

基于局部最优模型的多波束测线覆盖度计算与规划策略

摘要

多波束测深利用声波在均匀介质中作匀速直线传播，在不同界面上产生反射时间不同的原理。在与航迹垂直的平面内一次发射出数十个乃至上百个波束并接收，计算出海水的深度，对快速高效测量海底地形具有重要意义。本文主要研究了多波束测深在不同方向上对海底坡面进行覆盖探测以及测线规划，基于局部最优模型与数值计算，建立了不同测线多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型以及测线路径的规划策略。

针对问题一，首先根据题目示意图和条带覆盖宽度关系图，分别利用几何变换和正弦定理确定距离海域中心点不同距离与海水深度 D 的表达式，利用该表达式代表变量通过几何关系和正弦定理建立覆盖宽度及相邻条带之间重叠率计算公式，结果见式 (1)。将覆盖宽度计算问题转化为方程问题。其次，代入题目中各组数值求解方程得到覆盖宽度和覆盖率的解。建立了多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。最后，考虑到海底起伏不平，因此在计算覆盖宽度时需要再把坡面覆盖范围进一步进行水平分量上的计算，从而使模型更具完整性。

针对问题二，首先提出并证明坡度与测线垂直投影与海底交线的倾角关系式，结果见式 (2)。其次基于此关系式子，求得测线垂直投影与海底交线的倾角 γ_i ，将各个方向测线的条带覆盖宽度及相邻之间重叠率问题，转化问题一测线垂面上条带覆盖宽度关系，利用题目一建立的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率计算模型，求得各个方向测线条带覆盖宽度及相邻之间重叠率。

针对问题三，对于初始位置不定的测线，首先

针对问题四，

关键字： 局部最优调整 多波束测深 测线规划 正弦定理 几何关系 平面几何

一、问题重述

1.1 问题背景

单波束测深过程中采取单点连续测量方法，只能测出沿航迹的数据，而在海底平坦的海域内，多波束测深的方法同时发射和接收多个声波束，能够测量出以测量船测线为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。在问题中，海底地形相对平坦，多波束测深条带的覆盖宽度 \square 随换能器开角 \square 和水深 \square 的变化而变化，测线相互平行的条件下，则相邻条带之间的重叠率定义为 $\square=1-\square/\square$ ，且为了减少数据冗余，重叠率应在 10%~20%。研究多波束测线对测量海底地形具有重要意义。

1.2 问题要求

基于上述背景，要求建立数学模型解决如下问题：

问题一，若测线方向垂直于海底坡面的法向，已知海底坡度、换能器开角和海域中心处海水深度，要求建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型，并计算题目所给指标值。

问题二，在矩形待测海域，测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角不定，要求建立多波束测深覆盖宽度的数学模型，并根据题目数据计算所列位置多波束测深的覆盖宽度。

问题三，在西深东浅，南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，根据题目所给数据设计一组测量长度最短、形成条带可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率在 10%~20%。

问题四，给出南北长 5 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内单波束测量的测深数据，根据题目数据，要求为多波束测量船设计一组覆盖整个海域、重叠率低于 20%、测线长度尽可能短的测线，并计算测线长度、漏测率和重叠率超 20% 部分的总长度。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

该问题本质上是一个平面几何问题，由于已知换能器开角、海域中心点处海水深度、海底坡度和测线距中心点距离，故可通过几何变换和正弦定理得出覆盖宽度及相邻条带之间重叠率计算公式，考虑到海底起伏不平，因此在计算覆盖宽度时需要进一步进行水平分量上的计算。由于问题数据确定，因此每组的解只有一个，利用相邻测线距、换能器开角、坡度数据，根据建立公式进行计算，可以准确计算出所求指标。

2.2 问题二的分析

该问题本质是问题一的变式，核心思路是对不同方向测线，如何将其转化成问题一中平面上多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。考虑到不同方向测线垂面，海底坡度在方向上的分量不同，可以通过几何变换，根据海底坡度大小，求得测线垂直投影与海底交线的倾角，再利用所求倾角和问题数据，通过多波束测深覆盖宽度计算公式算出不同测线方向夹角上，距海域中心点不同距离的覆盖宽度。

