

图像处理中的数学方法-homework4

郑灵超

2017 年 5 月 6 日

1 算法介绍

1.1 TV

$$\min \lambda \|\nabla u\|_1 + \frac{1}{2} \|Au - f\|_2^2$$

我们采用的算法为 ADMM 算法，其迭代格式如下：

1. $u_{k+1} = (A^T A + \mu W^T W)^{-1} (A^T f + \mu W^T (d_k - b_k))$,
2. $d_{k+1} = \mathcal{T}_{\lambda/\mu}(W u_{k+1} + b_k)$,
3. $b_{k+1} = b_k + \delta(W u_{k+1} - d_{k+1})$.

迭代的终止条件为

$$\frac{\|W u_{k+1} - d_{k+1}\|_2}{\|f\|_2} < tol.$$

算法分析

算子 A 对应于一个矩阵 A 与 f 的卷积，算子 $W^T W$ 对应于矩阵 L 与 f 的卷积，记 $\hat{A}, \hat{L}, \hat{f}$ 分别为它们的 Fourier 变换后的矩阵，则迭代格式第一步等价于

$$(\hat{A} * \hat{A} + \mu \hat{L}) * \hat{u}_{k+1} = \hat{A} * \hat{f} + \mu (W^T (d_k - b_k))^\wedge.$$

而为了求解迭代过程中的第一个方程，我们采用 FFT 算法，步骤如下：其中这里的 $*$ 表示矩阵逐分量相乘。

因此我们可以通过如下步骤求解该方程：

1. 计算算子 $A^T A$ 和 $W^T W$ 的 Fourier 变换的矩阵 \hat{A} 与 \hat{L} ，以及 \hat{f} 和 $W^T (d - b)$ 的 Fourier 变换 \hat{v} 。
2. 计算 $(\hat{A} * \hat{f} + \mu \hat{v}) / (\hat{A} * \hat{A} + \mu \hat{L})$ ，这里的 $*$, $/$ 均表示逐项操作。
3. 做 Fourier 逆变换得到 u 。

1.2 Analysis Based Approach

$$\min \|\lambda \cdot Wu\|_1 + \frac{1}{2}\|Au - f\|_2^2$$

我们采用的算法为 ADMM 算法，其迭代格式如下：

1. $u_{k+1} = (A^T A + \mu)^{-1}(A^T f + \mu W^T(d_k - b_k))$,
2. $d_{k+1} = \mathcal{T}_{\lambda/u}(Wu_{k+1} + b_k)$,
3. $b_{k+1} = b_k + \delta(Wu_{k+1} - d_{k+1})$.

迭代的终止条件为

$$\frac{\|Wu_{k+1} - d_{k+1}\|_2}{\|f\|_2} < tol.$$

具体算法的实现与 TV 类似，采用 FFT 求解方程。

1.3 Balanced Approach

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \|\lambda \cdot \alpha\|_1 + \frac{1}{2}\|AW^T \alpha - f\|_2^2 + \frac{\kappa}{2}\|(I - WW^T)\alpha\|_2^2$$

我们采用的算法为 PFBS 算法，其迭代格式如下：

1. $g_k = \alpha_k - \nabla F_2(\alpha_k)/L$, 其中 $\nabla F_2(\alpha) = WA^T(AW^T \alpha - f) + \kappa(I - WW^T)\alpha$.

2 数值实验

我们使用的图像为 lena 图片，并对其加了模糊和噪声作为待处理图片，加入的模糊和噪声分别为

$$\sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = |u|/10$$

即

$$f = A\tilde{u} + \sigma_2 \text{randn},$$

其中 A 的卷积核为

$$k = \text{fspecial}('Gaussian', [15, 15], \text{sigma}_1).$$

初始图片和待处理图片分别为



(a) 原图



(b) 待处理图片

2.1 TV

采用参数

$$\mu = 1, \lambda = 0.001, maxstep = 10, tol = 1e - 7, \delta = 0.1$$

计算结果如下:



(c) 待处理图片



(d) TV

原图的相对误差为 0.1987, TV 处理之后图片的相对误差为 0.1124.

2.2 Analysis Based Approach

采用参数

$$\mu = 0.1, \lambda = 0.01, maxstep = 10, tol = 1e - 7, \delta = 0.1$$

小波框架的分解层数固定为 2。计算结果如下:



(e) 待处理图片



(f) frame=0



(g) frame=1



(h) frame=3

四张图相对误差分别为 0.1987,0.1563,0.1577,0.1568.

2.3 Balanced Approach

采用参数

$$\kappa = 1, L = 10, maxstep = 10, tol = 1e - 7, \lambda = 100$$

小波框架的分解层数固定为 2。计算结果如下:



(i) 待处理图片



(j) frame=0



(k) frame=1



(l) frame=3

四张图相对误差分别为 0.1987, 0.1289, 0.1451, 0.1659。

3 上次作业总结

本次作业我们采用小波框架的 Analysis Based Approach 和 Balanced Approach 方法进行去噪去模糊，并与之前写过的 TV 方法进行比较，发现从视觉感受角度而言，Analysis Based Approach 的去噪去模糊效果最佳，但从误差分析角度而言，PFBS 的效果最优，但实际感受 PFBS 虽然消除了噪声，但较大的增加了模糊，使图像更难以分辨。