TIN úkol 1 – Ondřej Ondryáš – xondry02

1a) Vytvoříme soustavu rovnic nad reg. výrazy s proměnnými X_q, X_r, X_s, kde rovnice X_i popisuje množ. řetězců přijímaných ze stavu i:

$$\begin{array}{lcccccc} & & \varepsilon & q & r & s & \\ X_q & = & & & aX_r & + bX_s & \\ X_r & = & \varepsilon & & & + bX_s & \\ X_s & = & & bX_q & + aX_r & + cX_s & \end{array}$$

$$X_q = a(\varepsilon + bX_s) + bX_s = a + abX_s + bX_s = (ab+b)X_s + a$$
$$X_s = bX_q + a(\varepsilon + bX_s) + cX_s = bX_q + a + abX_s + cX_s$$

$$X_s = b((ab+b)X_s + a) + a + abX_s + cX_s$$
$$= (bab+bb)X_s + ba + a + abX_s + cX_s$$
$$= (bab+bb+ab+c)X_s + (ba+a)$$

$X = pX + q \Rightarrow X = p^*q$

$$X_s = (bab+bb+ab+c)^*(ba+a)$$

$$\underline{\underline{X_q}} = (ab+b)(bab+bb+ab+c)^*(ba+a) + a$$

Jazyk $L(M_3)$ je reprezentován reg. výrazem, který je řešením soustavy pro proměnnou X_q: $a + (ab+b)(bab+bb+ab+c)^*(ba+a)$.

1b) Nechť $\dot{L}_j$ značí množinu přístupných řetězců stavu j v NKA M_3, tedy:
$\dot{L}_j = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge (q,w) \vdash^* (j,\varepsilon)\}$

Pak $\dot{L}_q, \dot{L}_r, \dot{L}_s$ jsou značeny následujícími regulárními výrazy:

$\dot{L}_q$: $\varepsilon + (ab+b)(bab+bb+ab+c)^*b$

$\dot{L}_r$: $a + (ab+b)(bab+bb+ab+c)^*(ba+a)$

$\dot{L}_s$: $(ab+b)(bab+bb+ab+c)^*$

Tyto výrazy je možné zkonstruovat např. uvážením NKA M_3^j, který získáme z M_3 záměnou množ. koncových stavů za $\{j\}$, a následným sestavením odpovídajících reg. výrazů pro M_3^q a M_3^s. Navíc $\dot{L}_r = L(M)$.

Pro následující však nejsou příliš podstatné, požadovanou relaci je možné sestrojit pouze s využitím definice $\dot{L}_j$ výše.

Nechť $L_x = \Sigma^* \setminus (\dot{L}_q \cup \dot{L}_r \cup \dot{L}_s)$.

Pak relace $\sim$ definovaná: $u \sim v \Leftrightarrow (u \in \dot{L}_q \wedge v \in \dot{L}_q) \vee (u \in \dot{L}_r \wedge v \in \dot{L}_r) \vee (u \in \dot{L}_s \wedge v \in \dot{L}_s) \vee (u \in L_x \wedge v \in L_x)$

rozděluje množinu Σ^* na rozklad:

$$\Sigma^*/_\sim = \{\dot{L}_q, \dot{L}_r, \dot{L}_s, L_x\}$$

a je relací pravé kongruence s konečným indexem:

- je ekvivalence: patrné z definice
- má kon. index: $|\Sigma^*/_\sim| = 4$
- je pravá kongr.: z definice $\dot{L}_j$: nechť $u \sim v$, pak NKA M_3 přejde ze stavu q do stavu j přijetím řetězce u i v. Pro každé $\alpha \in \Sigma$ pak buď M_3 přijme α a přejde do stavu k, tedy $\exists k: (q, u\alpha) \vdash^* (k, \varepsilon)$ a $u\alpha \in \dot{L}_k$ (obdobně pro $v\alpha$), nebo α nepřijme, a tedy $u\alpha \in L_x \wedge v\alpha \in L_x$.

$L(M_3)$ je pak rovno $\dot{L}_r$, tedy je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^*.

2) **Zvolme za L_2 jazyk:**

$L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \land \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$

Pak $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \land \#_a(w) \leq \#_b(w) \land \#_a(w) > \#_b(w)\}$
$= \emptyset$ (predikát nemůže být splněn) a $\emptyset \in \mathcal{L}_3$.

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \land (\#_a(w) \leq \#_b(w) \lor \#_a(w) > \#_b(w))\}$
$= \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \land \mathrm{T}\} = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$, což je
jazyk popsaný reg. množinou $\{a,b,c\}^*$, tedy je regulární ($L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$).