2.3 问题三的分析

问题三本质上是一个优化策略问题，需要优化的参数有测线的角度 β 、测线之间的距离 d 或重叠率 η ，由于海域的对称性，为了简化问题，可以在 $0 - \pi/2$ 内建模计算，讨论问题，首先建立测线总长度的计算模型，为了反映出总长度 L 与 η 与 d 之间的关系，同时测线的构造方法也影响着长度的计算，需要在保证不漏测的情况下覆盖尽可能大的范围，在角度相同的情况下，由于测线长度总是先变大，再经历一段不变量，再变小，中位数基本一致，因此需要减少测线的条数，这就需要在保证 η 满足题意的情况下，选取尽可能大的 d 前者我们是可以保证的，即从最浅的地方开始，确定从海域边缘靠近最浅处的出发位置，接下来的路线便由 β 和若干组 d 和 η 决定，在角度相同的情况下，先后采用等间距和等 η 方法进行计算，我们设为方案一和方案二，等间距的情况下，由于深度的增加，重复率将增大，需要在等间距的情况下，改变 η 的值，观察总长度与 η 的变化，同样地，在等重复率的情况下，由于 η 是覆盖宽度 W 和 d 的函数，而 W 又是 d 的累加和的线性函数，最终可以得到 $i - 1$ 关于 η 的函数，用同样的方法计算长度，改变 η 的值，观察条数、 d 值，可以找到 d 在 η 一定的情况下的变化规律。 d 和 η 可以相互表示，所以最终需要进行优化的参数是 β 和 d 或者 η ，总长度是评判标准。

2.4 问题四的分析

该问题本质上是综上所述，四个问题的分析思路可表示如下：

三、 模型假设

3.1 假设海域上无风浪

测量船只不受波浪影响，在海域上水平航行距离为实际距离。

3.2 假设海域开阔

海域开阔，测线轨迹恒为直线。

四、符号说明

对在模型建立求解过程中用到的一些符号进行说明

符号	意义	单位
D	海水深度	m
W	测线宽度	m
η	相邻条带之间重叠率	-
$\tan \gamma$	测线方向坡面坡度	-
$\tan \gamma'$	垂直测线方向坡面坡度	-
d	测线间距离	m
d_c	离海域中心距离	m
$\tan \gamma_0$	选定了 β 时的 $\tan \gamma'$	-
η_i	第 i 条测线与前一条之间重叠率	-
a_1, b_1	计算 W 时提取出的常数	-
d_I	出发点距离	m
d_{II}	第二段开始时距离	m
d_{III}, d_{IV}	第三段开始时距离（两边同时考虑）	m
n	测线条数	-
L	测线长度	m

五、模型的建立和求解

5.1 公式粘贴

问题一

$$D = 70 - d_c \tan(\alpha)$$

$$\frac{l_{i1}}{\sin 60^\circ} = \frac{D}{\sin 28.5^\circ}$$

$$\frac{l_{i2}}{\sin 60^\circ} = \frac{D}{\sin 31.5^\circ}$$

$$W = (l_{i1} + l_{i2}) \cdot \cos \alpha$$

$$\eta = 1 - \frac{d \cdot \cos \alpha}{2 \cdot W \cdot \sin 148.5^\circ}$$

第二问

$$\tan \gamma = |\tan \alpha \cdot \cos (180^\circ - \beta)|$$

$$\tan \gamma' = |\tan \alpha \cdot \sin (180^\circ - \beta)|$$

$$D = \begin{cases} 120 - 1852 \cdot d_c \tan \gamma, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ 120 + 1852 \cdot d_c \tan \gamma, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\frac{l_{i1}}{\sin 60^\circ} = \frac{D}{\sin (30 - \gamma')}$$

$$\frac{l_{i2}}{\sin 60^\circ} = \frac{D}{\sin (30 + \gamma')}$$

$$W = (l_{i1} + l_{i2}) \cos \gamma'$$

$$\eta = 1 - \frac{d \cdot \cos \gamma'}{2W \cdot \sin (150 - \gamma')}$$

第三问

$$\Gamma(\beta) = \sin 60^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin (30^\circ - \arctan |\tan \alpha \sin (180^\circ - \beta)|)} + \frac{1}{\sin (30^\circ + \arctan |\tan \alpha \sin (180^\circ - \beta)|)} \right)$$

$$D_{\min} = D_0 = D_c - \sqrt{5} \cdot 1852 \cdot \left| \tan \alpha \cdot \cos \left(\arctan \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$D_{\max} = D_c + \sqrt{5} \cdot 1852 \cdot \left| \tan \alpha \cdot \cos \left(\arctan \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$\tan \gamma_0 = |\tan \alpha \cdot \sin (180^\circ - \beta)|$$

$$D_1 = D_0 + \sqrt{3} D_0 \cdot \tan \gamma_0$$

$$W_1 = D_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$D_2 = D_1 + d \cdot \tan \gamma_0$$

$$W_2 = D_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$D_i = D_1 + (i - 1) \cdot d \cdot \tan \gamma_0, i = 2, 3, 4, \dots$$

