný třemi.
Číslo je dělitelné sedmi, jestliže je sedmi dělitelný rozdíl posledního trojčíslí a čísla ze zbylých číslic. Je-li v tomto rozdílu menšenec menší než menšitel, přičteme k němu vhodný násobek sedmi, nebo tento násobek odečteme od menšitele. Př. 941 325 je dělitelné sedmi, neboť 325-(941-700) = 84 = 7.12.

Dvojice přímek
Pro dvě přímky *a*, *b* platí právě jedna z možností:
a, *b* jsou rovnoběžné různé – přímky *a*, *b* nemají společný bod
a, *b* jsou různoběžné – přímky *a*, *b* mají jeden společný bod
a, b jsou splývající rovnoběžné - přímky *a, b* mají všechny body společné
a, b jsou mimoběžné – přímky *a, b* neleží v jedné rovině.
Příčka mimoběžek je každá přímka, která protíná obě mimoběžky.

Ekvivalentní rovnice
Ekvivalentní rovnice jsou takové rovnice, které mají stejnou množinu řešení ve stejném definičním oboru.
Ekvivalentní úprava rovnice je taková úprava, při které původní i upravená rovnice jsou ekvivalentní. Při ekvivalentní úpravě žádné řešení dané rovnice nepřibude ani neubude.

Elipsa



Elipsa je množina všech bodů roviny, které mají od dvou různých bodů E,F (ohniska elipsy) této roviny stálý součet vzdáleností $2a > |EF|$.

$|ES| = |FS| = e$, excentricita
S, střed elipsy
$|AS| = |BS| = a$, hlavní poloosa
A, B hlavní vrcholy
$b = \sqrt{a^2 - e^2}$
$|CS| = |DS| = b$, vedlejší poloosa
C, D, vedlejší vrcholy
Přímky ET, FT, spojnice bodu T elipsy s jejími ohnisky, nazýváme průvodiče bodu T
Elipsa je souměrná podle hlavní osy $AB = o_1$, vedlejší osy $CD = o_2$ a středu S.
Přímka, která s elipsou nemá žádný společný bod, tj. všechny její body jsou vnějšími body elipsy, se nazývá nesečna elipsy.
Přímka, která má s elipsou společné právě dva různé body M, N, se nazývá sečna elipsy. Tětiva elipsy je úsečka s krajními body na elipse.
Přímka, která má s elipsou jediný společný bod, všechny ostatní její body jsou vnějšími body elipsy. Tečna v bodě T elipsy půlí ten úhel průvodičů ET a FT, ve kterém neleží její střed S.

Exponent (mocnitel)

Mocnina a^b se základem a a exponentem b (čteme a na b, nebo a na b-tou).

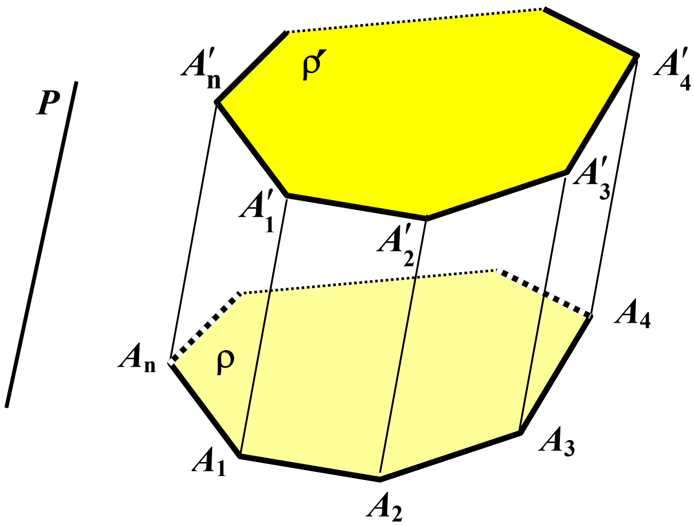
Je-li $a \neq 0$ a

1. b je přirozené, je mocnina a^b rovna součinu b činitelů, z nichž je každý roven a, tj.
   a^b = a.a. … .a (b krát)
2. b je celé záporné, je mocnina $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$
3. b = 0, je $a^0 = 1$

Je-li a > 0 a b je racionální, tj. $b = \frac{p}{q}$, je mocnina $a^b = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Je-li $a = 0$ a b je přirozené číslo, je mocnina $a^b = 0$.

