专题八　　不等式问题

不等式问题常见有两种，一种是函数不等式，另一种是积分不等式.

（一）函数不等式

函数不等式问题常用的五种方法:

1）单调性；　　2）最大最小值；　　3）拉格朗日中值定理；

4）泰勒公式；　　5）凹凸性；

常用不等式:

1） $2ab \le a^2 + b^2, (a>0, b>0);$

2） $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, (a_i > 0, i = 1,2\cdots n);$

3） $\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2});$

4） $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x \in (0, +\infty).$

【例 1】试证：当 $0 < x < 1$ 时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

【证】只要证 $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

即　$(1+x)\ln(1+x) > \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

令　$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

则　$f'(x) = \ln(1+x) + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - 1$

$$= \ln(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x > 0$$

又 $f(0) = 0,$ 则当 $0 < x < 1$ 时，$f(x) > 0,$ 原题得证.

【例 2】证明当 $x > 0$ 时，$(1+x)^{1+\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{x}{2}}.$

【证】取对数，则要证不等式变形为

$$(1+\frac{1}{x})\ln(1+x) < 1 + \frac{x}{2}$$

即　$2(1+x)\ln(1+x) < 2x + x^2$

令 $f(x)=2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x) \quad (x\ge 0)$

则 $f'(x)=2+2x-2\ln(1+x)-2$

$$=2[x-\ln(1+x)]>0$$

又 $f(0)=0$,则当 $x>0$ 时， $f(x)>0$,原题得证.

【例 3】（2002 年 2）设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

【证】先证左端不等式,由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}.$$

由于 $0<a<\xi<b$，故 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，从而

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

再证右端不等式. 设

$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x\ge a),$$

因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

故当 $x>a$ 时, $\varphi(x)$ 单调减少. 又 $\varphi(a)=0$，所以，当 $x>a$ 时 $\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

从而当 $b>a$ 时，$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

【例 4】（1993 年 5）设 p,q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明：对于任意的

$x>0,\ \dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\ge x$.

【证】令 $f(x)=\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}-x\quad(x>0)$

则 $\quad f'(x)=x^{p-1}-1$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$, 又 $f''(x)=(p-1)x^{p-2}$, $f''(1)=(p-1)>0$,

由此可见当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极小值.又因为极值点唯一，则该极小值也就是最小值.故对任意 $x>0$, 有 $f(x)\ge f(1)=0$, 即

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\ge x$$

【例 5】(1995 年 2, 3) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\ge x$.

【证 1】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，由泰勒公式知

$$\begin{aligned} f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\\ &=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\\ &\ge x \qquad\qquad (f''(x)>0)\end{aligned}$$

原式得证.

【证 2】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$，$f'(0)=1$

又 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单调增，由拉格朗日中值定理知

$f(x)=f(x)-f(0)=f'(c)x$ （c 介于 0 与 x 之间）

由于 $f'(x)$ 单调增，则

$f(x)=f'(c)x\ge f'(0)x=x$

原题得证.

【证 3】 只要证 $f(x)-x\ge 0$，令 $F(x)=f(x)-x$，

只要证明 $F(x)\ge 0$,即只要证 $F(x)$ 的最小值大于等于零.

由于$F'(x)=f'(x)-1$

显然$F'(0)=f'(0)-1=0$

又$F''(x)=f''(x)>0$，则$F'(x)$单调增，$x=0$为$F'(x)$唯一的零点，即$x=0$为$F(x)$唯一驻点，又$F''(x)=f''(x)>0$，

则$x=0$为$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上唯一极值点，且在该点取极小值，因此$F(x)$在$x=0$处取得它在$(-\infty,+\infty)$上的最小值，

从而 $F(x)\geq F(0)=f(0)-0=0$

原题得证

【证4】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知$f(0)=0$， $f'(0)=1$

则曲线$y=f(x)$在$(0,0)$点的切线方程为

$$y=x$$

又$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$是凹的，由此可知曲线$y=f(x)$在$(0,0)$点的切线$y=x$的上方，故

$$f(x)\geq x$$

【例6】 设函数$f(x)$在区间(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0,$ 证明对任意的$x_1,x_2\in(a,b),$ 且$x_1\neq x_2$及$\lambda(0<\lambda<1),$ 恒有$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$

