专题一：求极限常见题型

(一)函数的极限

求函数的极限，常见的是 7 种不定式. 即 $\frac{0}{0}$， $\frac{\infty}{\infty}$， $0\cdot\infty$， $\infty-\infty$， 1^{∞}， ∞^{0}， 0^{0}，这里考查的重点是“$\frac{0}{0}$”型和“1^{∞}”型.

1. “$\frac{0}{0}$”型极限

常用的方法有三种

1）洛必达法则

2）等价无穷小代换

3）泰勒公式

以上三种方法使用的同时要注意将原式化简，常用的方法有极限非零的因子极限先求出来、有理化及变量代换等.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\cos}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+x\cos}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right\}$ （有理化）

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ （极限非零的因子极限先求出来）

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$ （洛必达法则）

$=-\frac{1}{6}$

【解 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x\cos x-\sin x)}{x^3}$ (拉格朗日中值定理)

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ （极限非零的因子极限先求出来）

$=\frac{1}{2}[\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}]$

$=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}]$

$=-\frac{1}{6}$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4}$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)2\sin x\cos x}{\frac{4}{2}x^3} \quad \text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{2x^3}=1 \quad \text{（等价无穷小代换）}$$

【解 2】

【例 3】设函数 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)}$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)} \quad \text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)} \quad \text{（导数定义）}$$

$$=1$$

【解 2】

【例 4】（2011 年 3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$ （洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

【解 2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sin x}+x+1}\cdot\dfrac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2}$ （分子有理化）

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sin x-x)-x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

【解 3】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\sin 2x}-1}{x^2}$. [2]

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$. [0]

3 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(1)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)dt}{x^3-1}$. $[-\dfrac{1}{3}]$

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$” 型极限

常用的方法有两种

1）洛必达法则

2）分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^2-2)}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^2-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{\frac{2x}{x^2-2}}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2-2)}{x^3+1}=\frac{3}{2}$$

【解 2】

【例 2】(2014 年 1, 2, 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

【解 1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$ （洛必达法则）

$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}$ （变量代换）

$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-1}{2t}$ （洛必达法则）

$=\dfrac{1}{2}$

【解 2】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x] \qquad \text{（泰勒公式）}$$

$$=\frac{1}{2}$$

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+x+2}-x}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}]}{(-x)[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1]}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\int_2^x\frac{1}{\ln t}dt}{x}$. [1]

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$. [−1]

3. “$\infty-\infty$” 型极限

常用的方法有

1）通分化为 $\frac{0}{0}$（适用于分式差）

2）根式有理化（适用于根式差）

3）提无穷因子，然后等价无穷小代换

【例 1】（2004 年 3）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}+1$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}+1=\frac{4}{3}$$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$ （有理化）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}$$ （分子分母同除 $\sqrt{x}$ ）

$$=\frac{1}{2}$$

【解 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}-1\right)$ （提出 $\sqrt{x}$ ）

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$$ （等价代换）

$$=\frac{1}{2}$$

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\left(\sqrt[6]{1+\frac{2x^5}{x^6-x^5}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\left(\frac{1}{6}\frac{2x^5}{x^6-x^5}\right)$$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{6}\frac{2x^6}{x^6-x^5}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

【解 2】原式 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left([\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1]-[\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1]\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left([\frac{1}{6x}]-[-\frac{1}{6x}]\right)$$ （等价无穷小代换）

$$=\frac{1}{3}$$

【解 3】

【解 4】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$. [2]

2. (2005 年 3)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$. $[\frac{3}{2}]$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$ $[-\frac{1}{3}]$

4. “$0\cdot\infty$”型极限

常用的方法是化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\frac{1}{\ln x}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}$$ （洛必达法则）

$$=-\lim_{x\to0^+}x\ln^2 x=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$ （洛必达法则）

$$= 2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

【解 2】

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$.

【解 1】原式$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$ （洛必达法则）

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{2}$$

【解 2】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)$. $[\frac{1}{2}]$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$. $[\ln 3]$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. [1]

5. “1^{∞}” 型极限

常用的方法有三种

1）凑基本极限 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$, 其中 $\lim\varphi(x)=0\quad(\varphi(x)\neq 0)$.

2）改写成指数 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$，用洛必达法则；

3）利用结论：若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^{A}$.

可以归纳为以下三步：

1) 写标准形式： 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2) 求极限： $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$;

3) 写结果： 原式 $=e^{A}$.

【例 1】(2011 年 1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^{x}-1}}$. $[e^{-\frac{1}{2}}]$

【例 2】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解 1】 由于 $\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{xe}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{xe}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}}{xe}$$ （拉格朗日中值定理）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

则 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

【解 2】

【例 3】（1998 年 4）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. $[e^{\frac{1}{3}}]$

【例 4】（1994 年 3）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n})$. $[e^2]$

练习题

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x-x^2)^{\frac{1}{ax+bx^2}}=2$, 则（ ）

（A） $a=1,b=2.$ （B） $a=0,b=2.$

（C） $a=\ln 2,b=0.$ （D） $a=\dfrac{2}{\ln 2},b$ 任意. $[D]$

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a>0,b>0.$ $[\dfrac{1}{\sqrt{ab}}]$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$.　　　　$[e^{\frac{n+1}{2}e}]$

6. “∞^0” 和 “0^0” 型极限

以上这两种极限求极限的函数一定是幂指函数，即 $\lim[f(x)]^{g(x)}$. 求解的方法是将其改写成指数形式 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$，从而就化为“$0\cdot\infty$”型极限.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin 2x\ln\cot x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin 2x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}2x\ln\cot x$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{-\frac{1}{x^2}}\qquad\text{（洛必达法则）}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\tan x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}=e^0=1.$$

【例 2】(2010 年 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},\qquad\text{（洛必达法则）}$$

而当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\to 0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$.

