专题 4 无穷小量阶的比较

1.无穷小量的概念

若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称 $f(x)$

为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

2.无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq 0$.

（1）高阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$； 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

（2）低阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$；

（3）同阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$；

（4）等价： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$；记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

（5）无穷小的阶：若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

由无穷小量阶的定义可知，比较两个无穷小阶的问题就是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，所以，常用的方法就是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的常用三种方法

1）洛必达法则（求导定阶）

若当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f'(x)$ 是 x 的 $k\ (k\geq 0)$ 阶无穷小，则 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的 $k+1$ 阶无穷小量.

2）等价无穷小代换

若当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\sim Ax^k\ (A\neq 0,k>0)$, 则 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的 k 阶无穷小量.

如当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^2\cdot x$, 则当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小。

3）泰勒公式

这里常见的有三类问题

一. 无穷小阶的比较及阶的确定

【例 1】(1993 年 1, 3) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小　　（B）同阶但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小　　（B）

【解 1】

【解 2】

【例 2】设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)du,$，$g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)dt$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小　　（B）同阶但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小　　（D）

【例 3】(1997 年 2) 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为( )

（A） 1,　　（B） 2,　　（C） 3,　　（D） 4.　　(C)

【解 1】

【解 2】

【例 4】设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$ 的连续函数，且当 $x\to 0$ 时 $\int_0^{\sin^2 x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 x 的 n 阶无穷小，则 $n=$ ______. [6]

【解 1】

【解 2】

【解 3】

【例 5】当 $x\to 0$ 时，$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 x 的多少阶无穷小？（α 为参数）

【解】$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$

$$=1-[1-\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^4}{4!}+o(x^4)+\alpha[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)]$$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{\sin^4}{4!}+o(x^4)+\alpha[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}+\alpha,$$

若 $\alpha\neq-\dfrac{1}{2}$，则 $1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 x 的 2 阶无穷小.

若 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x+x][\sin x-x]}{x^4}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\neq 0$$

则$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$是$x$的 4 阶无穷小.

二. 无穷小按阶排序或求最高（低）阶无穷小

【例 1】(2016 年 2)设$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1),\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当$x\to0^+$时，以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. （B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$. （C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$. （D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

【解】当$x\to0$时

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1.\sim\frac{1}{3}x$$

则以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$, 故选（B）.

【例 2】（1992 年 4,5）当$x\to0$时，下列四个无穷小量中，比其他三个更高阶的无穷小量是（ ）.

（A）x^2 （B）$1-\cos x$ （C）$\sqrt{1-x^2}-1$ （D）$x-\tan x$

【例 3】当$x\to0$时，下列无穷小中最高阶的是( )

（A）$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, （B）$e^{\sin x}-e^{\tan x}$

（C）$e^{x^2}-\cos x$ （D）$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$

【解】

（A）$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ （2 阶）

或 $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=[\sqrt{1+x^2}-1]-[\sqrt{1-x^2}-1]$

$$\sim[\frac{1}{2}x^2]-[-\frac{1}{2}x^2]=x^2$$

（B）$e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)\sim\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$ （3 阶）

或 $e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\xi}(\sin x-\tan x)\sim\sin x-\tan x$

（C） $e^{x^2}-\cos x=[1+x^2+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2))]=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ （2 阶）

或 $e^{x^2}-\cos x=[e^{x^2}-1]-[\cos x-1]\sim x^2-[-\frac{1}{2}x^2]=\frac{3}{2}x^2$

（D） $(\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt)'=\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}x^3$ （3 阶）

原无穷小是 4 阶，

或，由于 $\frac{\sin t^2}{t}\sim t$，则

$$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt\sim\int_0^{1-\cos x}tdt=\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{1}{8}x^4$$

故选（D）

【例 4】当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中最低阶的是（ ）

（A） $\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$， （B） $x-\sin x+\int_0^x t^2e^{t^2}dt$

（C） $x-\sin x\cos x\cos 2x$ （D） $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ （A）

三. 确定无穷小阶的比较问题中的参数

【例 1】（2001 年 2）设当 $x\to 0$ 时 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

（A）1. （B）2. （C）3. （D）4.

【解】当 $x\to 0$ 时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4$$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2}-1 \sim x^2$$

由题设可知$2<n+1<4$,则$n=2$,故选（B）.

