Výpočtové příklady a výpočty pro Separable Simple Recourse

Tomáš Ondruch

4oMAI/1

15.12.2017

Osnova

1. Úvod - Vymezení problému
2. Separable Simple Recourse - Teoretický základ
3. Příklad č. 1 (S.Vajda)
4. Příklad č. 2 - Farmer's Problem (Birge & Louveaux)
5. Otázky

Dvoustupňová úloha

Úloha s náhodnou kompenzací

$$\min_{\mathrm{x}} \{\mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathcal{Q}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\},$$

kde

$$\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_{\xi}\{\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)\},$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \min_{\mathrm{y}(\xi)} \{\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(\xi)\mathrm{y}(\xi) \mid \mathrm{W}(\xi)\mathrm{y}(\xi) = \mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}, \mathrm{y}(\xi) \geq 0 \; s.j.\}.$$

Rozhodovací proměnné

x - proměnná pro první stupeň úlohy (H&N)
$\mathrm{y}(\xi)$ - proměnná pro druhý stupeň úlohy (kompenzační kroky)

Vybrané typy kompenzace (Recourse Types)

- **Náhodná kompenzace** = Random Recourse

  $\mathrm{W}(\xi)$ má stochastický charakter
- **Pevná kompenzace** = Fixed Recourse

  $\mathrm{W}(\xi) = \mathrm{W}$ je konstantní
- **Rel. úplná kompenzace** = Relatively Complete Recourse

  W je konstantní

  $(\mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}) \in \mathit{pos}\,\mathrm{W}$
- **Úplná kompenzace** = Complete Recourse

  W je konstantní

  $\forall(\mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}) : \ \mathrm{W}\mathrm{y}(\xi) = \mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x})$
- **Jednoduchá kompenzace** = Simple Recourse

  $\mathrm{W} = (\mathrm{I}, -\mathrm{I})$
- **Jednoduchá kompenzace s využitím separace**

  Separable Simple Recourse

Separable Simple Recourse 1/3

Značení a základní rysy

$\mathrm{W} = \text{konst.} = (\mathrm{I}, -\mathrm{I})$
$\mathrm{q}(\xi) = (\mathrm{q}^+, \mathrm{q}^-), \quad \mathrm{q}^+ + \mathrm{q}^- \geq 0$ (koeficienty penalizace)
$\mathrm{T}(\xi) = \mathrm{T}$, (determ. charakter produkce)
$\mathrm{h}(\xi) = \xi$ (stochast. charakter poptávky)
$\mathrm{y}(\xi) = (\mathrm{y}^+(\xi), \mathrm{y}^-(\xi))$ (kompenzační kroky)

$\rightarrow$ s využitím zavedeného značení lze pro SSR zapsat

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \min_{\mathrm{y}^+(\xi), \mathrm{y}^-(\xi)} \{ {\mathrm{q}^+}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}^+(\xi) + {\mathrm{q}^-}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}^-(\xi) \},$$

$$\mathrm{y}^+(\xi) - \mathrm{y}^-(\xi) = \mathrm{h}(\xi) - \mathrm{Tx},$$

$$\mathrm{y}^+(\xi),\ \mathrm{y}^-(\xi) \geq 0.$$

Separable Simple Recourse 2/3

→ substituce: $\mathrm{Tx} = \chi \quad (\mathrm{T_i x} = \chi_\mathrm{i})$
→ pak lze zapsat $\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)$ v separabilním tvaru v proměnné χ:

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{Q_i}(\chi_\mathrm{i}, \xi), \ \text{kde}$$

$$\mathrm{Q_i}(\chi_\mathrm{i}, \xi) = \begin{cases} (\xi_i - \chi_i)\mathrm{q_i^+} & \chi_i < \xi_i, \\ -(\xi_i - \chi_i)\mathrm{q_i^-} & \chi_i > \xi_i. \end{cases}$$

Uvedenou vlastnost lze dále uplatnit také při výpočtu $\mathcal{Q}(\mathrm{x})$.

