专题 12　微分方程有关综合题

【例 1】设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$, 且 $f(0)=2$, 则

$f(1)=$__________.

【解】由 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$ 知

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

上式中令 $\Delta x\to 0$ 得　　$f'(x)=2xf(x)$

解方程得　　$f(x)=Ce^{x^2}$

又 $f(0)=2$, 则 $C=2$, $f(x)=2e^{x^2}$, $f(1)=2e$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f'(1)=1$，对任意的正数

x,y，$f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 求 $f(x)$.

【解】
$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+(1+\frac{\Delta x}{x})f(x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}+\frac{f(x)}{x}\qquad (f(1)=0)\\
&=f'(1)+\frac{f(x)}{x}\\
&=1+\frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

解该线性方程得　　$f(x)=x\ln x$

【例 3】设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件

$y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（ ）.

（A）不存在　　（B）等于 1　　（C）等于 2　　（D）等于 3

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【解】由 $y''+py'+qy'=e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2$$

$y''(0)=2,$ 故应选（C）.

【例 4】已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2.$

（Ⅰ）求 $f(x);$

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 $1,$ 求 a 的值.

【解】（Ⅰ）令 $x-t=u,$ 则 $dt=-du,$

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

由题设条件得

$$\int_0^x f(u)du+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$$

上式两端求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=2ax$$

$$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

由此可知 $f(x)$ 不但连续，而且可导，且 $f(0)=0.$ 再求导得

$$f'(x)+f(x)=2a$$

$$f(x)=e^{-x}[\int 2ae^x dx+C]$$

$$=Ce^{-x}+2a$$

由 $f(0)=0,$ 可得 $C=-2a,$ 从而

$$f(x)=2a(1-e^{-x})$$

（Ⅱ）由题意可知

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=1$$

即 $$\int_0^1 2a(1-e^{-x})dx=1$$

解得 $a=\dfrac{e}{2}$

【例 5】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足

$$f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)e^{-x}$$

求 $f(x)$.

【解】等式 $f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)e^{-x}$ 两端同乘 e^x 得

$$e^x f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)$$

令 $\int_0^x e^t f(t)dt+1=F(x)$，则

$$F'(x)F(x)=x+1$$

$$\frac{1}{2}[F^2(x)]'=x+1$$

$$[F^2(x)]'=2(x+1)$$

$$F^2(x)=(x+1)^2+C$$

又 $F(0)=1$, 则 $F(x)=x+1$, 即

$$\int_0^x e^t f(t)dt+1=x+1$$

$$e^x f(x)=1$$

$$f(x)=e^{-x}$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【例 6】设 $f(x)$ 为连续函数，

（1）求初值问题 $\begin{cases} y'+ay=f(x), \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 a 是正常数；

（2）若 $\left|f(x)\right|\le k$（k 为常数），证明当 $x\ge 0$ 时，有 $\left|y(x)\right|\le \dfrac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

【证 1】（1）原方程的通解为

$$y(x)=e^{-\int adx}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C\right]=e^{-ax}[F(x)+C],$$

其中$F(x)$是$f(x)e^{ax}$的任一原函数. 由$y(0)=0$，得$C=-F(0)$，故

$$y(x)=e^{-ax}[F(x)-F(0)]=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt.$$

（2）$|y(x)|\le e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{at}dt\le ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt=\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)$

$$=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}),\quad x\ge 0.$$

【证 2】（1）在原方程的两端同乘以e^{ax}，得

$$y'e^{ax}+aye^{ax}=f(x)e^{ax},$$

从而$(ye^{ax})'=f(x)e^{ax}$，所以$ye^{ax}=\int_0^x f(t)e^{at}dt$，或

$$y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt.$$

（2）同证法一.

【例 7】设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

（1）求导数$f'(x)$；

（2）证明：当$x\ge 0$时，成立不等式：$e^{-x}\le f(x)\le 1$.

【解】（1）由题设知$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$，

上式两边对x求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

令$u=f'(x)$，则有$\frac{du}{dx}=-\frac{x+2}{x+1}u$，

解之得 $f'(x)=u=\frac{Ce^{-x}}{x+1}$..

