有限体积格式不同数值通量和限制器的比较

郑灵超 1601110040

2017 年 6 月 10 日

1 问题描述

有限体积格式是求解计算流体力学中守恒律方程的方法之一。其思想是利用网格的积分平均作为自变量，使网格平均值的时间导数由网格各边界上通量确定。而如何从网格平均值出发，较为精确地获取各边的数值通量，是有限体积格式算法的重要问题之一。利边两侧的网格的自变量平均值，人们构造了不同的数值通量格式。我们接下来将分析各种数值通量格式的差异。

在实践中人们发现，将网格简单的假设为分片常数，在计算中会出现巨大的不足。进一步地，我们可以假设单个网格上守恒变量为线性函数，利用当前网格和相邻网格的平均值来估计这个线性函数，这部分工作称为线性重构，其关键在于如何构造这个线性函数。该方法也称作斜率限制器方法，我们接下来将分析各种常见的斜率限制器的差异。

因此利用有限体积格式求解守恒律方程的基本算法为：

1. 设置初值，参数。
2. 将守恒变量进行重构。
3. 计算最大特征速度和时间步长。
4. 计算网格边的数值通量。
5. 更新每个网格的守恒变量积分平均值。
6. 如果到达终止时间，则停止计算；否则回到第二步。

2 理论分析

2.1 有限体积格式

对于守恒律方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 \tag{1}$$

将其在空间区域 Ω 积分，得

$$\frac{\partial(\int_\Omega U \,\mathrm{d}\boldsymbol{x})}{\partial t} + \int_\Omega \nabla \cdot F(U) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

令 $\bar{U}$ 为 U 在区域 Ω 上的积分平均，则

$$|\Omega| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} F(U) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0$$

我们假设 Ω_i 表示一个多面体网格，其相邻网格为 $\Omega_{i,j}$, Ω_i 与 $\Omega_{i,j}$ 的交界面为 S_j.

$$|\Omega_i| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j \int_{S_j} F(U) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0$$

$$|\Omega_i| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j |S_j| \hat{F}(\Omega_i, \Omega_{i,i_j}) = 0$$

2.2 数值通量

数值通量的作用是已知某边两个的守恒变量的值，估计该边上的通量值。

- Lax-Friedrich
$$\hat{F}^{LF} = \frac{1}{2}[F(U_L) + F(U_R) - \frac{\Delta x}{\Delta t}(U_R - U_L)]$$
- Richtmyer scheme (两步 Lax-Wendroff 格式)
$$U^{RI} = \frac{1}{2}(U_L + U_R) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}[F(U_R) - F(U_L)]$$
$$\hat{F}^{RI} = F(U^{RI})$$
- Lax-Wendroff
$$\hat{F}^{LW} = \frac{1}{2}[F(U_L) + F(U_R) - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(F(U_R) - F(U_L))]$$
其中
$$a = F'\left(\frac{U_L + U_R}{2}\right)$$
- Force
$$\hat{F}^{force} = \frac{1}{2}(\hat{F}^{LF} + \hat{F}^{RI})$$
- G-Force(Generalized FORCE, or Godunov FORCE)
$$\hat{F}^{G-Force} = \omega \hat{F}^{LW} + (1-\omega)\hat{F}^{LF}$$
$$\omega_g(c) = \frac{1}{1+|c|}$$
其中 c 是 CFL 数。

- Godunov

$$\hat{F}^{Godunov} = F(U^*)$$

其中 U^* 为守恒律方程对应的 Riemann 问题在 $x = 0, t = \Delta t$ 时的解。

- HLL

$$\hat{F}^{HLL} = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L, \\ \dfrac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, & S_L \leq 0 \leq S_R, \\ F_R, & 0 \geq S_R. \end{cases}$$

