专题 10　计算不定积分和定积分的方法和技巧

(一) 不定积分

(1) 三种主要的积分法

1）第一类换元法（凑微分法）

若 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，且 $\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$$

2）第二类换元法

设函数 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0,$ 又设

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C$$

则 $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

三种常用的变量代换

（1）被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x=a\sin t,$ 或 $x=a\cos t;$

（2）被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，令 $x=a\tan t$；

（3）被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x=a\sec t$；

3）分部积分法

设 $u(x),v(x)$ 有连续一阶导数，则

$$\int udv = uv - \int vdu$$

【注】(1) 分部积分法常用于被积函数为两类不同函数相乘的不定积分；

(2) 分部积分法选择 $u(x),v(x)$ 的原则是 $\int vdu$ 比 $\int udv$ 好积， 设 $p_n(x)$ 是 n 次多项式，则

形如 $\int \mathrm{p}_n(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\cos\alpha x dx$ 的积分都是先把多项式以外的函数凑进微分号，然后分部积分；

形如 $\int \mathrm{p}_n(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\arcsin x dx$ 的积分都是先把多项式函数凑进微分号，然后分部积分；

形如 $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x, \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ 的积分可连续两次将指数函数凑进微分号分部积分还原,求得原不定积分.

(2) 三类常见函数的积分

1）有理函数积分 $\int R(x)\,\mathrm{d}x$

（1）一般方法（部分分式法）

（2）特殊方法（加项减项拆或凑微分缔幂）;

2）三角有理式积分 $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$

（1）一般方法（万能代换） 令 $\tan\frac{x}{2}=t$

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$$

（2）特殊方法 （三角变形，换元，分部）

几种常用的换元法

i)若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\cos x$;

ii)若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\sin x$;

iii)若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\tan x$.

3）简单无理函数积分 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,将其化为有理函数积分进行计算.

【例 1】$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$________________. （ $(\arctan\sqrt{x})^2+C$ ）

【例 2】$\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx=$__________.

【解】$\int \frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{2\sin x\cos x}dx$

$$= \int \frac{\ln\tan x}{2\tan x}d\tan x = \frac{1}{2}\int \ln\tan x d\ln\tan x$$

$$= \frac{1}{4}(\ln\tan x)^2 + C$$

【例 3】(2018 年 3) $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx =$ ________.

【解】$\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx = \int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}de^x$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int \frac{e^x d\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}}$$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int d\sqrt{1-e^{2x}}$$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C$$

【例 4】(2018 年 1, 2) 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

【解】$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$= \int \sqrt{e^x-1}de^x + \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$= \frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1} + 2\sqrt{e^x-1} + C$$

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1} + C$$

【例 5】(2003 年 2) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

【解 1】 设 $x = \tan t$，则

$$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int = \frac{\mathrm{e}^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$$

又 $\int \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \int \sin t\,\mathrm{d}e^t = e^t\sin t - \int \mathrm{e}^t \cos t dt$

$$=e^t\sin t-\int\cos t de^t$$

$$=\mathrm{e}^t\sin t-e^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t,$$

故 $\displaystyle\int\mathrm{e}^t\sin t dt=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C.$

因此 $$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

$$=\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【解 2】 $$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}$$

$$=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

移项整理，得

$$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【例 6】 $\displaystyle\int\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx$

【解 1】 令 $\displaystyle\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

由 $Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=3-x^2$

得 $$\begin{cases}A+C=-1\\A+B=0\\B=3\end{cases}$$

解得 $A=-3,B=3,C=2.$

$$\int\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx=\int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=x-3\ln|x|-\frac{3}{x}+2\ln|x+1|+C$$

【解 2】

【例 7】$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx$

【解 1】由于 $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$，设

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

则 $\quad x\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$

由此解得 $\quad A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}.$

$$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

【解 2】

【例 8】$\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x}$

【解】原式$=\int \frac{dx}{\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$ $\qquad (R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$

$$=\int \frac{-d\cos x}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}$$

$$=-\int \frac{2(1-u^2)+(2u^2-1)}{(1-u^2)(2u^2-1)}du$$

$$=-2\int \frac{du}{2u^2-1}+\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

