差分方法上机作业

郑灵超
160110040

2017 年 6 月 7 日

1 Burgers 方程

1.1 问题描述

Burgers 方程是经典的偏微分方程，其守恒形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}u^2)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

我们这里初始值设为分片常数，

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & x \le x_1 \\ u_m & x_1 < x \le x_2 \\ u_r & x > x_2 \end{cases} \tag{2}$$

1.2 算法介绍

我们采用守恒型差分格式来求解这个问题:

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}})$$

其中 F 称为数值通量，常见的数值通量为:

- Lax-Friedrichs 格式:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f(U_j^m) + f(U_{j+1}^m) - \frac{\Delta x}{\Delta t}(U_{j+1}^m - U_j^m)\right]$$

- 两步 Lax-Wendroff 格式:

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^m + U_{j+1}^m) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[f(U_{j+1}^m) - f(U_j^m)]$$

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = f(U_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}})$$

- Godunov 格式:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = f(U^*),$$

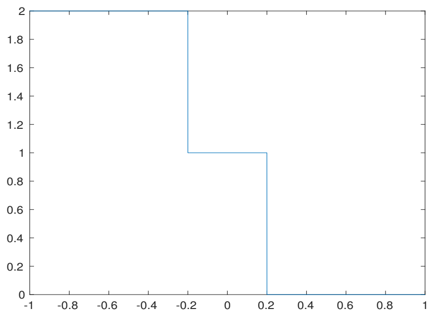
其中 U^* 为该方程对应的左侧为 U_j^m, 右侧为 U_{j+1}^m 的 Riemann 问题的解 $u(0, \Delta t)$.

1.3 数值结果

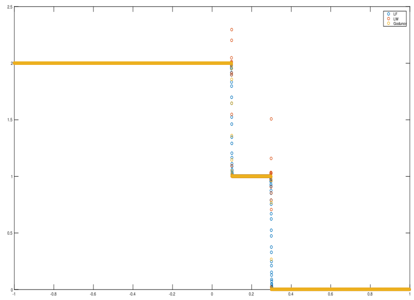
1.3.1 激波

先考虑两个间断都为激波的情形，即 $u_l > u_m > u_r$。我们取得初值为

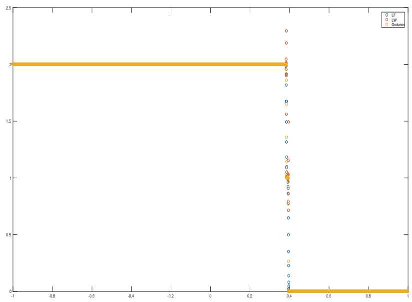
$$u_l = 2, u_m = 1, u_r = 0, x_l = -0.2, x_r = 0.2$$



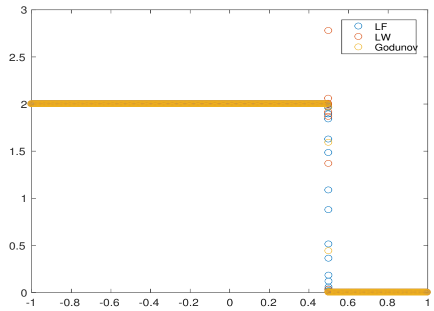
(a) t=0



(b) t=0.2



(c) t=0.39



(d) t=0.5

可见初始两个激波分别独立传播，速度分别为 $\frac{2+1}{2} = 1.5, \frac{1+0}{2} = 0.5$, 经过 $t = 0.4$ 时间之后，激波相遇合并为一个激波，之后按照该激波速度 $\frac{2+0}{2} = 1$ 速度传播。

