专题 1：求极限的方法和技巧

（一） 求极限的常用方法

方法 1 利用基本极限求极限

1) 常用的基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad (a>0),\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2) “1^{∞}”型极限常用结论

若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^{A}$.

可以归纳为以下三步：

1) 写标准形式　原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2) 求极限　$\lim\alpha(x)\beta(x)=A$;

3) 写结果　原式 $=e^{A}$.

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{n^2+n+1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{3}-1)$__________. $[\dfrac{\ln 3}{e}]$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{(x+a)}(x+b)^{(x+b)}}{(x+a+b)^{(2x+a+b)}}=$______. $[e^{-(a+b)}]$

【例 3】(2002 年 3) 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______. $[\dfrac{1}{1-2a}]$

【例 4】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3})^x$ ，其中 $a>0,b>0,c>0.$

【解】原式 $=\lim\limits_{\to\infty}\left[1+\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3}\right]^x$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3})x$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)+(b^{\frac{1}{x}}-1)+(c^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$

原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

【例 5】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$； $[e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}]$

【例 6】$\lim\limits_{n\to 0}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$　　$(x\neq 0)$　　$[\dfrac{\sin x}{x}]$

【例 7】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}+x^{48}(2x-1)}=$ ________.　　$[(\dfrac{3}{2})^{30}]$

【例 8】已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，则（　）

（A）$a=-1,b=4.$　　（B）$a=1,b=-4.$

（C）$a=1,b=4.$　　（D）$a=-1,b=-4.$　　(C)

【例 9】已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)}{(2x-1)^{\beta}}=\alpha\neq 0,$，则（　）

（A）$\alpha=5!,\beta=5.$　　（B）$\alpha=\dfrac{5!}{2^5},\beta=5.$

（C）$\alpha=\dfrac{1}{2^5},\beta=5.$　　（D）$\alpha=\dfrac{5}{2^5},\beta=4.$　　(B)

【例 10】已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)+ax+b}{x}=16,$，则（　）

（A）$a=1,b=1.$　　（B）$a=2,b=-1.$

（C）$a=5,b=1.$　　（D）$a=1,b=-1.$　　(D)

【例 11】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，问 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

【解】$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & |x|<1, \\ x, & |x|>1, \\ \dfrac{-1+a-b}{2}, & x=-1, \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1. \end{cases}$$

$$f(-1-0)=-1=f(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$$

$$f(-1+0)=a-b=f(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$$

则 $a-b=-1$

$$f(1-0)=a+b=f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

$$f(1+0)=1=f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

则 $a+b=1$

故 $a=0,b=1$

【例 12】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 连续，问常数 a,b 必须满足什么条件？

【解】$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1, \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1, \\ x^2, & x>1. \end{cases}$$

$$f(1-0)=a+b$$

$$f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

$$f(1+0)=1.$$

则 $a+b=1$

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln(n+1)}(\sqrt[n]{n}-1)$ __________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-2}-ax+b\right)=0$，则（ ）

（A） $a=-1,b=4.$ （B） $a=1,b=-4.$

（C） $a=1,b=4.$ （D） $a=-1,b=-2.$

3.（2016 年，数二，数三，10 分）

$$求极限\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$$

4.（2018 年，数一, 4 分）

$$若\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e, 则\ k=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5.（2018 年，数二, 4 分）

$$若\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1, 则（\quad）$$

（A） $a=\frac{1}{2},b=-1.$ （B） $a=-\frac{1}{2},b=-1.$

（C） $a=\frac{1}{2},b=1.$ （D） $a=-\frac{1}{2},b=1.$

6. (2010 年 1) 极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

(A) 1. **(B)** e. **(C)** e^{a-b}. **(D)** e^{b-a}.

7. 设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, 则 $f(x)$（ ）

（A）仅有一个可去间断点； （B）仅有一个跳跃间断点；

（C）有两个可去间断点； （D）有两个跳跃间断点；

答案

1. 1; 2. (D) 3. $e^{\frac{1}{3}}$; 4. -2; 5.（B）; 6. (D) ; 7. (D).

