有限体积格式求解偏微分方程的数值实践

郑灵超

北京大学数学科学学院

2017 年 5 月 31 日

有限体积格式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0$$

在区域 Ω 积分 $$\frac{\partial (\int_\Omega U \,\mathrm{d}\boldsymbol{x})}{\partial t} + \int_\Omega \nabla \cdot F(U) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

记 $\bar{U}$ 为积分平均 $$|\Omega_i| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j \int_{S_j} F(U) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0$$

写成数值通量的形式 $$|\Omega_i| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j \hat{F}(\Omega_i, \Omega_{i,i_j}) = 0$$

数值通量

常见的数值通量有

- Lax-Friedrichs 通量

$$F(u_l, u_r) = \frac{1}{2}[f(u_l) + f(u_r) - \frac{h}{dt}(u_r - u_l)]$$

- Lax-Wendroff 通量

$$u^* = \frac{1}{2}[(u_l + u_r) - \frac{dt}{h}(f(u_r) - f(u_l))]$$

$$F(u_l, u_r) = f(u^*)$$

- Force 通量

$$F(u_l, u_r) = \frac{1}{2}[F^{LF}(u_l, u_r) + F^{LW}(u_l, u_r)]$$

- Godunov 通量

$$F(u_l, u_r) = f(u^*)$$

其中 u^* 为该方程局部 Riemann 问题的解。

- HLL 通量

$$F = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L \\ \dfrac{S_R F_R - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, & S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & 0 \geq S_R. \end{cases}$$

其中 $F_L = f(U_L), F_R = f(U_R)$,$S_L, S_R$ 为向左和向右的最大特征速度。

- HLLC 通量

$$F = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L, \\ F_{*L} & S_L \leq 0 \leq S_*, \\ S_{*R} & S_* \leq 0 \leq S_R, \\ F_R, & 0 \geq S_R. \end{cases}$$

常用的斜率限制器有

- minmod 限制器

$$\phi(r) = \max\{0, \min\{r, 1\}\}$$

- superbee 限制器

$$\phi(r) = \max\{0, \min\{2r, 1\}, \min\{r, 2\}\}$$

- MC 限制器

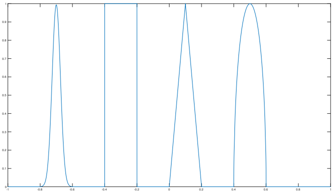
$$\phi(r) = \max\{0, \min\{2r, \frac{1+r}{2}, 2\}\}$$

- van-Leer 限制器

$$\phi(r) = \frac{2r}{1+|r|}$$

数值算例：线性对流方程

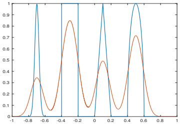
$$u_t + u_x = 0, \quad -1 \leq x < 1$$



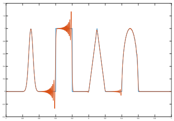
图：初始值

数值算例：线性对流方程

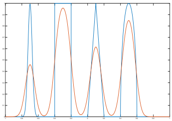
$t = 8, N = 10000, CFL = 0.6$



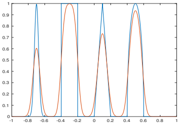
(a) LF



(b) LW

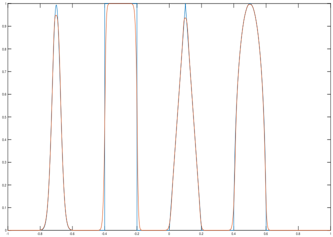


(c) Force

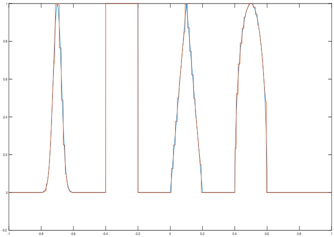


(d) Godunov

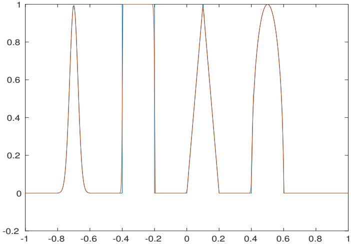
- LF 格式不会出现震荡，但耗散比较严重。
- LW 格式没有耗散，但数值震荡现象明显。
- Force 格式耗散比 LF 格式略小。
- Godunov 格式耗散比 Force 格式小，但还是不能令人满意。



