专题 16：常数项级数的敛散性

(一)级数的概念与性质

1．级数的定概念

设$\{u_n\}$是一数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**. $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为级数的**部分和**.若部分和数列$\{s_n\}$有极限s, 即

$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称这个极限值s为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

如果极限$\lim_{n\to\infty} s_n$不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

2．级数的性质

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于s, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为ks.

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于s,σ，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于$s \pm \sigma$.

【注】1）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$必发散；

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$敛散性不定.

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1)若级数加括号以后收敛，原级数不一定收敛；

2)若级数加括号以后发散，则原级数一定发散.

5)(级数收敛的必要条件) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

【注】1）若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛；

2）若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

（二）级数的审敛准则

1．正项级数（$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$）

基本定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ s_n 上有界。

1) 比较判别法：设 $u_n \leq v_n$，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

2) 比较法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l(0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

【注】使用比较法和比较法的极限形式时，需要适当的选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.　当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散；

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$. 其中 a 和 q 为正数，当 $q < 1$ 时收敛，当 $q \geq 1$ 时发散.

3) 比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛}, & \rho < 1, \\ \text{发散}, & \rho > 1, \\ \text{不一定}, & \rho = 1, \end{cases}$

4）**根值法**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}收敛, & \rho<1,\\ 发散, & \rho>1,\\ 不一定, & \rho=1,\end{cases}$

2. **交错级数**（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,u_n>0$）

莱不尼兹准则：若(1) $\{u_n\}$ 单调减；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

【注】$\{u_n\}$ 单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛的充分条件，但非必要条件. 如交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但 $u_n=\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

3. **任意项级数**（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n$ **为任意实数**）

1）绝对收敛与条件收敛概念

（1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，此时称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；

（2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，此时称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**；

2）绝对收敛和条件收敛的基本结论

（1）绝对收敛的级数一定收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）条件收敛收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n-|u_n|}{2}$ 发散.

典型例题

【例 1】级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$（常数 $\alpha>0$）（　）.

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）收敛性与 α 有关

【例 2】设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数（　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 而发散　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 而收敛

【例 3】下列选项正确的是（ ）.

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛

（C）若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\ge\frac{1}{n}$

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\ge v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛

【解】　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2+2u_nv_n)$，又 $|u_nv_n|\le\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 也收敛，故应选（A）.

【例 4】设 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$（　）.

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）收敛性与 λ 有关

【解】 因正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$也收敛. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\lambda}{n}=\lambda,\lambda>0.$$

故由正项级数的比较审敛法知结论为（C）.

【例 5】设有以下命题：

①若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

②若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛

③若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

④若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是（ ）.

（A）①② （B）②③ （C）③④ （D）①④

【解】 取$u_{2n-1}=1,u_{2n}=-1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；取$u_n=1,v_n=-1$，

则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均发散，故①，④错误，应选（B）. 另外，由于级数增加或减少有限项不影响其敛散性，故②正确. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，由保号性知：存在整数$N$，当$n>N$时，$|u_{n+1}|>|u_n|$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0,\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，故③正确.

【例 6】设$a_n>0,n=1,2,\cdots$，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，则下列结论正确的是（ ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$发散 （B）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

【解】由于收敛级数任意加括号后仍收敛，而将 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 两两加括号后即得 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$，故应选（D）.

特别取 $a_n=\frac{1}{n}>0\,(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 均发散，也应选（D）.

【例 7】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（ ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

【解】由收敛的数项级数之和仍收敛知应选（D）.

取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 均发散，故（A），（B），（C）均不正确.

【例 8】设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则（ ）.

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛　（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散

（C）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 收敛　（D）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 发散

【解】 取 $a_n=b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散，故（A）不正确；取 $a_n=\frac{1}{n^3}$，$b_n=n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 均发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 均收敛，故（B），（D）均不正确.

因 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，故 $\{a_n\}$ 有界. 设 $|a_n|\le M$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2\le M^2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

收敛. 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛，故应选（C）.

【例 9】设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是（ ）.

（A）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

（B）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（C）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

（D）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

【解】由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则其加括号以后的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$也收敛，故应选（A）.

