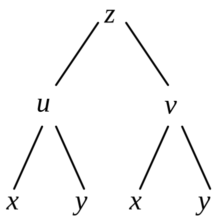
专题 13：多元复合函数与隐函数求导的方法和技巧

(一) 复合函数求导法

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 可导，$z=f(u,v)$ 在相应点有连续一阶偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



(二) 全微分形式不变性

设 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$ 都有连续一阶偏导数. 则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

(三) 隐函数求导法

1）由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数，$F_z'\neq 0, z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 所确定.

方法:

（1） 公式：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$；

（2） 等式两边求导 $F_x'+F_z'\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$， $F_y'+F_z'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

（3） 利用微分形式不变性：$F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=0$

微信公众号【晨强考研】
考研人的精神家园！

2）由方程组所确定的隐函数（仅数一要求）

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 所确定

方法:

（1）等式两边求导 $\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

（2）利用微分形式不变性 $\begin{cases}F_x'dx+F_y'dy+F_u'du+F_v'dv=0\\G_x'dx+G_y'dy+G_u'du+G_v'dv=0\end{cases}$

1.复合函数偏导数与全微分

【例 1】设 $z=\dfrac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=$______________. (-1)

【例 2】设函数 $z=(1+\dfrac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)}=$_________. $(1+2\ln 2)(dx-dy)$

【例 3】设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【解 1】 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ ，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{y^2\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2},$$

故 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4.$

【解 2】 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ ， $F_x(x,2)=\dfrac{2\sin 2x}{1+4x^2}$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=F_{xx}(0,2)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x(1+4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(1+4x^2)}=4$$

【例 4】设 $z=(1+x^2y^2)^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解 1】 由原题设可知 $z=e^{xy\ln(1+x^2y^2)}$，两端对 x,y 分别求偏导.

【解 2】 由原题设知 $\ln z = xy\ln(1+x^2y^2)$，两端对 x,y 分别求偏导.

【解 3】 令 $u=1+x^2y^2, v=xy$，则 $z=u^v$，由复合函数求导法可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}2xy^2+u^v\ln u\cdot y$$

$$=(1+x^2y^2)^{xy}[\frac{2x^2y^3}{1+x^2y^2}+y\ln(1+x^2y^2)].$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【注】解法 3 也可用于一元幂指函数，如 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，可令

$u=1+x^2, v=\sin x.$

【例 5】(2007 年 1) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

$[yx^{y-1}f_1+y^x\ln yf_2]$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!

【例 6】设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是( )

(A) $\frac{1}{2},0.$ (B) $0,\frac{1}{2}.$ (C) $-\frac{1}{2},0.$ (D) $0,-\frac{1}{2}.$

【解 1】令 $x+y=u, \frac{y}{x}=v$, 则

$$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$$

故 $$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{2u(1-v)}{1+v},\dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{(1+v)^2}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$$

【解 2】令 $x+y=u,\dfrac{y}{x}=v$, 则当 $u=1,v=1$时，$x=y=\dfrac{1}{2}$. 等式 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$ 两端分别对 x,y 求偏导得

$$f_u+f_v(-\frac{y}{x^2})=2x$$

$$f_u+f_v(\frac{1}{x})=-2y$$

将 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 代入上式得 $\begin{cases} f_u(1,1)-2f_v(1,1)=1 \\ f_u(1,1)+2f_v(1,1)=-1 \end{cases}$

由此解得 $f_u(1,1)=0,\ f_v(1,1)=-\dfrac{1}{2}.$

【例 7】设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,$

$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$..

【解】 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1,$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot 1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【例 8】设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$， f 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2',$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left[xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right]+x^2\left[xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right]=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3 f_1'+x^4\left[yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right]+2xf_2'+x^2\left[yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''.$$

【例 9】设 $u=f(x,y,z), z=\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, 其中 f 有二阶连续偏导数.

【例 10】设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】　由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$，所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_1'+f_2'+yf_3')\mathrm{d}x+(f_1'-f_2'+xf_3')\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}'')$$

微信公众号【最强考研】

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'.$$

考研人的精神家园！

【例 11】设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【解 1】　由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

上式两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}'']+g'(x)f_2'+yg'(x)[xf_{21}''+g(x)f_{22}''].$$

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0,$ 在上式中令 $x=1, y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1)+ f_{11}''(1,1)+ f_{12}''(1,1).$$

【解 2】 由 $z=f(xy, yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0,$ 在上式中令 $x=1$ 得

$$z_x(1,y)=yf_1'(y,y)$$

上式两端对 y 求偏导得

$$z_{xy}(1,y)= f_1'(y,y)+y[f_{11}''(y,y)+ f_{22}''(y,y)]$$

令 $y=1$ 得 $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1)+ f_{11}''(1,1)+ f_{12}''(1,1).$$

【例 12】设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

【解 1】将 z 视为以 u,v 为中间变量的 x,y 的复合函数，由题设可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

将上述结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2=0 \quad 且 \quad 10+5a\neq 0,$$

解之得 $a=3.$

【解 2】将 z 视为以 x,y 为中间变量的 u,v 的复合函数，由题设可得

$$x=\frac{au+2v}{a+2},\quad y=\frac{-u+v}{a+2}.$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ 得，$2a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