其中 $F_L = F(U_L), F_R = F(U_R)$,$S_L, S_R$ 分别为向左和向右的最大特征速度。

- HLLC：一般问题的 HLLC 格式数值通量难以给出，在此我们给出 Euler 方程的 HLLC 格式数值通量。

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}$$

$$F_{*K} = \frac{S_*(S_K U_K - F_K) + S_K (p_K + \rho_L (S_K - u_K)(S_* - u_K)) D_*}{S_K - S_*}, \quad K = L, R.$$

对于三维问题的 x 分量数值通量 $D_* = [0, 1, 0, 0, S_*]$.

$$\hat{F}^{HLLC} = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L, \\ F_{*L}, & S_L \leq 0 \leq S_*, \\ F_{*R}, & S_* \leq 0 \leq S_R, \\ F_R, & 0 \geq S_R. \end{cases}$$

2.3 线性重构

当分片常数的假设不足以满足我们的精度需求时，人们开始假设守恒变量是分片线性函数。考虑一维情形 (或是高维情形的一个方向)，假设当前网格与左右网格的守恒变量值分别为 u, u_l, u_r，那么若 $u = u_r$，取斜率为 0。否则记 $\theta = \frac{u - u_l}{u_r - u}$，重构值分别为

$$u_{i-\frac{1}{2}} = u - \frac{1}{2}\phi(\theta)(u_r - u)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u + \frac{1}{2}\phi(\theta)(u_r - u)$$

该方法称为斜率限制器法，常见的斜率限制器 ϕ 有：

- minmod

$$\phi(\theta) = \max\{0, \min\{1, \theta\}\}$$

- superbee

$$\phi(\theta)=\max\{0,\min\{1,2\theta\},\min\{\theta,2\}\}$$

- monotonized central(MC)

$$\phi(\theta)=\max\{0,\min\{2\theta,\frac{1+\theta}{2},2\}\}$$

- vanLeer

$$\phi(\theta)=\frac{\theta+|\theta|}{1+|\theta|}$$

3 数值实验

3.1 一维问题

3.1.1 线性对流方程

我们先选取一个简单的线性对流方程

$$u_t+u_x=0$$

计算区域为 $[-1,1]$，采用周期边界条件。初始值为

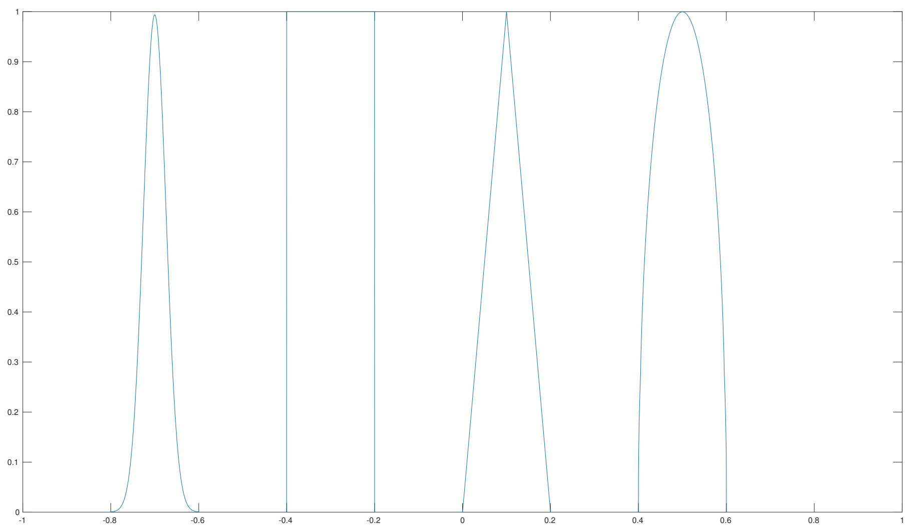
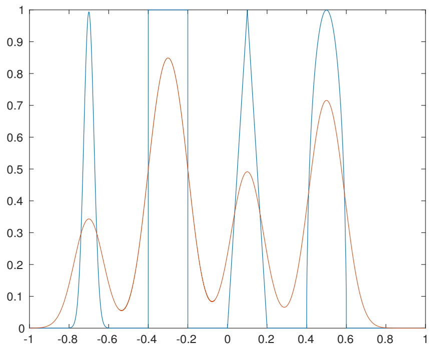