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$. [1]

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. $[e^{-1}]$

(二)数列的极限

求数列极限，常见的是两种类型. 即 n 项和的数列极限和用递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 定义的数列极限.

1. n 项和的数列极限

常用方法：1）夹逼原理 2）定积分定义 3）级数求和

【例 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$

【解】由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1$$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]$

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$

【注】用定积分定义求极限一种常用且有效的方法是先提可“爱因子” $\dfrac{1}{n}$，然后再分析被积函数和积分区间，一种常见的极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

【例 3】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】 $\dfrac{1}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\le\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

$$\le\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$<\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}$$

则　原式 $=\dfrac{1}{\ln 2}$

【例 4】设 $x_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

【分析】由级数定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n-1}}$，考虑幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n-1}}=S(\dfrac{1}{2})$，所以，先求 $S(x)$.

【解】 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

则 $$\lim_{n\to\infty} x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S(\frac{1}{2})=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$$

【注】本题数学二不要求.

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+\ln(1+1)}+\frac{2}{n^2+\ln(1+2^2)}+\cdots+\frac{n}{n^2+\ln(1+n^2)}\right]$ $[\frac{1}{2}]$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$; $[\frac{1}{3}]$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$; $[\sqrt{2}-1]$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{n+\frac{1}{k}}$. $[2\ln 2-1]$

2. 递推关系 $x_1=a$ 和 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 定义的数列

常用方法

方法 1 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛（常用单调有界准则），然后令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限得 $A=f(A)$，由此求得极限 A.

方法 2 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 然后等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限解得 A, 最后再证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

一般来说，当数列 $\{x_n\}$ 具有单调性时用方法 1，而当数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性或单调性很难判定时用方法 2. 单调性判定常用有三种方法

1）若 $x_{n+1}-x_n\ge 0\ (\le 0)$, 则 $\{x_n\}$ 单调增（单调减）;

2）设 $\{x_n\}$ 不变号

（1）若 $x_n>0$, 则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1\ (\le 1)$ 时，$\{x_n\}$ 单调增（单调减）;

（2）若 $x_n<0$, 则当 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1\,(\le 1)$ 时，$\{x_n\}$ 单调减（单调增）.

3）设数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots), x_n\in I$ 所确定

（1）若 $f(x)$ 在 I 上单调增，则

当 $x_1\le x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调增；

当 $x_1\ge x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调减.

（2）若 $f(x)$ 在 I 上单调减，则 $\{x_n\}$ 不单调.

【例 1】 设 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n},(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

【证】 由 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n},(n=1,2,\cdots)$ 知 $x_n>0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界.

又 $$x_{n+1}=\left(\sqrt{\frac{x_n}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{x_n}}\right)^2\ge 2\sqrt{\frac{x_n}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_n}}=\sqrt{2}$$

而 $$x_{n+1}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}\le 0$$

或者由 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x_n^2}\le 1$ 知 $\{x_n\}$ 递减，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

等式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$ 两端取极限得

$A=\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{A}$，由此解得 $A=\sqrt{2}$ 或 $A=-\sqrt{2}$（舍去）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【例 2】 设 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots, x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解 1】 令 $f(x)=\sqrt{2+x}$, 则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=f(x_n)$，由于 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}>0$, 则

$f(x)$ 单调增，又 $x_1<x_2$, 则 $\{x_n\}$ 单调增.

又 $x_1=\sqrt{2}<2$, 若 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$,由数学归纳法可知

$x_n<2$，即数列 $\{x_n\}$ 上有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 知， $A=\sqrt{2+A}$

解得 $A=2$，或 $A=-1$ （舍去）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

【解 2】直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 知

$$|x_n-2|=\left|\sqrt{2+x_{n-1}}-2\right|=\frac{|x_{n-1}-2|}{\sqrt{2+x_{n-1}}+2}<\frac{1}{2}|x_{n-1}-2|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-2|\to 0\quad(n\to\infty)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

【例 3】(2018 年 1, 2, 3）设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证】由于当 $x>0$ 时, $e^x-1>x$, 则由 $x_1>0, e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$ 可知, $x_2>0$, 由归纳法可知

$x_n>0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界. 由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 知

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_0}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi_n}\qquad(\text{拉格朗日定理, 其中 } 0<\xi_n<x_n)$$

$$<e^{x_n}$$

由于 e^x 单调增，则 $x_{n+1}<x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调减，由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,$

等式 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 两端取极限得

$$Ae^A=e^A-1$$

由此解得 $A=0.$

【例 4】设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}\ (n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

【分析】令 $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$，显然 $x_n\ge 1$，$f(x)$ 在 $x\ge 1$ 处单调减，则 $\{x_n\}$ 不具有单调性，因此用方法 2.

【解】令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{x_n+1})$，即 $A=1+\dfrac{1}{A+1}$，则 $A=\pm\sqrt{2}$，由题设知 $x_n\ge 1$，则 $A=\sqrt{2}$. 以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

$$|x_n-A|=\left|(1+\frac{1}{x_{n-1}+1})-(1+\frac{1}{A+1})\right|=\left|\frac{x_{n-1}-A}{(A+1)(x_{n-1}+1)}\right|\le\frac{|x_{n-1}-A|}{2}$$

$$\le\frac{|x_{n-2}-A|}{2^2}\le\cdots\le\frac{|x_1-A|}{2^{n-1}}\to 0\qquad(n\to\infty)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\sqrt{2}$.

练习题

1. 设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

$[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$

2. 设 $x_1=2, x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}\ (n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

[3]

3. 设 $x_1=1, x_{n+1}(x_n+1)-x_n=3, (n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

$[\sqrt{3}]$