1.3.2 稀疏波

再考虑两个间断都为稀疏波的情形，即 $u_l < u_m < u_r$。我们取得初值为

$$u_l = 0, u_m = 1, u_r = 2, x_l = -0.2, x_r = 0.2$$

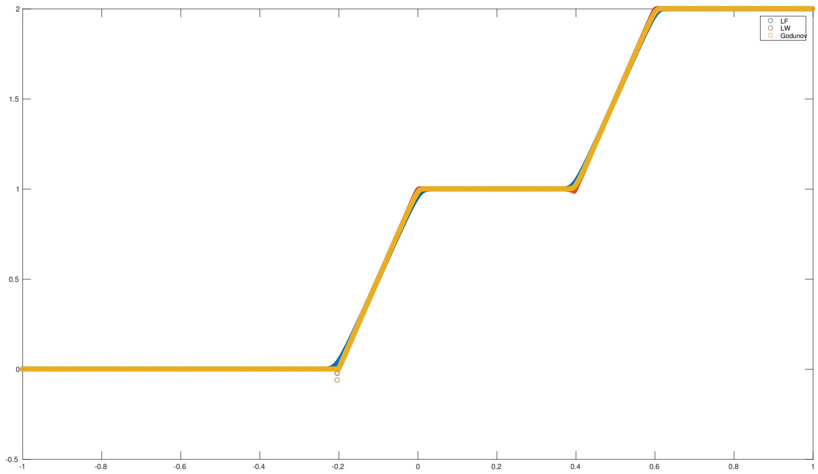


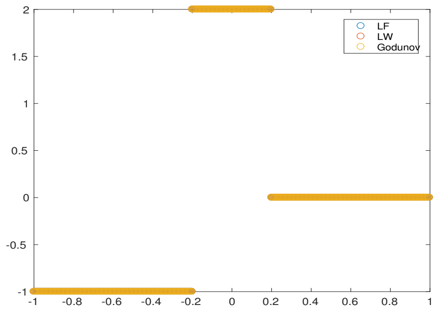
图 1: 稀疏波,t=0.2

可见两个稀疏波独立传播，互不干扰。

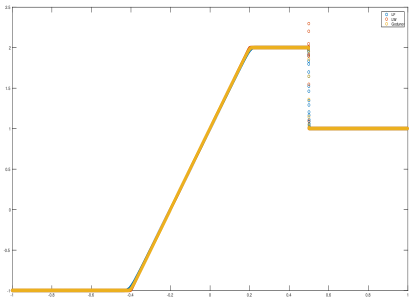
1.3.3 激波与稀疏波的相遇

最后考虑一个稀疏波和一个激波的情形。我们取得初值为

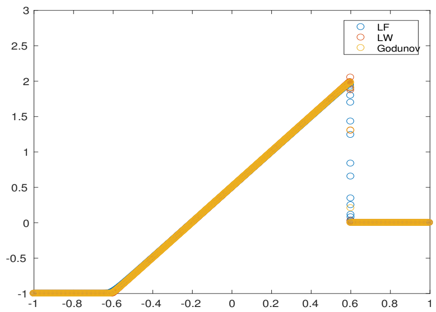
$$u_l = -1, u_m = 2, u_r = 0, x_l = -0.2, x_r = 0.2$$



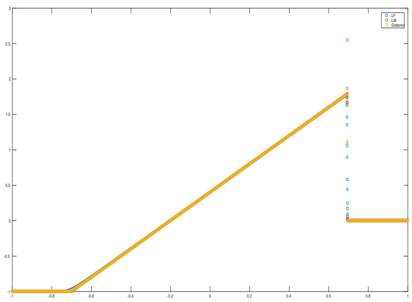
(a) t=0



(b) t=0.2



(c) t=0.4



(d) t=0.5

初始两个波独立传播，当稀疏波与激波相遇时，会出现间断，但间断左侧的值不会保持为 2，会逐渐减小。

1.3.4 各数值通量分析

由前文的数值实验，我们可以发现对于稀疏波,LF 通量会有耗散，Godunov 格式与 LW 格式类似；对于激波，LW 格式会出现震荡。

2 Taylor Green Vortex Solution

2.1 问题描述

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} = (\sin x \cos y \exp(-2\nu t), -\cos x \sin y \exp(-2\nu t))^T$$

计算的区域为 $[0, \pi] \times [0, \pi]$。要考虑的初值为:

1. $\phi = C - \sin x \sin y$

2. $\phi = C - \sin(2x) \sin(2y)$

3. $\phi = C - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$

2.2 算法分析

该方程可以写成守恒型格式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

其中 $\boldsymbol{F} = (\sin x \cos y \exp(-2\nu t)\phi, -\cos x \sin y \exp(-2\nu t)\phi)^T$ 利用守恒型差分格式,

$$\phi_{i,j}^{m+1} = \phi_{i,j}^{m} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2},j}^{m+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{m+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\right)$$