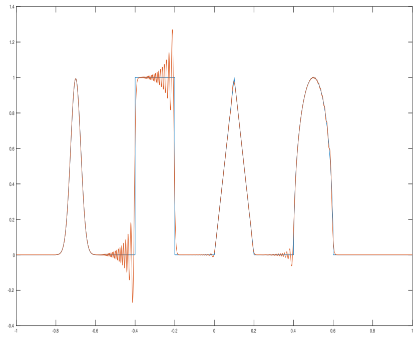
图 1: 初始值

终止时刻 $t=8$，可以预期真解与初始值是一致的。本数值实验的 $N=10000, CFL=0.6$, 时间方向采用 3 阶 RK, 边界采用周期边界条件。

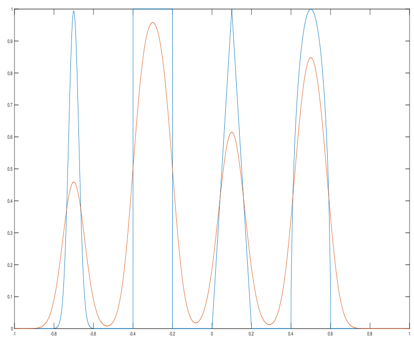
以下为不同通量的计算结果，：



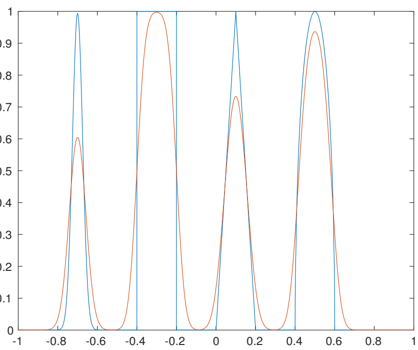
(a) LF



(b) LW



(c) Force



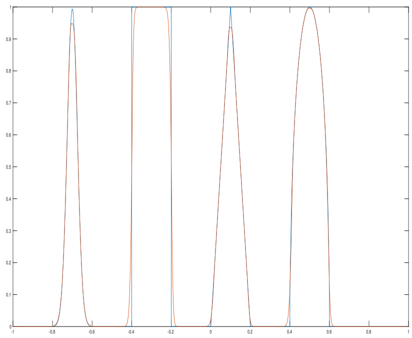
(d) Godunov

对以上结果做一个总结：

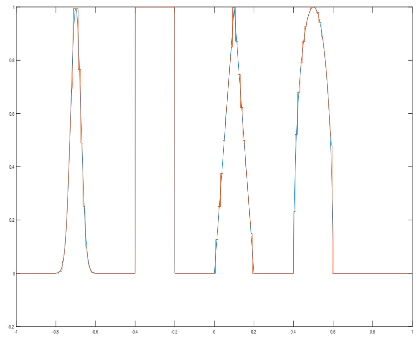
- Lax-Friedrich 格式数值通量较为保守，它是一个 TVD 的数值通量，没有震荡，但耗散较大。
- Lax-Wendroff 格式数值通量是一个二阶的数值通量，对于光滑部分处理的较好，没有耗散，但在间断处会出现数值震荡。
- Force 格式数值通量是对 LF 和 LW 的平均，而 G-Force 是对它们的加权平均。从数值结果来看，这一处理能减少数值耗散，但整体耗散还是过大。
- 对于线性对流问题，Godunov,HLL,HLLC 通量的表达式一致，耗散来说较小，但依旧不足以令人满意。