方法 2 利用等价无穷小代换求极限

1. 等价无穷小代换的原则

1）乘、除关系可以换；

$$若\ \alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1, 则\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

2）加、减关系在一定条件下可以换；

(1) 若$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$. 则$\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

(2) 若$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$. 则$\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

2. 常用等价无穷小 当$x \to 0$时，

1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$， $a^x - 1 \sim x \ln a$,

2) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$， $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$， $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$ ， $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

【注】(1）这五个等价无穷小中前 3 个要记住，后两个可由前两个推得. 事实上由

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$得，$\arcsin(\sin x) - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \sim \frac{\sin^3 x}{6}$, 从而有

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$；同理可由$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$推得$x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$.

(2)由这几个等价无穷小及等价无穷小的性质，若$\alpha \sim \beta$, 则

$\alpha = \beta + o(\beta)$, 可得到几个泰勒公式

事实上由$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$得，$(\tan x - x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$，即

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

同理可得

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

3）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则

$$\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$$

【注】特别的如果当 $x\to 0$ 时， $f(x)\sim g(x)$，则 $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$.

例如当 $x\to 0$ 时， $\ln(1+x^2)\sim x^2$, 则 $\int_0^x \ln(1+t^2)dt \sim \int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$.

【例 1】（2000 年 2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ______. $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 2】（2007 年 2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________ $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 3】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\tan x}{\sin x-\sin(\sin x)}=$ ______.

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+x^2}}{x-\ln(1+x)}=$ ______.

【例 5】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$ $[\dfrac{1}{n!}]$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $\left(\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}\right)$

【例 7】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}=$ ______.

【例 8】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x^2}=$ ______.

【例 9】求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

【解】 原式= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{\ln[1+(x-1)]-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)\ln x}{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^2}$$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=2$$

【例 10】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-(\arctan x)^2}{\int_0^x \arcsin t^2dt\cdot\int_0^x\cos t^2dt}$.

【解】由于当 $x\to 0$ 时， $\arcsin x^2\sim x^2$, 则 $\int_0^x \arcsin t^2dt\sim\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$, 则 $\int_0^x\cos t^2dt\sim\int_0^x 1dt=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\arctan x)^2}{\int_0^x \arcsin t^2dt\cdot\int_0^x\cos t^2dt}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\arctan x)(x-\arctan x)}{\frac{1}{3}x^3\cdot x}$$

$$=3[\lim_{x\to 0}\frac{x+\arctan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}]\qquad (x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3})$$

$$=3[2\cdot\frac{1}{3}]=2$$

【例 11】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f(a)}-\frac{1}{\int_a^x f(x)dx}\right].$$

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(a)}{(x-a)f(a)\int_a^x f(t)dt}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(a)}{(x-a)^2f^2(a)}$ $\qquad[\int_a^x f(t)dt\sim\int_a^x f(a)dt=(x-a)f(a)]$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{2(x-a)f^2(a)}$ $\qquad$(洛必达法则)

$=\dfrac{f'(a)}{2f^2(a)}$ $\qquad$（导数定义）

【例 12】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内二阶可导，且 $f'(a)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f'(a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right].$$

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[f(x)-f(a)]-(x-a)f'(a)}{(x-a)f'(a)[f(x)-f(a)]}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[f(x)-f(a)]-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2f'^2(a)}$ $\qquad[f(x)-f(a)\sim(x-a)f'(a)]$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)f'^2(a)}$ $\qquad$(洛必达法则)

$=\dfrac{f''(a)}{2f'^2(a)}$ $\qquad$（导数定义）

【例 13】设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2019}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\lambda\neq 0$, 求 α 及 λ. $\qquad$（$\alpha=2020,\quad \lambda=\dfrac{1}{2020}$）

【例 14】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}+xe^{\frac{1}{x}}\right)$ $(\frac{1}{2})$

【例 15】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\sin^2 x-x^2]-[\ln(1+x^2)-x^2]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}-\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4} \qquad (x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2)$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \qquad (x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3)$$

【例 16】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$. $[e^{\frac{1}{2}}]$

练习题

试求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$. (-6)
2. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b})$; $(\dfrac{a-b}{2})$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{\frac{2}{x}}\sqrt{x^2+1}-x]$, (2)
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n)}-x\right]$ $(\dfrac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n})$

方法 3 利用有理运算法则求极限

若 $\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$$

推论：1）若 $\lim f(x)=A\neq 0$，则

$$\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$$

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}\lim g(x)$$

（即：极限非零的因子极限可先求出来）

2）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$;

3）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且 $\lim f(x)=0$，则 $\lim g(x)=0$;

【注】（1）若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 一定不存在；

（2）若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 不一定存在.

