# 专题 14：多元函数的极值与最值

## （一）无条件极值

**定义**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若对该邻域内任意的点 $P(x,y)$ 均有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\text{（或 }f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\text{），}$$

则称 $(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**极大值点**（或**极小值点**）；称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**极大值**（或**极小值**）。极大值点和极小值点统称为**极值点**；极大值和极小值统称为**极值**。

**定理 1（极值的必要条件）**　设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 存在偏导数，且 $(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\quad f_y'(x_0,y_0)=0.$$

**定理 2（极值的充分条件）**　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)=0$。记

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0),$$

则有下述结论：



（1）若 $AC-B^2>0$，则 $(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极值点.

① $A<0$，则 $(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值点；

② $A>0$，则 $(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点.

（2）若 $AC-B^2<0$，则 $(x_0,y_0)$ 不为 $f(x,y)$ 的的极值点.

（3）若 $AC-B^2=0$，则 $(x_0,y_0)$ 可能为 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不为 $f(x,y)$ 的极值点(此时，一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数二元函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤为：

（1）求出 $f(x,y)$ 的驻点 $P_1,\cdots,P_k$。

（2）利用极值的充分条件判定驻点 $P_i$ 是否为极值点。

【注】 二元函数 $z=f(x,y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值（如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ），而这种点是否取得极值一般用极值定义判定.

**(二) 条件极值及拉格朗日乘数法**

求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值的一般方法为:

（1）构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

（2）将 $F(x,y,\lambda)$ 分别对 $x$ ， $y$ ， $\lambda$ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

解出 $x,y$ 及 $\lambda$ ，则其中 $(x,y)$ 就是函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能的极值点.

以上方法可推广到对于 $n$ 元函数在 $m$ 个约束条件下的极值问题，如求 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ ， $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值，可构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f+\lambda\varphi+\mu\psi,$$

将 $F$ 对 $x,y,z,\lambda,\mu$ 分别求偏导数，并构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)+\mu\psi'_x(x,y,z)=0, \\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)+\mu\psi'_y(x,y,z)=0, \\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)+\mu\psi'_z(x,y,z)=0, \\ \varphi(x,y,z)=0, \\ \psi(x,y,z)=0, \end{cases}$$



解出 $x,y,z,\lambda$ 及 $\mu$ ，则其中 $(x,y,z)$ 就是可能的极值点。

对于实际问题，如果驻点唯一，且由实际意义知问题存在最大（小）值，则该驻点即为最大（小）值点。如果存在多个驻点，且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值，只需比较各驻点处的函数值，最大的则为最大值，最小的则为最小值。

**（三）最大最小值**

1）求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 $D$ 上的最大最小值三部曲.

（1）求 $f(x,y)$ 在 $D$ 内部可能的极值点.

（2）求 $f(x,y)$ 在 $D$ 的边界上的最大最小值.

（3）比较

2）应用题

## 1. 极值问题

**【例 1】**二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　）

（A）$(0,0)$,　　（B）$(0,3)$,　　（C）$(3,0)$,　　（D）$(1,1)$.

**【解】** $\begin{cases} z_x = y(3-2x-y)=0 \\ z_y = x(3-2y-x)=0 \end{cases}$

$(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,1)$. 都满足上式.

$z_{xx}=-2y, z_{yy}=-2x, z_{xy}=3-2x-2y.$

在 $(0,0)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值;

在 $(0,3)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值;

在 $(3,0)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值;

在 $(1,1)$ 点　　$AC-B^2=3>0,$ 有极值.

故应选(D).



**【例 2】**设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）.

（A）$f''(0)<0, g''(0)>0$　　（B）$f''(0)<0, g''(0)<0$

（C）$f''(0)>0, g''(0)>0$　　（D）$f''(0)>0, g''(0)<0$

**【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)，\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y).$$

在 $(0,0)$ 处，

$$AC-B^2=f''(0)g(0)\cdot f(0)g''(0)-[f'(0)g'(0)]^2$$

$$=f''(0)g''(0)f(0)g(0).$$

由于 $f(0)>0$，$g(0)<0$，若 $f''(0)<0$，$g''(0)>0$，则 $f''(0)g''(0)f(0)g(0)>0$，且 $A=f''(0)g(0)>0$.故 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.故选（A）.

**【例 3】** 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy,(a>0)$，则函数 $f(x,y)$

(A)无极值点；　　(B)点 $(a,a)$ 为极小值点；

(C)点 $(a,a)$ 为极大值点；　　(D)是否有极值点与 $a$ 的取值有关。

**【解】** 由 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy$ 知，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ay-x^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax-y^2$

令 $\begin{cases}ay-x^2=0\\ax-y^2=0\end{cases}$ 得 $x=y=a,$ 或 $x=y=0.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2x,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a.$$

在点 $(a,a)$ 处



$$AC-B^2=3a^2>0,A=-2a<0$$



则点 $(a,a)$ 为极大值点.

在点 $(0,0)$ 处

$$AC-B^2=-a^2<0,$$

则点 $(0,0)$ 不是极值点.