【证法1】令$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，不妨设$x_1<x_2,$ 则$x_1<x<x_2.$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x-x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi_1<x)\qquad ①$$

$$f(x_2)-f(x)=f'(\xi_2)(x_2-x)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1)\qquad(x<\xi_2<x_2)\qquad ②$$

$\lambda\times$①$-(1-\lambda)\times$②得

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$

由于$f''(x)>0,$ 则$f'(x)$单调增，从而有$f'(\xi_1)<f'(\xi_2),$

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0$$

即 $\quad f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$

【证法 2】令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，由泰勒公式得

$$f(x_1)=f(x)+f'(x)(x_1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2$$
$$=f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2$$
$$f(x_2)=f(x)+f'(x)(x_2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$$
$$=f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$$

则 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=f(x)+\lambda\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2+(1-\lambda)\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$

$$>f(x)$$

即 $\quad f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$

【例 7】设 $p,q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，又设 $x>0,y>0$，求证：$xy\le\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$.

【证】只要证 $\ln(xy)\le\ln(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$

即只要证 $\quad \frac{\ln x^p}{p}+\frac{\ln y^q}{q}\le\ln(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$

由例 6 可知，只要证 $f(x)=\ln x$ 是凸的即可，由于

$$f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

则 $f(x)=\ln x$ 是凸的，故

$$\frac{f(x^p)}{p}+\frac{f(y^q)}{q}\le f(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$$

原题得证.

（二）积分不等式

积分不等式问题常用的方法：

1）积分不等式性质；　　2）变量代换；　　3）积分中值定理 ；

4）变上限积分；　　　　　　5）柯希积分不等式；

常用的积分不等式:

1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2）若 M 及 m 分别是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

3）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4)柯西积分不等式:

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

【例 1】(2018 年 1, 2, 3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,\ K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx,$ 则

$(A)\quad M>N>K,$　　　　　　$(B)\quad M>K>N,$

$(C)\quad K>M>N,$　　　　　　$(D)\quad K>N>M,$

【解】选(C)

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx$$

$$=\pi+0=\pi$$

由不等式 $e^x>1+x\ (x\ne 0)$ 可知

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi$$

则 $K>M>N$, 故应选(C).

【例 2】(2017 年 2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1,$ 且 $f''(x)>0,$ 则（ ）.

（A）$\int_{-1}^{1} f(x)dx>0.$　　（B）$\int_{-1}^{1} f(x)dx<0.$

（C）$\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx.$　　（D）$\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx.$　$[B]$

【例 3】(2012 年 1, 2) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x dx (k=1,2,3)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3.$　　（B）$I_3<I_2<I_1.$

（C）$I_2<I_3<I_1.$　　（D）$I_2<I_1<I_3.$　　$[D]$

【例 4】（1994 年 3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 非负，单调减.

求证: $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx \quad (0<a<1)$

【证 1】 只要证 $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^1 f(x)dx$

即 $(1-a)\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^1 f(x)dx$

由积分中值定理知

$(1-a)\int_0^a f(x)dx = a(1-a)f(c_1) \qquad 0<c_1<a$

$a\int_a^1 f(x)dx = a(1-a)\, f(c_2) \qquad a<c_2<1$

由于 $f(x)$ 单调减，则 $f(c_1)>f(c_2)$

则 $(1-a)\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^1 f(x)dx$

原题得证

【证 2】 $\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(at)dt$　（令 $x=at$）

$$=a\int_0^1 f(ax)dx$$

由于 $f(x)$ 单调减，而 $ax<x$，则 $f(ax)>f(x)$

从而有 $a\int_0^1 f(ax)dx > a\int_0^1 f(x)dx$

即 $\int_0^a f(x)dx > a\int_0^1 f(x)dx$

【证 3】令 $F(u)=\int_0^u f(x)dx - u\int_0^1 f(x)dx \quad (0\le u\le 1)$

则 $$F'(u)=f(u)-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=f(u)-f(c) \qquad (0<c<1)$$