$$W_i = D_i \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$W_i = (D_1 + (i - 1) \cdot d \cdot \tan \gamma_0) \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$a_1 = \tan \gamma_0 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$b_1 = D_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin (\gamma_0 + 30^\circ)} + \frac{1}{\sin (30^\circ - \gamma_0)} \right)$$

$$\eta_i = 1 - \frac{d \cos \gamma_0}{2(a_1 \cdot (i-1) \cdot d + b_1) \cdot \sin(150 - \gamma_0)}, i = 2, 3, 4, \dots$$

$$\eta_1 \geq 0.1, \eta_n \leq 0.2$$

$$d_I = \frac{\sqrt{3}D_0}{|\cos \beta|}$$

$$n_I = \lfloor \frac{2 \times 1852 - d_I}{d / |\cos \beta|} \rfloor + 1$$

$$l_1 = \frac{d_I}{|\sin \beta|} = \frac{\sqrt{3}D_0}{|\sin \beta| \cdot |\cos \beta|}$$

$$\Delta l_I = d \cdot (|\tan \beta| + |\cot \beta|)$$

$$L_I = \sum_{i=1}^{n_I} l_i = n_I \cdot l_1 + \frac{n_I \cdot (n_I - 1)}{2} \cdot \Delta l_I$$

$$L_I = \frac{(2\sqrt{3}D_0 + (n_I - 1) \cdot d) n_I}{|\sin(2\beta)|}$$

$$d_{II} = 4 \times 1852 - \frac{\sqrt{3}D_0}{|\sin \beta|} - n_I \cdot \frac{d}{|\sin \beta|}$$

$$d_{II} = 2 \times 1852 - \frac{\sqrt{3}D_0}{|\cos \beta|} - n_I \cdot \frac{d}{|\cos \beta|}$$

$$n_{II} = \lfloor \frac{d_{II}}{d / |\sin \beta|} \rfloor + 1$$

$$n_{II} = \lfloor \frac{d_{II}}{d / |\cos \beta|} \rfloor + 1$$

$$L_{II} = n_{II} \cdot \frac{2 \times 1852}{|\sin \beta|}$$

$$L_{II} = n_{II} \cdot \frac{4 \times 1852}{|\cos \beta|}$$

$$d_{III} = |\cot \beta| \cdot \left(n_{II} \cdot \frac{d}{|\sin \beta|} - d_{II} \right)$$

$$d_{III} = |\tan \beta| \cdot \left(n_{II} \cdot \frac{d}{|\cos \beta|} - d_{II} \right)$$

$$n_{III} = \lfloor \frac{2 \times 1852 - d_{III}}{d / |\cos \beta|} \rfloor + 1$$

$$n_{III} = \lfloor \frac{4 \times 1852 - d_{III}}{d / |\sin \beta|} \rfloor + 1$$

$$\begin{aligned}
l_{n_I+n_{II}+1} &= \frac{2 \times 1852 - d_{III}}{|\sin \beta|} \\
l_{n_I+n_{II}+1} &= \frac{2 \times 1852 - d_{III}}{|\sin \beta|} \\
\Delta l_{III} &= -d \cdot (|\tan \beta| + |\cot \beta|) \\
l_{n_I+n_{II}+i} &= l_{n_I+n_{II}+1} + (i-1) \cdot \Delta l_{III} \\
L_{III} &= n_{III} \cdot l_{n_I+n_{II}+1} + \frac{n_{III} \cdot (n_{III} - 1)}{2} \cdot \Delta l_{III} \\
n_{III} &= \begin{cases} n_{III}, 2 \times 1852 - d_{III} - (n_{III} - 1) \cdot \frac{d}{|\cos \beta|} < \frac{\sqrt{3}D_{\max}}{\cos \beta} \\ n_{III} + 1, else \end{cases} \\
d_i &= \frac{2 \left(a_1 \cdot b_1 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} d_k \right) \sin(150^\circ - \gamma_0)}{\cos \gamma_0 - \sin(150^\circ - \gamma_0) \cdot 2(1 - \eta_{i+1}) \cdot a_1}, i = 2, 3, 4, \dots \\
d_1 &= \frac{(1 - \eta_2) \cdot 2(a_1 \cdot (i-1) \cdot d + b_1) \cdot \sin(150 - \gamma_0)}{\cos \gamma_0} \\
\eta_i &= 1 - \frac{d_{i-1} \cos \gamma_0}{2 \left(a_1 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} d_k + b_1 \right) \cdot \sin(150 - \gamma_0)}, i = 2, 3, 4, \dots \\
n_{\perp} &= \left\lfloor \frac{4 \times 1852 - \sqrt{3}D_{\min}}{d} \right\rfloor + 1 \\
n_{\perp} &= \begin{cases} n_{\perp}, 4 \times 1852 - \sqrt{3}D_{\min} - n_{\perp} \cdot d < \sqrt{3}D_{\max} \\ n_{\perp} + 1, else \end{cases} \\
L &= 2 \times 1852 n_{\perp}
\end{aligned}$$