Hranol

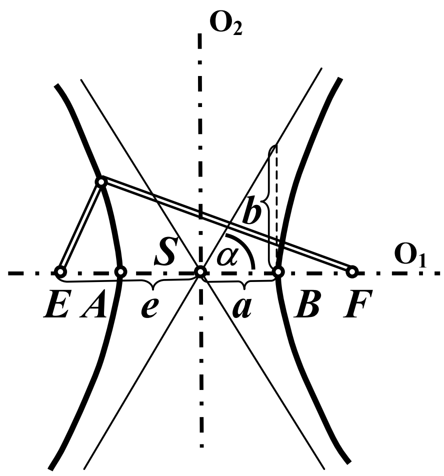


Zvolme n-úhelník v rovině ρ, rovinu ρ´ s ní rovnoběžnou, různou a přímku p (směr bočních hran), která je různoběžná s rovinou ρ. Potom množina všech bodů všech úseček rovnoběžných s přímkou p, které mají jeden krajní bod v n-úhelníku (podstavě) a druhý krajní bod v rovině ρ´, je n-boký hranol.

Pravidelný hranol má podstavu pravidelný n-úhelník a směr p bočních hran kolmý na rovinu ρ podstavy.

Kvádr je kolmý hranol (přímka p je kolmá k rovině podstavy), jehož podstava je obdélník.

Hyperbola



Hyperbola je množina všech bodů roviny, pro které absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou různých bodů E,F – ohniska hyperboly – je rovna $2a < |EF|$.
$|ES| = |FS| = e$, excentricita
S, střed hyperboly
$|AS| = |BS| = a$, hlavní poloosa
A, *B*, hlavní vrcholy
$a^2 + b^2 = e^2$
b, vedlejší poloosa
Hyperbola je souměrná podle svého středu *S*, hlavní osy $AB = o_1$ a vedlejší osy o_2, která prochází středem hyperboly kolmo na hlavní osu.
Hyperbola je složena ze dvou větví, které nemají společné body a jsou souměrné podle vedlejší osy o_2.
Asymptoty jsou přímky jdoucí středem *S* hyperboly, které mají od hlavní osy o_1 odchylku α, pro kterou platí: tg $\alpha = b/a$.
Rovnoosá hyperbola má stejné poloosy, $a = b$, a její asymptoty jsou kolmé.
Sečna hyperboly - přímka, která má s hyperbolou právě dva společné body *M*, *N*, všechny vnitřní body úsečky *MN* jsou vnitřními nebo vnějšími body hyperboly.
Přímka, která je rovnoběžná (různá) s asymptotou, má s hyperbolou společný jediný bod a je její sečna.
Přímka, která není rovnoběžná s asymptotou a má s hyperbolou jediný společný bod je její tečna.
Přímka, která má s hyperbolou společné dva různé body je její sečna.

Interval

Intervalem nazýváme podmnožinu I množiny všech reálných čísel R, jestliže I je rovna jedné z množin všech reálných čísel x takových, že

$a < x < b$, tj. otevřený interval (a,b)

$a \le x \le b$, tj. uzavřený interval $\langle a,b \rangle$

$a \le x < b$, tj. interval uzavřený zleva $\langle a,b)$

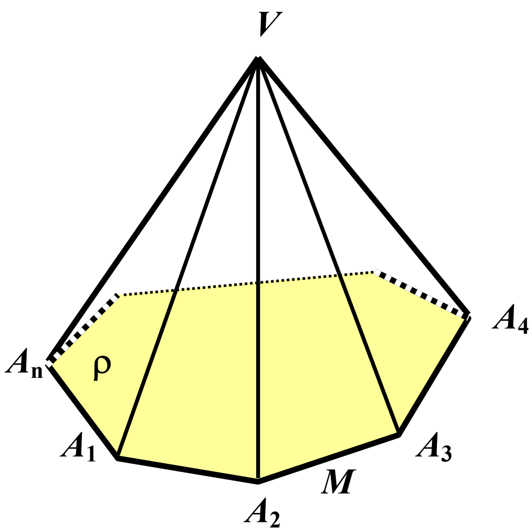
$a < x \le b$, tj. interval uzavřený zprava $(a,b\rangle$

$x \ge a$ (popř. x > a), tj. interval $\langle a,\infty)$, (popř. (a,∞)), neomezený zprava

$x \le a$ (popř. x < a), tj. interval $(-\infty,a\rangle$, (popř. $(-\infty,a)$), neomezený zleva

je to množina všech reálných čísel z R, R = $(-\infty,\infty)$.

