专题 15：计算二重积分的方法和技巧

二重积分的计算方法

1．利用直角坐标计算

1）先 y 后 x

若积分域 D 是 X 型区域, 即积分域 D

可以用不等式 $y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b$，

来表示, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

2）先 x 后 y

若积分域 D 是 Y 型区域, 即积分域 D

可以用不等式 $x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d$，

来表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

2．利用极坐标计算

1）先 ρ 后 θ

若积分域 D 可以用不等式

$$\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta,$$

来表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

【注】适合用极坐标计算的二重积分的特征

(1) 适合用极坐标计算的被积函数: $f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y});$

(2) 适合用极坐标的积分域:

如 $x^2+y^2 \le R^2;\ r^2 \le x^2+y^2 \le R^2;\ x^2+y^2 \le 2ax;\ x^2+y^2 \le 2by;$

3．利用对称性和奇偶性计算

1）若积分域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性, 则:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_{x\ge 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y),\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y).\end{cases}$$

2）若积分域关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_{y\ge 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y),\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y).\end{cases}$$

4．利用变量对称性计算

若积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

特别的 $\iint_D f(x)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma.$

【例 1】 积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=$____________.　　　$(-\ln\cos 1)$

【例 2】 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$__________.

【解】 积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx$ 中的第二项适合先对 x 后对 y 积分, 但第一项适合先对 y 后对 x 积分.

$$\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}(e-1)$$

【例 3】 积分 $\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ 的值等于____________. $(\frac{16}{9})$

【例 4】设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (3x+4y)^2\,dxdy=$__________. $(\frac{25\pi}{4})$

【例 5】设 D 是 xOy 平面上以（1, 1）（−1, 1）和（−1, −1）为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于（　　）

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　　　（B）$2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　　　（D）0.

【例 6】设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=-\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy=$

（A）π.　　（B）2.　　（C）-2.　　（D）$-\pi$.　　(D)

【例 7】积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$（ ）

(A) $\frac{5}{3}$, (B) $\frac{5}{6}$, (C) $\frac{7}{3}$, (D) $\frac{7}{6}$,

【解】$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy$

$$=2\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=2\int_{0}^{1}[2-x^2-x]dx=\frac{7}{3}$$

【例 8】设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_{D}f(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2,x=1$所围区域，则 $f(x,y)$ 等于（C）.

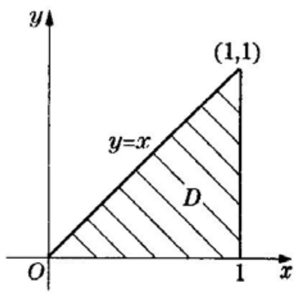
（A）xy （B）$2xy$ （C）$xy+\frac{1}{8}$ （D）$xy+1$

【例 9】计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

【解】由题设知，积分区域 D 如图所示，将积分化为直角坐标系下的二重积分为



$$I=\iint\limits_{D}r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_{D}y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\,\mathrm{d}x.$$

设 $x=\sin t$，则

$$I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

【例 10】已知平面域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\right\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D (x+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解】 $I=\iint\limits_D (x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

由于 D 关于 y 轴对称，且函数 $2x$ 是 x 的奇函数，所以 $\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

$$I=\iint\limits_D (x^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos^2\theta\rho d\rho+\pi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta+\pi$$

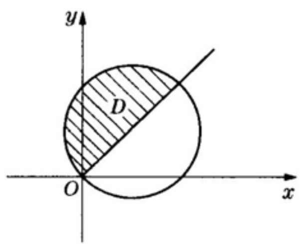
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta+\pi$$

$$=8(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})+\pi=\frac{5}{4}\pi$$

【例 11】计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}.$$

【解法一】 如图所示，区域 D 的极坐标表示为



$$0\le r\le 2(\sin\theta+\cos\theta),\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}.$$

$$\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{3}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

【解法二】极坐标平移，令 $x-1=r\cos\theta, y-1=r\sin\theta,$ 则

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

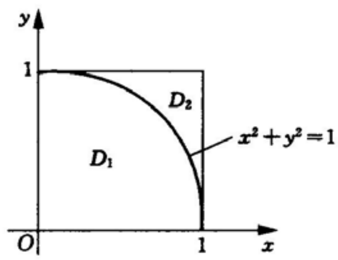
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

【例 12】计算二重积分 $\iint_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

【解】 如图所示，将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.



$$\iint_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma.$$

$$=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+[\iint_D (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma]$$

$$=2\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D (x^2+y^2-1)d\sigma]$$

由于 $\displaystyle\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{8},$

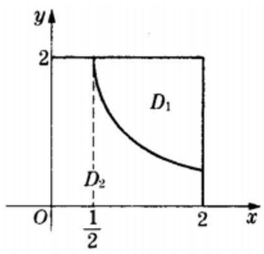
$$\iint_D (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$$

因此 $\displaystyle\iint_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$

【例 13】计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

【解】 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如右图所示的两个区域 D_1 和 D_2



$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\,\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

【例 14】设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解 1】 $$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta[1+r^2]\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3[1+r^2]\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\,\mathrm{d}r\right)=\frac{3}{8}.$$

【解 2】 记 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1, x\ge 0, y\ge 0\}$,

$$D_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0\},$$

则有

$$[1+x^2+y^2]=1,\quad (x,y)\in D_1,\quad [1+x^2+y^2]=2,\quad (x,y)\in D_2.$$

于是

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

【例 15】设平面域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, 计算

$$\iint\limits_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)+x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

【解】由于积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D \frac{x^2y^2\sin(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint\limits_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

故 $$\iint\limits_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$$

又 $$\iint\limits_D \frac{x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D \frac{y^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}[\iint\limits_D \frac{x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_D \frac{y^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\rho^2\ln\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2\rho^2\ln\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}[8\ln 2-\frac{7}{3}]$$

【例 16】 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy.$

【解】区域 D 关于 $x=\pi$ 对称，则 $\iint\limits_D (x-\pi)dxdy=0.$

设曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的直角坐标方程为 $y=y(x)$, 则

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\iint\limits_D (x-\pi)dxdy+\iint\limits_D (2y+\pi)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(2y+\pi)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[y^2(x)+\pi y(x)]dx$$

$$=\int_0^{2\pi}[(1-\cos t)^3+\pi(1-\cos t)^2]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(2\sin^2\frac{t}{2})^3+\pi(2\sin^2\frac{t}{2})^2]dt$$

$$=2\int_0^{\pi}[(2\sin^2 u)^3+\pi(2\sin^2 u)^2]du$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 udu+16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 udu$$

$$=5\pi+3\pi^2$$

【例 17】已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0,$ $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解 1】 因为 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，所以 $f'_y(1,y)=0, f'_x(x,1)=0.$ 从而

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,ydy)\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=a.$$

【解 2】

思考题：

1. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D x^2dxdy.$ $[\frac{\sqrt{3}}{16}(\frac{\pi}{2}-1)]$

2. 计算积分 $I=\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域. $[\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi]$

3. 已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\},$ 计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy.$

$[\frac{32}{3}+5\pi]$

4. 设 D 时由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分

$\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$ $[1-\frac{\pi}{2}]$

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

$[e-1]$