显然 $F'(c)=0,$ 当 $0\le u<c$ 时，$F'(u)>0,$ 当 $c<u\le 1$ 时，$F'(u)<0.$ 则 $F(u)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值必在 $u=0,$ 或 $u=1$ 处取得，又 $F(0)=F(1)=0,$ 则当 $0<u<1$ 时，$F(u)>0,$ 即

$$\int_0^a f(x)dx > a\int_0^1 f(x)dx$$

【例 5】(2005 年 3) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0)=0,$ $f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$.

证明:对任何 $a\in[0,1]$, 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \ge f(a)g(1).$$

【证法 1】令 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1)$,

则 $$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)$$

$$=f'(x)[g(x)-g(1)]\le 0$$

$F(x)$ 单调不增，又

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(1)g(1)$$

$$=\int_0^1[g(t)f'(t)+f(t)g'(t)]dt-f(1)g(1)$$

$$=f(t)g(t)\Big|_0^1-f(1)g(1)$$

$$=-f(0)g(0)=0.$$

则 $F(x)\ge 0, x\in[0,1]$, 原题得证.

【证法 2】$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)dx$$

$$\geq f(a)g(a)+\int_a^1 f(a)g'(x)dx$$

$$=f(a)g(a)+f(a)\int_a^1 g'(x)dx$$

$$=f(a)g(a)+f(a)[g(1)-g(a)]$$

$$\geq f(a)g(1)$$

【例 6】设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 试证柯西积分不等式

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

【证法 1】令 $F(t)=\int_a^t f^2(x)dx\int_a^t g^2(x)dx-(\int_a^t f(x)g(x)dx)^2$

则 $F(a)=0$, 且

$$F'(t)=f^2(t)\int_a^t g^2(x)dx+g^2(t)\int_a^t f^2(x)dx-2f(t)g(t)\int_a^t f(x)g(x)dx$$

$$=\int_a^t[f^2(t)g^2(x)+g^2(t)f^2(x)-2f(t)g(t)f(x)g(x)]dx$$

$$=\int_a^b[f(t)g(x)-f(x)g(t)]^2dx\geq 0$$

则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，所以 $F(b)\geq F(a)=0.$

$$\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx-(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\geq 0$$

即 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

【证法 2】若 $g(x)\equiv 0$, 结论显然成立，否则，对任意实数 λ 均有

$$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2dx\geq 0$$

即 $\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$

又 $\int_a^b g^2(x)dx>0$, 则关于 λ 的这个二次三项式的判别式

$$\Delta=4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leq 0$$

即 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$,

求证: $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)dx$

【证】 $\because$ $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$

$$\therefore \quad f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 \le \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x f'^2(t)dt \qquad \text{(柯西积分不等式)}$$

$$=x\int_0^x f'^2(t)dt \le x\int_0^1 f'^2(t)dt$$

$$\therefore \quad \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 xdx \cdot \int_0^1 f'^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(t)dt\ ;.$$

思考题

1. 证明当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+\tan x>2x$.

2. 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 证明: $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$.

3. 试证 当 $0<x<1$ 时, $e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$

4. 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

5. 设 $a>1, n\ge 1$, 试证 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

6. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 证明对任何 $x_1>0$, $x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

7. 设 $x>0, x\ne 1$, 试证 $\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}$.

8. 设 $0<\alpha<1$, 试证: $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha \quad (x\ge 0)$.

9. 设 $I_1=\int_{-1}^1\frac{x}{\sin x}dx, I_2=\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sin x}dx, I_3=\int_{-1}^1\frac{x}{\tan x}dx,$, 则

(A) $I_2<I_3<I_1$ (B) $I_2<I_1<I_3$

(C) $I_1<I_2<I_3$ (D) $I_1<I_3<I_2$

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增, 证明: 当 $0<a\le b$ 时, 有

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{b}{2}\int_0^b f(x)dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$,

求证：$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)dx.$