Separable Simple Recourse 3/3

$$\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_\xi\left\{\mathrm{Q}(\mathrm{x},\xi)\right\} = \mathrm{E}_\xi\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Q_i}(\mathrm{x},\xi)\right\} = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{E}_\xi\{\mathrm{Q_i}(\mathrm{x},\xi)\}.$$

Pak pro $\mathcal{Q}_i(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_\xi\{\mathrm{Q_i}(\mathrm{x},\xi)\}$ je

$$\mathcal{Q}_i(\mathrm{x}) = \mathrm{q_i^+}\bar{\xi}_\mathrm{i} - (\mathrm{q_i^+} - \mathrm{q_i}\mathrm{F_i}(\mathrm{T_i}\mathrm{x}))\mathrm{T_i}\mathrm{x} - \mathrm{q_i}\int_{-\infty}^{\mathrm{T_i}\mathrm{x}}\xi_\mathrm{i}\mathrm{d}\mathrm{F_i}(\xi_\mathrm{i}),$$

kde $\mathrm{q_i} = \mathrm{q_i^+} + \mathrm{q_i^-}$, $\mathrm{F_i}$ je kumulativní distribuční funkce náhodné veličiny $\mathrm{h_i}(\xi) = \xi_\mathrm{i}$ a $\bar{\xi}_\mathrm{i}$ je střední hodnota rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathrm{h_i}(\xi) = \xi_\mathrm{i}$.

Kompenzační funkce v separabilním tvaru $\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m}\mathcal{Q}_i(\mathrm{x})$ *umožňuje zjednodušení výpočtu ve smyslu využití výpočtů pro jednotlivé vystupující náhodné veličiny* $\mathrm{h_i}(\xi) = \xi_\mathrm{i}$.

Příklad č. 1 (S. Vajda) - 1/3

Zadání

$$\min \{x + \mathrm{E} \min 2y \,|\, 0 \le x \le 100, x + y \ge b, y \ge 0\}.$$

Reformulace

$$\begin{gathered} \min \{x_1 + \mathrm{E} \min (2y^+ + 0y^-) \,|\, x_1 + x_2 = 100, \\ x_1 + y^+ - y^- = b, \\ x_1, x_2, y^+, y^- \ge 0\}. \end{gathered}$$

Náhodná veličina $b \sim \mathrm{Ro}(70, 80)$

Postup řešení podle Madanského (1960)

Příklad č. 1 (S. Vajda) - 2/3

Zadání

$$\min \{x + \mathrm{E} \min 2y \mid 0 \leq x \leq 100, x + y \geq b, y \geq 0\},$$

$$b \sim \mathrm{Ro}(70, 80).$$

Řešení

$$\rightarrow \mathrm{E}(b) = \frac{80 + 70}{2} = 75.$$

- $x \geq 80 \rightarrow x + y \geq b \rightarrow$ je splněno $\forall y \geq 0$,
  tedy $x + \mathrm{E} \min 2y = x$,
- $x \leq 70 \rightarrow \mathrm{E}(2y) \geq \mathrm{E}(2b - 2x) = 2\mathrm{E}(b) - 2x = 150 - 2x$,
  tedy $x + \mathrm{E} \min 2y = 150 - 2x$,
- $70 \leq x \leq 80 \rightarrow$ vede na výpočet integrálu.

