Zadání samostatné práce SN2
Explicitní Rungovy-Kuttovy metody

Úkoly:

1. Naprogramujte obecnou RK metodu druhého řádu, tj. nezadávám do programu konkrétní čísla, ale na vstupu do programu zadáte Vámi zvolený koeficient a, koeficient b se dopočítává v těle programu, aby byly splněny podmínky pro metodu druhého řádu.
2. Naprogramujte obecnou RK metodu třetího řádu (na vstupu do funkce zadávám parametry c_2 a c_3, zbývající koeficienty b_1, b_2, b_3 a a_{32} dopočítáte v těle programu, aby byly splněny podmínky pro metodu třetího řádu) .
3. U obou metod spočtěte chybu a tyto chyby porovnejte.
4. Nalezněte řešení níže zadané diferenciální rovnice metodou RK2, RK3 a metodou ode45 (která je implementována v Matlabu) , vykreslete všechna tři řešení včetně přesného do jednoho obrázku a uveďte Vaši volbu koeficientů a, b_1, b_2, b_3, a_{32} a volbu počtu uzlů N.

své výsledky sepište a odevzdáte mi je na dalším cvičení

Stručné shrnutí teorie:

s-stupňová explicitní Rungova-Kuttova metoda:

$$y_{n+1} = y_n + \tau(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s)\,,$$

kde k_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ jsou koeficienty dané vztahy:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n),\\
k_2 &= f(t_n + \tau c_2, y_n + \tau a_{21} k_1),\\
k_3 &= f(t_n + \tau c_3, y_n + \tau(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)),\\
&\vdots\\
k_s &= f(t_n + \tau c_s, y_n + \tau(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})),
\end{aligned}$$

a kde b_i, c_i, a_{ij} jsou konstanty

Abychom dostali konkrétní metodu, musíme určit stupeň s a konstanty c_i, b_i, a_{ij}.

Konstanty RK metod se zapisují do tzv. *Butcherovy tabulky:*

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

RK metoda je řádu p, pokud lokální diskretizační chyba je řádu $O(\tau^{p+1})$.

Pro $p = 1, 2, 3$ lze odvodit následující tzv. *podmínky řádu*:

řád 1: $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1\,,$

řád 2: $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1\,,\ \ \sum_{i=2}^{s} b_i c_i = \tfrac{1}{2}\,,$

řád 3: $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1\,,\ \ \sum_{i=2}^{s} b_i c_i = \tfrac{1}{2}\,,\ \ \sum_{i=2}^{s} b_i c_i^2 = \tfrac{1}{3}\,,\ \ \sum_{i=2}^{s}\sum_{j=2}^{i-1} b_i a_{ij} c_j = \tfrac{1}{6}\,.$

Všechny prakticky používané metody navíc splňují podmínku

$$c_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i,i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,,$$

Metody řádu 2.

Pro $s = p = 2$ má explicitní RK metoda Butcherovu tabulku

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Podmínky pro metodu řádu 2 stanoví

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c_2 = \tfrac{1}{2}\,,$$

navíc předpokládáme $a_{21} = c_2$, takže dostáváme tabulku

$$\begin{array}{c|cc} a & a & \\ \hline & 1-b & b \end{array}$$

kde $ab = \frac{1}{2}$.
Parametry a, b jsou tedy svázány jednou podmínkou.
Zvolíme-li $a \neq 0$, je $b = 1/(2a)$.

Metody řádu 3.

Pro $s = p = 3$ dostáváme Butcherovu tabulku

$$\begin{array}{c|ccc} c_2 & c_2\,(=a_{21}) & & \\ c_3 & c_3 - a_{32}\,(=a_{31}\ ) & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

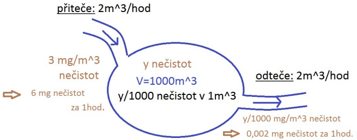
a 4 podmínky pro metodu řádu 3:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1\,, \qquad b_2 c_2 + b_3 c_3 = \tfrac{1}{2}\,,$$
$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \tfrac{1}{3}\,, \qquad b_3 a_{32} c_2 = \tfrac{1}{6}\,.$$

Když zvolíme dva parametry $0 < c_2 < c_3$, jsou tím všechny koeficienty metody jednoznačně určeny.

Příklad:

a) V jezeře je voda o objemu $1000m^3$. Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je $2\frac{m^3}{hod}$. Voda v jezeře je na začátku čistá, začne však do něj přitékat znečištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je $3\frac{mg}{m^3}$. Vaším úkolem je zachránit život v jezeře, takže koncentrace nečistot v jezeře musí zůstat pod hodnotou $1\frac{mg}{m^3}$. Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda v jezeře je dobře promíchána.



b) Jak by se situace změnila, kdyby byl přítok $3\frac{m^3}{hod}$ a odtok zůstal $2\frac{m^3}{hod}$?

```
function  [t, y] = RK2(f, cas, y0, N, a)
% začátek stejný jako pro Explicitního Eulera
t =
τ = ...
y = zeros(...)
y(1) = ... % až sem
b = ... % dopočítám konstantu b
   for n= ...
      k1 = ...
      k2 = ...
      y(n + 1) = ...
   end
yp = ... % výpočet přesného řešení pokud jej znám
chyba = ...% výpočet chyby metody
end
```

function $[t, y] =$ **RK3**$(f, cas, y_0, N, c_2, c_3)$
% začátek stejný jako pro Explicitního Eulera
$t =$
$\tau = \ldots$
$y =$ zeros$(\ldots)$
$y(1) = \ldots$ % až sem
$b2 = \ldots$ % dopočítám konstantu $b2$ ze soustavy 4 rnic pro 4 neznámé s parametry c_2, c_3, viz str. 7
$b3 = \ldots$ % obdobně dopočítám konstantu $b3$
$b1 = \ldots$ % obdobnědopočítám konstantu $b1$
$a32 = \ldots$ % obdobně dopočítám konstantu $a32$
  for n= $\ldots$
    $k1 = \ldots$
    $k2 = \ldots$
    $k3 = \ldots$
    $y(n+1) = \ldots$
  end
$yp = \ldots$ % výpočet přesného řešení pokud jej znám
$chyba = \ldots$% výpočet chyby metody