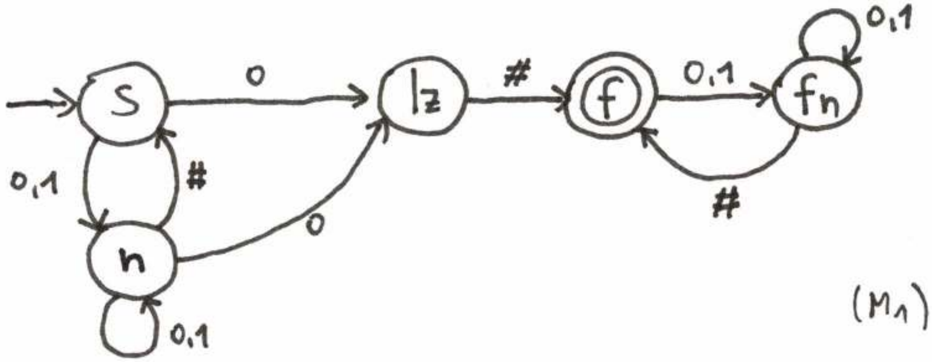
Jazyk L_2 není regulární:
- Uvažme libovolný $p > 0$. [1]
- **Nechť** $w = a^p b^p$. Počet symbolů a, b je v něm roven, tedy $w \in L_2$. [2]
- Zjevně $|w| = 2 \cdot p \rightarrow |w| \geq p$. [3]

Důkaz provedeme ukázáním platnosti obměněné implikace P.L. (podle přednášky, p. 15/37):
- Uvažme všechna [4] rozdělení $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon \land |xy| \leq p$. [5]
- V řetězci w je zleva p výskytů symbolu a, tedy $xy \in \{a\}^*$. $y \neq \varepsilon$, proto $y \in \{a\}^+$, [5] a $|y| \geq 1$.
- V libovolném řetězci xy^iz, kde $i > 1$, tedy bude více výskytů symbolu a než v řetězci w.
- Pak tedy $xy^iz = a^{p+k}b^p$ kde $k > 0$, a tedy $\#_a(xy^iz) > \#_b(xy^iz) \Rightarrow$
$\Rightarrow xy^iz \notin L_2$. [6]
- Dokázali jsme, že $\forall p \overset{1}{>} 0 : \exists w \in \Sigma^* .\ w \in \overset{2}{L_2} \land |w| \geq \overset{3}{p} \land \forall x,y,z \in \Sigma^* : \overset{4}{(}w = xyz \land y \neq \varepsilon \land |xy| \overset{5}{\leq} p) \rightarrow (\exists i \geq 0 : xy^iz \overset{6}{\notin} L_2)$
- Tedy jazyk L_2 není regulární.

Jazyk L_1 není regulární:
- Uvažme libovolný $p > 0$.
- Nechť $w = b^p a^{p+1}$. Zjevně $\#_a(w) > \#_b(w) \land w \in \{a,b,c\}^*$, tedy $w \in L_1$.
- Zjevně $|w| = p + p + 1 = 2p + 1$, tedy $|w| \geq p$.
- Uvažme všechna rozdělení $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon \land |xy| \leq p$.
- V řetězci w je zleva p výskytů symbolu b, tedy $xy \in \{b\}^*$.
$y \neq \varepsilon$, proto $y \in \{b\}^+$ a $|y| \geq 1$.
- Uvažme libovolné $i > 0$. Zřejmě $\#_b(xy^iz) = \#_b(w) + i \cdot |y| = p + i \cdot |y|$.
- $i \cdot |y| \geq 1 \rightarrow p + i \cdot |y| \geq p + 1 \rightarrow \#_b(xy^iz) \geq \#_a(xy^iz) \rightarrow xy^iz \notin L_1$.
- Platí obměněná implikace P.L., tedy jazyk L_1 není regulární.

3)

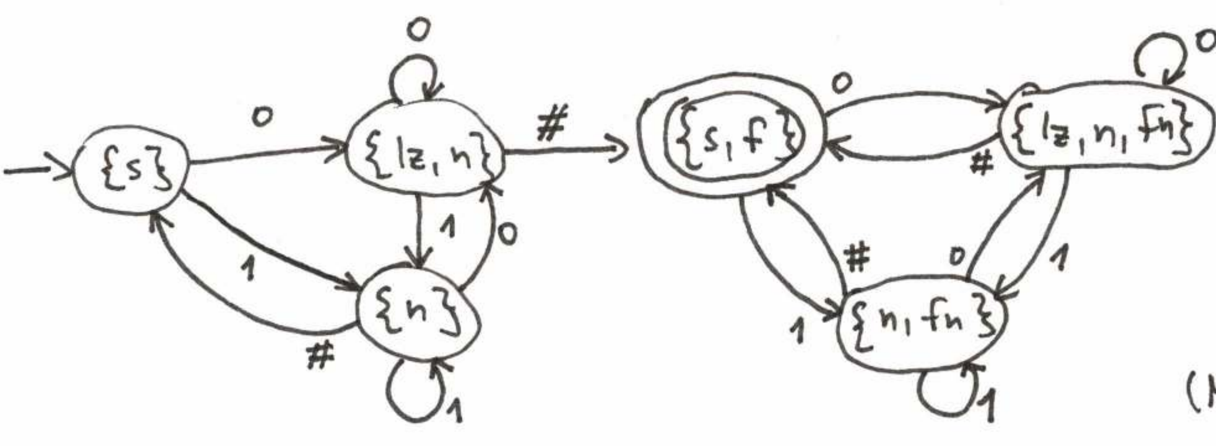
a)



(M_1)

b)

$\delta'(S,a)$ $\quad {}^{a}_{S}$	0	1	#
{s}	{lz, n}	{n}	∅
{lz, n}	{lz, n}	{n}	{s, f}
{n}	{lz, n}	{n}	{s}
{s, f}	{lz, n, fn}	{n, fn}	∅
{lz, n, fn}	{lz, n, fn}	{n, fn}	{s, f}
{n, fn}	{lz, n, fn}	{n, fn}	{s, f}



(M_2)