依题意 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ 可知 $\frac{2a}{6}=\frac{a-2}{1}=\frac{-1}{-1}$

故 $a=3.$

【例 13】已知函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$. 设 $u=x,v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 对函数 $\psi=\psi(u,v)$，求证 $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0.$

【证】 由 $\begin{cases}u=x\\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=u,\\ y=\frac{u}{1+uv}.\end{cases}$ 这样 $\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 便是 u,v 的复合函数，对 u 求偏导数得

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{1}{u^2}$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

$$=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+uv)^2}\right)+\frac{1}{u^2},$$

利用 $\frac{1}{1+uv}=\frac{y}{x}$ 和 $z(x,y)$ 满足的等式，有

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2x^2}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}=0.$$

2. 隐函数的偏导数与全微分

【例 1】若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则

$dz|_{(0,0)}=$ ________.

【解 1】将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3z}=1,$ 则 $z=0$

方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0$$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式得

$$dx+2dy+3dz=0$$

则 $dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}(dx+2dy).$

【解 2】将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3z}=1,$ 则 $z=0$

$$dz\big|_{(0,0)}=z_x(0,0)dx+z_y(0,0)dy$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $y=0$ 得，$e^{x+3z}=1,$ 两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1+3z_x)=0,$$

$$z_x(0,0)=-\frac{1}{3}$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $x=0$ 得，$e^{2y+3z}=1,$ 两边对 y 求导得

$$e^{2y+3z}(2+3z_y)=0,$$

$$z_y(0,0)=-\frac{2}{3}$$

则 $dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}(dx+2dy)..$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【例 2】设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，

且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A）x　　（B）z　　（C）$-x$　　（D）$-z$

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F_1-\frac{z}{x^2}F_2}{\frac{1}{x}F_2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\frac{y}{x}F_1-\frac{z}{x}F_2}{\frac{1}{x}F_2}-\frac{\frac{y}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2}$$

$$=z$$

故应选（B）.

【例 3】设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定：

$$\mathrm{e}^{xy}-xy=2 \quad 和 \quad \mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

【解 1】 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

由$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$两边对x求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$.

又由$\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$两边对$x$求导，得

$$\mathrm{e}^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{e}^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入(1)式，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{\mathrm{e}^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

【解 2】 $$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1)$$

等式$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$两端微分得

$$\mathrm{e}^{xy}(ydx+xdy)-(ydx+xdy)=0,$$

$$dy=-\frac{y}{x}dx$$

等式$\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$两端微分得

$$\mathrm{e}^x dx = \frac{\sin(x-z)}{x-z}(dx - dz) \quad 即 \quad dz = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^x (x-z)}{\sin(x-z)}\right)dx.$$

将其代入(1)式，得

$$du = \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{\mathrm{e}^x (x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}\right]dx$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{\mathrm{e}^x (x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例 4】设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi' \neq -1$.

（I）求 $\mathrm{d}z$；　（II）记 $u(x, y) = \dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

【解 1】　（I）设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - \varphi(x + y + z)$，则

$$F_x' = 2x - \varphi', \quad F_y' = 2y - \varphi', \quad F_z' = -1 - \varphi'.$$

由公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x'}{F_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y'}{F_z'}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'}.$$

所以

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{1}{1 + \varphi'}[(2x - \varphi')\mathrm{d}x + (2y - \varphi')\mathrm{d}y].$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

（II）由于 $u(x, y) = \dfrac{2}{1 + \varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2}{(1 + \varphi')^2}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi'' = -\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1 + \varphi')^2}.$$

【解 2】　（I）对等式 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$，两端求微分，得

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = \varphi' \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z).$$

解出 $\mathrm{d}z$，得

$$\mathrm{d}z = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}\mathrm{d}x + \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'}\mathrm{d}y.$$

（II）同解 1.

【例 5】设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数，其中函数 f 对各个变量具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】方程 $f(y-x,yz)=0$ 的两边对 x 求导，得

$$-f_1'+yf_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad ①$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'}{yf_2'}. \qquad ②$$

①两边再对 x 求导，得

$$f_{11}''-yf_{12}''\frac{\partial z}{\partial x}-yf_{21}''\frac{\partial z}{\partial x}+y^2f_{22}''(\frac{\partial z}{\partial x})^2+yf_2'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

解出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，并将②式代入，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{yf_2'}[-y^2f_{22}''(\frac{\partial z}{\partial x})^2+y(f_{12}''+f_{21}'')\frac{\partial z}{\partial x}-f_{11}'']$$

$$=\frac{1}{yf_2'}[-y^2f_{22}''\frac{f_1^{'2}}{y^2f_2^{'2}}+y(f_{12}''+f_{21}'')\frac{f_1'}{yf_2'}-f_{11}'']$$

$$=\frac{1}{yf_2^{'3}}(-f_1^{'2}f_{22}''+2f_1'f_2'f_{12}''-f_1^{'2}f_{11}'').$$

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！

思考题

1. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$ 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

2. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\dfrac{y^2}{x})$ 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

3. 设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

4. 已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

答案

1. $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$;

2. $yf(\frac{y^2}{x})$;

3. $a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$;

4. $1-3f_{11}-f_{22}$;

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园！