Jehlan



V rovině ρ zvolíme n-úhelník *M* (podstava jehlanu) a mimo rovinu ρ bod *V* (vrchol jehlanu). Množina všech bodů všech úseček s jedním společným krajním bodem *V* a druhým krajním bodem v podstavě *M*, se nazývá *n*-boký jehlan s vrcholem *V* a podstavou *M*. Trojúhelník s vrcholem *V*, jehož stranou je jedna strana podstavy se nazývá stěna jehlanu.

Pravidelný jehlan má podstavu *M* pravidelný *n*-úhelník a spojnice vrcholu *V* se středem *S* podstavy je na rovinu ρ kolmá.

Komolý jehlan dostaneme z daného jehlanu tak, že zvolíme rovinu ρ´, rovnoběžnou s rovinou ρ podstavy, která odděluje vrchol *V* od podstavy (podstava a vrchol leží v opačných poloprostorech určených rovinou ρ´). Část daného jehlanu mezi rovinami ρ a ρ´ se nazývá komolý jehlan.

Pravidelný čtyřstěn je pravidelný trojboký jehlan, jehož stěny i podstava jsou shodné rovnostranné trojúhelníky.

Kolmost přímek a rovin
Různoběžné přímky jsou kolmé, jestliže všechny čtyři úhly, které určují, jsou shodné.
Mimoběžné přímky *a*, *b* jsou kolmé, jestliže přímky *a*, *b′* jsou kolmé, kde *b′* je libovolná přímka rovnoběžná s přímkou *b* a různoběžná s přímkou *a*.
Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke všem přímkám roviny (definice kolmosti přímky a roviny).
Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny (kriterium kolmosti).
Dvě roviny jsou kolmé, jestliže jedna rovina obsahuje aspoň jednu přímku kolmou ke druhé rovině.

Křivka
Podle fyzikální představy je křivka dráha pohybujícího se bodu.
Příklady křivek: přímka, kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, lomená čára.

Lomená čára, uzavřená lomená čára
Je dána posloupnost bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Sjednocení úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ (strany lomené čáry) se nazývá lomená čára $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$.
Lomená čára je uzavřená, jestliže $A_1 = A_n$.

Kořeny rovnice (též řešení rovnice), kořenový činitel, dvojnásobný kořen
Jestliže pro číslo *a* z definičního oboru rovnice *f(x)=0* platí *f(a)=0*, nazýváme číslo *a* kořenem (řešením) rovnice *f(x)=0*. Předpis *f* může být libovolný funkční předpis.
Příklad rovnice: ln(x-1) + tg x – x + 7 = 0.
Je-li předpis *f* mnohočlen, je rovnice algebraická s neznámou x, $x \in \mathrm{R}$, tedy rovnice má tvar $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, kde a_i jsou reálná čísla.
Algebraickou rovnici můžeme přepsat ve tvaru $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n) = 0$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou všechny kořeny rovnice (obecně komplexní čísla). Dvojčlen $(x-\alpha_i)$ nazýváme kořenový činitel (určený kořenem α_i).
Lze-li rovnici psát ve tvaru $(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n) = 0$ a žádné z čísel $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ není rovno číslu α_i, nazýváme kořen α_i dvojnásobným kořenem této rovnice. Kořen 1 je dvojnásobným kořenem rovnice $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$.

Koule a sféra, polokoule a její podstava, kulová úseč, kulový vrchlík
Koule κ o středu S a poloměru r je množina všech bodů v prostoru, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou r.
Hranice koule je sféra, tj. Množina všech bodů prostoru, které mají od bodu S vzdálenost rovnou r.
Rovina jdoucí středem S rozdělí kouli na dvě polokoule, jejich hraniční kruh se nazývá podstava polokoule.
Každá rovina, která protíná kouli (průnikem je kruh), tj. má od středu vzdálenost menší než r, rozdělí kouli na dvě kulové úseče. Kruh v rovině řezu nazýváme podstava úseče. Hranice úseče bez podstavy se nazývá kulový vrchlík.