上述结果说明对数据进行线性重构必不可少。

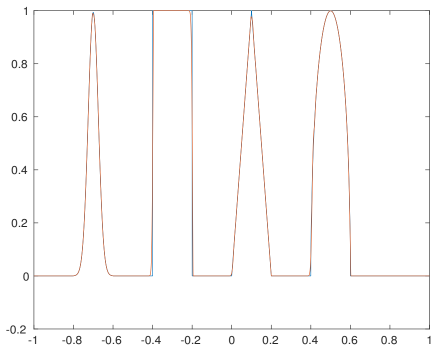
以下是 Lax-Friedrich 格式数值通量在不同重构下的表现：



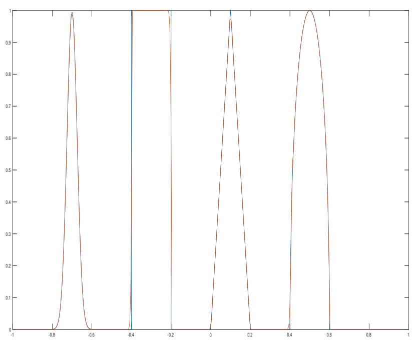
(e) LF-minmod



(f) LF-superbee



(g) LF-MC



(h) LF-vanLeer

对以上结果做一个总结：

- 斜率限制器方法能够有效的去除耗散
- minmod 斜率限制器较为保守，是一个 TVD 的斜率限制器，根据数值结果来看其耗散最大。
- superbee 是一个较为激进的斜率限制器，容易将其他波算成方波的效果，从数值结果来看也不是保极值的。
- MC 方法能够较好的逼近真实情况，但它也不是保极值的限制器。
- vanLeer 限制器的数值结果与 MC 限制器类似，而且是保极值的。

下图为 Lax-Wendroff 数值通量在不同限制器下的效果。

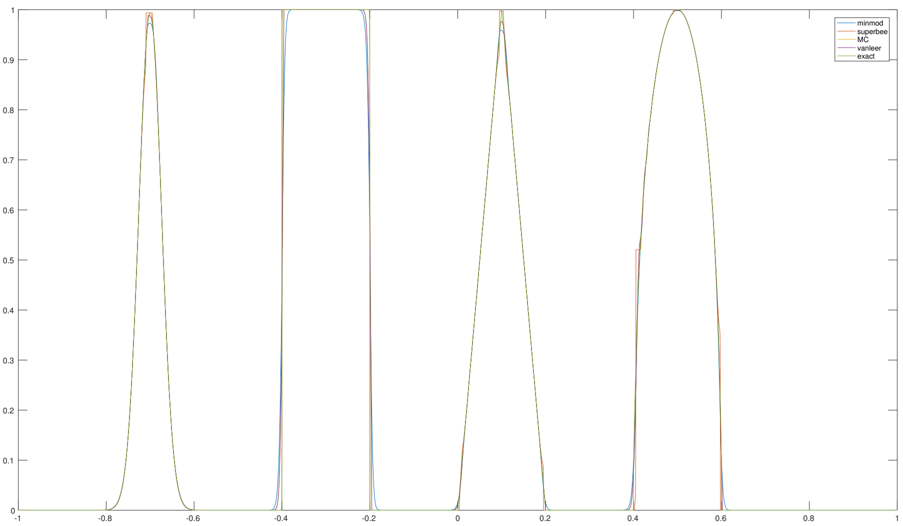


图 2: LW 格式下各种限制器效果

可见采用斜率限制器方法也能有效去除震荡，但除了 minmod 之外，其他限制器都会出现非 TVD 的问题。

3.1.2 Osher-Shu 问题

Osher-Shu 问题的方程为 1 维 Euler 方程，其初值为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases}$$

我们这里的求解参数为 $N = 10000, t = 1.8, CFL = 0.6$，求解区域为 $[-5, 5]$，左侧为入流边界条件，右侧为出流边界条件。

不加重构求解，各数值通量结果如下:

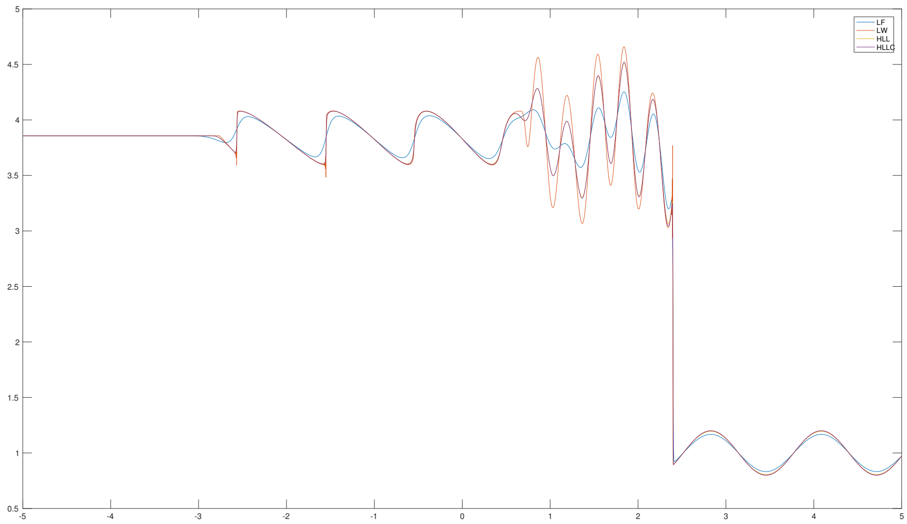


图 3: Osher-Shu 问题，无重构

可见在该问题下，LF 数值通量还是体现了耗散大的问题，LW 格式没有耗散，但有数值震荡，HLL 与 HLLC 格式类似，存在一定耗散。

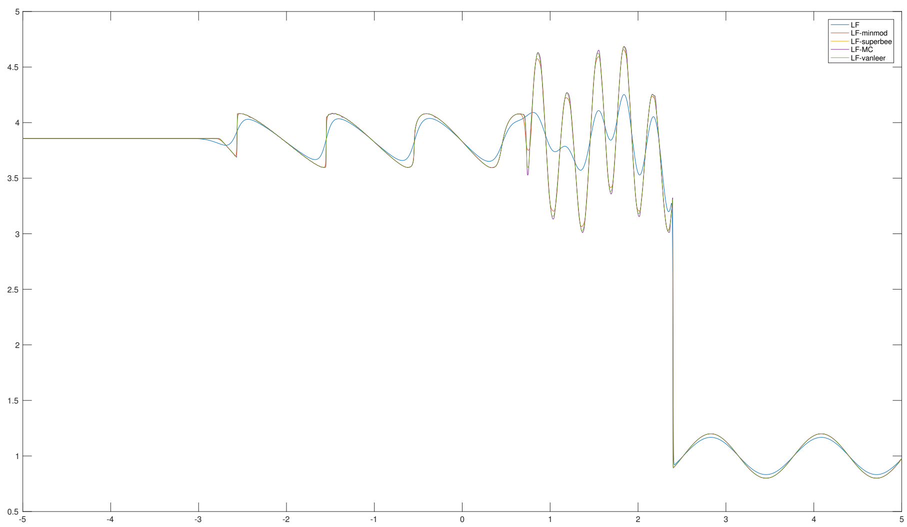


图 4: Osher-Shu 问题，LF 数值通量

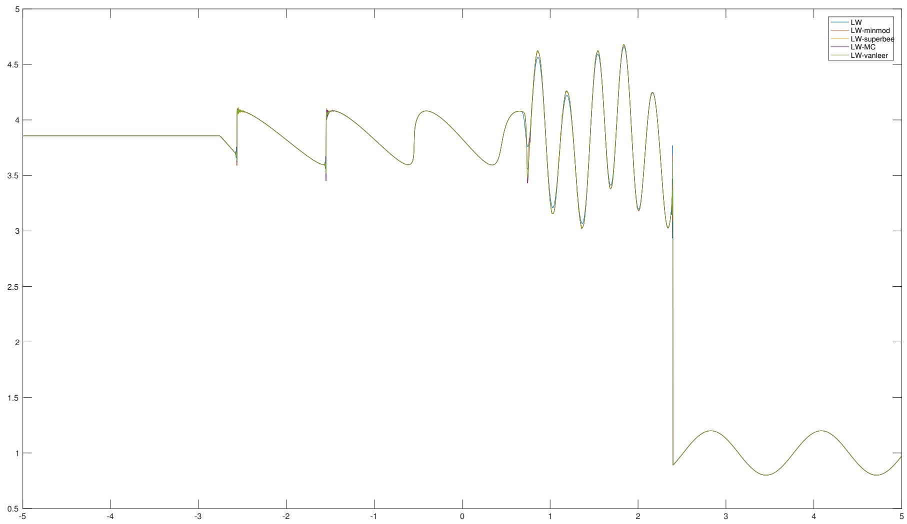


图 5: Osher-Shu 问题，LW 数值通量

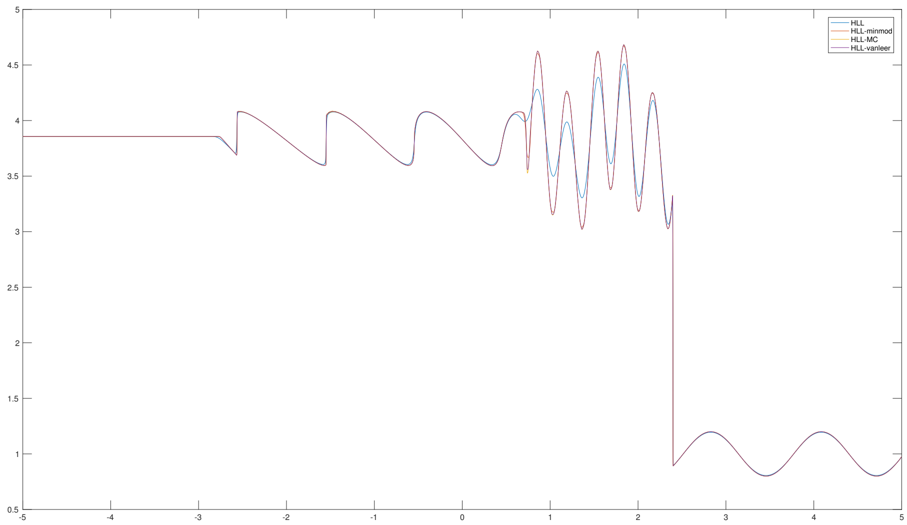


图 6: Osher-Shu 问题，HLL 数值通量

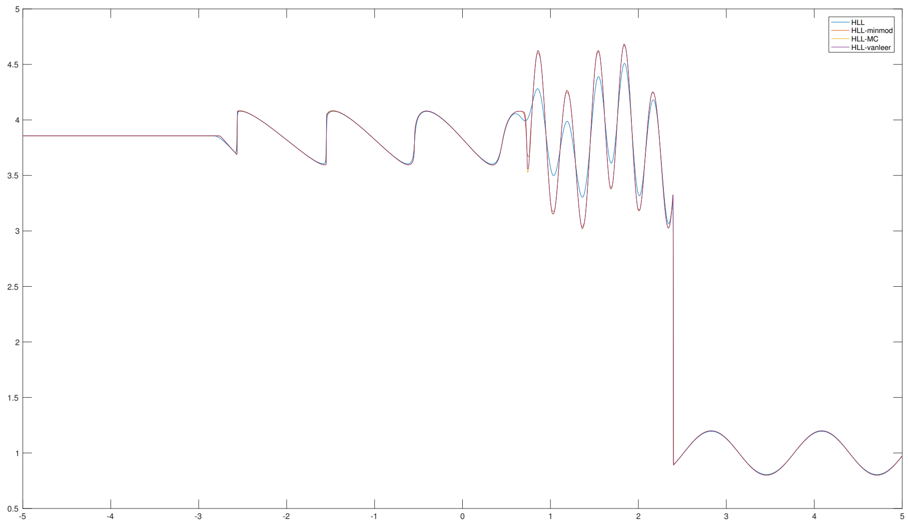


图 7: Osher-Shu 问题，HLLC 数值通量

注意到这里的 HLL 和 HLLC 数值通量在 superbee 斜率限制器下会出现解不收敛的情形，故而无法画出图像。

3.1.3 小结

通过上述实验，我们可以总结得到 minmod 通量较为保守，是 TVD 的但同时也有较大的耗散；superbee 通量较为激进，不是 TVD 的，而且容易将波形算为方波；MC 和 vanleer 在试验中显得较为出色，相比 minmod 具有更好的去耗散性质，但有时也将出现数值解不收敛的情况，在下文的 2 维算例中，采用 MC 格式与 HLL 通量，无法得到收敛的解。

综上所述，保守的通量和限制器能够得到收敛的解，但同时也带来耗散。

3.2 二维问题

接下来我们利用有限体积格式计算一些经典的二维算例。

3.2.1 双马赫反射问题

- 计算区域 $[0,4] \times [0,1]$
- 初值：$U_L = (8, 57.1597, -33.0012, 563.544)^T, U_R = (1.4, 0, 0, 2.5)^T$。在 $y = \sqrt{3}(x - \frac{1}{6})$ 左侧为 U_L，右侧为 U_R。

- 边界条件:

