专题 17：级数求和

级数求和常见的是两种问题，幂级数求和及常数项级数求和.

1)幂级数求和的方法：

利用已有的几个展开式（$\frac{1}{1\pm x}, e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$）以及幂级数的性质（有理运算，逐项求导，逐项积分）来求幂级数的和函数；

2)常数项级数求和的方法：

求常数项级数的和最常用的方法是借助于幂级数求和. 常见的求和级数形式为

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$, 此时，考虑相应的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 并求出其和函数 $S(x)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n = S(b).$$

（一）幂级数的性质

1)有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2, 令

$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

（1）加法：$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \quad x \in (-R, R)$$

（2）减法：$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, \quad x \in (-R, R)$$

（3）乘法：$$\begin{aligned}&(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)\\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_0 + a_1 b_0) x + (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots\\ &\quad + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots. \qquad x \in (-R, R)\end{aligned}$$

（4）除法：$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad x \in (-R, R)$$

其中系数 c_n（$n = 0,1,2\cdots$）由 $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所确定.

2) 分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R,$ 和函数为 $S(x),$ 则

（1）连续性：$S(x)$ 在其收敛域 I 上连续；

（2）可积性：$S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（3）可导性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（二）几个常用的展开式

（1）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$

（2）$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$

（3）$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（4）$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（5）$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（6）$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1)$

（7）$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

典型例题

1. 幂级数求和

【例 1】幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(2n+1)!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

【解】 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(2n+1)!}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=x^2\sin x^2$$

【注】这里用到公式 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

【例 2】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

【解】 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$，所以 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

显然，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 在 $x=\pm1$ 时发散，故此幂级数的收敛域是 $(-1,1)$.

幂级数的和函数是

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1.$$

【例 3】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,\ R=1,$ 当 $x=\pm1$ 时原级数显然发散，则其收敛域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\left(-(x+1)+\frac{1}{1-x}\right)''+\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{3-x}{(1-x)^3}\qquad x\in(-1,1).$$

【例 4】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

【解】 易求得该幂级数收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}\qquad x\in[-1,1]$. 当 $x=0$ 时，$S(x)=0$.

当 $0<|x|\le1$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x),$$

故 $$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+(\dfrac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|\le1.\end{cases}$$

【注】本题用到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，这是一个常用的结论，望读者记住.

【例 5】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n-1}{2n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$，

因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼兹判别法知此级数收敛，因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

又 $S(0)=0$，故 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x,\ x\in[-1,1].$$

【例 6】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+2)(2n+3)}}{\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}}\right|=1$, 则 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛，所以该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}, x\in[-1,1]$, 则

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2},x\in(-1,1).$$

因为 $S(0)=0, S'(0)=0$, 所以当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\ln(1+t)dt-\int_0^x\ln(1-t)dt$$

$$=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

又 $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=2\ln2,\ S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=2\ln2,$

所以 $S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1),\\ 2\ln2, & x=\pm1.\end{cases}$

【例 7】设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

（I）证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots$；

（II）求 $y(x)$ 的表达式.

【解】（I）对 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 求一、二阶导数，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

代入 $y''-2xy'-4y=0$ 并整理，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0,$$

于是 $\begin{cases}2a_2-4a_0=0,\\(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0,\ n=1,2,\cdots,\end{cases}$

从而 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots.$

（II）因为 $y(0)=a_0=0,\ y'(0)=a_1=1$，故

$$a_{2n}=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot4\cdot2}a_1=\frac{1}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

【例 8】 设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（Ⅰ）证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

（Ⅱ）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0, (x\in(-1,1))$, 并求 $S(x)$ 的表达式.

【解】（Ⅰ）因为 $a_0=1, a_1=0$, 所以 $0\le a_0\le 1,\ 0\le a_1\le 1$. 若 $0\le a_{n-1}\le 1,\ 0\le a_n\le 1$. 由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 可知，$0\le a_{n+1}\le 1$. 即 $0\le a_n\le 1$.

当 $|x|<1$ 时，$|a_nx^n|<|x|^n$, 且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $(-1,1)$ 上收敛，则其收敛半径 $R\ge 1$.

（Ⅱ）因为，$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 所以

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}$$

$$=xS'(x)+xS(x)$$

则 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0, (x\in(-1,1))$. 解方程得 $S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$.

由 $S(0)=a_0=1$ 得 $C=1$，故 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

2.常数项级数求和

【例 1】 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于（ ）.

（A）3　（B）7　（C）8　（D）9

【解】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n=2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n=8.$

【例 2】$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$__________.

【解】 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$，则当 $-1<x<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 收敛，且有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)^{\prime}=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)^{\prime},$$

从而 $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4.$

【例 3】 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!}=(\quad)$

(A) $\sin 1+\cos 1.$ (B) $2\sin 1+\cos 1.$

(C) $2\sin 1+2\cos 1.$ (D) $2\sin 1+3\cos 1.$

【解】

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}+2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1$$

故应选(B).

【注】这里用到公式：$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$

【例 4】求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

【解】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，$x\in(-1,1)$,

则 $S(x)=\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n}\right)''=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2}{(1-x)^{3}}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n}=x^{2}S(x)=\frac{2x^{2}}{(1-x)^{3}},\ x\in(-1,1),\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{4}{27},$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n^{2}-n+1)}{2^{n}}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^{2}}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{1-4n^{2}}$ 的和.

【解】 因 $\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}$, $x\in(-1,1)$，故

$$\arctan x=\int_{0}^{x}(\arctan x)'dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}2}{1-4n^{2}}x^{2n},\ x\in[-1,1],\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{1-4n^{2}}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

思考题

1.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$..

3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\,(n\ge 2)$， $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

（1）证明： $S''(x)-S(x)=0;$

（2）求 $S(x)$ 的表达式.

4. 设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

（I） $S(x)$ 所满足的一阶微分方程；（II） $S(x)$ 的表达式.

答案与提示

1.【解】设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$， $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$， $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$ ，

则 $$S(x)=S_1(x)-S_2(x),\quad x\in(-1,1).$$

由于 $$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$(xS_1(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1),$$

因此 $$xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又由于 $S_1(0)=0$，故 $S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

所以 $$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

2.【解】 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}\cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)x^{2n+1}}\right|=x^2$，

所以当 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；

当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$，显然收敛，故原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$，设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=f(x),x\in(-1,1)$，则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2nx^{2n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

因为 $f'(0)=0,f(0)=0$，所以

$$f'(x)=\int_0^x f''(t)dt+f'(0)=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x,$$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=2\int_0^x\arctan t\,dt$$

$$=2\left(t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\right)$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1],$$

从而 $\quad S(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$

3.【解】$S(x)=3+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$$

即 $\quad S''(x)-S(x)=0$

解此线性线性常系数齐次微分方程得

$$S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

由 $\quad S(0)=3,S'(0)=1$ 知，$C_1=1,C_2=2.$

故 $\quad S(x)=2e^x+e^{-x}$

4.【解】（I）$S(x)=\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$

易见 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)$$

$$=x\left[\frac{x^2}{2}\right]+S(x).$$

因此 $S(x)$ 是初值问题 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$，$y(0)=0$，的解.

（II）方程 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$ 的通解为

$$y=e^{\int xdx}\left[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int xdx}dx+C\right]=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件 $y(0)=0$，求得 $C=1$.

故 $y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数 $S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$.