Kruh, tětiva, kruhová úseč, kruhová výseč
Kruh o středu S s poloměrem r je množina všech bodů v rovině, které mají od středu S vzdálenost menší nebo rovnou r.
Hranice kruhu je kružnice o středu S s poloměrem r, tj. množina všech bodů v rovině, které mají od středu S vzdálenost rovnou r.
Tětiva kruhu (kružnice) je úsečka s krajními body na hraniční kružnici.
Tětiva jdoucí středem S se nazývá průměr kruhu (kružnice).
Tětiva dělí kruh na dvě úseče.
Průnik kruhu s úhlem, který má vrchol ve středu S, je kruhová výseč.

Kružnice, jednotková kružnice, tečna kružnice, tětiva
Kružnice o středu S s poloměrem r je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost rovnou r.
Jednotková kružnice je kružnice s poloměrem jedna.
Dva body A, B kružnice rozdělí kružnici na dvě části. Každou z nich nazýváme kružnicový oblouk. Body A, B jsou krajní body oblouku.
Tečna kružnice je přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod T. Tečna je kolmá na poloměr TS.
Tětiva kružnice je úsečka s krajními body na kružnici.

Mnohostěn, pravidelný mnohostěn, polopravidelný mnohostěn
Mnohostěn je uzavřená podmnožina prostoru, jejíž hranicí je sjednocení konečného počtu mnohoúhelníků. Tyto mnohoúhelníky nazýváme stěny mnohostěnu. Společná strana dvou stěn je hrana mnohostěnu. Vrcholy stěn jsou vrcholy mnohostěnu.
Pravidelný mnohostěn má všechny stěny shodné pravidelné mnohoúhelníky. Jeho vrcholy leží na sféře. Existuje právě pět pravidelných mnohostěnů:
Pravidelný čtyřstěn má všechny čtyři stěny rovnostranné trojúhelníky.
Pravidelný šestistěn (krychle) má všech šest stěn čtverce.
Pravidelný osmistěn má všech osm stěn rovnostranné trojúhelníky. Je sjednocením dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů se společnou podstavou a bočními hranami stejné délky.
Pravidelný dvanáctistěn má stěny pravidelné pětiúhelníky.
Pravidelný dvacetistěn má stěny rovnostranné trojúhelníky.
Polopravidelný mnohostěn má stěny pravidelné mnohoúhelníky různých typů (např. klasický geometrický model fotbalového míče má stěny pravidelné pětiúhelníky a šestiúhelníky).

Mnohočlen n-tého stupně
Algebraický výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, ve kterém $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou reálná čísla (koeficienty mnohočlenu), x je reálná proměnná, n nezáporné celé číslo (stupeň mnohočlenu), se nazývá mnohočlen n-tého stupně, jestliže koeficient a_n je různý od nuly.
Koeficient a_0 nazýváme absolutní člen mnohočlenu.
Mnohočlen, který má všechny koeficienty rovny nule, se nazývá nulový mnohočlen, nedefinujeme jeho stupeň.
Mnohočlen 0-tého stupně je konstanta.
Mnohočlen $ax+b$ se nazývá lineární dvojčlen.
Mnohočlen $ax^2 + bx + c$ se nazývá kvadratický trojčlen.

Mnohoúhelník
Mnohoúhelník, též n-úhelník, je rovinný obrazec, jehož hranicí je uzavřená lomená čára o n stranách, $n \geq 3$. Strana lomené čáry je stranou mnohoúhelníku. Strany se společným vrcholem se nazývají sousední strany. Úhlopříčka mnohoúhelníku je spojnice dvou vrcholů, které nejsou sousední. Úhel, ve kterém leží všechny body mnohoúhelníku a jehož ramena jsou sousední strany, se nazývá vnitřním úhlem mnohoúhelníku.
Pravidelný mnohoúhelník má všechny strany a všechny vnitřní úhly shodné.

Množina, podmnožina, sjednocení, průnik a rozdíl množin

Pod pojmem množina rozumíme takový soubor objektů – prvků, o kterých můžeme rozhodnout, zda do tohoto souboru patří či nepatří.

Říkáme, že *x* je (příp. není) prvkem množiny *M* a zapisujeme $x \in M$ (příp. $x \notin M$).

Množina *A* je podmnožinou množiny *B*, píšeme $A \subseteq B$, je-li každý prvek množiny *A* prvkem množiny *B*.

Sjednocením množin *A* a *B* je množina $A \cup B$ všech prvků, které jsou prvky buď množiny *A* nebo množiny *B*.