5.2 问题一：多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型

根据题意将该问题分为两个步骤。根据问题 1 的示意图，先建立出距离海域中心点不同距离与海水深度 D 的表达式，再通过几何变换建立海底覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。

5.2.1 距离海域中心点不同距离与海水深度的表达式的建立

5.2.2 覆盖宽度模型及相邻条带之间重叠率模型的建立

5.2.3 覆盖宽度模型及相邻条带之间重叠率模型的求解

5.3 问题二：对不同方向测线建立覆盖宽度及重叠率的数学模型

问题一考虑的是测线方向与坡面的法向量在水平面上投影夹角为 90° 的情况，但是真实情况往往是不同的，因此需要转化到对应坡度上进行等效计算，继而获得目标测量船的覆盖宽度。等效坡度的转化可以由立体几何知识知道

5.3.1 测线垂直投影与海底交线的倾角求取

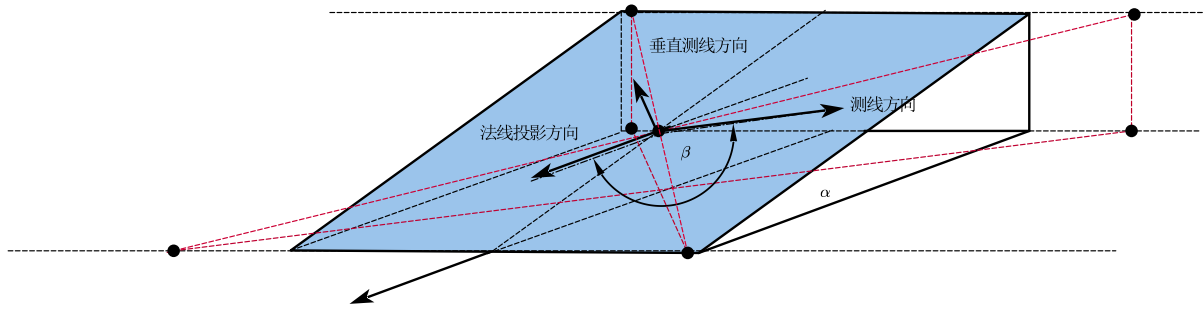


图 1 立体海床图

如图1所示，对测线垂直投影与海底交线的倾角进行求取，需要在立体空间中进行角度的转换, 通过测线的方向和斜坡的角度可以确定对应斜坡的斜率

$$\tan \gamma = |\tan \alpha \cdot \cos (180^\circ - \beta)|$$

利用诱导公式可以求得与测线垂直方向的斜率

$$\tan \gamma' = |\tan \alpha \cdot \sin (180^\circ - \beta)|$$

5.3.2 代入问题一的覆盖宽度及重叠率的数学模型模型并求解

再根据第一问已经知道的结论，通过 $\tan \gamma$ 的值即可计算 W ，这里也是使用正弦定理进行计算然后根据正弦定理列式求解

$$\begin{aligned} \frac{l_{i1}}{\sin 60^\circ} &= \frac{D}{\sin (30 - \gamma')} \\ \frac{l_{i2}}{\sin 60^\circ} &= \frac{D}{\sin (30 + \gamma')} \\ W &= (l_{i1} + l_{i2}) \cos \gamma' \end{aligned}$$

代入数据可以得到结果如下：

5.4 问题三：

首先将问题简化，

415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938
416.1201958	380.4461266	344.7720574	309.0979883	273.4239191	237.7498499	202.0757807
416.54908	366.0463293	315.5435786	265.0408279	214.5380771	164.0353264	113.5325757
416.1201958	380.4461266	344.7720574	309.0979883	273.4239191	237.7498499	202.0757807
415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938	415.6921938
416.1201958	380.4461266	344.7720574	309.0979883	273.4239191	237.7498499	202.0757807
416.54908	366.0463293	315.5435786	265.0408279	214.5380771	164.0353264	113.5325757
416.1201958	380.4461266	344.7720574	309.0979883	273.4239191	237.7498499	202.0757807

