专题 7　泰勒公式及其应用

(一) 泰勒公式

定理 1（皮亚诺型余项泰勒公式）

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

常称 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 为皮亚诺型余项.

若 $x_0=0$，则得麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

定理 2（拉格朗日型余项泰勒公式）

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称为拉格朗日型余项.

几个常用的泰勒公式（拉格朗日型余项）

(1)　$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

(2)　$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\dfrac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(3)　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\dfrac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

(4)　$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$

(5)　$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

(二) 泰勒公式本质及两个泰勒公式的异同点

1. 本质（相同点）

1）用多项式逼近函数

2）用已知点信息表示未知点

3）建立函数与高阶导数的关系

2. 不同点

1）条件不同

皮亚诺型余项：　$f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数

拉格朗日型余项：$f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数

2）余项不同

皮亚诺型余项：　$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$；　　定性；局部.

拉格朗日型余项：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$；定量；整体.

【注】通常称皮亚诺型余项泰勒公式为**局部泰勒公式**，主要用来研究函数的局部性态（如：极限，极值）；而称拉格朗日型余项泰勒公式为**整体泰勒公式**，主要用来研究函数的整体性态（如：最值，不等式）.

(三) 泰勒公式的应用

1. 利用高阶导数研究函数性态

【例 1】若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0\ \ (n\geq 2)$，则当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 处有极值. 其中 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时极小，$f^{(n)}(x_0)<0$ 时极大；当 n 为奇数时 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

【例 2】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=1, f'(0)=0, |f''(x)|\le 1,$ 试证：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值不超过 $\frac{3}{2}$.

2. 计算函数近似值

【例 1】计算 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

【解】 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

取 $x=1$，得 $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

其误差 $|R_n| = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

当 $n=10$ 时，误差不超过 10^{-6}. 得 $e \approx 2.718282$.

3. 求极限

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; [$-\frac{1}{12}$]

【例 2】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$

（1）求 $f(0), f'(0), f''(0)$; [$f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$]

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$. $[\dfrac{9}{2}]$

【例 3】(2001 年 1) 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（1）对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使

$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

【证】（1）任给非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad (0<\theta(x)<1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单增，故 $\theta(x)$ 惟一.

（2）由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\qquad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

所以 $xf'(\theta(x))=f(x)-f(0)=f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，从而

$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，

$\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=f''(0)$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

4. 求高阶导数

【例 1】(2015 年 2) 函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________.

$[n(n-1)(\ln 2)^{n-2}]$

5. 证明不等式或等式

【例 1】 设 $f^{(4)}(x)>0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，试证：$f(x)>x^3 \quad (x\neq 0)$.

【例 2】（1996 年 1, 2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)|\le a$, $|f''(x)|\le b$, 其中 a,b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任一点.

（1）写出 $f(x)$ 在点 c 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式;

（2）证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

【证】（1） $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$

（2）在以上泰勒公式中，分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 则有

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2 \quad (1)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 \quad (2)$$

（2）式减（1）式得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

$$|f'(c)|\le|f(0)|+|f(1)|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_2)|(1-c)^2+|f''(\xi_1)|c^2]$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$$

又因为当 $c\in(0,1)$ 时，$(1-c)^2+c^2\le 1$, 故 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

【例 3】（2001 年 2）设 $f(x)$ 的区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

（1）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（2）证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【解】　（1）对任意 $x\in[-a,a]$，

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 在 0 与 x 之间.

（2）$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} f(0)x\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\dfrac{x^2}{2!}f''(\xi)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\,\mathrm{d}x.$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故对任意的 $x\in[-a,a]$，有 $m\le f''(x)\le M$，其中 M，m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大、最小值，所以有

$$\frac{m}{2}\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x\le\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\,\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx,$$

即

$$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\le M.$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知，至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即　$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

【例 4】（1999 年 2）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

【证法 1】　由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$. 分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad -1<\eta_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad 0<\eta_2<1.$$

两式相减，可得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$$

因 $f'''(x)$ 连续，$f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设其分别为 M 和 m，

则有

$$m \le \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \le M.$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1,1)$，使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 3.$$

【证法 2】

【例 5】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0) = f(1) = 0, \max\limits_{0\le x\le 1} f(x) = 2$. 试证存在点 $\xi \in (0,1)$ 使 $f''(\xi) \le -16$.

【证法 1】设 $f(c) = \max\limits_{0\le x\le 1} f(x) = 2$，则 $0 < c < 1$，且 $f'(c) = 0$，

由泰勒公式知

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

在上式中分别令 $x = 0$，和 $x = 1$ 得

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2} \qquad \xi_1 \in (0,c)$$

$$f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1-c)^2} \qquad \xi_2 \in (c,1)$$

若 $c \le \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2} \le -\frac{4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$

若 $c > \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1-c)^2} \le -\frac{4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$

故存在点 $\xi \in (0,1)$ 使 $f''(\xi) \le -16$.

【证法 2】

思考题：

1. 试证 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}\quad (x>0).$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，试证存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

3. 设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(-1)=0, f(1)=1, \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，试证存在 $\eta\in(-1,1)$，使 $f'''(\eta)\geq3$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=f'(1)=0$，试证：$\xi\in[0,1]$，使 $|f''(\xi)|\geq2$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内 $n+1$ 阶可导，且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq0,$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(h)h).$$

求极限 $\lim\limits_{h\to0}\theta(h).$

答案提示：

1.【证】$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2}{2!}+R_2(x)$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+R_2(x)$$

其中 $R_2(x)=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-3}x^3,\quad (0<\theta<1).$

由于当 $x>0$ 时，$R_2(x)>0,$ 则 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}\quad (x>0).$

2.【证 1】$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$

在上式中分别令 $x=a, x=b$ 得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

上式两端相加得

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\frac{(b-a)^2}{8}$$

由 $f(x)$ 二阶可导及导函数的介值性知，存在 ξ 使得 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi)$. 则

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

【证 2】令 $\varphi(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$

$$\varphi(\frac{a+b}{2})-\varphi(a)=\varphi'(c)\frac{b-a}{2}=[f'(c+\frac{b-a}{2})-f'(c)]\frac{b-a}{2}$$

$$=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$

即 $f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$

3. **提示：**由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知， $f(0)=0, f'(0)=0.$ 写出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处拉格朗日余项的二阶泰勒公式，再将 $x=-1, x=1$ 代入便可证明.

4. **提示：**分别写出 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处拉格朗日余项的二阶泰勒公式，然后两式相减便可证明.

5. **提示：**参见：3. 求极限中的例 3，$\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}$.