Průnik množin *A* a *B* je množina $A \cap B$ všech prvků, které jsou z množiny *A* a zároveň z množiny *B*.

Rozdíl množin *A* a *B* je množina *A*-*B* všech těch prvků množiny *A*, které nejsou prvky množiny *B*.

Množiny čísel

Množina přirozených čísel: N = {1,2,3,4,….}

Množina celých čísel Z = {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…} je množina, která vznikne sjednocením množiny všech přirozených čísel, množiny všech čísel k nim opačných a nuly.

Množina racionálních čísel Q je množina všech čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in Z, q \in N$.

Čísla můžeme vyjadřovat v číselných soustavách. Používáme číselnou soustavu se základem 10. Příklady: $328 = 3.10^2 + 2.10^1 + 8.10^0$, $7.10^1 + 9.10^0 + 4.10^{-1} – 2.10^{-2} = 79,38$. Tomuto vyjádření říkáme desetinný rozvoj.

Každé racionální číslo lze vyjádřit konečným nebo periodickým desetinným rozvojem (rozvoj je nekonečný, ale jistá skupina číslic se v tomto rozvoji stále opakuje).

Množina R reálných čísel je množina všech čísel, které lze vyjádřit konečným nebo nekonečným desetinným rozvojem. Vedle racionálních čísel obsahuje množina reálných čísel i čísla iracionální (jejich rozvoj není ani konečný ani periodický).

Platí $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R}$.

Reálná čísla znázorňujeme graficky na číselné ose (též osa reálných čísel). Každému reálnému číslu odpovídá právě jeden bod číselné osy.

Množina komplexních čísel C je množina všech uspořádaných dvojic (a,b) reálných čísel s definovanými operacemi a jejich vlastnostmi. Komplexní čísla zapisujeme ve tvaru a+ib. Reálné číslo *a* se nazývá reálná část, b imaginární část komplexního čísla, symbol i označuje imaginární jednotku. Komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině. Každému komplexnímu číslu odpovídá jeden bod Gaussovy roviny.

Mocnina, počítání s mocninami

Čísla *a*, *b* jsou kladná reálná čísla (základ mocniny), racionální čísla *m, n, r, p, s* jsou exponenty (mocnitele).

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$$

Odmocnina, n-tá odmocnina

n-tá odmocnina z nezáporného reálného čísla *a* je nezáporné číslo *b* takové, že $b^n = a, \quad n \in N$. Píšeme $b = \sqrt[n]{a}$, *a* je odmocněnec, též základ odmocniny.
Pro počítání s odmocninami platí stejná pravidla jako pro počítání s mocninami.

Omezená funkce

Funkce f je omezená shora na množině *M*, existuje-li takové číslo $h \in R$, že $f(x) \leq h$, pro každé $x \in M$.
Funkce f je omezená zdola na množině *M*, existuje-li takové číslo $d \in R$, že $f(x) \geq d$, pro každé $x \in M$.
Funkce f je omezená na množině *M*, existuje-li takové kladné reálné číslo c, že platí $-c \leq f(x) \leq c$, pro každé $x \in M$.

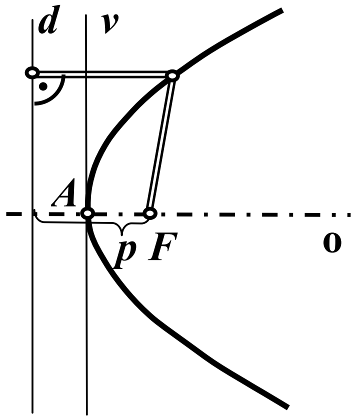
Orientovaná úsečka

Úsečka, u které je definován počáteční a koncový bod, se nazývá orientovaná úsečka. Krajní body úsečky tvoří uspořádanou dvojici bodů, první bod je bod počáteční, druhý je bod koncový.
Velikost orientované úsečky je rovna vzdálenosti jejího počátečního a koncového bodu.

Osa úsečky

Osa úsečky je přímka, která prochází středem této úsečky a je k dané úsečce kolmá.

