Výpočtové příklady a výpočty pro Separable Simple Recourse

Tomáš Ondruch

14.12.2017

Úvod

V semestrální práci se podrobněji zabýváme dvoustupňovou úlohou stochastické optimalizace. V úvodní části uvedeme vybrané typy kompenzace a blíže uvedeme vlastnosti a princip výpočtů pro tzv. jednoduchou kompenzaci s využitím separace (angl. *separable simple recourse*). Následně je uveden jednoduchý příklad z publikace [1], jehož výpočet je názornou ilustrací pro využití vlastností typických pro zvolený typ kompenzace. Závěrečná kapitola se věnuje optimalizační úloze farmáře (angl. *Farmer's Problem*) z práce [2], který lze považovat za vzorový příklad využití výpočtu *separable simple recourse* v aplikační sféře.

Dvoustupňová úloha

Dvoustupňovou úlohu s náhodnou kompenzací lze zapsat v obecném tvaru

$$\min_{\mathrm{x}} \{\mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathcal{Q}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\},$$

kde

$$\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_{\xi}\{\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)\},$$
$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \min_{\mathrm{y}(\xi)} \{\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(\xi)\mathrm{y}(\xi) \mid \mathrm{W}(\xi)\mathrm{y}(\xi) = \mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}, \mathrm{y}(\xi) \geq 0 \ \textit{s.j.}\}.$$

Vhodným přístupem pro určení hodnot pro rozhodovací proměnnou pro první stupeň úlohy x je například tzv. *here-and-now* přístup. Cílem druhého stupně uvedené úlohy je nalezení hodnot pro rozhodovací proměnnou $\mathrm{y}(\xi)$, kterou lze vnímat jako realizaci kompenzace.

Poznámka: Ve výše uvedeném zápise úlohy a pro další výklad mají symboly $\mathrm{c}, \mathrm{x}, \mathrm{b}, \mathrm{y}$ z hlediska dimenze význam vektorů, $\mathrm{A}, \mathrm{W}, \mathrm{T}$ jsou matice a ξ identifikuje náhodný vektor.

Kompenzace

Autoři publikací [2] a [3] uvádějí vybrané typy kompenzací, které blíže specifikují tvar zadání pro druhý stupeň úlohy. Níže jsou uvedeny názvy a významné charakteristiky pro takové typy, které jsou z hlediska obsahu práce relevantní. Jejich seřazení odpovídá postupnému přechodu od nejobecnějšího tvaru kompenzace k velmi konkrétnímu případu pro *separable simple recourse*, kterému se blíže věnuje další kapitola.

- **Náhodná kompenzace** = Random Recourse
  $\mathrm{W}(\xi)$ má stochastický charakter
- **Pevná kompenzace** = Fixed Recourse
  $\mathrm{W}(\xi) = \mathrm{W}$ je konstantní
- **Rel. úplná kompenzace** = Relatively Complete Recourse
  W je konstantní, $(\mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}) \in \mathit{pos}\,\mathrm{W}$
- **Úplná kompenzace** = Complete Recourse
  W je konstantní, $\forall(\mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}) :\ \mathrm{W}\mathrm{y}(\xi) = \mathrm{h}(\xi) - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}$
- **Jednoduchá kompenzace** = Simple Recourse
  $\mathrm{W} = (\mathrm{I}, -\mathrm{I})$
- **Jednoduchá kompenzace s využitím separace**
  Separable Simple Recourse

Separable Simple Recourse

Typ kompenzace *separable simple recourse* (dále jen SSR) je případem jednoduché kompenzace, tedy rovněž platí $\mathrm{W} = (\mathrm{I}, -\mathrm{I})$. V dalším výkladu se zaměříme na princip výpočtu kompenzační funkce $\mathcal{Q}(\mathrm{x})$, přičemž bude využito značení, jehož výpis je spolu s obvyklou interpretací převzatou z nastudovaných zdrojů uveden níže.

