

Samostatná práce SN2 - Explicitní Rungovy-Kuttovy metody

1 RK metoda druhého řádu

Pro zadaný příklad určování koncentrace nečistot v jezeře byly v algoritmu použity následující vstupy: koeficient $a = 1$, počet dílků dělení $N = 10$, čas $t \in < 0, 250 >$ (v hodinách), počáteční podmínka $y_0 = 0$.

1.1 Varianta pro přítok $2\frac{m^3}{hod}$

Príslušná diferenciální rovnice a počáteční podmínka pro vstup do algoritmu MatLabu je tvaru

$$f(t, y) = y' = 6 - 0,002y, \quad y(0) = 0. \quad (1)$$

Přesné analytické řešení rovnice (1) je tvaru

$$y(t) = 3000(1 - e^{-0,002t}) \quad (2)$$

a pro záchranu života v jezeře pak řešíme rovnici $y(t) = 1000$. Řešením je hodnota $t = 202,73$, tj. na zastavení přísunu nečistot máme přibližně 8 dní a 10 hodin. Pro rovnici (2) vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro přesné řešení y_p :

```
1.0e+03 *  
0  
0.1462500000000000  
0.2853703125000000  
0.417708509765625  
0.543595219914551  
0.663344952943717  
0.777256886487710  
0.885615613271434  
0.988691852124452  
1.086743124333385  
1.180014397022132
```

Algoritmus Rungovy-Kuttovy metody druhého řádu byl použit pro numerické řešení úlohy. Pro zadané vstupy vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro numerické řešení y :

```

1.0e+03 *
0
0.146311726497858
0.285487745892121
0.417876070724827
0.543807740766055
0.663597650785785
0.777545337954846
0.885935730843860
0.989039861893082
1.087115545134680
1.180408020862100

```

Chyba byla posouzena jako maximum rozdílů hodnot přesného a numerického řešení, tj. $err = \max\{|y_p - y|\}$ a měla hodnotu $err = 0.393623839967177$.

1.2 Varianta pro přítok $3\frac{m^3}{hod}$

Příslušná diferenciální rovnice a počáteční podmínka pro vstup do algoritmu MatLabu je tvaru

$$f(t, y) = y' = 9 - 0,002y, \quad y(0) = 0. \quad (3)$$

Přesné analytické řešení rovnice (3) je tvaru

$$y(t) = 4500(1 - e^{-0,002t}) \quad (4)$$

a pro záchranu života v jezeře pak řešíme rovnici $y(t) = 1000$. Řešením je hodnota $t = 125,66$, tj. na zastavení přísunu nečistot máme přibližně 5 dní 5 hodin a 40 minut. Pro rovnici (4) vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro přesné řešení y_p :

```

1.0e+03 *
0
0.219467589746787
0.428231618838182
0.626814106087240
0.815711611149082
0.995396476178678
1.166318006932270
1.328903596265790
1.483559792839623

```

1.630673317702021
1.770612031293150

Algoritmus Rungovy-Kuttovy metody druhého řádu byl použit pro numerické řešení úlohy. Pro zadané vstupy vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro numerické řešení y :

1.0e+03 *
0
0.2193750000000000
0.428055468750000
0.626562764648437
0.815392829871826
0.995017429415575
1.165885329731565
1.328423419907152
1.483037778186678
1.630114686500077
1.770021595533199

Chyba byla posouzena jako maximum rozdílů hodnot přesného a numerického řešení, tj. $err = \max\{|y_p - y|\}$ a měla hodnotu $err = 0.590435759950878$.

2 RK metoda třetího řádu

Pro zadaný příklad určování koncentrace nečistot v jezeře byly v algoritmu použity následující vstupy: koeficient $c_2 = 1$, koeficient $c_3 = 2$, počet dílků dělení $N = 10$, čas $t \in < 0, 250 >$ (v hodinách), počáteční podmínka $y_0 = 0$.

2.1 Varianta pro přítok $2\frac{m^3}{hod}$

Příslušná diferenciální rovnice a počáteční podmínka pro vstup do algoritmu MatLabu je tvaru (1), odpovídající přesné analytické řešení je tvaru (2). Na zastavení přísunu nečistot máme 8 dní a 10 hodin. Pro rovnici (2) vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro přesné řešení y_p :

1.0e+03 *
0
0.146311726497858
0.285487745892121

```

0.417876070724827
0.543807740766055
0.663597650785785
0.777545337954846
0.885935730843860
0.989039861893082
1.087115545134680
1.180408020862100

```

Algoritmus Rungovy-Kuttovy metody třetího řádu byl použit pro numerické řešení úlohy. Pro zadané vstupy vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro numerické řešení y :

```

1.0e+03 *
0
0.1463125000000000
0.285489217447917
0.417878170405301
0.543810403802825
0.663600817234025
0.777548952376841
0.885939742011962
0.989044222510920
1.087120211575544
1.180412952923495

```

Chyba byla posouzena jako maximum rozdílů hodnot přesného a numerického řešení, tj. $err = \max\{|y_p - y|\}$ a měla hodnotu $err = 0.004932061395039$.

2.2 Varianta pro přítok $3\frac{m^3}{hod}$

Příslušná diferenciální rovnice a počáteční podmínka pro vstup do algoritmu MatLabu je tvaru (3), odpovídající přesné analytické řešení je tvaru (4). Na zastavení přísunu nečistot máme 5 dní 5 hodin a 40 minut. Pro rovnici (4) vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro přesné řešení y_p :

```

1.0e+03 *
0
0.219467589746787
0.428231618838182
0.626814106087240

```

0.815711611149082
0.995396476178678
1.166318006932270
1.328903596265790
1.483559792839623
1.630673317702021
1.770612031293150

Algoritmus Rungovy-Kuttovy metody třetího řádu byl použit pro numerické řešení úlohy. Pro zadané vstupy vypočítal skript ve zvoleném počtu dílků dělení následující hodnoty pro numerické řešení y :

1.0e+03 *
0
0.2194687500000000
0.428233826171875
0.626817255607951
0.815715605704238
0.995401225851038
1.166323428565261
1.328909613017943
1.483566333766380
1.630680317363316
1.770619429385242

Chyba byla posouzena jako maximum rozdílů hodnot přesného a numerického řešení, tj. $err = \max\{|y_p - y|\}$ a měla hodnotu $err = 0.007398092092444$.

Závěr

Získané výsledky odpovídají očekávání, kdy s plynoucím časem koncentrace nečistot v jezeře stoupá a otázka potřebné doby zastavení přítoku nečistot je tedy na místě. Lze si povšimnout, že vypočítaná chyba je v případě RK metody třetího řádu podstatně menší v porovnání s chybou pro RK metodu druhého řádu. Při vykreslení průběhu změny koncentrace v čase se všechny tři vykreslené křivky (pro přesné řešení, numerické řešení podle RK, řešení podle funkce ode45 v MatLabu) téměř překrývaly.

Je-li to nutné, mohu protokol doplnit jak o vytvořený kód v prostředí MatLab, tak i o výsledné grafy závislostí pro jednotlivé řešené příklady; v takovém případě mě prosím kontaktujte.