5.5 问题四：

六、模型的分析与检验

七、模型的评价、改进和推广

7.1 模型的优点

模型充分考虑测线方向和与初始出发点距离。用相邻条带之间重叠率作为约束条件，对两个变量进行模型调整。

利用遗传算法，在多组测线方向和与出发点距离中进行遗传交叉迭代，最终获得局部最优的一组测线方向和初始出发点距离

7.2 模型的缺点

模型假设初发点为最浅边，模型调整中只能达到局部最优解。

7.3 模型的推广

八、参考文献

- Mac 下可以使用 MacTeX
- Linux 下可以使用 T_EXLive ；
- windows 下可以使用 T_EXLive 或者 MikTeX ；

具体安装可以参考 Install-Lat_EX-Guide-zh-cn 或者其它靠谱的文章。另外可以安装一个易用的编辑器，例如 T_EXstudio 。

使用该模板前，请阅读模板的使用说明文档。下面给出模板使用的大概样式。

```
\documentclass{cumcmthesis}
%\documentclass[withoutpreface,bwprint]{cumcmthesis} %去掉封面与编号页

\title{论文题目}
\tihao{A} % 题号
\baominghao{4321} % 报名号
\schoolname{你的大学}
\membera{成员A}
\memberb{成员B}
\memberc{成员C}
\supervisor{指导老师}
\yearinput{2017} % 年
\monthinput{08} % 月
\dayinput{22} % 日

\begin{document}
  \maketitle
  \begin{abstract}
    摘要的具体内容。
    \keywords{关键词1\quad 关键词2\quad 关键词3}
  \end{abstract}
  \tableofcontents
  \section{问题重述}
  \subsection{问题的提出}
  \section{模型的假设}
  \section{符号说明}
  \begin{center}
    \begin{tabular}{cc}
      \hline
      \makebox[0.3\textwidth][c]{符号} & \makebox[0.4\textwidth][c]{意义} \\ \hline
      D & 木条宽度 (cm) \\ \hline
    \end{tabular}
  \end{center}
  \end{center}
  \section{问题分析}
  \section{总结}
  \begin{thebibliography}{9}%宽度9
    \bibitem{bib:one} ....
  \end{thebibliography}
  \begin{appendices}
    附录的内容。
  \end{appendices}
\end{document}
```

根据要求，电子版论文提交时需去掉封面和编号页。可以加上 `withoutpreface` 选项来实现，即：

```
\documentclass[withoutpreface]{cumcmthesis}
```

这样就能实现了。打印的时候有超链接的地方不需要彩色，可以加上 `bwprint` 选项。

另外目录也是不需要的，将 `\tableofcontents` 注释或删除，目录就不会出现了。

团队的信息填入指定的位置，并且确保信息的正确性，以免因此白忙一场。

编译记得使用 `xelatex`，而不是用 `pdflatex`。在命令行编译的可以按如下方式编译：

```
xelatex example
```

或者使用 `latexmk` 来编译，更推荐这种方式。

```
latexmk -xelatex example
```

下面给出写作与排版上的一些建议。

九、图片

建模中不可避免要插入图片。图片可以分为矢量图与位图。位图推荐使用 `jpg`, `png` 这两种格式，避免使用 `bmp` 这类图片，容易出现图片插入失败这样情况的发生。矢量图一般有 `pdf`, `eps`，推荐使用 `pdf` 格式的图片，尽量不要使用 `eps` 图片，理由相同。

注意图片的命名，避免使用中文来命名图片，可以用英文与数字的组合来命名图片。避免使用 1, 2, 3 这样顺序的图片命名方式。图片多了，自己都不清楚那张图是什么了，命名尽量让它有意义。下面是一个插图的示例代码。

