专题 6 微分中值定理及其应用

定理 1（罗尔定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

（3） $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

定理 2（拉格朗日中值定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论 如果在 (a,b) 内恒有 $f'(x)=0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为常数.

定理 3（柯西中值定理） 如果 $f(x)$，$F(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

【注】（1）以上三个中值定理，特别是拉格朗日中值定理建立了函数在区间上的变化（改变量）与函数在该区间内一点处导数的关系，从而使我们能够利用导数来研究函数在区间上的整体性态.

（2）三个中值定理的关系如下：

罗尔定理　　　拉格朗日中值定理　　　柯西中值定理

应用举例

（一）方程的根

【例 1】设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$，求证：方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

（二）证明不等式

【例 1】证明不等式 $|\arctan b-\arctan a|\le|b-a|$.

（三）求极限

【例 1】（2014 年 2）设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$

（A）1　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

【解】应选（D）

由 $f(x)=\arctan x$，及 $f(x)=xf'(\xi)$ 得

$$\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2}$$

则 $$\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}\qquad\left(x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

故应选（D）

【例 2】（2018 年 2） $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

（四） 证明存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$

此类问题的一般方法是将要证结论改写为 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$，然后构造辅助函数用罗尔定理. 而构造辅助函数的方法主要有两种

1. **分析法（还原法）**

根据对欲证的结论 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$ 的分析，确定辅助函数 $g(x)$，使

$$g'(x)=F[x,f(x),f'(x)]$$

2. **微分方程法**

欲证： $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$

1）求微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的通解 $H(x,y)=C$

2）设辅助函数： $g(x)=H(x,f(x))$

【例 1】（2003 年 3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(1)=0$， 求证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$.

【分析】本题证明的关键是构造辅助函数，以下用两种方法构造

1. 分析法（还原法）

欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$，只要证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，即 $\xi^2f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$ 则应

构造辅助函数 $g(x)$, 使 $g'(\xi)=\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)$.因此，令 $g(x)=x^2 f(x)$，这里 $g'(x)=x^2 f'(x)+2xf(x)$.

2. 微分方程法

欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$，解微分方程 $y'=\dfrac{-2y}{x}$, 得其通解为 $x^2 y=C$. 则应构造辅助函数 $g(x)=x^2 f(x)$

【证】令 $g(x)=x^2 f(x)$，则 $g(0)=0,\quad g(1)=0,$

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$，即

$$\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$$

由此可得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，原题得证.

【注】从以上例子可归纳出一类常用的辅助函数

（1）欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0,$ 令 $F(x)=x^n f(x);$

（2）欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0,$ 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n};$

这里 n 为正整数.

【例 3】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$.

求证: $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$..

【分析】欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0,$，解微分方程 $y'+\lambda y=0,$ 得其通解为 $e^{\lambda x}y=C.$ 则应构造辅助函数 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，

【证】令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，则 $F'(x)=e^{\lambda x}[f'(x)+\lambda f(x)],$

且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=0$$

即 $e^{\lambda\xi}[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]=0$

但 $e^{\lambda\xi}\neq 0$，则

$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

故原题得证.

【注】从本例可归纳出一类常用的辅助函数

（1）欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x);$

特别地：

欲证 $f'(\xi)+f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{x}f(x);$

欲证 $f'(\xi)-f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{-x}f(x);$

（2）欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\ (\alpha\neq 0);$

（3）欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{g(x)}f(x);$

（4）欲证 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x);$

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

试证 （1）存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $f(\eta)=\eta$.

（2）对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

【证】 （1）令 $F(x)=f(x)-x$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$， $F(1)=f(1)-1=-1<0$，

由零点定理知 $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$

即 $f(\eta)=\eta$

（2）欲证 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，只要证 $[f'(\xi)-1]+\lambda[f(\xi)-\xi]=0,$

因此，令 $\varphi(x)=e^{\lambda x}(f(x)-x)$，则

$$\varphi'(x)=e^{\lambda x}\{[f'(x)-1]+\lambda[f(x)-x]\},$$

且 $\varphi(0)=0$， $\varphi(\eta)=0$，由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,\eta)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，

从而有 $[f'(\xi)-1]+\lambda[f(\xi)-\xi]=0$

故 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1),.$

试证存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

【证】 只要证 $(\xi-1)f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.