【例 2】（2014 年 2）当$x\to 0^+$时，若$\ln^\alpha(1+2x),(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$均是比$x$高阶的无穷小，则$\alpha$的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$ （B）$(1,2)$

（C）$(\frac{1}{2},1)$ （D）$(0,\frac{1}{2})$

【解】当$x\to 0$时

$$\ln^\alpha(1+2x)\sim(2x)^\alpha=2^\alpha x^\alpha$$

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}$$

由题设可知$\alpha>1$,且$\dfrac{2}{\alpha}>1$,则$1<\alpha<2$,故选（B）.

【例 3】（2011 年 2,3）

已知当$x\to 0$时，函数$f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小，则

（A）$k=1,c=4.$ （B）$k=1,c=-4.$

（C）$k=3,c=4.$ （D）$k=3,c=-4.$

【解 1】（洛必达）
【解 2】（泰勒公式）
【解 3】（等价代换）

【解 4】（代入法）

【例 4】（1996 年 1,2）设$f(x)$有连续导数,$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$,

微信公众号【最强考研】 考研人的精神家园！

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小，则 k 等于（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【解 1】直接法

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)-x^2 f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$$=2\frac{f'(0)}{(k-1)(k-2)}\neq 0 \qquad (k=3)$$

故选（C）.

【解 2】排除法

【例 5】(2013 年 2, 3) 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\cos 3x+3\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\cos 3x+3\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{2ax} \qquad (n=2)$$

$=\dfrac{1+4+9}{2a}=\dfrac{7}{a}$，则 $a=7$

【解 2】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)][1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)][1-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)]}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(3x)^2}{2}}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{14x^2}{2ax^n}$$

则 $n=2,a=7.$

【解 3】 $1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\frac{1}{a}[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{x^2}]\quad (n=2)$$

$$=\frac{1}{a}[\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}]=\frac{7}{a}$$

$a=7$

【例 6】(2006 年 2) 试确定常数 A,B,C 的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

【解 1】 因为 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$

将其代入题设等式，整理得

$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3=1+Ax+o(x^3),$$

故有

$$\begin{cases}1+B=A,\\ \frac{1}{2}+B+C=0,\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=\frac{1}{6}.$

【解 2】 根据题设和罗必达法则，由于

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+B+Bx+2Cx+Cx^2)-A}{3x^2}\qquad (1+B-A=0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x} \qquad (2B+2C+1=0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{B+4C+2Cx}{6}. \qquad (B+4C=0)$$

即 $\begin{cases}1+B-A=0,\\ 2B+2C+1=0,\\ B+4C=0,\end{cases}$

解得 $A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=\frac{1}{6}.$

【例 7】(2015 年 1，2, 3) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x.g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【解】 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

则 $f(x)=(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{ax^3}{3}+o(x^3)$

由于当 $x\to 0$ 时， $f(x)\sim kx^3$, 则

$$\begin{cases}1+a=0\\ b-\frac{a}{2}=0\\ \frac{a}{3}=k\end{cases}$$

故 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}.$

练习题

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中最高阶的无穷小量是（ ）

（A）$\int_0^x \ln(1+t^{3/2})dt$; （B）$\tan x-\sin x$; （C）$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$; （D）$\int_0^{1-\cos x}\sin^{3/2} t dt$.

2. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是

$(A)\quad \sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ $\qquad$ $(B)\quad x-\ln(1+\tan x)$

$(C)\quad e^{3x^2}-\cos 2x$　　　　$(D)\quad \int_0^{\arcsin x}\frac{1-\cos t^2}{t}dt$

3. 若 $\varphi(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 在 $x\to 0$ 时是与 x^5 同阶的无穷小量，则

（A）$a=\frac{4}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;　　（B）$a=-\frac{4}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;

（C）$a=\frac{1}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;　　（D）$a=-\frac{1}{3}$ 且 $b=\frac{4}{3}$;

4. 已知 $x\to 0$ 时, $e^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 求 n,a.

5. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax+b\sin x+\sin x\cos x$ 与 $g(x)=kx^5$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

练习题答案： 1.(D)； 2.(D)； 3. (A)； 4. $a=\frac{1}{3},n=4;$　5. $a=3,b=-4,k=\frac{1}{10}$.