Parabola



V rovině je dán bod *F* a přímka *d*, která bodem *F* neprochází. Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu *F* (ohnisko) a přímky *d* (řídicí přímka), se nazývá parabola.
Parabola je souměrná podle osy *o*, která prochází kolmo na řídicí přímku *d* ohniskem *F*. Průsečík *A* osy *o* s parabolou se nazývá vrchol paraboly.
Vzdálenost *p* ohniska od řídicí přímky se nazývá parametr paraboly.
Přímka, která má s parabolou společné dva různé body je její sečnou. Tětiva paraboly je úsečka, jejíž krajní body leží na parabole.
Přímka, která je rovnoběžná s osou paraboly, má s parabolou společný jediný bod a je její sečnou.
Přímka, která není rovnoběžná s osou paraboly a má s parabolou společný jediný bod, je tečnou paraboly.
Vrcholová tečna paraboly je tečna v jejím vrcholu *A*.

Polorovina
Každá přímka *p* rozdělí rovinu na dvě poloroviny. Přímku *p* nazýváme hraniční přímkou poloroviny. Má-li přímka *p* v rovině s kartézskou soustavou souřadnic *Oxy* obecnou rovnici $ax + by + c = 0$, jsou poloroviny s hraniční přímkou *p* popsány nerovnicemi $ax + by + c \leq 0$, resp. $ax + by + c \geq 0$.

Rotační kužel, plášť rotačního kužele
Rotací pravoúhlého trojúhelníka kolem jeho jedné odvěsny vzniká rotační kužel. Druhá odvěsna při této rotaci vytvoří kruh, který je podstavou kužele. Přepona vytvoří rotací plášť rotačního kužele, který se do roviny rozvine do kruhové výseče.

Rotační válec, plášť rotačního válce

Rotací obdélníka kolem jeho jedné strany vzniká rotační válec. Kruhy, které vytvoří při rotaci strany obdélníka kolmé na osu rotace, jsou podstavy. Strana rovnoběžná s osou rotace vytvoří plášť válce, rozvinutím pláště do roviny je obdélník o stranách rovných jednak výšce válce, jednak délce kružnice, která je hranicí podstavy válce.

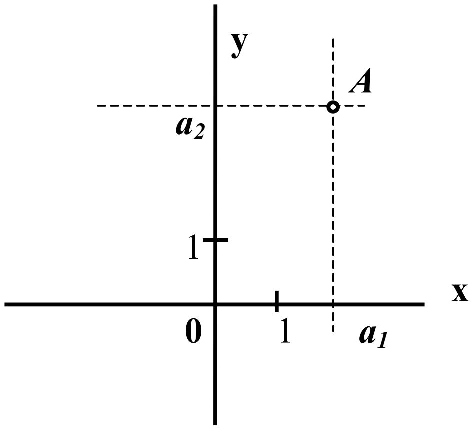
Řešení nerovnice

Nerovnice s reálnou proměnnou x je zápis nerovnosti dvou výrazů, tj. $f(x) > g(x), f(x) \geq g(x), f(x) < g(x), f(x) \leq g(x)$, kde f a g jsou reálné funkce proměnné x. Definiční obor nerovnice je průnikem definičních oborů obou funkcí. Řešením nerovnice je množina všech x z definičního oboru nerovnice, po jejichž dosazení do nerovnice dostaneme pravdivou nerovnost.

Shodnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují
ve všech třech stranách (věta sss)
v jedné straně a úhlech k ní přilehlých (věta usu)
ve dvou stranách a úhlu, který tyto strany svírají (věta sus)
ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich (věta Ssu)

Souřadnice v rovině



V rovině je zadána dvojice číselných os x a y, které jsou navzájem kolmé a jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0. Jednotka 1 je stejná pro obě číselné osy. Každému bodu v rovině je jednoznačně přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel (souřadnice bodu), viz obrázek. Souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic jsou čísla $[a_1, a_2]$ taková, že a_1 je průsečík osy x s přímkou jdoucí bodem A rovnoběžně s osou y a a_2 je průsečík osy y s přímkou jdoucí bodem A rovnoběžně s osou x.

Trojice Oxy se nazývá kartézská soustava souřadnic v rovině. Přímky x, y se nazývají osy souřadnic (také souřadnicové osy).

Osy x a y rozdělí rovinu na čtyři kvadranty:

v 1. kvadrantu leží body, které mají obě souřadnice kladné

ve 2. kvadrantu leží body, které mají 1. souřadnici zápornou a 2. souřadnici kladnou

ve 3. kvadrantu leží body, které mají obě souřadnice záporné

ve 4. kvadrantu leží body, které mají 1. souřadnici kladnou a 2. souřadnici zápornou.