因此，$F(x)=(x-1)^2 f'(x)$

【例 5】 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【证】（1）因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi).$$

又因为 $f(1)=1$，所以 $f'(\xi)=1$.

（1） 欲证 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$, 考虑 $f''(x)+f'(x)=1$, 令 $f'(x)=y$, 则

$$y'+y=1$$

解该线性方程得其通解为 $[y-1]e^x=C$，则应考虑辅助函数

$$F(x)=[f'(x)-1]e^x$$

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

则 $F(x)$ 可导，且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$.

根据罗尔定理，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0$.

由 $F'(\eta)=[f''(\eta)+f'(\eta)-1]e^\eta$ 且 $e^\eta\neq0$，得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【例 6】 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，试证：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

【证】要证 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，只要证

$$[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)+[g(\xi)-g(b)]f'(\xi)=0.$$

因此令 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$。

即 $[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)+[g(\xi)-g(b)]f'(\xi)=0$. 故原题得证。

（五）证明存在两个中值点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $F[\xi,\eta,f(\xi),f(\eta),f'(\xi),f'(\eta)]=0$

方法：（1）不要求 $\xi\neq\eta$：

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

（2）要求 $\xi\neq\eta$：

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 a,b 同号，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$. 使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

【证】 由拉格朗日中知定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

由柯西中值定理知，$\exists\eta\in(a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

从而有 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在

$\xi,\eta\in(a,b)$ 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

【证】只要证明 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

由拉格朗日中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$$

令 $F(x)=e^x f(x)$，由拉格朗日中值定理得，$\exists\eta\in(a,b)$，

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$$

即 $$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

从而有 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，其中 a,b 同号，$f(a)=f(b)=1$. 证明：

存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $abe^{\eta-\xi}=\eta^2[f(\eta)-f'(\eta)]$.

【分析】欲证 $abe^{\eta-\xi}=\eta^2[f(\eta)-f'(\eta)]$，只要证 $abe^{-\xi}=\dfrac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$.

【证】由拉格朗日定理得

$$\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}\qquad \xi\in(a,b)$$

由柯西中值定理得

$$\frac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}\qquad \eta\in(a,b)$$

即 $$-ab\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$$

$$abe^{-\xi}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}.$$

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，常数 $a>0$ 与 $b>0$. 求证：存在满足 $0<\xi<\eta<1$ 的 ξ 与 η. 使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=0$.

【分析】（逆推法）设 $0<c<1$, 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi) \qquad \xi\in(0,c)$$

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta) \qquad \eta\in(c,1)$$

$$af'(\xi)+bf'(\eta)=a\frac{f(c)-f(0)}{c}+b\frac{f(0)-f(c)}{1-c}=[f(c)-f(0)][\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}]$$

若 $\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}=0$ 原题得证，由 $\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}=0$ 解得 $c=\frac{a}{a+b}$.

【证】 由于 $\frac{a}{a+b}\in(0,1)$，由拉格朗日定理知

$$\exists\xi\in(0,\frac{a}{a+b})，使\ f(\frac{a}{a+b})-f(0)=f'(\xi)\frac{a}{a+b} \qquad ①$$

$$\exists\eta\in(\frac{a}{a+b},b)，使\ f(1)-f(\frac{a}{a+b})=f'(\eta)\frac{b}{a+b} \qquad ②$$

（1）式加（2）式得

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{a+b}[af'(\xi)+bf'(\eta)]=0$$

原题得证.

练习题

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)\ (a<c<b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

2.（1996 年 3）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

3.（2017 年 1，2） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0, \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：

（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导， $f(a)=f(b)=0$, 且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$. 试证：$\exists\xi,\eta\in(a,b),\ f'(\xi)<0,\ f''(\eta)>0$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 a,b 同号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导且 $f(1)=\frac{1}{2}$， $f(2)=2$.

求证: $\exists\xi\in(1,\ 2)$ 使 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

7.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，且 $f(a)=f(b)=1$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $(\frac{\eta}{\xi})^{n-1}=f(\xi)+\frac{\xi}{n}f'(\xi)$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明

(1) 在 $(0,1)$ 内存在 ξ, η, 使 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$;

(2) 存在 ξ 和 η. 满足 $0<\xi<\eta<1$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=2$.