【例 10】已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$绝对收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛，则

（A）$0<\alpha\le\dfrac{1}{2}.$

（B）$\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1.$

（C）$1<\alpha\le\dfrac{3}{2}.$

（D）$\dfrac{3}{2}<\alpha<2.$

【解】由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$收敛，又

$$\sin\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{n^\alpha}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{n^a}$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$收敛，由此可得$\alpha-\dfrac{1}{2}>1,$故$\alpha>\dfrac{3}{2}.$

又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛，则$0<2-\alpha\le 1,$即$1\le\alpha<2.$

综上所述，$\dfrac{3}{2}<\alpha<2.$故应选（D）.

【例 11】设$\{a_n\}$为正项数列, 下列选项正确的是

（A）若$a_n>a_{n+1},$则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛；

（B）若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$；

（C）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在；

（D）若存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 .

【解】若存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，由比较法的极限形式可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故应选（D）.

【例 12】下列级数中发散的是（ ）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$.

（C）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解】由交错级数的莱布尼兹准则知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，又

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散，选（C）.

【例 13】级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)$ （k 为常数）（ ）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）收敛性与 k 有关

【解】由于 $\left|(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，则原级数绝对收敛，故选（A）.

【例 14】若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛，则 $k=(\quad)$

（A）1.　　（B）2.　　（C）-1.　　（D）-2.

【解】由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1+k$

如果 $1+k\neq 0$，则级数 $\sum_{n=2}^{\infty}[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 与级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散，而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则选项（A）(B)(D)都不正确，故应选（C）.

【例 15】设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；　（2）试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

【证】（1）因为 $\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx\xlongequal{\tan x=t}\frac{1}{n}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n(n+1)},$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(a_i+a_{i+2})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

（2）因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx\xlongequal{\tan x=t}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

【例 16】 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

【证】（Ⅰ）由于 $x_{n+1}=f(x_n)$，所以

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$$，其中 ξ 介于 x_n 与 x_{n+1} 之间.

又因为 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$, 所以

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

（Ⅱ）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $S_n=x_{n+1}-x_1$.

由（Ⅰ）知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 及 $f(x)$ 的连续性，等式两端取极限得 $a=f(a)$.

即 a 是函数 $g(x)=x-f(x)$ 的零点. 由于

$$g(0)=-1<0,$$

$$g(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\eta)>0,$$ 其中 $\eta\in(0,2)$.

又 $g'(x)=1-f'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 存在唯一的零点，且零点位于区间 $(0,2)$ 内，于是

$$0<\lim_{n\to\infty}x_n<2.$$

【例 17】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

（I）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，并求其和;

（II）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛.

【证】（I）令$S_n=\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$,则

$$S_n=[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]$$

$$=f(n)-f(0)$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$可知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-f(0)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，且其和为$1-f(0)$.

（II）由$f''(x)<0$可知，$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则$f'(x)$下有界.否则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$, 又

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\qquad(x<\xi<x+1)\qquad（1）$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

又由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=-\infty$, 矛盾.则$f'(x)$下有界. 又$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在，由（1）式知$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 则$f'(x)\geq 0$, 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$为正项级数，又

$$f(n)-f(n-1)=f'(\xi)\qquad(n-1<\xi<n)$$

$$>f'(n)$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$也收敛.

思考题：

1. 设$a_n>0,p>1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n=1$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$p$的取值范围为________.

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^p+a}}$ $(a>0)$为条件收敛，则 p 的取值范围为________.

3. 设$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为（　）

（A）发散的正项级数.　　（B）收敛的正项级数.

（C）发散的交错级数.　　（D）收敛的交错级数.

4. 下列命题正确的是

(A) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$条件收敛;

(B) 若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(C) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n^2$收敛.

(D) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

5. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散$(b_n\neq 0)$, 则下列级数中一定发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$;

6. 若$a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，试证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛.

7. 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)>0, |f'(x)|\le k|f(x)|$, 其中 $0<k<1$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛.

思考题答案：

1. $p>2$　　2. $0<p\le 2$　　3.D　　4.D　　5.C　　6.提示：$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}$