

# Závěrečná paralympiáda starších, LMFS 2022

## 1 Lítám v díře

Mějme v nekonečně hluboké potenciálové jámě na intervalu  $x \in (0, L)$  částici ve stavu

$$\psi(x, t = 0) = N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[1 + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]. \quad (1)$$

Vlnovou funkci normujte (určete  $N$ ), rozložte na stacionární stavy a načrtněte hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě  $x$  v časech  $t = 0$  a  $t = 2mL^2/\pi\hbar$ .

## 2 V jiném stavu?

Mějme několik následovně zadaných vlnových funkcí jednorozměrného kvantově mechanického systému

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+ix}, \quad \psi_3(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (2)$$

Všechny tyto stavy mají stejnou hustotu pravděpodobnosti  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ . Znamená to, že se z fyzikálního hlediska jedná o stejné stavy i co se týká např. měření hybnosti nebo časového vývoje? Rozhodněte, které z těchto funkcí popisují stejné a které odlišné stavy.

## 3 Zajímavý moment hybnosti

Mějme nepohybující se částici o spinu 1. Její moment hybnosti je popsán operátory danými maticemi

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Částice je ve stavu  $\psi = (-1, i\sqrt{2}, 1)^T$ .

- Spočítejte celkový moment hybnosti  $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$  a rozhodněte, zda komutuje s jednotlivými složkami  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ .
- Určete střední hodnoty měření všech tří složek momentu hybnosti. Jedná se o vlastní stav některého z nich?

## 4 Koule vole

Mějme pevnou a nepohyblivou kouli o poloměru 12 metrů na povrchu Země. Stojí na ní skateboardista o zanedbatelných rozměrech a po nekonečně malém šťouchnutí se díky gravitaci rozjíždí dolů. V jaké výšce se od koule odlepí?

## 5 Optoelektronový mikroskop

V jakém intervalu energií je vlnová délka elektronu, popř. neutronu, menší než vlnová délka viditelného světla (od 400 nm)?

## 6 Elektron v atomu

Měříme polohu elektronu v základním stavu v atomu vodíku. Jaké jsou pravděpodobnosti, že jej nalezneme uvnitř sféry o poloměru  $a$ , a že jej nalezneme mezi sférami o poloměrech  $a$  a  $2a$ , kde  $a = 4\pi\hbar^2\epsilon_0/m_e Q_e^2$  je Bohrov poloměr?

## 7 Norma

Normujte stav daný vlnovou funkcí

$$\psi(x) = \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad \text{pomůcka: } \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

## 8 Záchranná

Jaký je fyzikální rozměr (tedy jednotka) vlnové funkce elektronu v  $d$  dimenzích?

## (Ne)užitečné konstanty

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

PCH = první certifikovaný hrobník

poločas rozpadu thoria  $\doteq 14.05 \cdot 10^9$  yr