**【例 4】** 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【解】由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$ 可知,

$$\frac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+\alpha(x,y),\quad f(0,0)=0,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha(x,y)=0,$

则 $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}+\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)$

令 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho,$ 则

$$f(x,y)=a\rho+o(\rho)+\rho^2$$

1) 当 $a>0$ 时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值;

2) 当 $a<0$ 时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极大值;

3) 当 $a=0$ 时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不一定有极值,例如

$$f(x,y)=(2x+y)\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)$$

$$f(0,0)=0,\ f(x,0)=2x|x|+x^2$$

当 $x>0$ 时, $f(x,0)>0$; 当 $x<0$ 时, $f(x,0)<0$; 则点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.



故应选(D).

【例5】设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是( ).

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ (B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ (D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

【解】构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,

令 $F_x'(x,y,\lambda)=F_y'(x,y,\lambda)=0$ 得

$$f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0, \qquad (1)$$

$$f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0. \qquad (2)$$

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，由（1）式知 $\lambda\neq 0$, 又 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$, 此时由（2）式可知 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

故应选（D）.

**【例 6】**求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

**【解】** $f_x'(x,y)=2x(2+y^2)$， $f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. 由于

$$A=f_{xx}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right),$$

$$B=f_{xy}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0,$$

$$C=f_{yy}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e,$$

所以 $AC-B^2=2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)\neq 0$，且 $A>0$. 从而 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为

$f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$.



**【例 7】**已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$f_{xy}''=2(y+1)e^x,\ f_x'(x,0)=(x+1)e^x,\ f(0,y)=y^2+2y,$$

求 $f(x,y)$ 的极值.

**【解】**由 $f_{xy}''=2(y+1)e^x$, 得 $f_x'=(y+1)^2e^x+\varphi(x)$.

因为 $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$, 所以 $e^x+\varphi(x)=(x+1)e^x$.

得 $\varphi(x)=xe^x$, 从而 $f_x'=(y+1)^2e^x+xe^x$.

对 $x$ 积分得 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+\psi(y)$.

因为 $f(0,y)=y^2+2y$, 所以 $\psi(y)=0$, 从而

$$f(x,y)=(x+y^2+2y)e^x$$

于是 $f_y'=(2y+2)e^x,\ f_{xx}''=(x+y^2+2y+2)e^x,\ f_{yy}''=2e^x.$

令 $f_x'=0,\ f_y'=0$, 得驻点 $(0,-1)$, 所以

$$A=f_{xx}''(0,-1)=1, B=f_{xy}''(0,-1)=0, C=f_{yy}''(0,-1)=2.$$

由于 $AC-B^2>0, A>0$, 所以极小值为 $f(0,-1)=-1.$

## 2. 最大最小值

【例 1】设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，在 $D$ 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则

（A） $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得

（B） $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的内部取得

（C） $u(x,y)$ 的最大值在 $D$ 的内部取得, 最小值都在 $D$ 的边界上取得

（D） $u(x,y)$ 的最小值在 $D$ 的内部取得, 最大值都在 $D$ 的边界上取得

【解】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=B$



由题设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 可知, $B\neq 0, A+C=0$, 则

$$AC-B^2<0$$

故函数 $u(x,y)$ 在区域 $D$ 内无极值点, 因此， $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得. 故应选（A）.

【例 2】已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

【解 1】 由 $\mathrm{d}z = 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y$ 可知 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + C.$

再由 $f(1,1) = 2$，得 $C = 2$，故 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2.$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0,$ 解得驻点 $(0,0)$.

在椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上，$z = x^2 - (4 - 4x^2) + 2$，即

$$z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \le x \le 1),$$

其最大值为 $z\big|_{x=\pm1} = 3$，最小值为 $z\big|_{x=0} = -2.$ 再与 $f(0,0) = 2$ 比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D$ 上的最大值为 3，最小值为 $-2$.

【解 2】 同解法一，得驻点 $(0,0)$ .用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上的极值.

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$，令

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2} y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0)$ 和 $(-1,0)$.



又 $f(0,2) = -2, f(0,-2) = -2, f(1,0) = 3, f(-1,0) = 3$，再与 $f(0,0) = 2$ 比较，得 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的最大值为 3，最小值为 $-2$.

【解 3】 同解法一，得驻点 $(0,0)$ .椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = 2\sin t.$

则 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2 = \cos^2 t - 4\sin^2 t + 2$

$= 3 - 5\sin^2 t$

故 $f_{\max} = 3, f_{\min} = -2$

【例 3】 设函数 $z = z(x,y)$ 的微分 $dz = (2x + 12y)dx + (12x + 4y)dy$，且 $z(0,0) = 0$，求

函数 $z=z(x,y)$ 在 $4x^2+y^2\le 25$ 上的最大值。

**【解】** 由 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 知，$z=x^2+12xy+2y^2$

令 $\begin{cases} z_x=2x+12y=0 \\ z_y=12x+4y=0 \end{cases}$

驻点：$(0,0), z(0,0)=0$

$$F(x,y,\lambda)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)$$

$$\begin{cases} F_x=2x+12y+8\lambda x=0 & (1) \\ F_y=12x+4y+2\lambda y=0 & (2) \\ F_\lambda=4x^2+y^2-25=0 \end{cases}$$

由（1）和（2）式知：

$\begin{cases} (1+4\lambda)x+6y=0 \\ 6x+(2+\lambda)y=0 \end{cases}$ 且有非零解.