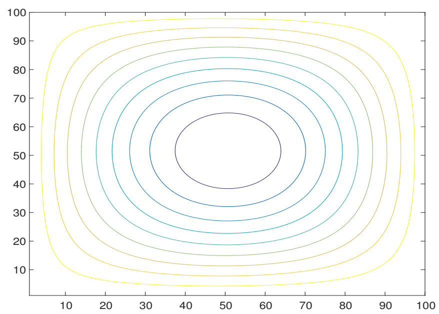
2.3 数值结果

2.4 初值 1

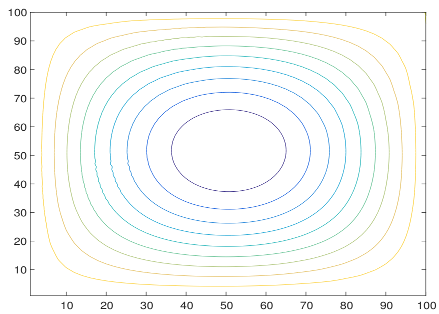
对于初值

$$\phi = 1 - \sin x \sin y$$

计算时取 $\nu = 0, N = 100, t_{end} = 2$，结果如下:



(e) Upwind



(f) WENO

将 320×320 网格的解作为参考解，得到的 2 范数误差为

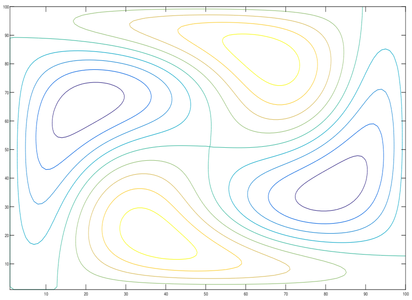
N	40	80	160
Upwind	0.0160	0.0078	0.0035
order		1.04	1.17
WENO5	0.0160	0.0078	0.0035
order		1.03	1.16

2.5 初值 2

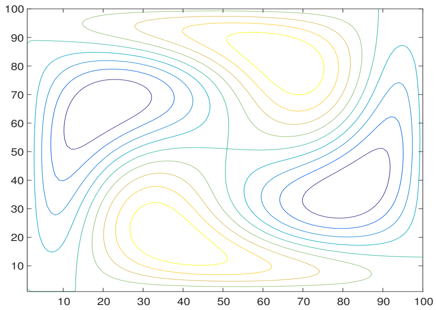
对于初值

$$\phi = 1 - \sin(2x)\sin(2y)$$

计算时取 $\nu = 0.1, N = 100, t_{end} = 2$，结果如下:



(g) Upwind



(h) WENO

将 320 × 320 网格的解作为参考解，得到的 2 范数误差为

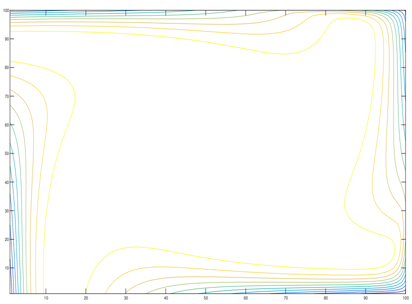
N	40	80	160
Upwind	0.0580	0.0260	0.0098
order		1.15	1.40
WENO5	0.0581	0.0260	0.098
order		1.16	1.40

2.6 初值 3

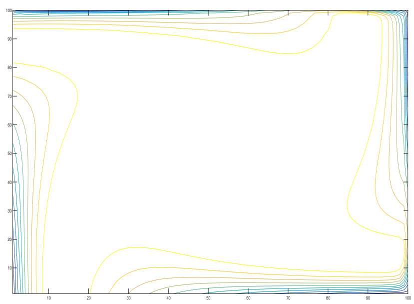
对于初值

$$\phi = C - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

计算时取 $\nu = 0.1, N = 100, t_{end} = 2$，结果如下:



(i) Upwind



(j) WENO

将 320 × 320 网格的解作为参考解，得到的 2 范数误差为

N	40	80	160
Upwind	0.1174	0.0525	0.0199
order		1.16	1.40
WENO5	0.1171	0.0524	0.0198
order		1.16	1.40

2.7 结果分析

迎风格式和 WENO 重构二者计算情况十分接近。迎风格式只具有一阶精度，但 WENO5 的数值结果也只有一阶精度，这点比较奇怪。