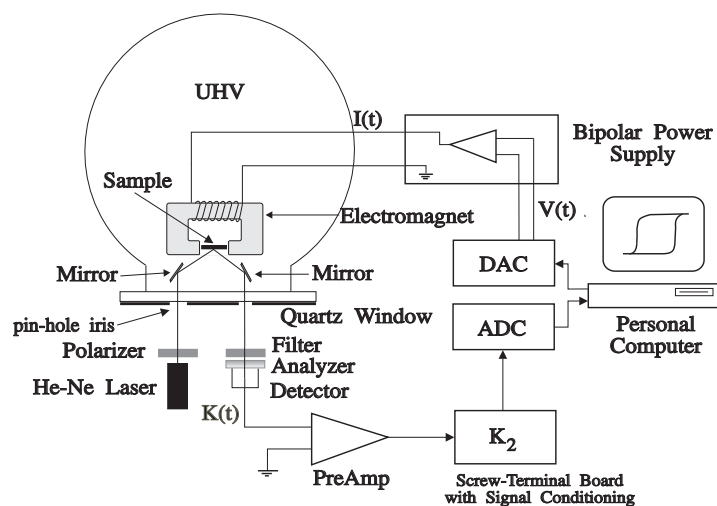


图 2 电路图

注意 `figure` 环境是一个浮动体环境，图片的最终位置可能会跑动。`[!h]` 中的 `h` 是

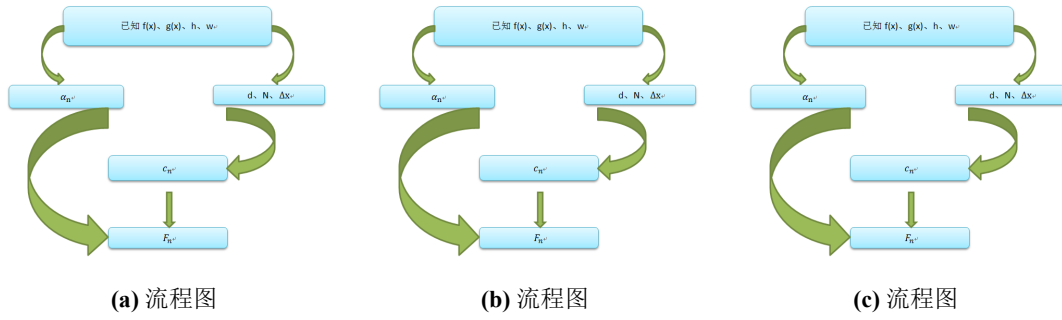


图 3 多图并排示例

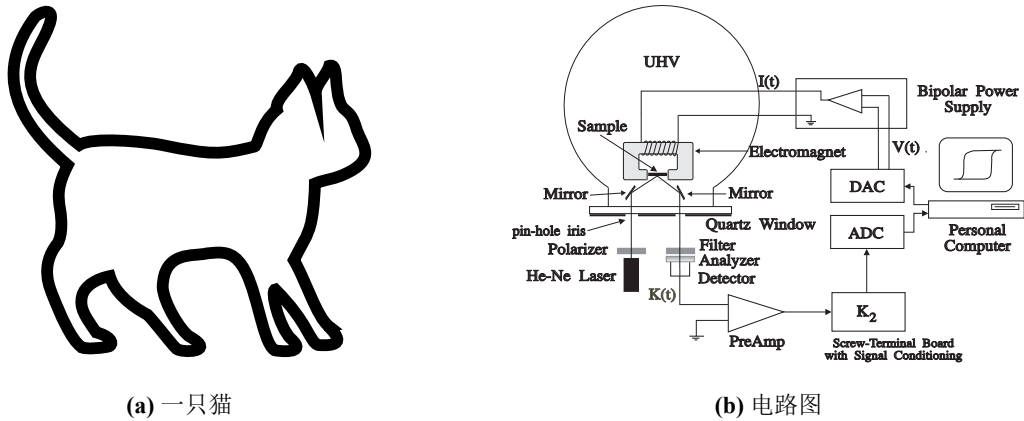


图 4 多图并排示例

here 的意思，! 表示忽略一些浮动体的严格规则。另外里面还可以加上 btp 选项，它们分别是 bottom, top, page 的意思。只要这几个参数在花括号里面，作用是不分先后顺序的。page 在这里表示浮动页。

`\label{fig:circuit-diagram}` 是一个标签，供交叉引用使用的。例如引用图片 `\cref{fig:circuit-diagram}` 的实际效果是图 2。图片是自动编号的，比起手动编号，它更加高效。`\cref{label}` 由 `cleveref` 宏包提供，比普通的 `\ref{label}` 更加自动化。label 要确保唯一，命名方式推荐用图片的命名方式。

图片并排的需求解决方式多种多样，下面用 `minipage` 环境来展示一个简单的例子。注意，以下例子用到了 `subcaption` 命令，需要加载 `subcaption` 宏包。

这相当于整体是一张大图片，大图片引用是图 3，子图引用别分是图 3a、图 3b、图 3c。

如果原本两张图片的高度不同，但是希望它们缩放后等高的排在同一行，参考这个例子：

十、符号说明

符号	意义
D	木条宽度 (cm)

十一、绘制普通三线表格

表格应具有三线表格式，因此常用 booktabs 宏包，其标准格式如表 1 所示。

表 1 标准三线表格

$D(\text{in})$	$P_u(\text{lbs})$	$u_u(\text{in})$	β	$G_f(\text{psi}\cdot\text{in})$
5	269.8	0.000674	1.79	0.04089
10	421.0	0.001035	3.59	0.04089
20	640.2	0.001565	7.18	0.04089