由$f(0)=1$及$f'(0)+f(0)=0$，知$f'(0)=-1$，

从而$C=-1$，因此$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$.

（2）**【证 1】** 当$x\ge 0$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$单调减少，又$f(0)=1$，所以

$$f(x)\le f(0)=1.$$

设$\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则$\varphi(0)=0,\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{x}{x+1}e^{-x}$.

当$x\ge 0$时，$\varphi'(x)\ge 0$，即$\varphi(x)$单调增加，因而

$$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0\text{，即有}\quad f(x)\ge e^{-x}..$$

综上所述，当$x\ge 0$时，成立不等式$e^{-x}\le f(x)\le 1..$

【证 2】 由于$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=f(x)-1$，所以 $f(x)=1-\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt.$

注意到当$x\ge 0$时，$0\le\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt\le\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}$，

因而$e^{-x}\le f(x)\le 1$.

【例 8】设函数$y(x)$满足方程$y''+2y'+ky=0,$其中$0<k<1.$

（Ⅰ）证明：反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)dx$收敛;

（Ⅱ）若$y(0)=1,y'(0)=1,$求$\int_0^{+\infty}y(x)dx$的值.

【解】（Ⅰ）该方程的特征方程为$r^2+2r+k=0,$

解得$r_1=-1+\sqrt{1-k},\ r_2=-1-\sqrt{1-k},$

因为$0<k<1,$所以$r_1<0,r_2<0,$从而$\int_0^{+\infty}e^{r_1x}dx$与$\int_0^{+\infty}e^{r_1x}dx$收敛.

由于$r_1\ne r_2,$所以$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$，其中$C_1$和$C_2$为任意常数.

由此可知，反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)dx$收敛.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$r_1<0,r_2<0,$所以

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}[C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}[C_1r_1e^{r_1x}+r_2C_2e^{r_2x}]=0$$

又$y(0)=1,y'(0)=1,$所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}[-\frac{1}{k}(y''(x)+2y'(x))]dx$$

$$=-\frac{1}{k}(y'(x)+2y(x))\Big|_0^{+\infty}$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

$$=\frac{3}{k}$$

【例 9】设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续二阶导数， $f(1)=0, f'(1)=1,$ 且

$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值。

【解】令 $x^2+y^2=t,$ 则 $z=tf(t)=z(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'(t)\cdot 2x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2z'(t)+4x^2z''(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2z'(t)+4y^2z''(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)z''(t)+4z'(t)=0$$

$$tz''(t)+z'(t)=0,\qquad z(1)=0,\ z'(1)=1.$$

解得 $z(t)=\ln t,\ f(t)=\frac{\ln t}{t},$

$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2},$ 令 $f'(t)=0,$ 得 $t=e,$ 又 $f'(t)$ 在 $t=e$ 两侧由正变负，则 $f(t)$ 在 $t=e$ 取极大值，又因为 $t=e$ 是 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上唯一的极值点，则 $f(e)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值， $f(e)=\frac{1}{e}.$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【例 10】设函数 $u(x,y)$ 的全微分 $du=[e^x+f''(x)]ydx+f(x)dy$，其中 f 具有二阶连续的导数，且 $f(0)=4, f'(0)=3,$ 求 $f(x)$ 及 $u(x,y).$

【解】由题设 $du=[e^x+f''(x)]ydx+f(x)dy$ 知

$$[e^x+f''(x)]=f'(x)$$

即 $$f''(x)-f'(x)=-e^x$$

解方程得 $$f(x)=C_1+C_2e^x-xe^x,$$

由 $f(0)=4, f'(0)=3,$ 得 $C_1=0, C_2=4.$

则 $f(x)=4e^x-xe^x.$

$$du = [e^x + f''(x)]ydx + f(x)dy$$

$$= yf'(x)dx + f(x)dy = ydf(x) + f(x)dy = d(yf(x))$$

故 $\quad u(x,y) = yf(x) + C = y(4-x)e^x + C.$

【例 11】 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} (x^2+y^2) f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy + t^4$，求 $f(x)$.