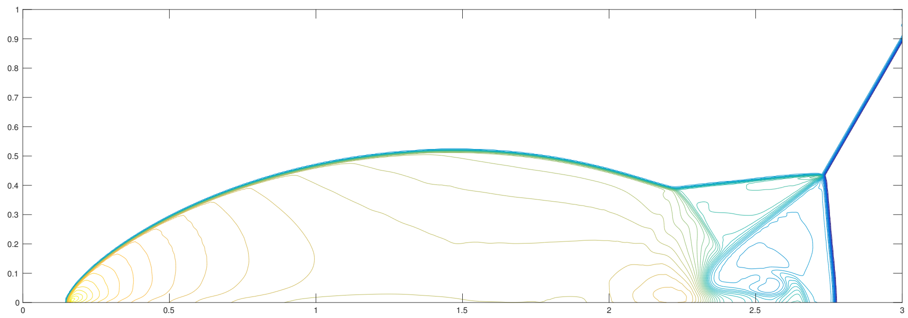
  左边界：U_L 的入流边界条件。

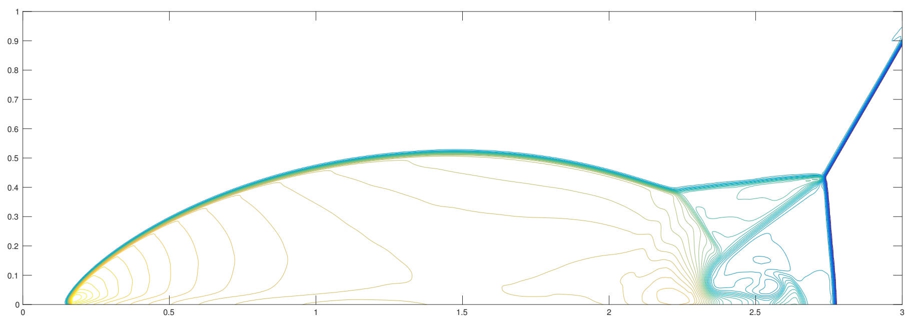
  右边界：出流边界条件。

  下边界：在 $(0, \frac{1}{6})$ 左侧为 U_L 入流边界条件，右侧为反射边界条件。

  上边界：入流边界条件，在 $x = \frac{1}{6} + \frac{20t}{\sqrt{3}}$ 左侧为 U_L, 右侧为 U_R。

下图为 $t = 0.2$ 时刻的密度等值线图。





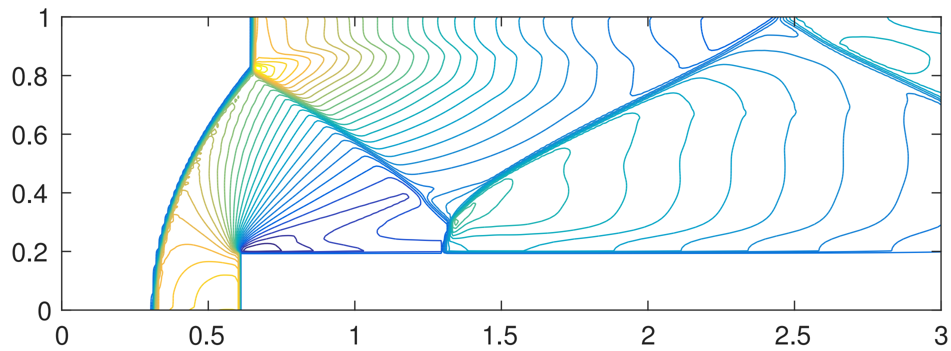
这里采用的数值通量和斜率限制器分别为 HLL-minmod 和 LF-vanleer. 计算的 $h = \frac{1}{240}$.

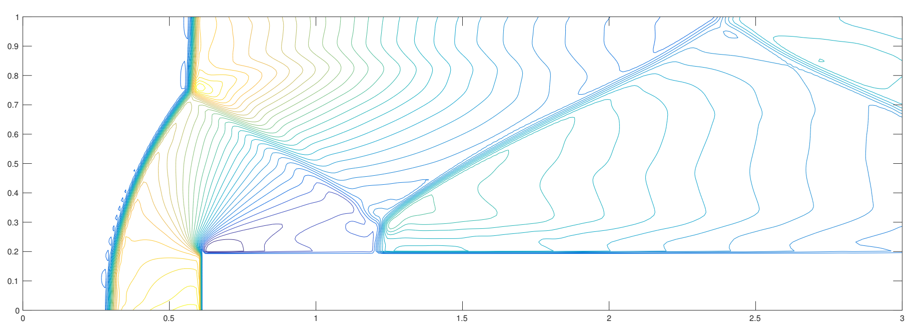
可见这儿的广义 MUSCL 格式能够大致给出问题的数值解，但对于右下角的精细结构尚不能给出。右下角精细的波结构需要更高阶的重构方式来计算 (ENO 和 WENO 重构方法)。

3.2.2 前台阶问题