其绘制表格的代码及其说明如下。

```
\begin{table}[!htbp]
  \caption[标签名]{中文标题}
  \begin{tabular}{cc...c}
    \toprule[1.5pt]
    表头第1个格 & 表头第2个格 & ... & 表头第n个格 \\
    \midrule[1pt]
    表中数据(1,1) & 表中数据(1,2) & ... & 表中数据(1,n) \\
    表中数据(2,1) & 表中数据(2,2) & ... & 表中数据(2,n) \\
    ..... \\
    表中数据(m,1) & 表中数据(m,2) & ... & 表中数据(m,n) \\
    \bottomrule[1.5pt]
  \end{tabular}
\end{table}
```

table 环境是一个将表格嵌入文本的浮动环境。tabular 环境的必选参数由每列对应一个格式字符所组成：c 表示居中，l 表示左对齐，r 表示右对齐，其总个数应与表的列数相同。此外，@{文本}可以出现在任意两个上述的列格式之间，其中的文本将被插入每一行的同一位置。表格的各行以\\分隔，同一行的各列则以 & 分隔。\\toprule、\\midrule 和 \\bottomrule 三个命令是由 booktabs 宏包提供的，其中 \\toprule 和 \\bottomrule 分别用来绘制表格的第一条（表格最顶部）和第三条（表格最底部）水平线，\\midrule 用

来绘制第二条（表头之下）水平线，且第一条和第三条水平线的线宽为 1.5pt，第二条水平线的线宽为 1pt。引用方法与图片的相同。

十二、公式

数学建模必然涉及不少数学公式的使用。下面简单介绍一个可能用得上的数学环境。

首先是行内公式，例如 θ 是角度。行内公式使用 `$` `$` 包裹。

行间公式不需要编号的可以使用 `\[` `\]` 包裹，例如

$$E = mc^2$$

其中 E 是能量， m 是质量， c 是光速。

如果希望某个公式带编号，并且在后文中引用可以参考下面的写法：

$$E = mc^2 \tag{1}$$

式 (1) 是质能方程。

多行公式有时候希望能够在特定的位置对齐，以下是其中一种处理方法。

$$P = UI \tag{2}$$

$$= I^2 R \tag{3}$$

`&` 是对齐的位置，`&` 可以有多个，但是每行的个数要相同。

矩阵的输入也不难。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

分段函数这些可以用 `case` 环境，但是它要放在数学环境里面。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ 为无理数,} \\ 1 & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

在数学环境里面，字体用的是数学字体，一般与正文字体不同。假如要公式里面有个别文字，则需要把这部分放在 `text` 环境里面，即 `\text{文本环境}`。

公式中个别需要加粗的字母可以用 `$\bm{math symbol}$`。如 $\alpha a \alpha a$ 。

以上仅简单介绍了基础的使用，对于更复杂的需求，可以阅读相关的宏包手册，如 `amsmath`。

希腊字母这些如果不熟悉，可以去查找符号文件 `symbols-a4.pdf`，也可以去 `detexify` 网站手写识别。另外还有数学公式识别软件 `mathpix`。

下面简单介绍一下定理、证明等环境的使用。

定义 1 定义环境

定义 1 除了告诉你怎么使用这个环境以外，没有什么其它的意义。

除了 `definition` 环境，还可以使用 `theorem`、`lemma`、`corollary`、`assumption`、`conjecture`、`axiom`、`principle`、`problem`、`example`、`proof`、`solution` 这些环境，根据论文的实际需求合理使用。

定理 1 这是一个定理。

由定理 1 我们知道了定理环境的使用。

引理 1 这是一个引理。

由引理 1 我们知道了引理环境的使用。

推论 1 这是一个推论。

由推论 1 我们知道了推论环境的使用。

假设 1 这是一个假设。

由假设 1 我们知道了假设环境的使用。

猜想 1 这是一个猜想。

由猜想 1 我们知道了猜想环境的使用。

公理 1 这是一个公理。

由公理 1 我们知道了公理环境的使用。

定律 1 这是一个定律。

由定律 1 我们知道了定律环境的使用。

问题 1 这是一个问题。

由问题 1 我们知道了问题环境的使用。

例 1 这是一个例子。

由例 1 我们知道了例子环境的使用。

证明 1 这是一个证明。

由证明 1 我们知道了证明环境的使用。

解 1 这是一个解。

由解 1 我们知道了解环境的使用。

十三、其它小功能

13.1 脚注

利用 `\footnote{具体内容}` 可以生成脚注¹。

13.2 无序列表与有序列表

无序列表是这样的：

- one
- two
- ...

有序列表是这样子的：

1. one
2. two
3. ...