Příklad č. 1 (S. Vajda) - 3/3

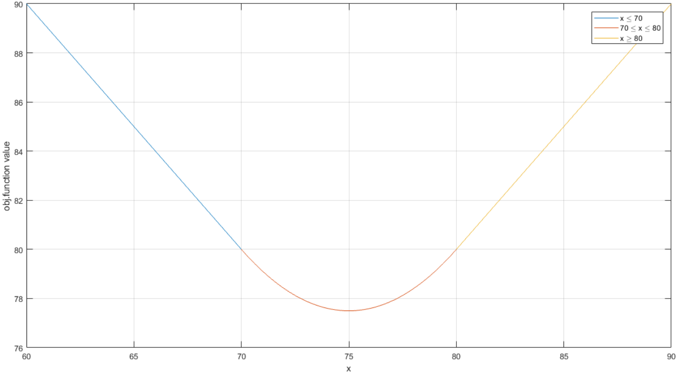
- $70 \leq x \leq 80$

  $E(y) = \int_x^{80} y \cdot f(y)\, dy = \int_x^{80} (b - x) \cdot \frac{1}{10}\, db = \frac{1}{10} \int_x^{80} (b - x)\, db,$

  tedy $x + E \min 2y = x + \frac{2}{10} \int_x^{80} (b - x)\, db = 77.5 + \frac{(x-75)^2}{10}.$

  Minimum dosaženo pro $x_{min} = 75$, odpovídající hodnota účelové funkce je $z_{min} = 77.5$.

Příklad č. 1 (S. Vajda) - Graf účelové funkce



Graf účelové funkce pro řešený příklad

Farmer's Problem

$$\min_{x} \{c^T x + \mathcal{Q}(x) \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

$c \approx$ vektor výdajů za obdělání půdy,
$x \approx$ vektor velikostí ploch pro zasetí uvažovaných plodin,
$\mathcal{Q}(x) = E_{\xi}\{Q(x, \xi)\}$.

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 2/7

Farmer's Problem - Recourse Stage

$$Q(x,\xi) = \min_y \{q^T y \,|\, Wy = h - T(\xi)x, y \geq 0\}.$$

$q = (q^+, q^-) \approx$ vektor nákupních a prodejních cen pro uvažované plodiny,

$q = (y^+, y^-) \approx$ vektor množství nakoupených a prodaných plodin,

$W = (I, -I) =$ matice jednoduché kompenzace,

$h \approx$ vektor poptávky,

$T = T(\xi) \approx$ matice výnosů ze sklizně, která je v závislosti na počasí proměnlivá,

$\xi \sim Ro\left(0.8\, E(t_i), 1.2\, E(t_i)\right)$,

$E(t_i) = \bar{t}_i \approx$ střední hodnota výnosu ze sklizně pro $i-$tou plodinu.

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 3/7

Vzájemná nezávislost výnosů ze sklizně pro uvažované plodiny

$\rightarrow$ nezávislost složek náhodného vektoru ξ,
$\rightarrow$ $\mathrm{E}_\xi Q(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}_\xi Q_i(x_i,\xi)$,
$\rightarrow$ výpočet kompenzace pro jednotlivé plodiny zvlášť.

Výpočet kompenzace pro cukrovou třtinu

$$Q_1(x_1,\xi) = \min \{-36y_1^-(\xi) - 10y_2^-(\xi) \,|\, y_1^-(\xi) + y_2^-(\xi) \le t_1(\xi)x_1,$$

$$y_1^-(\xi) \le 6000,$$
$$y_1^-(\xi), y_2^-(\xi) \ge 0\}.$$

Po dosazení výrazů pro $y_1^-(\xi), y_2^-(\xi)$, které plynou z povahy úlohy, dostáváme kompenzaci ve tvaru

$$Q_1(x_1,\xi) = \min\{-36\min[6000, t_1(\xi)x_1] - 10\max[t_1(\xi)x_1 - 6000, 0]\}$$

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 4/7

$$Q_1(x_1, \xi) = \min\{-36\min[6000, t_1(\xi)x_1] - 10\max[t_1(\xi)x_1 - 6000, 0]\}$$

Podle velikosti plochy x_1 při maximálním a minimálním možném výnosu ze sklizně dále počítáme finální kompenzace:

- $x_1 \leq \frac{6000}{1.2\,E(t_1)} \rightarrow \mathcal{Q}_1(x_1) = -36\bar{t}_1 x_1$
- $x_1 \geq \frac{6000}{0.8\,E(t_1)} \rightarrow \mathcal{Q}_1(x_1) = -156000 - 10\bar{t}_1 x_1$
- $\frac{6000}{1.2\,E(t_1)} \leq x_1 \leq \frac{6000}{0.8\,E(t_1)} \rightarrow$ vede na výpočet integrálu.