【解】 $\quad f(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho^2 f(\rho)\rho d\rho + t^4$

$$= 2\pi \int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4$$

由于 $f(x)$ 连续, 由此可知 $f(x)$ 可导且 $f(0) = 0$, 上式两端对 t 求导得

$$f'(t) = 2\pi t^3 f(t) + 4t^3$$

即 $\quad f'(t) - 2\pi t^3 f(t) = 4t^3$

$$f(t) = e^{2\pi\int t^3 dt}\left[\int e^{-2\pi\int t^3 dt}(4t^3)dt + C\right]$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}t^4}\left[-\frac{1}{\pi}e^{-\frac{\pi}{2}t^4} + C\right] = Ce^{\frac{\pi}{2}t^4} - \frac{1}{\pi}$$

由 $f(0) = 0$, 知 $C = \frac{1}{\pi}$. 则

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}x^4} - 1)$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【例 12】（I）验证函数

$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$；

（II）利用（I）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【解】（1）因为

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots,$$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=e^x,$$

（2）与 $y''+y'+y=e^x$ 相应的齐次微分方程为

$$y''+y'+y=0,$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\lambda+1=0,$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此齐次微分方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=Ae^x.$$

将 y^* 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 得 $A=\frac{1}{3}$，于是

$$y^*=\frac{1}{3}e^x.$$

方程通解为

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

$$y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]+\frac{1}{3}e^x.$$

当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases} y(0)=1=C_1+\frac{1}{3}, \\ y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}. \end{cases}$$

由此，得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$. 于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$Y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x \quad (-\infty<x<+\infty).$$

【例 13】设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

【解】 当 $-\pi<x<0$ 时，设 (x,y) 为曲线上任一点，由导数几何意义，法线斜率为 $k=-1\Big/\frac{dy}{dx}$. 由题意，法线斜率为 $\frac{y}{x}$，所以有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

分离变量，解得

$$x^2+y^2=C.$$

由初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，得 $C=\pi^2$，所以

$$y=\sqrt{\pi^2-x^2},\quad -\pi<x<0. \qquad ①$$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x, \qquad ②$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-1. \qquad ③$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!

因为曲线 $y=y(x)$ 光滑，所以 $y(x)$ 连续且可导，由①式知

$$y(0)=\lim_{x\to0^-}y(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt{\pi^2-x^2}=\pi,$$

$$y'(0)=y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}=0.$$

代入②，③式，得 $C_1=\pi,C_2=1$，故

$$y=\pi\cos x+\sin x-x,\quad 0\le x<\pi.$$

因此

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

【例 14】设函数 $y=y(x)$ 是方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（Ⅰ）求 $y(x)$;

（Ⅱ）设平面域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转的体积.

【解】（Ⅰ）由一阶线性方程通解公式得

$$y(x)=e^{\int xdx}[\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\int xdx}dx+C]$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$$

由 $y(1)=\sqrt{e}$ 可知，$C=0$. 则

$$y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

（Ⅱ）设平面域 D 绕 x 轴旋转的体积为

$$V=\int_1^2 \pi y^2(x)dx$$

$$=\int_1^2 \pi xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$$

思考题

1.（1994 年 3）设 $y=f(x)$ 是微分方程

$$y''-y'-e^{\sin x}=0$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（ ）.

（A）x_0 的某个邻域内单调增加　　（B）x_0 的某个邻域内单调减少

（C）x_0 处取得极小值　　（D）x_0 处取得极大值

2.（1998 年 1,2）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于（ ）.

（A）2π　　（B）π　　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$　　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f'(1)=1$，对任意的正数

x, y，$f(xy)=\dfrac{f(x)}{y}+\dfrac{f(y)}{x}$ 求 $f(x)$.

4.（1997 年 1）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2, y'(0)=-4, \end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.

6.（2016 年 3）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$.

7.（1997 年 3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(t)$.

8.（2009 年 2）设非负函数 $y=y(x)$ $(x\ge 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

答案

1. C;　2. D;　3. $\dfrac{\ln x}{x}$;　4. $C_1e^u+C_2e^{-u}$;

5. 1;　6. $-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;　7. $(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$;　8. $-\dfrac{17}{6}\pi$.

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！