

Meine Damen und Herren, sehr geehrte Frau Navratova. Mein Name ist Tomas Ondruch und heute präsentiere ich Ihnen meinen Lieblingsbereich von Mathematik, und zwar die Gruppentheorie.

Dieses Gebiet ist wirklich sehr breit und komplex, deshalb werde ich nur die Grundlage erwähnen. Hoffentlich wird Ihnen meine Präsentation Spaß machen.

Also, ich habe meinen Vortrag in drei Hauptthemen geteilt, und dies wären die Grundbegriffe von dem Bereich, danach erzähle ich Ihnen etwas über die Geschichte - wie sich Gruppentheorie entwickelt hat und so weiter, und letztens komme ich zu den Anwendungen, die mindestens ich persönlich ganz interessant finde.

So, aber jetzt kommt etwas Theorie. Was ist eine Gruppe aus der mathematischen Perspektive? Eine Gruppe ist allgemein gesagt eine so genannte algebraische Struktur, die sich aus einer nicht leeren Menge und einer zweistelligen Verknüpfung zusammensetzt. (Ich werde die Verknüpfung hier als Sternchen markieren). Doch, das ist nicht alles!

Eine Gruppe muss noch vier Anforderungen erfüllen: erstens muss die Verknüpfung jeder zweier Elemente aus der Menge ein Element derselben Menge ergeben. Das ist die Abgeschlossenheit. Zweitens ist es das Assoziativgesetz. Das heißt, dass wir die Klammer in der Operation irgendwo hinlegen können. Außerdem gibt es bei einer Gruppe noch ein neutrales Element e , das nichts bewirkt. Und letztens muss es zu jedem Element a ein inverses Element a' geben, dass wir beim Verknüpfen das Element e ergeben.

Wenn für alle Elemente der Menge noch diese Gleichung $a*b=b*a$ gilt, nennen wir die Gruppe eine kommutativ/abelsche Gruppe. Es ist vielleicht besser, wenn ich Ihnen ein paar Beispiele zeige:

Eine Gruppe ist zum Beispiel die Menge aller ganzen Zahlen mit Addition. Wenn sie darüber nachdenken, solches Beispiel wirklich erfüllt alle diesen präsentierten Anforderungen.

Wenn wir aber die reellen Zahlen mit Multiplikation nehmen, dann damit es eine Gruppe wäre, müssen wir die Null wegnehmen. Warum? Ja die Null hat doch kein Inverselement. Ja, wir dürfen doch nicht durch 0 dividieren, das ist ganz klar.

Beide diesen zwei Gruppen sind unendlich, weil die Menge unendlich ist. Hier haben wir aber eine endliche zweielementige Gruppe mit Multiplikation. In der Tabelle sehen wir die Struktur der Menge.

Obwohl das alles ganz klar und offensichtlich aussieht, wurde der Bereich von Gruppentheorie erst im 19. Jahrhundert erfunden. Namentlich war es der junge Franzose Evariste Galois, der als zwanzigjähriger die Lösungen algebraischer Gleichungen untersucht hat.

Nach der Arbeit von Galois gab es vielen Mathematiker, die die Gruppentheorie wieder erweiterten. Einer von den war der Deutsche Felix Klein, der die Verbindung zwischen Gruppen und Geometrie entdeckt hat. Das hat er in dem Schrift Erlanger Programm in 1872 beschrieben.

Und damit ich Ihnen die Komplexität des Bereichs zeige, erwähne ich den Projekt von Klassifizierung aller endlichen einfachen Gruppen. Es geht nämlich um einen mathematischen Satz, dessen Formulierung und Beweis fast 70 Jahre lang gedauert hat. Ich hoffe nur, dass ich ihn auswendig nie lernen muss.

Obwohl das alles nur wie eine Theorie aussieht, gibt es viele Anwendungen von Gruppentheorie. Eigentlich benutzen wir Gruppentheorie jeden Tag, wenn wir etwas zählen müssen - zum Beispiel Zeit, Geld oder Leute in der Klasse. Außerdem gibt es viele Verwendungen auch in Wissenschaften, wie zum Beispiel in Kryptographie, wo es das Teilgebiet von Eliptische-Kurven-Kryptographie gibt, Physik - namentlich in Relativitätstheorie oder Quantenmechanik. Auch in Kristallographie in Materialwissenschaft oder bei den Kombinationen von Rubiks Zauberwürfel hat die Gruppentheorie eine wichtige Rolle.

Ich fasse das jetzt zusammen: Sie haben gesehen, dass eine Gruppe - der wichtigste Begriff von Gruppentheorie – eine Struktur ist, die 4 Anforderungen erfüllen muss. Obwohl das ganze Gebiet erst von Galois entdeckt wurde und deshalb nicht einmal 200 Jahre alt ist, hat es schon viele Anwendungen, die wir in unserem Alltag benutzen.

Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit. Habt Ihr einige Fragen?