

# Závěrečná paralympiáda starších, LMFS 2022

## 1 Koule v díře (14 bodů)

Mějme v nekonečně hluboké potenciálové jámě na intervalu  $x \in (0, L)$  částici ve stavu

$$\psi(x, t=0) = N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[1 + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]. \quad (1)$$

Vlnovou funkci normujte (určete  $N$ ), rozložte na stacionární stavy a načrtněte hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě  $x$  v časech  $t=0$  a  $t=2mL^2/\pi\hbar$ .

## 2 V jiném stavu? (10 bodů)

Mějme několik následovně zadaných vlnových funkcí jednorozměrného kvantově mechanického systému

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+ix}, \quad \psi_3(x) = -i \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (2)$$

Všechny tyto stavy mají stejnou hustotu pravděpodobnosti  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ . Znamená to, že se z fyzikálního hlediska jedná o stejné stavy i co se týká např. měření hybnosti nebo časového vývoje? Rozhodněte, které z těchto funkcí popisují stejné a které odlišné stavy.

## 3 Točit, či netočit (11 bodů)

Mějme nepohybující se částici o spinu 1 ve stavu  $\psi = (-1, i\sqrt{2}, 1)^T$ . Její moment hybnosti je popsán operátory danými maticemi

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- a) Spočítejte celkový moment hybnosti  $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$  a rozhodněte, zda komutuje s jednotlivými složkami  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ .
- b) Určete střední hodnoty měření všech tří složek momentu hybnosti. Jedná se o vlastní stav některého z nich?

## 4 Kule vole (8 bodů)

Mějme pevnou a nepohyblivou kouli o poloměru 12 metrů na povrchu Země. Stojí na ní skateboardista o zanedbatelných rozměrech a po nekonečně malém šouchnutí se díky gravitaci rozjíždí dolů. V jaké výšce se od koule odlepí?

## 5 Prolítnul mi zubr zdí, doufal, že to ubrzdí! (7 bodů)

Jakou rychlostí se musí pohybovat zubr o hmotnosti 600 kg, aby byla jeho vlnová délka rovna tloušťce zdí, která je 5 cm?

## 6 Elektron v atomu (12 bodů)

Měříme polohu elektronu v základním stavu atomu vodíku

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{a^3\pi}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (4)$$

Jaké jsou pravděpodobnosti, že jej nalezneme uvnitř sféry o poloměru  $a$ , a že jej nalezneme mezi sférami o poloměrech  $a$  a  $2a$ , kde  $a = 4\pi\hbar^2\epsilon_0/m_e Q_e^2$  je Bohrov poloměr?

## 7 Jednička (8 bodů)

Normujte stav daný vlnovou funkcí

$$\psi(x) = \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad \text{pomůcka: } \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

## 8 Kdo si má ty jednotky pamatovat... (7 bodů)

Jaký je fyzikální rozměr (tedy jednotka) vlnové funkce elektronu v  $d$  dimenzích?

## 9 Býkopes (10 bodů)

Víta v Ekvádoru sleduje falešné předvádění Coriolisovy síly a na pomoc má buldočka - ale jeho pískací otvor se ucpal! Na proražení kruhového otvoru o průměru 1 milimetru je třeba přetlak  $10^5$  Pa, jak hluboko je třeba promáchnout stěny, aby se to podařilo? Buldoček má kulový tvar o průměru 10 cm a při zmáčknutí dvěma prsty naproti sobě mají promáčklé strany opět tvar sférických úsečí. Vzduch uvnitř je ideální plyn při tlaku  $10^5$  Pa.

## 10 Kvantový drát (13 bodů)

Najděte stacionární stavy kvantového drátu v nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě, tedy řešte nečasovou Schrödingerovu rovnici v potenciálu omezeném ve dvou směrech

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, a), y \in (0, b) \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}. \quad (6)$$

Jaké jsou vlastní energie systému? Jsou degenerované?