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 5/7

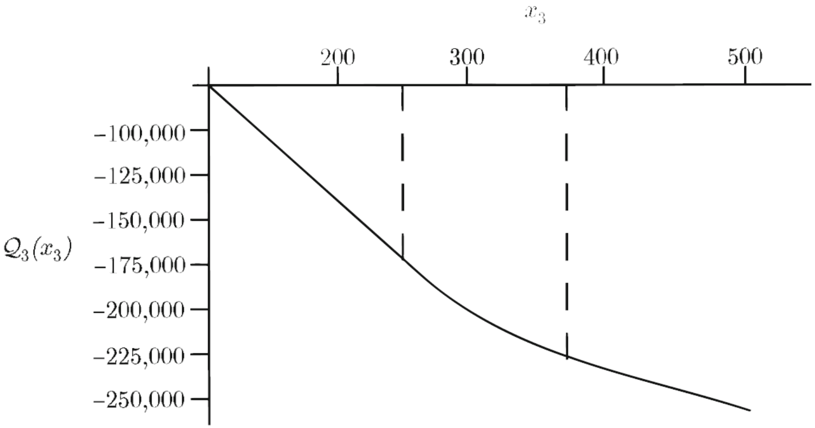
- $\frac{6000}{1.2\,\mathrm{E}(t_1)} \leq x_1 \leq \frac{6000}{0.8\,\mathrm{E}(t_1)}$:

$$\mathcal{Q}_1(x_1) = -\int_{6000/1.2\,\mathrm{E}(t_1)}^{6000/x_1} 36tx_1 f(t)\,dt -$$

$$-\int_{6000/x_1}^{6000/0.8\,\mathrm{E}(t_1)} (216000 + 10tx_1 - 60000)\, f(t)\,dt. =$$

$$-36\bar{t}_1 x_1 + \frac{13\left((6000/0.8\bar{t}_1)\,x_1 - 6000\right)^2}{x_1\left(6000/0.8\bar{t}_1 - 6000/1.2\bar{t}_1\right)}.$$

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 6/7



Graf kompenzace $\mathcal{Q}_1(x_1)$ pro $\bar{t}_1 = 20$

Příklad č. 2 (Birge & Louveaux) - 7/7

Další postup

$\rightarrow$ analogicky obdobný výpočet $\mathcal{Q}_2(x_2)$, $\mathcal{Q}_3(x_3), \ldots, \mathcal{Q}_n(x_n)$

$\rightarrow \min\ c^T x + \mathcal{Q}_1(x_1) + \mathcal{Q}_2(x_2) + \mathcal{Q}_3(x_3) + \ldots + \mathcal{Q}_n(x_n)$

Předpoklady:

- $\mathcal{Q}_i(x_i)$ jsou konvexní, spojité a diferencovatelné
- $c^T x$ je lineární funkce

$\rightarrow$ výpočet globálního optima (využití podmínek K-K-T)

Literatura

1. VAJDA, S. *Probabilistic Programming*. New York: Academic Press, 1972, 127 s.
2. BIRGE, John R. a François LOUVEAUX. *Introduction to stochastic programming*. 2nd ed. New York: Springer, 2011, xxv, 485 s. : il. ; 27 cm. ISBN 978-1-4614-0236-7.
3. POPELA, P.: *Stochastic Programming*, University of Malta, učební texty ÚM VUT v Brně, 2017, 72 s.

Otázky

Děkuji za pozornost.

Otázky?