【例 1】（2018 年 3）已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求 a,b.

【解】 $2=\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}be^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}(axe^{\frac{1}{x}}-x)$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$$

即 $2-b=\lim\limits_{x\to+\infty}x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\qquad(a=1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}\qquad\text{（等价无穷小代换）}$$

$$=1$$

故 $a=b=1$.

【例 2】(1997 年 4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-(\dfrac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq 0)$　　　　$(\dfrac{a^2}{2})$

【例 3】(1994 年 3) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 则

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　　　(B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　　　(D) $a=1,b=-2$

【例 4】(1993 年 3) 求 $\lim\limits_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$　　　　(有理化)

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{100x}{(-x)(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{100}{-(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1)}=-50$$

【解 2】原式 $=\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2)(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1)$.

$=\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2)(\dfrac{1}{2}\dfrac{100}{x^2})$　　　　(等价代换)

$=-50$

【例 5】（1997 年 2）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解 1】原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$ （分子分母同除以 $-x$ ）

$=1$

【解 2】原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ （拆项）

$=2-1+0=1$

【例 6】设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{2}{3}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$ ________.

【解】$\dfrac{2}{3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-2x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+xf(x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}(2x)^3}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}$

$=\dfrac{8}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}$

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=-2$

【例 7】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n-1)n}{2n^2}=1$

【例 8】$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}$

方法 4 利用洛必达法则求极限

若 1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0(\infty)$;

2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或∞）；

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注】 1) 洛必达法则主要用于 7 种不定式：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}.

其中“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$” 可直接用，后 5 种可通过以下关系图化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限来求.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\ \Leftarrow\begin{cases}0\cdot\infty & \Leftarrow\begin{cases}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{cases}\\ \infty-\infty\end{cases}$$

2) **使用洛必达法则应该注意的几个问题**

(1) 使用洛必达法则之前，应该先检验其条件是否满足；

(2) 使用洛必达法则之后，如果问题仍然是未定型极限，且仍符合洛必达法则条件，可以再次使用洛必达法则；

(3) 如果“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限中的函数含有极限非零的因子，可以单独求极限，不必参与洛必达法则运算，以简化运算；

(4) 如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形配合洛必达法则使用，也可以简化运算.

【例 1】(2016 年 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$______. $(\dfrac{1}{2})$

【例 2】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$. (2)

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $(e^{-\frac{1}{6}})$

【例 4】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^n$. $(e^{-\frac{2}{\pi}})$

【例 5】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

【例 6】设函数 $f(x)$ 可导，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

【例 7】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=2,\ f''(0)=1$. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}.$$

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-2}{2x}$ （洛必达法则）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2} \qquad \text{（导数定义）}$$

$$=\frac{1}{2}$$

【解 2】函数 $f(x)$ 带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

即 $$f(x)=2x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

【注】 经典错误：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=\dfrac{1}{2}$.

方法 5 利用泰勒公式求极限

定理（带 Peano 余项的泰勒公式）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

特别是当 $x_0=0$ 时

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

几个常用的泰勒公式

（1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

（2）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$

（3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

（4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}x\sin x}{x^3}$.

【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}x\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-\dfrac{1}{2}x\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}{x^3}$$ （泰勒公式）

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$. $(-\dfrac{1}{12})$

【例 3】已知当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$ 与 x^3 是等价无穷小，求常数 a,b.

$(a=-2,b=3)$

【例 4】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某领域内二阶可导，且 $f(0)=-1,\ \ f'(0)=0,\ \ f''(0)=\dfrac{4}{3}$.

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}$.

