专题 11　平面域的面积与旋转体的体积

（一）平面图形的面积

计算平面图形的面积时，利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 设有平面域 D，则该平面域 D 的面积为

$$S=\iint_D 1d\sigma$$

1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)$（$f(x)\ge g(x)$），

$x=a$， $x=b$（$a<b$）所围成（如右图），则

$$S=\iint_D 1d\sigma=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)}1dy=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

2）若平面域 D 由曲线曲 $\rho=\rho(\theta)$， $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$

所围成（如右图），则其面积为

$$S=\iint_D 1d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

【注】 平面域 D 的面积直接用二重积分 $S=\iint_D 1d\sigma$ 计算，然后根据积分域 D 选择计算二重积分的方法（直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性）.

（二）旋转体的体积

旋转体的体积的一般的问题是平面域 D 绕直线

$L: ax+by+c=0$（该直线不穿过区域 D, 如右图）

旋转所得旋转体体积，记该体积为 V. 解决该问题

利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 在区域 D 中取一小区域 $(d\sigma)$，其面积记为 $d\sigma$, (x,y) 为区域 $(d\sigma)$ 中的任一点, 则该小区域绕直线 L 旋转所得环状体的体积近似值为

$$dV=2\pi\, r(x,y)d\sigma$$

其中 $r(x,y)$ 为点 (x,y) 到直线 L 的距离，即 $r(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 则

$$V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma$$

特别的, 若区域 D 由曲线 $y=f(x)$（$f(x)\ge 0$），

和直线 $x=a$，$x=b$ $(0\le a<b)$ 及 x 轴所围成

（如右图），则

（1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_x=2\pi\iint_D y\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)}ydy=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

（2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\iint_D x\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)}xdy=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x$$

【注】 平面域 D 绕直线 $L:ax+by+c=0$（该直线不穿过区域 D) 旋转所得旋转体体积直接用二重积分 $V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma$ 计算，然后选择计算二重积分的方法（直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性）. 用这个方法比用一元的元素法简单的多.

【例 1】 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为

_______. $[\dfrac{3}{2}-\ln 2]$

【例 2】 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|\,\mathrm{d}\,t$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成封闭图形的面积

为_________.

【解】 由于 $t|t|$ 为奇函数，则 $f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|\,\mathrm{d}\,t$ 为偶函数，

而 $f'(x)=x|x|<0,(x<0)$, $f(-1)=0$,

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(-t^2)dt=-\frac{1}{3}(x^3+1) \qquad (x\le 0)$$

$$S=2\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}(x^3+1)dx=\frac{1}{2}$$

【例 3】(1996 年 3) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x)$，$y=f(x)$，$x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转

体体积为（ ）.

（A）$\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

（B）$\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

（C）$\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

（D）$\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ (B)

【例 4】 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \le 2x$ 所确定, 试求

(Ⅰ)图形 A 绕 y 旋转一周所得旋转体的体积;

(Ⅱ)图形 A 绕 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(Ⅲ)图形 A 绕 $y=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解】(Ⅰ)方法一 $V_y = 4\pi\int_0^2 x\sqrt{2x - x^2}dx$

$= 4\pi\int_0^2 [(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$= 4\pi\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$ （奇偶性平移）

$= 4\pi \cdot \dfrac{\pi}{2}$ （定积分几何意义）

$= 2\pi^2$

方法二 $V_y = 2\pi\iint\limits_D r(x,y)d\sigma = 2\pi\iint\limits_D xd\sigma$

$= 2\pi\iint\limits_D [(x-1)+1]d\sigma$

$= 2\pi\iint\limits_D d\sigma$ （奇偶性平移）

$= 2\pi^2$

（Ⅱ）$V_{x=3} = 2\pi\iint\limits_D r(x,y)d\sigma = 2\pi\iint\limits_D (3-x)d\sigma$

$$= 2\pi \iint_D [2-(x-1)]d\sigma$$

$$= 2\pi \iint_D 2d\sigma \qquad \text{（奇偶性平移）}$$

$$= 4\pi^2$$

（III）$V_{y=2} = 2\pi \iint_D r(x,y)d\sigma = 2\pi \iint_D (2-y)d\sigma$

$$= 2\pi \iint_D 2d\sigma \qquad \text{（奇偶性）}$$

$$= 4\pi^2$$

【例 5】过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】设切点 A 的坐标为 (x_1, y_1)，则切线方程为

$$y-y_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1),$$

将点 $(0,1)$ 代入，得 $x_1=e^2, y_1=2.$

所求面积为 $S=\int_1^{e^2}\ln xdx-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2$

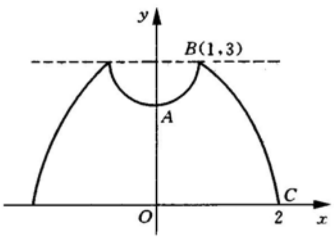
$$=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx-e^2+1$$

$$=2e^2-e^2+1-e^2+1=2$$

所求体积为 $V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 xdx-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1)$

$$=\pi(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{e^2}-\frac{4\pi}{3}(e^2-1)=\frac{2\pi}{3}(e^2-1).$$

【例 6】求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.



