Průběžná olympiáda - fyzika starší - 1. kolo

0. Skalární součin

Nebodovaná úloha pro zábavu a dobrovolné rozšíření lineární algebry!
Mějme prostor polynomů (stačí uvažovat prostor polynomů do stupně n, např. 3). Na nich definujme skalární součin v některém z níže uvedených tvarů (vyberte si jeden či klidně všechny) a zvolme si opět bázi tohoto prostoru ve tvaru $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$. Určete, zda je báze ortogonální. Pokud zjistíte, že není, zkuste si rozmyslet, jakým procesem byste mohli její ortogonalizaci provést. Protože se jedná o úlohu jen pro vás, uvedu pro kontrolu či pro nápovědu, že existuje standardně používaný proces, který se nazývá Gram-Schmidtova ortogonalizace (kreativitě se ale meze nekladou). Použitím standardního postupu dojdete použitím různých skalárních součinů k různým standardním ortogonálním systémům polynomů.

$$\text{Legendreovy polynomy:} \qquad \langle\varphi|\psi\rangle = \int_{-1}^{1} \varphi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x \tag{1a}$$

$$\text{Hermitovy polynomy:} \qquad \langle\varphi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\psi(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{1b}$$

$$\text{Laguerrovy polynomy:} \qquad \langle\varphi|\psi\rangle = \int_{0}^{+\infty} \varphi^*(x)\psi(x)e^{-x}\mathrm{d}x \tag{1c}$$

$$\text{Pomůcky:} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}, \qquad \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n! \tag{2}$$

1. Millikanův pokus

Změřte elementární náboj. *(3 body)*
Nebojte, nemusíte nic skutečně měřit, budete měřit jen na papíře. Představte si, že máte nehybnou viskózní kapalinu v homogenním tíhovém poli a do ní vstřikujete malé nabité kapičky oleje podobné (ale ne stejné) hustoty. Tyto kapičky se pohybují pouze vertikálně a protože kapalina je velmi viskózní, lze její odpor popsat Stokesovým vzorcem

$$F_S = 6\pi\mu R v, \tag{3}$$

kde μ značí dynamickou viskozitu kapaliny, R poloměr kapičky a v její rychlost vzhledem ke kapalině. Dále můžete nádobu vložit do homogenního elektrického pole (i v tomto elektrickém poli je stále stejné tíhové pole a můžete si zvolit vzájemnou orientaci obou polí) orientovaného svisle. Měřit můžete rychlosti jednotlivých kapiček. Všechny potřebné parametry, které jsem byl líný označit, si sami nějak označte a považujte je za známé.

2. [O2, Vodafone]

Definujme operátory $\hat{A}_n$ a $\hat{B}_n$ na prostoru diferencovatelných funkcí jedné reálné proměnné předpisy

$$\hat{A}_n\psi(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\psi(x), \tag{4a}$$

$$\hat{B}_n\psi(x) = i\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\psi(x). \tag{4b}$$

Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}_0$ je který z operátorů $\hat{A}_n$ a $\hat{B}_n$ hermitovský *(2 body)*. Dále určete komutátor $[\hat{A}_2, \hat{C}]$ *(1 bod)*, kde uvažujte operátor

$$\hat{C}\psi(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\psi(x)\right). \tag{5}$$

Dále vypočítejte třetí mocninu operátoru $\hat{D}$ *(1 bod)* definovaného předpisem

$$\hat{D}\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) + \frac{\psi(x)}{x}. \tag{6}$$

Průběžná olympiáda - fyzika mladší - 1. kolo

1. Projekce vektoru

Mějme vektory

$$\vec{u} = (1, 3, 4), \tag{7a}$$

$$\vec{v} = (-1, 2, 4), \tag{7b}$$

$$\vec{w} = (1, 4, -7). \tag{7c}$$

Určete projekce vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{w}$, tedy $P_{\vec{w}}\vec{u}$ a $P_{\vec{w}}\vec{v}$ *(1 bod)*. Pro každý z vektorů (všech pěti) navíc vytvořte nějaký vektor, který na něj bude kolmý *(2 body)*. Dále vektory ze zadání (ne tedy ty, které jste sami vytvořili) normujte (tzn. přenásobte nějakým skalárem tak, aby jeho velikost byla rovna 1) *(1 bod)*.

2. Opilý derivátor = veselý vrah

Mějme funkce

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{8a}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{8b}$$

jejichž derivace existují. Zderivujte výraz

$$\frac{\sin(f) - x \cdot g \cdot \cos(f)}{h}. \qquad \textit{(2 body)} \tag{9}$$

Výraz poněkud poupravte s dodatečnou informací $g = f'$. *(1 bod)*

3. Slizký had

Spočtěte neurčité a určité integrály

$$\int x\left(2x^2 + 14\pi\right)^{29} \mathrm{d}x \qquad \textit{(1 bod)} \tag{10a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[4]{x + 19\pi^{19}}} \mathrm{d}x \qquad \textit{(1 bod)} \tag{10b}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x \qquad \textit{(2 body)} \tag{10c}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x \cdot \cos x|^{14\pi^2 + \exp(\sinh(\sin(\pi^2)))} \sin x \mathrm{d}x. \qquad \textit{(2 body)} \tag{10d}$$

4. Je lepší mít po cvičení na tváři :) než :(

Nakreslete smajlíka *(1 bod)*, podepište se *(1 bod)* a napište parametrické rovnice jeho součástí (včetně určení intervalu, v jakém se bude pohybovat parametr) *(2 body)*. Obrázek smajlíka níže je pouze pro inspiraci. Oba typy smajlíka zmíněné v názvu úlohy můžete použít, bonusové body za to ovšem nejsou.