(二) 定积分

定积分的计算常用方法有以下五种

1）牛顿-莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a);$$

2）换元积分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足以下条件：

（1）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

（2）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3）分部积分法

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续一阶导数，则

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

4）利用奇偶性和周期性

(1) 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数（$a>0$），则

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\ \text{为奇函数时}, \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x)\ \text{为偶函数时}. \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任给数 a，总有

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5）利用公式

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

$$(2)\ \int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{其中}f(x)\text{在}[0,1]\text{上连续})$$

【例 1】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 x + \int_0^x e^{-t^2}dt]\sin^2 xdx =$ ____________.

【解】 e^{-t^2} 偶函数，则 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 奇函数.

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$$

【例 2】(2012 年 1) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$________.

【解 1】 原式$=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$$\underline{\underline{x-1=\sin t}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

【解 2】 原式$=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2[(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$ （几何意义）

【例 3】 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=$__________.

【解】 原式$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

【例 4】(2013 年 1) 计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt.$

【解】 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$

$$=-4\int_0^1\ln(1+x)d\sqrt{x}=-4\ln(1+x)\sqrt{x}\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$=-4\ln 2+8-2\pi$$

【例 5】计算定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

【解】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\pi$$

【例 6】计算定积分 $\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx.$

【解】令 $x=2-t,$ 则 $dx=-dt,$

$$\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx=\int_0^2\frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt.$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx+\int_0^2\frac{2-x}{e^x+e^{2-x}}dx]$$

$$=\int_0^2\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_0^2\frac{de^x}{e^{2x}+e^2}$$

$$=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\bigg|_0^2=\frac{1}{e}[\arctan e-\arctan\frac{1}{e}]$$

【例 7】计算定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

【解】 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt\overset{t=\frac{\pi}{4}-u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}]du$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan u}du=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

【例 8】(1995 年 3) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ (A 为常数)

1) 证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$

2) 利用 1) 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$

【证】(1) 令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

于是 $$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $f(x)=\arctan\mathrm{e}^x$，$g(x)=|\sin x|$，$a=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数.

又因为 $(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=0$，所以 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}=A.$

令 $x=0$，得 $2\arctan 1=A$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$，即

$$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}.$$

于是，有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}.$

【例 9】 设 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)$

$$=(x-1)f(x)\big|_0^1-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\arctan(x-1)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan u\,du \qquad （令 (x-1)^2=u）$$

$$=\frac{1}{2}u\arctan u\big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{1+u^2}du=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

【例 10】 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$，求 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

【解】 令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

$$f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin^4 x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的平均值为 $\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}$

思考题

1. 求下列不定积分

1) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$

2) $\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx$

3) $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$

5) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

6) $\int x\arcsin x dx$

7) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

8) $\int \arcsin x \arccos x dx.$

2. 计算下列定积分

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

2) $\int_0^6 x^2\sqrt{6x-x^2}dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^9 x dx$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$

6) $\int_0^1 x^2 f(x)dx,$ 其中 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt.$

7) $\int_0^1 f(x)dx$ 其中 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt.$

答案

1. 求下列不定积分

1） $2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C$

2） $\ln x^2-\ln(1+x^2)+3\arctan x+C$

3） $-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$

4） $\frac{\sqrt{2x-4}}{4x}+\frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$

5） $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$

6） $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

7） $e^x\tan\frac{x}{2}+C$

8) $x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}\arccos x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x+C$

2. 计算下列定积分

1) $\dfrac{\pi}{16}$.

2) $\dfrac{405\pi}{8}$.

3) $\dfrac{128\pi}{315}$.

4) $\dfrac{\pi}{4}$.

5) $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

6) $\dfrac{\pi}{16}$.

7) $\dfrac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$

8) $\dfrac{1}{4}(\cos 1-1)$