Společný jmenovatel

Společný jmenovatel zlomků je obvykle nejmenší společný násobek těchto jmenovatelů. Je to takové celé číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli daných zlomků.

Trojúhelník

Trojúhelník je mnohoúhelník se třemi vrcholy *A*,*B*,*C*. Úsečky *AB*, *BC*, *CA* jsou jeho strany. Jejich délky označujeme (pořadě) *c*, *a*, *b*. Vnitřní úhly při vrcholech A, B, příp. C, (protilehlé stranám BC, AC, příp. AB) označujeme α, β, příp. γ.

Osa úhlu v trojúhelníku je osa jeho vnitřního úhlu.

Úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany je těžnice. Těžnice se protínají v těžišti trojúhelníku.

Střední příčka v trojúhelníku je úsečka spojující středy dvou stran.

Výška v trojúhelníku příslušná ke straně CB je buď kolmice z bodu A k přímce BC (výškou rozumíme přímku) nebo úsečka na této kolmici s jedním krajním bodem A a druhým krajním bodem na přímce BC. Výšky ke všem třem stranám trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany stejně dlouhé, všechny vnitřní úhly mají velikost 60^{o}.

Rovnoramenný trojúhelník má aspoň dvě strany stejně dlouhé. Ty se nazývají ramena, třetí strana je základna.

Pravoúhlý trojúhelník má jeden úhel pravý. Strana proti tomuto úhlu se nazývá přepona, ostatní dvě strany jsou odvěsny.

Kružnice trojúhelníku vepsaná se dotýká jeho stran a leží uvnitř trojúhelníku, její střed je v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku.

Kružnice trojúhelníku opsaná má střed na osách jeho stran.

Úhel

Uvažujme kružnicový oblouk α určený body A, B na kružnici o středu V a poloměru 1. Rovinný úhel AVB (také α) je sjednocení všech polopřímek VX, kde bod X je bodem oblouku α.

Bod V nazýváme vrcholem, polopřímky VA, VB ramena úhlu AVB.

Úhel vedlejší k úhlu AVB je úhel BVA´, kde VA´ je opačná polopřímka k polopřímce VA.

Je-li oblouk α

- polokružnice, nazýváme úhel AVB přímý úhel,
- částí polokružnice, nazýváme úhel AVB konvexní úhel,
- nulový (body A a B splynuly, oblouk α tvoří pouze bod A=B), nazýváme úhel AVB nulový úhel,
- celá kružnice (body A a B splynuly, oblouk α je celá kružnice), nazýváme úhel AVB plný úhel.

Velikost úhlu AVB je odvozena z délky oblouku α:

velikost nulového úhlu je 0

velikost plného úhlu je 2π

velikost úhlu AVB je jeden radián (1 rad), má-li oblouk α délku 1

velikost úhlu AVB je jeden stupeň, má-li oblouk α délku $\frac{\pi}{180}$.

Velikost úhlu v obloukové míře je číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, velikost úhlu ve stupňové míře je veličina z intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

Úhel $\alpha \in (0, \pi)$ se nazývá ostrý úhel.

Úhel $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ se nazývá tupý úhel.

Orientovaný úhel je úhel, u kterého tvoří ramena uspořádanou dvojici polopřímek. Velikosti orientovaného úhlu AVB a úhlu BVA se liší znaménkem. Zpravidla se kladná orientace určuje pohybem ručiček hodin, kladná orientace je měřena proti jejich pohybu. Například úhel, jehož ramena představují ručičky hodin v poloze právě 3 hodiny, přičemž malá ručička je počáteční rameno má velikost 90º.

Určení roviny

Každými třemi body A,B,C, které neleží na téže přímce, je určena jediná rovina.

Jiná ekvivalentní určení roviny:

rovina je určena přímkou a bodem, který na ní neleží

rovina je určena dvěma různými rovnoběžnými přímkami

rovina je určena dvěma různoběžnými přímkami

Rovina je určena bodem roviny a přímkou, která je k rovině kolmá.

Zobrazení

Zobrazení f z množiny A do množiny B je přiřazení (předpis, návod), který každému prvku x množiny A přiřazuje nejvýše jeden prvek z množiny B.
Prvky množiny A nazýváme vzory, prvky množiny B obrazy.
Prosté zobrazení přiřazuje různým vzorům různé obrazy.