13.3 字体加粗与斜体

如果想强调部分内容,可以使用加粗的手段来实现。加粗字体可以用 `\textbf{加粗}` 来实现。例如：**这是加粗的字体。This is bold fonts**。

中文字体没有斜体设计，但是英文字体有。斜体 *Italics*。

¹脚注可以补充说明一些东西

十四、参考文献与引用

参考文献 [1, text1] 对于一篇正式的论文来说是 [2, text2] 必不可少的，在建模中重要的参考文献当然应该列出。 \LaTeX 在这方面的功能也是十分强大的，下面介绍一个比较简单的参考文献制作方法。有兴趣的可以学习 `bibtex` 或 `biblatex` 的使用。

\LaTeX 的入门书籍可以看《 \LaTeX 入门》[1]。这是一个简单的引用，用 `\cite{bibkey}` 来完成。要引用成功，当然要维护好 `bibitem` 了。下面是个简单的例子。

参考文献

[1] 刘海洋. \LaTeX 入门[J]. 电子工业出版社, 北京, 2013.

[2] 全国大学生数学建模竞赛论文格式规范 (2020 年 8 月 25 日修改).

[1] <https://www.latexstudio.net>

附录 A 模板所用的宏包

表 2 宏包罗列

模板中已经加载的宏包				
amsbsy	amsfonts	amsgen	amsmath	amsopn
amssymb	amstext	appendix	array	atbegshi
atveryend	auxhook	bigdelim	bigintcalc	bigstrut
bitset	bm	booktabs	calc	caption
caption3	CJKfntef	cprotect	ctex	ctexhook
ctexpatch	enumitem	etexcmds	etoolbox	everysel
expl3	fix-cm	fontenc	fontspec	fontspec-xetex
geometry	getttitlestring	graphics	graphicx	hobsub
hobsub-generic	hobsub-hyperref	hopatch	hxdetex	hycolor
hyperref	ifluatex	ifpdf	ifthen	ifvtex
ifxdetex	indentfirst	inwarerr	intcalc	keyval
kvdefinekeys	kvoptions	kvsetkeys	l3keys2e	letltxmacro
listings	longtable	lstmisc	ltxcaption	ltxcmds
multirow	nameref	pdfescape	pdftexcmds	refcount
rerunfilecheck	stringenc	suffix	titletoc	tocloft
trig	ulem	uniquecounter	url	xcolor
xcolor-patch	xeCJK	xeCJKfntef	xeCJK-listings	xparse
xtemplate	zhnumber			

以上宏包都已经加载过了，不要重复加载它们。

附录 B 排队算法—matlab 源程序

```

kk=2; [mdd,ndd]=size(dd);
while ~isempty(V)
    [tmpd,j]=min(W(i,V)); tmpj=V(j);
    for k=2:ndd
        [tmp1,jj]=min(dd(1,k)+W(dd(2,k),V));
        tmp2=V(jj); tt(k-1,:)= [tmp1,tmp2,jj];
    end
    tmp=[tmpd,tmpj,j;tt]; [tmp3,tmp4]=min(tmp(:,1));
    if tmp3==tmpd, ss(1:2, kk)=[i;tmp(tmp4,2)];
    else, tmp5=find(ss(:,tmp4)~=0); tmp6=length(tmp5);
    if dd(2,tmp4)==ss(tmp6,tmp4)
        ss(1:tmp6+1, kk)=[ss(tmp5,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    else, ss(1:3, kk)=[i;dd(2,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    end; end
    dd=[dd, [tmp3;tmp(tmp4,2)]]; V(tmp(tmp4,3))=[];
    [mdd,ndd]=size(dd); kk=kk+1;
end; S=ss; D=dd(1,:);

```

附录 C 规划解决程序—lingo 源代码

```

kk=2;
[mdd,ndd]=size(dd);
while ~isempty(V)
    [tmpd,j]=min(W(i,V)); tmpj=V(j);
    for k=2:ndd
        [tmp1,jj]=min(dd(1,k)+W(dd(2,k),V));
        tmp2=V(jj); tt(k-1,:)= [tmp1,tmp2,jj];
    end
    tmp=[tmpd,tmpj,j;tt]; [tmp3,tmp4]=min(tmp(:,1));
    if tmp3==tmpd, ss(1:2, kk)=[i;tmp(tmp4,2)];
    else, tmp5=find(ss(:,tmp4)~=0); tmp6=length(tmp5);
    if dd(2,tmp4)==ss(tmp6,tmp4)
        ss(1:tmp6+1, kk)=[ss(tmp5,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    else, ss(1:3, kk)=[i;dd(2,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    end;
end
    dd=[dd, [tmp3;tmp(tmp4,2)]]; V(tmp(tmp4,3))=[];
    [mdd,ndd]=size(dd);
    kk=kk+1;
end;
S=ss;
D=dd(1,:);

```