【解 1】 作出图形. $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=x^2+2$ $(0\le x\le 1)$，$\overset{\frown}{BC}$ 的方程为 $y=4-x^2$ $(1\le x\le 2)$.

设旋转体在区间 $[0,1]$ 上体积为 V_1，在区间 $[1,2]$ 上的体积为 V_2，则它们的体积元素分别为

$$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\,\mathrm{d}x=\pi[8+2x^2-x^4]\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi[8+2x^2-x^4]\mathrm{d}x.$$

由对称性得 $V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.$$

【解 2】$V=2\pi\iint\limits_D(3-y)d\sigma=2\pi\int_{-2}^{2}dx\int_0^{3-\left|x^2-1\right|}(3-y)dy$

$$=-\pi\int_{-2}^{2}[(x^2-1)^2-9]dx=\frac{448}{15}\pi$$

【例 7】设曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域为 D，

1）求区域 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转的体积；

2）求区域 D 分别绕 $x=2$ 和 $y=2$ 旋转所得旋转的体积.

【解】 1）$V_x=2\pi\iint\limits_D yd\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}ydx=\frac{8\pi}{3}$

$$V_y=2\pi\iint\limits_D xd\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}xdx=\frac{11}{6}\pi$$

2）区域 D 绕 $x=2$ 旋转所得旋转的体积为

$$V=2\pi\iint\limits_D(2-x)d\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2-x)dx=\pi(\frac{25}{6}-4\ln 2)$$

区域 D 绕 $y=2$ 旋转所得旋转的体积为

$$V=2\pi\iint\limits_D(2-y)d\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2-y)dx=4\pi(\frac{5}{6}-\ln 2)$$

【例8】求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围区域为 D 绕直线 $y=x$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解】 $r(x,y)=\frac{\left|y-x\right|}{\sqrt{2}}=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$

$$V=2\pi\iint\limits_D\frac{x-y}{\sqrt{2}}d\sigma=2\pi\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}\frac{x-y}{\sqrt{2}}dy=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

【例 9】设平面域 D 由曲线 $\rho=(1+\cos\theta)$ 所围成，试求

1）区域 D 的面积；

2）区域 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】 1）解 $S=\iint\limits_{D}1\,d\sigma=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho d\rho=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

2） 由于 D 在极轴上方和下方两部分绕极轴旋转产生的旋转体重合，则

$$V_x=2\pi\iint\limits_{D_{y\geq 0}}yd\sigma=2\pi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}$$

【例 10】 已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}(0\leq t<\dfrac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0, f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1.

1) 求函数 $f(t)$ 的表达式;

2）求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积及绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

【解】 1) 曲线 L 的切线斜率 $k=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，切线方程为

$$y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}(x-f(t)).$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}+f(t).$

由题意得 $\left[f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t=1.$

因为 $f'(t)>0$，解得 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{1}{\cos t}-\cos t.$

由于 $f(0)=0$，所以 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t.$

2）因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}f(t)=+\infty$，所以以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域是无界区域，其面积为

$$S=\int_0^{+\infty}ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt\ \ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\frac{1}{4}\pi.$$

$$V_x=\pi\int_0^{+\infty}y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot f'(t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt=\frac{\pi}{3}$$

【例 11】 设曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le n\pi, n=1,2\cdots)$ 和 x 轴所围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n.

(Ⅰ) 求 S_n;

(Ⅱ) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$.

【解】(Ⅰ) $S_n=2\pi\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$ （令 $x=n\pi-t$）

$$=2\pi\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=2n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-S_n$$

$$S_n=n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n^2\pi^2\int_0^{\pi}\sin tdt=2n^2\pi^2$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}[\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}]$$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{(\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^3}+\frac{(\frac{2}{n})^2}{1+(\frac{2}{n})^3}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^2}{1+(\frac{n}{n})^3}]$$

$$=2\pi^2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{2\pi^2}{3}\ln 2$$

思考题

1. 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ______.

2. 位于曲线 $y=xe^{-x}\ (0\le x<+\infty)$ 下方， x 轴上方的无界图形的面积是 ______.

3. 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}\ (a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 ________.

4. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表为（ ）.

（A）$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x$

（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x$

（C）$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x$

（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}\,x$

5. 设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$ $(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

（I）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

（II）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

6. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1)求 D 的面积 A；

(2)求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

7. 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases},(0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$ 围成的平面区域，求 D 饶 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

答案

1. $\dfrac{37}{12}$;　　2. 1;　　3. $\dfrac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$;　　4. C;

5. $V(a)=\dfrac{\pi a^2}{\ln^2 a}$, $V_{\min}(e)=\pi e^2$;　　6. $A=\dfrac{1}{2}e-1, V=\dfrac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$;

7. $\dfrac{18}{35}\pi$.