专题 5　导数的概念及应用

（一）导数概念

定义 1（导数） 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处可导，并**称此极限值为 $f(x)$ **在点** x_0 **处的导数**，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处不可导**.

【注】常用的导数定义的等价形式有：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定义 2（左导数） 若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 3（右导数） 若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$.

定理 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等.

【例 1】 下面几个极限能作为 $f(x)$ 在 x_0 处导数定义的是

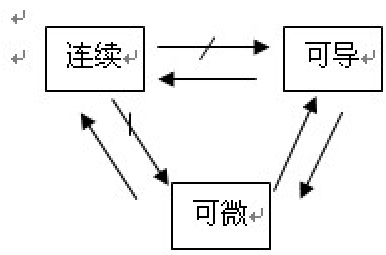
（A）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$；

（B）$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]$；

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$；

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$.

（二）连续、可导、可微之间的关系



【例 2】设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

(A) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导；

(B) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续；

(C) $f(x)$ 在 x_0 处连续；

(D) $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

与导数概念相关题型主要有三种

（一）利用导数定义求极限

【例 1】设 $f'(1)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=$______.

$[9f'(1)]$

【例 2】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}=(\quad)$

(A) 0，　(B) $f''(a)$，　(C) $2f''(a)$，　(D) $\dfrac{1}{2}f''(a)$

【例 3】设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，α_n,β_n 为趋于零的正项数列，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}.$$

【解】 由 $f(x)$ 在 x_0 可导知，

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x. \qquad （其中 \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0）$$

则 $$f(x_0+\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\alpha_n+\alpha\alpha_n \qquad （其中 \lim_{n\to\infty}\alpha=0）$$

$$f(x_0-\beta_n)=f(x_0)-f'(x_0)\beta_n-\beta\beta_n \qquad （其中 \lim_{n\to\infty}\beta=0）$$

$$\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)+\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$\left|\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right|\le\frac{\alpha_n|\alpha|}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{\beta_n|\beta|}{\alpha_n+\beta_n}\le|\alpha|+|\beta|\to 0$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)$$

（二）利用导数定义求导数

【例 1】已知 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则 $f'(1)=$__________.

【解】 由导数的定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$$

【例 2】已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+e^x]^{\frac{1}{x}}=2,$ 则 $f'(0)$ 等于

(A) $\ln 2$,　　(B) e^2,　　(C) 2,　　(D) $-1+\ln 2$

【解】 由于 $$\lim_{x\to 0}[f(x)+e^x]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln[f(x)+e^x]}{x}}=2$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x)+e^x]}{x}=\ln 2$$

从而 $$\lim_{x\to 0}\ln[f(x)+e^x]=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0,$$

当 $x\to 0$ 时，$\ln[f(x)+e^x]=\ln[1+f(x)+e^x-1]\sim f(x)+e^x-1$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x)+e^x]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+e^x-1}{x}=f'(0)+1=\ln 2$$

故 $f'(0)=-1+\ln 2$

【例 3】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0)=1, g'(0)=-1$

1）求 $f'(x)$

2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

（三）利用导数定义判定可导性

【例 1】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【例 2】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+x^2, & x\leq 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性.

【解 1】 $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x+x^2-1}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导，且 $f'(0)=0$.

【解 2】 $f'_-(0)=(\cos x+x^2)'\big|_{x=0}=(-\sin x+2x)\big|_{x=0}=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{2x}=0$$

【注】本题中用了三种求分段函数在分界点处导数的方法：

方法 1：导数定义

解 1 用的此方法.

方法 2：求导代入

解 2 中左导数 $f'_-(0)$ 用的此方法，其理论依据是：

若在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上，$f(x)=g(x)$，则 $f'_-(x_0)=g'_-(x_0)$. 右导数有类似结论.

方法 3：导函数极限

解 2 中右导数 $f'_+(0)$ 用的此方法，其理论依据是：

若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在，

则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$. 左导数有类似结论.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域有定义，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充分条件是

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在；

（B）$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-f(0)]$ 存在；

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在；

（D）$\lim\limits_{x\to\infty}x[f(\frac{1}{x})-f(0)]$ 存在.

【解】 应选（D）.

【例 4】（96 年 2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

A）间断点

B）连续而不可导的点

C）可导的点，且 $f'(0)=0$

D）可导的点且 $f'(0)\neq 0$

【解 1】直接法

【解 2】排除法

【例 5】 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2x}{1-\cos x}=1$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

（A）不可导.　　　　　　　（B）可导且 $f'(0)=0$.

