Závěrečná fyzikální paralympiáda starších - LMFS 2016

1. It's a kind of differential magic (12 bodů)

Mějme konstantní vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Spočtěte gradient skalární funkce

$$f(\vec{r}) = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{r} \times \vec{a})}{r^2}. \tag{1}$$

2. Norma (8 bodů)

Normujte stav daný vlnovou funkcí

$$\psi(x) = \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \text{ pomůcka: } \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!} \tag{2}$$

3. Bezedná jáma (14 bodů)

Mějme v čase $t = 0$ v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky L elektron ve stavu daném superpozicí

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x), \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad x \in (0, L). \tag{3}$$

kde stavy ψ_n jsou normované vlastní stavy Hamiltoniánu. Najděte obecné řešení časové Schrödingerovy rovnice $\Psi(x,t)$ a spočtěte a načrtněte grafy hustoty pravděpodobnosti (stačí velmi přibližně) v časech $t = 0$, $t = \frac{2mL^2}{\pi\hbar}$.

4. Dná jáma (12 bodů)

Vzpomeňte si, jak jsme na cvičení řešili trojrozměrnou nekonečně hlubokou jámu separací proměnných ve tvaru $\psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$. Rozhodněte, zda jde stejným způsobem řešit konečně hlubokou jámu (stačí ve dvou dimenzích). Zdůvodněte.

5. Jednotka (7 bodů)

Jaký je fyzikální rozměr (tedy jednotka) vlnové funkce elektronu v d dimenzích?

6. Krychle (10 bodů)

Stavební firma Krychle s.r.o. staví domy plné bytů výhradně ve tvaru krychle. Krátce po založení stavěla menší domy o hraně délky 10 metrů, ale postupně tento rozměr zvyšovala až na 100 metrů. Jak se změní spotřeba energie na vytápění na byt, pokud předpokládáme, že byty jsou stále stejné a stejně tak i použité materiály?

7. Rezonátor (10 bodů)

Mějme fólii, která částečně odráží, částečně propouští a částečně absorbuje světlo. Její koeficienty odrazu, propustnosti a absorpce označme postupně R, T a A (jde o podíly postupně odražené, propuštěné a absorbované intenzity a dopadající intenzity), $R + T + A = 1$. Pokud rovnoběžně umístíme dvě vrstvy této fólie a necháme zvenku kolmo dopadat světlo o intenzitě I_0, jaká bude intenzita světla I mezi oběma vrstvami? Interferenční jevy neuvažujte.

8. Skalární součin (11 bodů)

Uvažujme systém s měřitelnou veličinou reprezentovanou hermitovským operátorem $\hat{A}$, její vlastní funkce a vlastní čísla (nedegenerovaná) označme ψ_n a A_n. Dále uvažujme, že systém je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \psi_n. \tag{4}$$

Jaká je pravděpodobnost změření hodnoty A_n?

9. Zuzka (8 bodů)

Zuzka s Honzou cvičí akrojógu. Honza leží na zádech, jeho nohy míří rovně vzhůru a Zuzka leží ve vodorovné poloze na nich jako prkno. Určete, jakým momentem síly musí působit Zuzčiny svaly na zadku, aby se udržela jako prkno, pokud je vysoká 170 cm, váží 65 kg a má tvar tenké tyče.

10. Optická vs. elektronová mikroskopie (8 bodů)

V jakém intervalu energií je vlnová délka elektronu, popř. neutronu, menší než vlnová délka viditelného světla (400 nm)?