则 $\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix}=0,$ 解得 $\lambda_1=2, \lambda_2=-\dfrac{17}{4}$

$\lambda_1=2$ 时，驻点 $P_1(2,-3), P_2(-2,3), z=-50.$

$\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$ 时，驻点 $P_3(\dfrac{3}{2},4), P_4(-\dfrac{3}{2},-4), z=\dfrac{425}{4}.$

比较得 $z_{\max}=\dfrac{425}{4}$



**【例 4】** 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.



**【解】** 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4).$$

令 $\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$

解方程组，得 $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),$，$(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8).$ 故所求的最大值为 72，最小值为 6.

【例 5】求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1\,(x \ge 0, y \ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

【解】$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$$

令 $$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + (3x^2 - y)\lambda = 0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + (3y^2 - x)\lambda = 0 \qquad ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \qquad ③$$

当 $x > 0, y > 0$ 时, 由①, ②得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3x^2 - y}{3y^2 - x}$, 即 $3xy(y - x) = (x + y)(x - y)$,

得 $y = x$ 或 $3xy = -(x + y)$（由于 $x > 0, y > 0$, 舍去）.

将 $y = x$ 代入③得 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$, 即 $(2x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$.

所以, $(1,1)$ 是唯一可能的极值点，此时 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$；

当 $x = 0, y = 1$ 或 $x = 1, y = 0$ 时，$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$，

故所求最长距离为 $\sqrt{2}$，最短距离为1.

【例 6】将长为 $2m$ 的铁丝分成三段，以次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在，求出最小值.



【解】设圆的半径为 $x$, 正方形与正三角形的边长分别为 $y$ 和 $z$, 则围成圆、正方形与正三角形三个图形的面积之和为

$$S(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$$

且 $$2\pi x + 4y + 3z = 2 \qquad (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$$

令 $$L(x,y,z,\lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} z + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_0 = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$, $y_0 = \dfrac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$, $z_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$,

且 $S(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

所以，三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$$S(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

**【例 7】**已知 $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, x, y > 0$. 求证：$xy \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

**【证】**只要证明函数 $xy$ 在条件 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} = k(k > 0)$ 下的最大值不超过 $k$.

令 $L(x, y) = xy + \lambda(\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - k)$

则 $\begin{cases} L_x = y + \lambda x^{p-1} = 0 \\ L_y = x + \lambda y^{q-1} = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - k = 0 \end{cases}$

由此解得 $x = k^{\frac{1}{p}}, y = k^{\frac{1}{q}}$，这是唯一的驻点，为最大值点，则

$$xy \le k^{\frac{1}{p}} \cdot k^{\frac{1}{q}} = k^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = k = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

**思考题：**

1. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定，求 $z = z(x, y)$ 的极值.

2. 在椭圆$3x^2+2xy+3y^2=1$的第一象限部分上求一点，使该点的切线与两坐标轴所围成三角形面积最小，并求面积的最小值。

**答案与提示：**

1.【解】等式$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$两端分别对$x$和$y$求偏导数，得

$$\begin{cases}2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0,\\ 2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0.\end{cases} \quad ①$$

令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$解得$x=y=-\dfrac{1}{z}.$将$x=y=-\dfrac{1}{z}$代入方程

$$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$$

得$\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0,$可知$z=1,$从而得函数$z=z(x,y)$的驻点$(-1,-1).$

在①中两式两边分别对$x$和$y$求偏导数, 得

$$\begin{cases}2z+4x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\ 2x\dfrac{\partial z}{\partial y}+2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\ 2z+4y\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases} \quad ②$$

把$x=y=-1,z=1$以及$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$代入②中各式, 得



$$\begin{cases}2+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\ 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\ 2+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases}$$

从而$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)}=-\dfrac{2}{3},\ B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,-1)}=0,\ C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)}=-\dfrac{2}{3},$

由于$AC-B^2>0,A<0,$所以$z(-1,-1)=1$是$z(x,y)$的极大值.

2.【解】设切点为$P(x,y),$ 切线为　$Y-y=y'(x)(X-x)$

$$y'(x) = -\frac{3x+y}{x+3y}$$

截距 $X_0 = \frac{1}{3x+y}, Y_0 = \frac{1}{x+3y}$

$$S = \frac{1}{2(1+8xy)} \qquad (x>0, y>0)$$

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(3x^2+2xy+3y^2-1)$$

$$x^2 = y^2 \qquad x = y = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad S = \frac{1}{4}$$