【解 1】函数 $f(x)$ 带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

即 $$f(x)=-1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

【解 2】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + f(x) + xf'(x)}{3x^2}$$ （洛必达法则）

$$= \frac{1}{3}[\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + f'(x)}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}]$$

$$= \frac{1}{3}[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f'(0) + f'(0)]$$ （导数定义）

$$= \frac{1}{2}$$

【例 5】 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}.$$

【解】原式= $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e + \frac{e}{2}x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x)^2} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x)^2} - 1 + \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{[1 + (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}) + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2 + o(x^2)] - 1 + \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$ $\left(\dfrac{1}{6}\right)$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}}$； (-3)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n^3 - n^2 + \dfrac{n}{2})e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6}\right]$ $(\dfrac{1}{6})$

4.设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=2$, 求 a,b 的值. $(a=2,b=1)$

5.设 $\lim\limits_{x\to0}(x^{-3}\sin3x+ax^{-2}+b)=0$, 求 a,b 的值. $(a=-3,b=\dfrac{9}{2})$

6.确定常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to0$ 时，$e^x(1+bx+cx^2)=1+ax+o(x^3)$.

$(a=\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{3},c=\dfrac{1}{6})$

方法 6 利用夹逼准则求极限

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n+n}\right]$ $(\dfrac{1}{3})$

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_m^{\ n}}$. 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$

【解】 令 $\max a_i=a$, 则

$$\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_m^{\ n}}\le\sqrt[n]{ma^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_m^{\ n}}=a$$

【注】 这是一个常用结论.

【例 3】（2008 年 4）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$（ ）.

（A）a. （B）a^{-1}. （C）b. （D）b^{-1}.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{1}{a})^n+(\dfrac{1}{b})^n}$

$$=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}=\frac{1}{a}$$

则应选(B).

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$，$(x>0)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}$

$$=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & 2\le x,\end{cases}$$

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ [1]

【例 6】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1)^n+(1+\frac{1}{2})^{2n}+\cdots(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$. $[e]$

【例 7】 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}dx=$ ________.

【例 8】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x]\ln(1+\frac{1}{x})=$ ________.

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+k)(n+k+1)}$ $[\frac{3}{2}]$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$ [1]

方法 7 利用定积分的定义求极限

【例 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right]$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

$=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln 2$

【注】由定积分定义可知，若将区间 $[0,1]$ n 等分，第 k 个子区间上的 ξ_k 取该子区间右端点，此时 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$，$\xi_k=\dfrac{k}{n}$，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$$

上式右端是一种常见的积分和式的极限. 所以，用定积分定义求极限的一般方法是先提“可爱因子” $\dfrac{1}{n}$, 然后再确定被积函数和积分区间.

【例 2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})=$ ________. [$\ln(1+\sqrt{2}$]

【例 3】(2012 年 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2})=$ ________. [$\dfrac{\pi}{4}$]

【例 4】(2017 年 1, 2, 3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})$. [$\dfrac{1}{4}$]

方法 8　利用单调有界准则求极限

【例 1】 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$, $n = 1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】由题设知 $x_n > 0$, 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$$

$$\geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{1}{x_n^2}} = 1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}\left[2 + \frac{1}{x_n^3}\right] \leq \frac{1}{3}\left[2 + \frac{1}{1}\right] = 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减且下有界，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

等式 $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$ 两端取极限得

$$a = \frac{1}{3}\left(2a + \frac{1}{a^2}\right)$$

由此解得 $a = 1$.

方法 9　利用拉格朗日中值定理求极限

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$;　　[1]

【例 2】 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}})\ (a > 0)$;　　[$\ln a$]

【例 3】 $\lim\limits_{x\to +\infty} [\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}]$;　　[0]

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}[\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}]$; [0]

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}]\,(a>0)$; $[a]$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$; [1]

【例 7】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$； $[-\frac{1}{6}]$

【例 8】 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$; $[e^2]$

【例 9】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}$ $[\frac{1}{3}]$

【例 10】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$ $[-4]$

【例 11】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$. $[\dfrac{e}{2}]$

【例 12】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$.

【解】原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\xi}[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\dfrac{e\ln(1+x)}{x}]}{x^2}$

$$=e^e\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\dfrac{e\ln(1+x)}{x}}{x^2}$$

$$=e^e\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}-e[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)]}{x^2}$$

$$=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^2}{8}+o(x)^2]-[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)]}{x^2}$$

$$=\frac{1}{8}e^{e+1}$$