

有限体积格式求解偏微分方程的数值实践

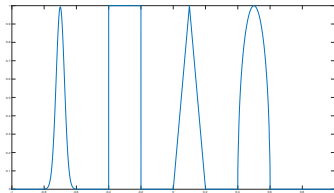
郑灵超

北京大学数学科学学院

2017 年 5 月 30 日

数值算例：线性对流方程

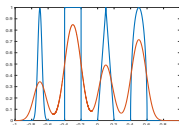
$$u_t + u_x = 0, \quad -1 \leq x < 1$$



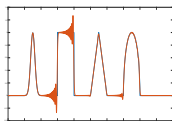
图：初始值

数值算例：线性对流方程

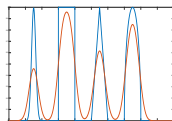
$t = 8, N = 10000, CFL = 0.6$



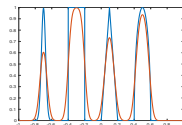
(a) LF



(b) LW

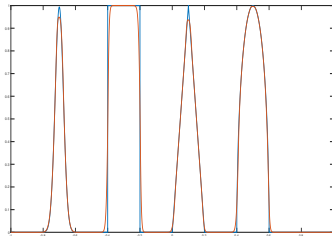


(c) Force

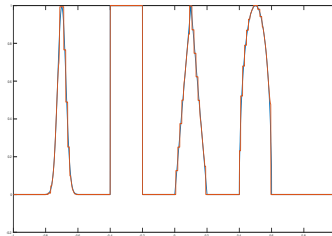


(d) Godunov

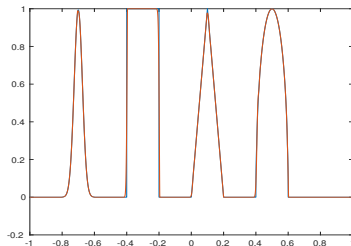
- LF 格式不会出现震荡，但耗散比较严重。
- LW 格式没有耗散，但数值震荡现象明显。
- Force 格式耗散比 LF 格式略小。
- Godunov 格式耗散比 Force 格式小，但还是不能令人满意。



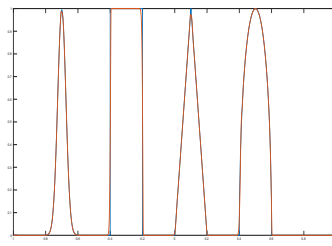
(e) minmod



(f) superbee



(g) MC



(h) van-Leer

以上实验参数 $N = 10000$, $t_{end} = 8$, $CFL = 0.6$, 采用的数值通量为 LF 通量, 时间方向采用 3 阶 RK 格式。

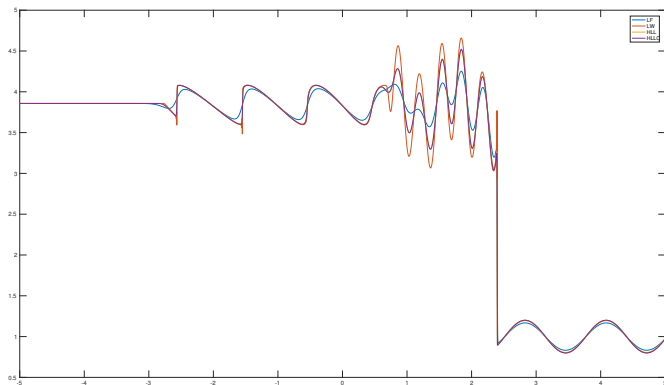
- minmod: TVD, 但重构效果不是很好, 仍有一定耗散。
- superbee: 非 TVD, 重构效果不是很好, 会一定程度增加震荡。
- MC: 非 TVD, 数值结果尚可, 但会出现负值。
- van-Leer: TVD, 数值结果尚可。

数值算例：Osher-Shu 问题

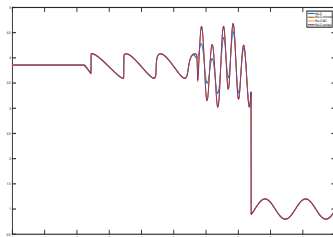
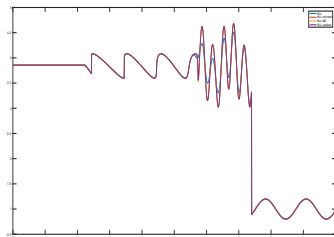
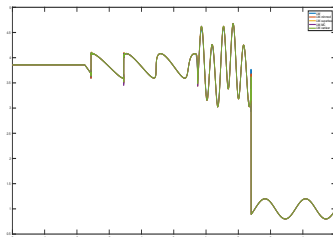
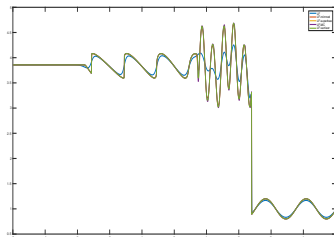
一维 Euler 方程，初值为：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases}$$

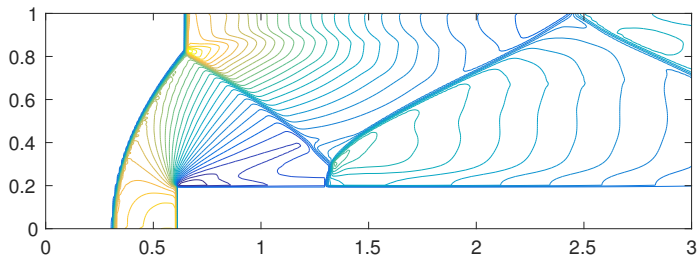
不加重构求解， $N = 10000$, $t = 1.8$, $CFL = 0.6$, 结果如下：



各限制器比较



数值算例：前台阶问题



数值算例：双马赫反射问题