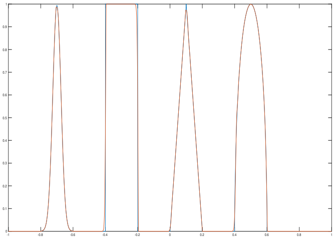
(e) minmod



(f) superbee



(g) MC



(h) van-Leer

各限制器比较

以上实验参数 $N = 10000, t_{end} = 8, CFL = 0.6$，采用的数值通量为 LF 通量，时间方向采用 3 阶 RK 格式。

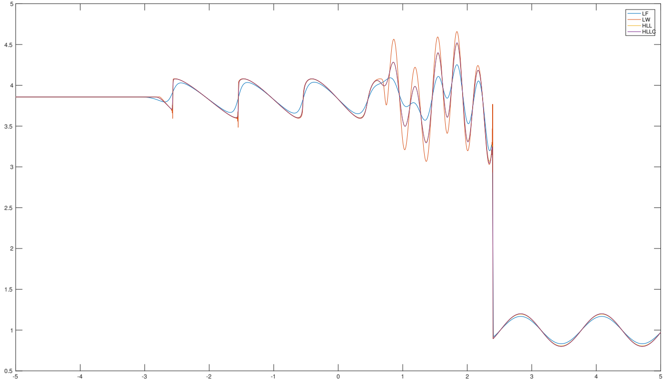
- minmod：TVD，但重构效果不是很好，仍有一定耗散。
- superbee: 非 TVD, 重构效果不是很好，会一定程度增加震荡。
- MC: 非 TVD, 数值结果尚可，但会出现负值。
- van-Leer：TVD，数值结果尚可。

数值算例：Osher-Shu 问题

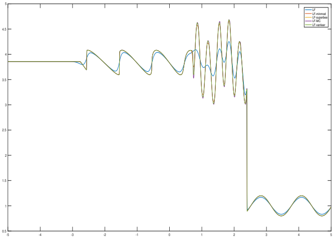
一维 Euler 方程，初值为：

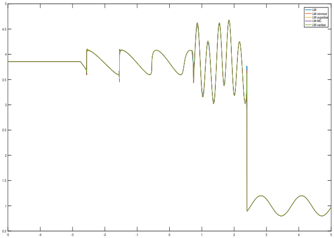
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases}$$

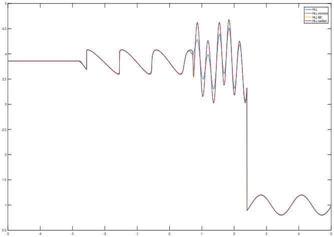
不加重构求解，$N = 10000, t = 1.8, CFL = 0.6$，结果如下：

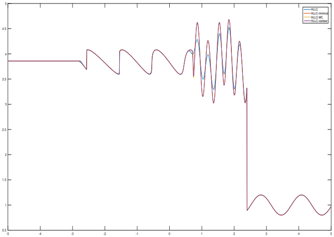


各限制器比较


LF
LF-minmod
LF-superbee
LF-MC
LF-vanleer


LW
LW-minmod
LW-superbee
LW-MC
LW-vanleer

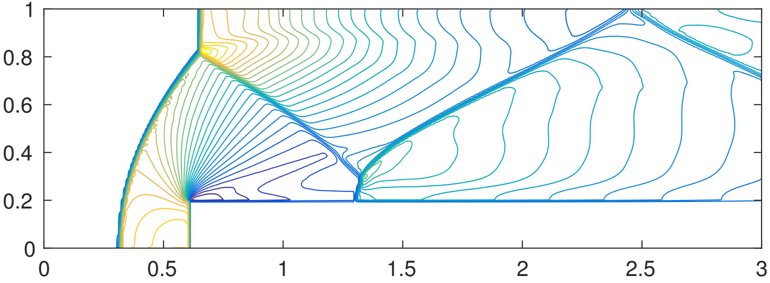

HLL
HLL-minmod
HLL-MC
HLL-vanleer


HLLC
HLLC-minmod
HLLC-MC
HLLC-vanleer

数值算例：前台阶问题

- 左侧入流边界条件，右侧出流边界条件，上下与台阶处为反射边界条件。
- 初始值为 $(\rho, u, v, p) = (1.4, 3, 0, 1)$
- $$h = \frac{1}{100}, CFL = 0.3, t = 4,$$
- 我们采用 HLL 数值通量，minmod 限制器。

下图为密度等值线:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

数值算例：双马赫反射问题

$h = \frac{1}{240}, CFL = 0.3, t = 0.2$, HLL 数值通量，minmod 限制器。