$\mathrm{q}(\xi) = (\mathrm{q}^+, \mathrm{q}^-), \mathrm{q}^+ + \mathrm{q}^- \geq 0$ (koeficienty penalizace)
$\mathrm{T}(\xi) = \mathrm{T}$, (deterministický charakter produkce)
$\mathrm{h}(\xi) = \xi$ (stochastický charakter poptávky)
$\mathrm{y}(\xi) = (\mathrm{y}^+(\xi), \mathrm{y}^-(\xi))$ (kompenzační kroky)

S využitím uvedeného značení pak lze $\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)$ pro případ SSR zapsat ve tvaru

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \min_{\mathrm{y}^+(\xi), \mathrm{y}^-(\xi)} \{\mathrm{q}^{+\mathrm{T}}\mathrm{y}^+(\xi) + \mathrm{q}^{-\mathrm{T}}\mathrm{y}^-(\xi)\},$$

$$y^+(\xi) - y^-(\xi) = h(\xi) - Tx,$$
$$y^+(\xi),\, y^-(\xi) \geq 0.$$

Separabilita

Při výpočtu kompenzační funkce $\mathcal{Q}(x) = E_\xi\{Q(x,\xi)\}$, kde zápis pro $Q(x,\xi)$ odpovídá tvaru uvedenému pro SSR, lze využít vlastnost separability $Q(x,\xi)$. Při substituci $Tx = \chi$ pak lze zapsat

$$Q(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(\chi_i, \xi), \text{ kde}$$
$$Q_i(\chi_i,\xi) = \begin{cases} (\xi_i - \chi_i)q_i^+ & \chi_i < \xi_i, \\ -(\xi_i - \chi_i)q_i^- & \chi_i > \xi_i. \end{cases}$$

Využití separability se stává velmi účelným zejména v případě určení střední hodnoty při výpočtu $\mathcal{Q}(x)$:

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi\left\{Q(x,\xi)\right\} = E_\xi\left\{\sum_{i=1}^{m} Q_i(x,\xi)\right\} = \sum_{i=1}^{m} E_\xi\{Q_i(x,\xi)\}.$$

Pak pro $\mathcal{Q}_i(x) = E_\xi\{Q_i(x,\xi)\}$ je

$$\mathcal{Q}_i(x) = q_i^+\bar{\xi}_i - (q_i^+ - q_i F_i(T_i x))T_i x - q_i \int_{-\infty}^{T_i x} \xi_i dF_i(\xi_i),$$

kde $q_i = q_i^+ + q_i^-$, F_i je kumulativní distribuční funkce náhodné veličiny $h_i(\xi) = \xi_i$ a $\bar{\xi}_i$ je střední hodnota rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $h_i(\xi) = \xi_i$.

Uvedené poznatky jsou důsledkem věty, kterou autoři v anglicky psané literatuře nazývají *Fundamental Theorem for Separable Simple Recourse.* [3]
V dalších kapitolách budou uvedeny příklady, při jejichž řešení lze získané poznatky o výpočtu kompenzace využít.

Příklad č. 1

Zadání

$$\min\left\{x + E\min 2y \mid 0 \leq x \leq 100, x + y \geq b, y \geq 0\right\},$$

$$b \sim Ro(70, 80).$$

Příklad uvádí S. Vajda ve své publikaci [1], přičemž čtenáři nabízí několik postupů řešení, které vedou k nalezení optima. Z důvodu konzistence ve výkladu bude níže uveden způsob řešení úlohy, který nejblíže odpovídá technikám zmíněným v předchozí kapitole.

