

图像处理中的数学方法-homework1

郑灵超

2017 年 3 月 19 日

1 作业一

1.1 一阶偏导数

根据课程 PPT 第 77 页内容, 左图对应的导数为

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{i,j} = 0,$$

而右图对应的数值格式,

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{i,j} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2} \frac{1}{2} = \frac{1+\lambda}{4},$$

因此当 $\lambda = \sqrt{2} - 1$ 时, 二者离散导数的模相同。

1.2 拉普拉斯算子

根据课程 PPT 第 78 页内容, 左图对应的数值格式的拉普拉斯算子为

$$\Delta v|_{i,j} = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

右图对应的数值格式的拉普拉斯算子为

$$\Delta v|_{i,j} = 2\lambda + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1+3\lambda}{2},$$

因此当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 二者拉普拉斯的值相同。

2 作业二

2.1 问题介绍

对模型进行去噪去模糊, 本次我们采用的模型为

$$\hat{u} = \arg \min_u \lambda \int |\nabla u| dx + \frac{1}{2} \int (Au - f)^2 dx, \quad (1)$$

其中 A 是用于模拟图像模糊的卷积矩阵，卷积核为

$$k = \text{fspecial}(\text{"Gaussian"}, [15, 15], \sigma_1), \sigma_1 = 1.5, 2.$$

假设原图为 \tilde{u} ，待处理的图像可以由如下方式生成：

$$f = A\tilde{u} + \sigma_2 \text{randn}, \sigma_2 = \frac{\max(\tilde{u})}{100}, \frac{\max(\tilde{u})}{200}.$$

2.2 问题分析

2.2.1 算法介绍

我们采用的算法为 ADMM 算法，其迭代格式如下：

1. $u_{k+1} = (A^T A + \mu W^T W)^{-1} (A^T f + \mu W^T (d_k - b_k))$,
2. $d_{k+1} = \mathcal{T}_{\lambda/u}(W u_{k+1} + b_k)$,
3. $b_{k+1} = b_k + \delta(W u_{k+1} - k + 1)$.

迭代的终止条件为

$$\frac{\|W u_{k+1} - d_{k+1}\|_2}{\|f\|_2} < \text{tol}.$$

2.2.2 算法分析

算子 A 对应于一个矩阵 A 与 f 的卷积，算子 $W^T W$ 对应于矩阵 L 与 f 的卷积，记 $\hat{A}, \hat{L}, \hat{f}$ 分别为它们的 Fourier 变换后的矩阵，则迭代格式第一步等价于

$$(\hat{A} * \hat{A} + \mu \hat{L}) * \hat{u}_{k+1} = \hat{A} * \hat{f} + \mu (W^T (d_k - b_k))^\wedge.$$

而为了求解迭代过程中的第一个方程，我们采用 FFT 算法，步骤如下：其中这里的 $*$ 表示矩阵逐分量相乘。

因此我们可以通过如下步骤求解该方程：

1. 计算算子 $A^T A$ 和 $W^T W$ 的 Fourier 变换的矩阵 \hat{A} 与 \hat{L} ，以及 \hat{f} 和 $W^T (d - b)$ 的 Fourier 变换 \hat{v} 。
2. 计算 $(\hat{A} * \hat{f} + \mu \hat{v}) / (\hat{A} * \hat{A} + \mu \hat{L})$ ，这里的 $*$, $/$ 均表示逐项操作。
3. 做 Fourier 逆变换得到 u 。

2.3 实验结果

我们使用了经典的 Lena 图作为实验图片，对其进行加噪声与模糊得到待处理图片，再利用之前的算法进行去噪去模糊，得到的结果如下：

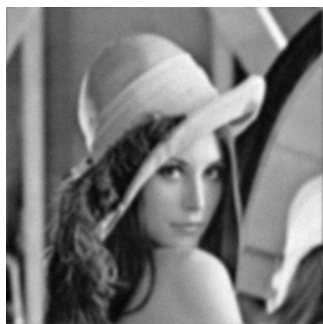


图 1: $\sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = |u|/100$

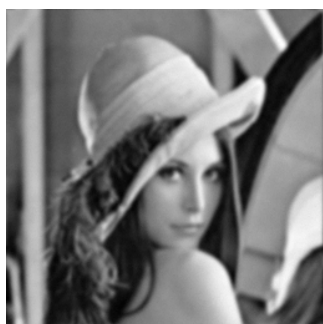
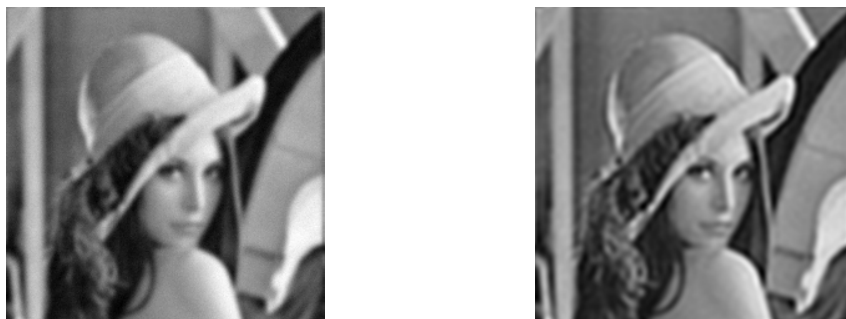


图 2: $\sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = |u|/200$

图 3: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = |u|/100$ 图 4: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = |u|/200$

而关于原图的相对误差，得到的结果如下：

$err \backslash \sigma_2$		
	100	200
σ_1		
1.5	0.0234	0.0235
2	0.0261	0.0262

以上实验的参数选取为 $\mu = 1, \lambda = 0.01, \delta = 0.1, maxstep = 100, tol = 1e - 7$ 。

其中加了噪声与模糊而未进行去噪的误差，当 $\sigma_1 = 1$ 时为 0.026，当 $\sigma_1 = 2$ 时为 0.032。可见该去噪去模糊算法有一定作用，但结果尚不能令人满意。

3 上次作业总结

本次作业，我们实现了采用 ROF 模型和 ADMM 算法对图片进行去噪去模糊，并使用了 Fourier 变换进行卷积的求解。实验结果表明该方法有一定作用，但最后的结果还是不是特别令人满意。