- 计算区域 $[0,3]\times[0,1]$。
- 初值条件 $(\rho,u,v,p)=(1.4,3,0,1)$
- 边界条件：上下和台阶处为反射边界条件，左侧为入流边界条件，右侧为出流边界条件。

下图为 $t=4$ 时的密度等值线图。





这里采用的数值通量和斜率限制器分别为 HLL-minmod 和 LF-MC，计算采用的 $h = \frac{1}{100}$。和双马赫问题一样，该问题的解也有一定的波结构，但不够精细。

4 代码说明

fvm1d 与 fvm2d 分别为一维和二维的有限体积格式代码, config.h 中可以修改 CFL 条件数和设置 (包括针对的问题，是否重构与对应的斜率限制器，以及是否采用 3 阶 Runge-Kutta 方法), 修改所采用数值通量需要进入 fvm1d.cpp 和 fvm2d.cpp 修改。网格参数和终止时间由命令行参数传入。

5 总结

我们采用了广义 MUSCL 格式，对常见的数值通量格式和斜率限制器进行实验，比较了他们的异同。可见斜率限制器和数值通量的保守和耗散是同时存在的。对于不同的具体问题，我们需要采用不同的数值通量方法和斜率限制器，以保证在解收敛的条件下尽量减少解的耗散。