Řešení

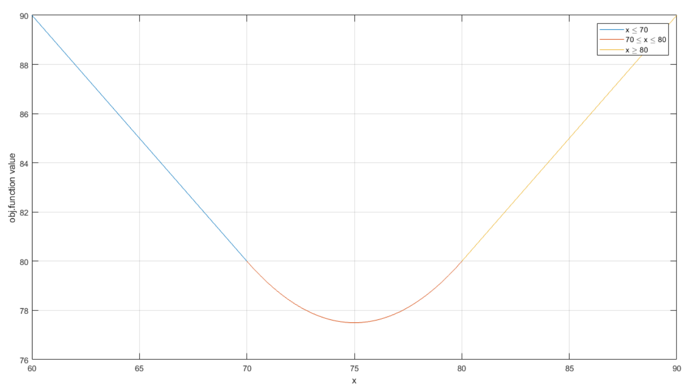
Pro střední hodnotu náhodné veličiny b platí

$$\mathrm{E(b)} = \frac{80 + 70}{2} = 75.$$

Podle intervalu $(70, 80)$ pro rovnoměrné rozdělení náhodné veličiny dále studujeme jednotlivé případy pro hodnoty rozhodovací proměnné x:

- $\mathrm{x} \geq 80$, pak $\mathrm{x} + \mathrm{y} \geq \mathrm{b}$ je splněno $\forall \mathrm{y} \geq 0$, tedy $\mathrm{x} + \mathrm{E} \min 2\mathrm{y} = \mathrm{x}$,
- $\mathrm{x} \leq 70$, pak $\mathrm{E(2y)} \geq \mathrm{E(2b - 2x)} = 2\mathrm{E(b)} - 2\mathrm{x} = 150 - 2\mathrm{x}$,
  tedy $\mathrm{x} + \mathrm{E} \min 2\mathrm{y} = 150 - 2\mathrm{x}$,
- $70 \leq \mathrm{x} \leq 80$, pak střední hodnotu lze určit s pomocí integrálu
  $\mathrm{E(y)} = \int_{\mathrm{x}}^{80} \mathrm{y} \cdot \mathrm{f(y)}\, \mathrm{dy} = \int_{\mathrm{x}}^{80} (\mathrm{b} - \mathrm{x}) \cdot \frac{1}{10}\, \mathrm{db} = \frac{1}{10} \int_{\mathrm{x}}^{80} (\mathrm{b} - \mathrm{x})\, \mathrm{db}$,
  tedy $\mathrm{x} + \mathrm{E} \min 2\mathrm{y} = \mathrm{x} + \frac{2}{10} \int_{\mathrm{x}}^{80} (\mathrm{b} - \mathrm{x})\, \mathrm{db} = 77.5 + \frac{(\mathrm{x} - 75)^2}{10}$.

Z výše uvedených výpočtů a dosažených výsledků pro jednotlivé případy plyne, že řešením úlohy je $\mathrm{x_{min}} = 75$, odpovídající hodnota účelové funkce je $\mathrm{z_{min}} = 77.5$. Graf účelové funkce pro řešený příklad je uveden níže.



Obrázek 1: Graf účelové funkce pro řešený příklad

Příklad č. 2 - „Farmer's Problem“

Zadání

Z důvodu obsáhlosti úlohy farmáře z publikace [1] se zaměříme zejména na vybranou část příkladu, která se zabývá výpočtem dílčí kompenzace s využitím poznatků o SSR. Kompletní zadání včetně vstupních číselných hodnot a několik přístupů v řešení je uvedeno v citované publikaci.
Řešíme dvoustupňovou úlohu ve tvaru

$$\min_{\mathrm{x}} \{\mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathcal{Q}(\mathrm{x}) \,|\, \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\}.$$

V případě úlohy farmáře lze c interpretovat jako vektor výdajů za obdělání půdy, x má význam vektoru velikostí ploch pro zasetí uvažovaných plodin, $\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_{\xi}\{\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)\}$ a $\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)$ je optimální hodnota pro druhý stupeň úlohy.