（C）可导且 $f'(0)=-2$.　　　（D）可微且 $dy\big|_{x=0}=2dx$.

【解 1】直接法

由题设知 $f(0)=0$，且

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-2}{x}$$

则　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$f'(0)=2$，故应选（D）.

【解 2】排除法

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2x}{1-\cos x}=1$ 知，令 $f(x)-2x=\dfrac{1}{2}x^2$，即 $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}x^2$ 满足题设条件，但 $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}x^2$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=2$，显然可排除（A）(B)（C），故应选（D）.

【例 6】　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$ 不可导点的个数为

（A）0 个；　　（B）1 个；　　（C）2 个；　　（D）3 个.

【解】　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+\mathrm{e}^{nx}}=\max\left\{1,|x|,e^x\right\}=\begin{cases}-x & x<-1\\ 1 & -1\le x\le 0\\ \mathrm{e}^x & x>0\end{cases}$（几何法）

$f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=0$ 不可导，选（C）（几何法）

【注】本题利用了结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le i\le m}a_i，其中\ a_i>0\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

【例 7】设有命题

1）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导；

2）若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

3）若 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数都存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

4）若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在。

则上述命题中正确的个数为

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

【解】 应选（C）

2）正确.

(1)若 $f(x_0)>0,$ 则在 x_0 某邻域内，$|f(x)|=f(x),$ 从而 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

(2)若 $f(x_0)<0,$ 则在 x_0 某邻域内，$|f(x)|=-f(x),$ 从而 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

(3)若 $f(x_0)=0,$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}$ 存在，

而 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\ge 0,\ \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\le 0.$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=0,$ 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\right|=\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{x-x_0}\right|=0$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=0$， $f(x)$ 在 x_0 处可导.

3)正确.

由于 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；

由于 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处右连续；

从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

【例 8】设函数 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$，其中 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(0)=2.$

（1）求 $\varphi'(x)$；

（2）讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

【解】 令 $tx^2 = u$，则

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2 \sin x} \frac{1}{x^2} f(u)du = \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du \qquad (x \neq 0)$$

由已知得 $\varphi(0) = 0$.

（1）当 $x \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x)\cdot(2x\sin x + x^2 \cos x) \\ &= -\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du + f(x^2 \sin x)(\frac{2}{x}\sin x + \cos x)\text{；}\end{aligned}$$

在 $x = 0$ 点处，由导数定义有

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x}{x^3} f(\xi) \qquad \text{（积分中值定理）} \\ &= f(0) = 2.\end{aligned}$$

所以 $\varphi'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^3}\displaystyle\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du + f(x^2 \sin x)(\dfrac{2}{x}\sin x + \cos x), & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$

（2）因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varphi'(x) &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2 \sin x} f(u)du + f(x^2 \sin x)(\frac{2}{x}\sin x + \cos x)\right] \\ &= -2f(0) + 3f(0) = 2 = \varphi'(0)\text{，}\end{aligned}$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 点处连续；又当 $x \neq 0$ 时，$\varphi'(x)$ 连续，所以 $\varphi'(x)$ 处处连续.

练习题

1. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + \dfrac{\pi}{2}, & x \le 1, \\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处的可导性.

2. 设 $f(a) = 1, f'(a) = 2,$ 则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(a+2x)} - e^{f(a-x)}}{\sin(x-a)} =$ ________.

3. 设 $f(0)=f'(0)=1$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(\sin 3x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

4. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线过点 $(1,2)$，则

$$\lim_{x\to 0}[\cos x+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{x^2}}=\underline{\qquad\quad}.$$

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x}=b$, 则（ ）

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不一定连续, .

(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且 $f'(0)=b.$

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导函数连续.

6. 已知 $f(0)=1$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0.$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）

（A）不可导.　　　（B）可导且 $f'(0)=0.$

（C）可导且 $f'(0)=-2.$　　　（D）可微且 $dy\big|_{x=0}=dx.$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的一个充分条件是

（A） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在；　（B） $\lim\limits_{x\to\infty} x^2[f(x_0+\dfrac{1}{x^2})-f(x_0)]$ 存在；

（C） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^3)-f(x_0)}{\tan x^2}$ 存在;　（D） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^3)-f(x_0)}{\sin^3 x}$ 存在.

练习题答案：1. 不可导，其中 $f'_-(1)=0\ f'_+(1)=-1;$　　2. $6e$　　3. e^2；

4. $e^{\frac{1}{2}}$ ；　5. A ；　6. D;　7. D .