有限体积格式不同数值通量和限制器的比较

郑灵超

2017 年 5 月 29 日

1　理论分析

1.1　有限体积格式

对于守恒率方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 \tag{1}$$

将其在空间区域 Ω 积分，得

$$\frac{\partial(\int_\Omega U \,\mathrm{d}\boldsymbol{x})}{\partial t} + \int_\Omega \nabla \cdot F(U) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

令 $\bar{U}$ 为 U 在区域 Ω 上的积分平均，则

$$|\Omega|\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} F(U) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0$$

我们假设 Ω_i 表示一个多面体网格，其相邻网格为 $\Omega_{i,j}$, Ω_i 与 $\Omega_{i,j}$ 的交界面为 S_j.

$$|\Omega_i|\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j \int_{S_j} F(U) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0$$

$$|\Omega_i|\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \sum_j \hat{F}(\Omega_i, \Omega_{i,i_j}) = 0$$

1.2　数值通量

1.3　重构

2　数值实验

2.1　一维问题

2.1.1　线性对流方程

我们先选取一个简单的线性对流方程

$$u_t + u_x = 0$$

计算区域为 $[-1, 1]$，采用周期边界条件。初始值为

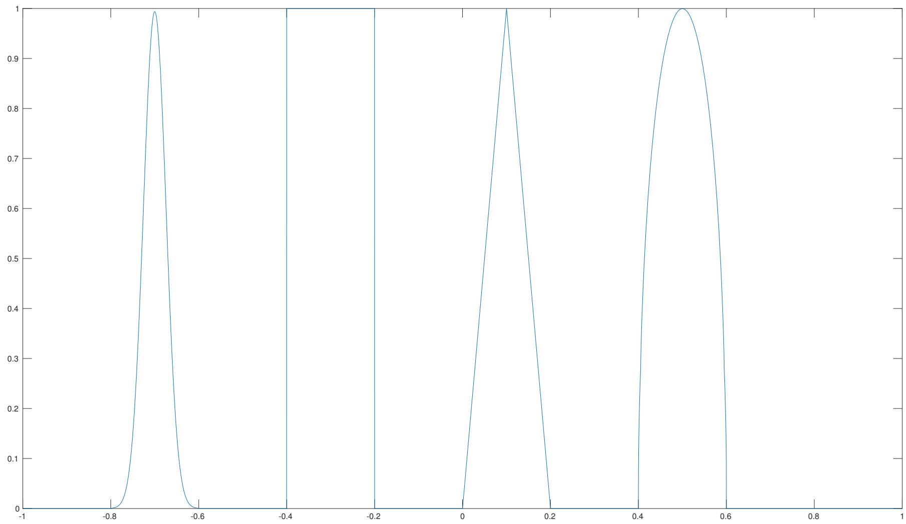
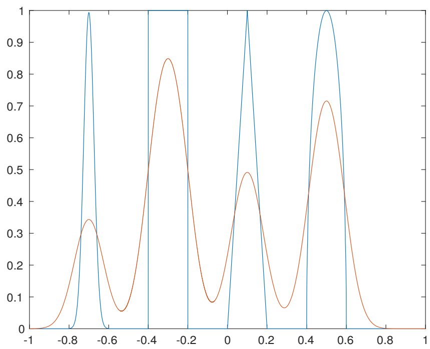
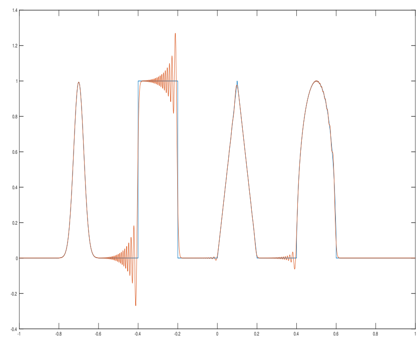


图 1: 初始值

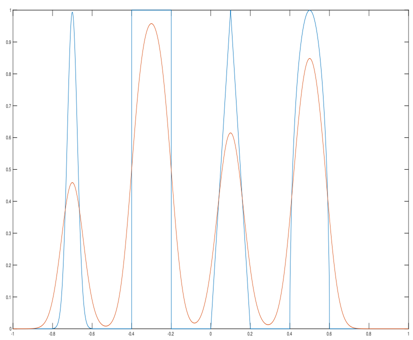
终止时刻 $t = 8$，可以预期真解与初始值是一致的。以下为不同通量的计算结果:



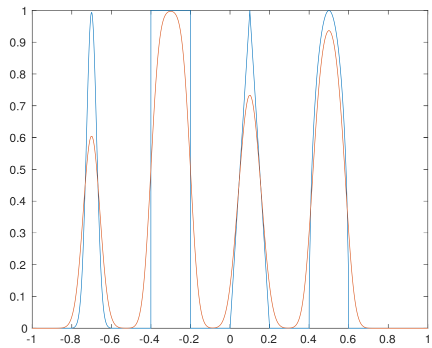
(a) LF



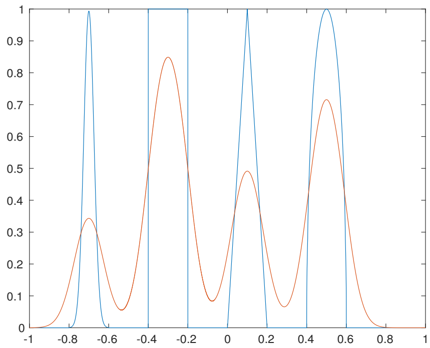
(b) LW



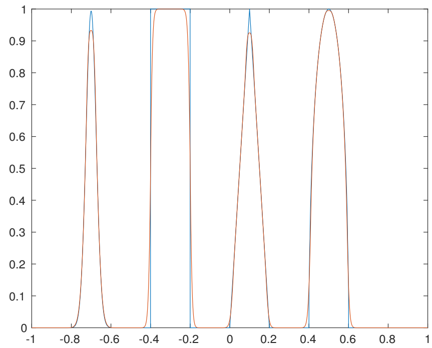
(c) Force



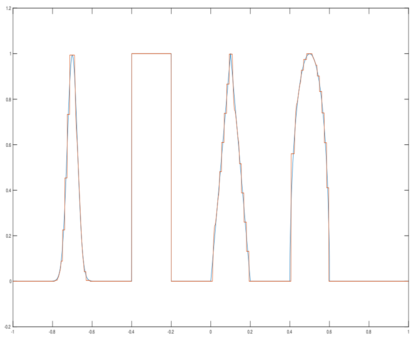
(d) Godunov



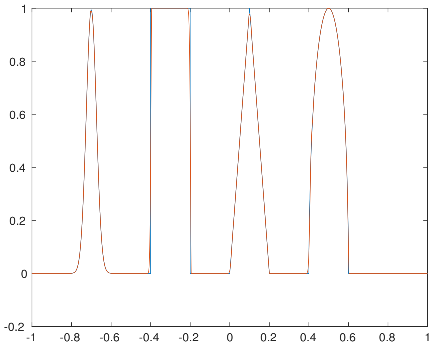
(e) No Reconstruction



(f) minmod



(g) superbee



(h) MC

2.2 二维问题

3 总结