Druhý stupeň úlohy

V případě kompenzační funkce $\mathcal{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_{\xi}\{\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi)\}$ je

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \min_{\mathrm{y}} \{\mathrm{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \,|\, \mathrm{Wy} = \mathrm{h} - \mathrm{T}(\xi)\mathrm{x}, \mathrm{y} \geq 0\}.$$

Z hlediska interpretace pak $\mathrm{q} = (\mathrm{q}^+, \mathrm{q}^-)$ představuje vektor nákupních a prodejních cen pro uvažované plodiny, $\mathrm{q} = (\mathrm{y}^+, \mathrm{y}^-)$ je vektor množství nakoupených a prodaných plodin, $\mathrm{W} = (\mathrm{I}, -\mathrm{I}) =$ je matice jednoduché kompenzace, h má význam vektoru poptávky, $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\xi)$ je matice výnosů ze sklizně, která je v závislosti na počasí proměnlivá, a $\xi \sim \mathrm{Ro}\,(0.8\,\mathrm{E}(\mathrm{t_i}), 1.2\,\mathrm{E}(\mathrm{t_i}))$, tedy výnosy ze sklizně kolísají s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti okolo střední hodnoty výnosu pro $\mathrm{i}-$tou plodinu $\mathrm{E}(\mathrm{t_i}) = \bar{t_i}$, přičemž krajní body představují 20% pokles a nárůst ve výnosu oproti známé hodnotě $\mathrm{E}(\mathrm{t_i})$.
Při uvažování vzájemné nezávislosti výnosů ze sklizně pro n uvažovaných plodin, tedy za předpokladu nezávislosti složek náhodného vektoru $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{\mathrm{n}})$ lze využít účelných vlastností pro SSR. Pak tedy

$$\mathrm{E}_{\xi}\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{\xi}\mathrm{Q_i}(\mathrm{x_i}, \xi)$$

a výpočet kompenzace tak lze provést pro jednotlivé plodiny zvlášť.

Výpočet kompenzace pro vybranou plodinu

V dalším textu se budeme zabývat výpočtem kompenzace pro konkrétní vybranou plodinu. V textu publikace [2] autor popisuje výpočet kompenzace

pro cukrovou třtinu.
S využitím zadaných informací pro podmínky nákupu a prodeje vybrané plodiny pak po dosazení číselných hodnot do formálního zápisu dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}_1(\mathrm{x}_1, \xi) = \min \{ -36\mathrm{y}_1^-(\xi) - 10\mathrm{y}_2^-(\xi) \,|\, \mathrm{y}_1^-(\xi) + \mathrm{y}_2^-(\xi) \le \mathrm{t}_1(\xi)\mathrm{x}_1,& \\
\mathrm{y}_1^-(\xi) \le 6000,& \\
\mathrm{y}_1^-(\xi), \mathrm{y}_2^-(\xi) \ge 0 \}.&
\end{aligned}
$$

Po dosazení výrazů pro $\mathrm{y}_1^-(\xi), \mathrm{y}_2^-(\xi)$, které plynou z povahy úlohy, dostáváme kompenzaci ve tvaru

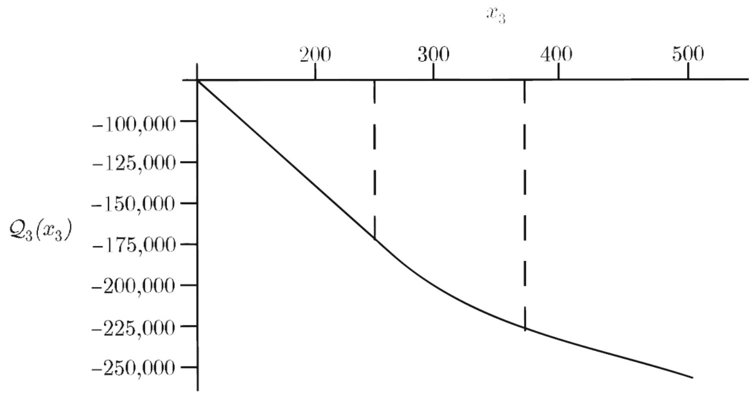
$$
\mathrm{Q}_1(\mathrm{x}_1, \xi) = \min \{ -36\min [6000, \mathrm{t}_1(\xi)\mathrm{x}_1] - 10\max [\mathrm{t}_1(\xi)\mathrm{x}_1 - 6000, 0] \}.
$$

Podobně jako v řešené úloze z publikace [1] vyšetřujeme jednotlivé případy z hlediska polohy hodnoty x_1 vůči intervalu pro uvažovanou náhodnou proměnnou:

- $\mathrm{x}_1 \le \frac{6000}{1.2\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)}$, pak $\mathcal{Q}_1(\mathrm{x}_1) = -36\bar{\mathrm{t}}_1\mathrm{x}_1$
- $\mathrm{x}_1 \ge \frac{6000}{0.8\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)}$, pak $\mathcal{Q}_1(\mathrm{x}_1) = -156000 - 10\bar{\mathrm{t}}_1\mathrm{x}_1$
- $\frac{6000}{1.2\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)} \le \mathrm{x}_1 \le \frac{6000}{0.8\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)}$, pak střední hodnotu lze určit s pomocí integrálu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1(\mathrm{x}_1) = -\int_{6000/1.2\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)}^{6000/\mathrm{x}_1} 36\mathrm{t}\mathrm{x}_1 \mathrm{f}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} - \\
-\int_{6000/\mathrm{x}_1}^{6000/0.8\,\mathrm{E}(\mathrm{t}_1)} (216000 + 10\mathrm{t}\mathrm{x}_1 - 60000)\,\mathrm{f}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}. = \\
-36\bar{\mathrm{t}}_1\mathrm{x}_1 + \frac{13\,((6000/0.8\bar{\mathrm{t}}_1)\,\mathrm{x}_1 - 6000)^2}{\mathrm{x}_1\,(6000/0.8\bar{\mathrm{t}}_1 - 6000/1.2\bar{\mathrm{t}}_1)}.
\end{aligned}
$$

Pro jednotlivé případy jsme získali předpis pro kompenzační funkci $\mathcal{Q}_1(\mathrm{x}_1)$, jejíž průběh je pro celý uvažovaný interval $\mathrm{x}_1 \in \langle 0, 500 \rangle$ znázorněn na obrázku uvedeném na následující straně dokumentu.



Obrázek 2: Graf kompenzace $\mathcal{Q}_1(x_1)$ pro $\bar{\mathrm{t}}_1 = 20$

Další postup v řešení

V další fázi řešení úlohy se lze zabývat určením kompenzací $\mathcal{Q}_2(\mathrm{x}_2), ..., \mathcal{Q}_\mathrm{n}(\mathrm{x}_\mathrm{n})$ pro dalších n uvažovaných plodin, přičemž postup výpočtu bude ve všech případech analogický k tomu výše uvedenému. Další krok pak představuje návrat k původnímu kompletnímu zadání a nalezení optima pro úlohu

$$\min \mathrm{c}^\mathrm{T}\mathrm{x} + \mathcal{Q}_1(\mathrm{x}_1) + \mathcal{Q}_2(\mathrm{x}_2) + \mathcal{Q}_3(\mathrm{x}_3) + ... + \mathcal{Q}_\mathrm{n}(\mathrm{x}_\mathrm{n}).$$

Jelikož kompenzační funkce $\mathcal{Q}_i(x_i)$ jsou konvexní, spojité a diferencovatelné a účelová funkce prvního stupně $\mathrm{c}^\mathrm{T}\mathrm{x}$ je lineární, lze výše uvedenou úlohu řešit prostředky konvexní optimalizace, v případě které lze využít Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek pro hledání globálního optima. Jejich konkrétní použití v řešení úlohy farmáře je uvedeno v textu [2]. Vhodnou motivací pro možné navazující rozšíření poznatků získaných při zpracovávání tohoto textu je pak například vyšetření řešitelnosti úloh, ve kterých náhodná veličina je charakterizovaná jiným než rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti.

Literatura

[1] VAJDA, S. *Probabilistic Programming.* New York: Academic Press, 1972, 127 s.
[2] BIRGE, John R. a François LOUVEAUX. *Introduction to stochastic programming.* 2nd ed. New York: Springer, 2011, xxv, 485 s. : il. ; 27 cm. ISBN 978-1-4614-0236-7.
[3] POPELA, P.: *Stochastic Programming*, University of Malta, učební texty ÚM VUT v Brně, 2017, 72 s.