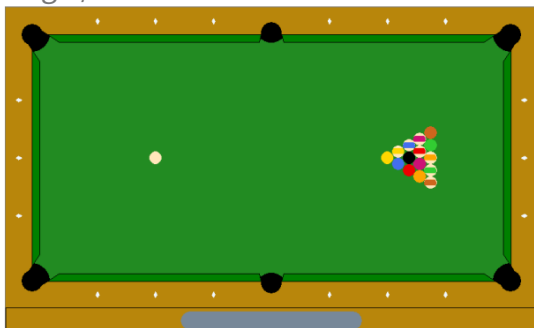


1 Einführung

1.1 Aufgabenstellung

Aufgabe: Erstellen Sie ein initiales Spielfeld wie angegeben. Durch Mouseevents soll zu Spielbeginn die Stoßrichtung und Geschwindigkeit der weißen Kugel vorgegeben werden. Dazu ist mit der Mouse ein Queue anzutragen. Im weiteren Spielverlauf sollen alle Kugeln wie beim klassischen Poolbillard per Queue bewegt werden. Nutzen Sie die in der Vorlesung gegebenen Grundlagen zur Darstellung und Simulation von Stoßereignissen. Beachten Sie die unterschiedlichen Bewegungsgleichungen für Kugel/Kugel bzw. Kugel/Banden-Kontakt. Zusätzlich soll



Billiard ist ein Geschicklichkeitsspiel bei dem Kugeln mit Hilfe eines Stabes, der Queue genannt wird, in Löcher gestossen werden. Dabei werden die 15 farbigen Kugeln nicht direkt mit dem Stab angespielt. Vielmehr spielt man mit dem Queue den weißen Spielball, der dann die anderen Kugeln so anstossen muss, dass diese in die Löcher fallen. Bei der von uns betrachteten Variante dem Poolbillard muss

die schwarze 8 zuletzt eingelocht werden.

1.2 Stoss

Der wichtigste physikalische Vorgang bei der Simulation eines Billardspiels ist der Stoss. Dieser ist das Zusammentreffen zwischen zwei Körpern, bei dem die Kinetische Energie konstant bleibt. Bei der Kollision wird die kinetische Energie zunächst in potentielle Energie umgewandelt. Dies geschieht durch eine Verformung der Körper, welche die gespeicherte Energie dann wieder als kinetische Energie abgeben.

Grundsätzlich lassen sich Stossvorgänge in elastisch und inelastisch einteilen. Beim elastischen Stoss wird die gesamte kinetische Energie bei der Verformung der Körper in potentielle Energie umgewandelt. Beim inelastischen Stoss wird hingegen ein Teil der Energie in andere Energieformen konvertiert – vor allem Wärme, Schall und die plastische Verformung von einem der Körper.

Im makroskopischen Bereich ist der elastische Stoss nur als Idealisierung zu betrachten, da immer Wärme erzeugt wird. Wirklich elastische Kollisionen sind nur auf der Ebene von Atomen oder Quantenobjekten möglich. Zur Vereinfachung kann man den Verlust von kinetischer Energie vernachlässigen, unter der Voraussetzung, dass er gegenüber der Bewegungsenergie sehr klein ist. Bei der Kollision von zwei Billardkugeln – welche oft als Beispiel für den elastischen Stoss verwendet wird

ist dies der Fall (Cross 2014).

Im Gegensatz zu den Kugeln, welche aus Phenoplast hergestellt werden, besteht der Bandenspiegel um den Tisch herum aus vulkanisierten Elastomeren, welche dazu dienen den Energieverlust des Balles gering zu halten. Je nach den gewählten Materialien unterscheidet sich das Effetverhalten des Balles. In unserem Fall gehen wir von einer harten und dichten Bande aus. Der Stoss kann so als rein elastisch betrachtet werden.

1.3 Rollreibung

Das zweite physikalische Phänomen, welches beim Billardtisch auftaucht ist die Rollreibung der Kugel auf dem Tisch beziehungsweise Tuch. Die Rollreibung lässt sich durch die nachfolgende Gleichung bestimmen.

$$F_R = c_R \cdot F_N$$

F_R : Rollwiderstand

F_N : Normalkraft

c_R : Rollwiderstandskoeffizient

Die Rollreibung entsteht durch die Verformung des Untergrundes durch das rollende Objekt, sowie auch durch die Verformung des Objektes selbst. Je weicher der Untergrund oder Objekt desto größer die Verformung und dementsprechend die Reibung.

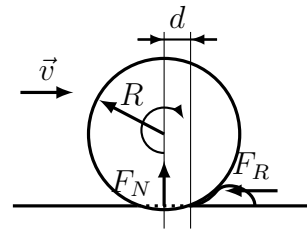


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Kräfte und Verformungen beim Rollvorgang.

Die Verformung des Untergrundes besteht aus einem Einsinken des Körpers und einer Anhäufung von Material vor dem Körper selbst. Dies ist schematisch in der obigen Skizze dargestellt. Ein weicherer Untergrund führt zu mehr Einsinken und damit auch zu mehr Material in der Bahn des Rollkörpers. Wenn die Tiefe des Einsinkens bekannt ist, lässt sich hieraus auch der Rollwiderstandskoeffizient zu $c_R = \frac{d}{R}$ bestimmen. Hierbei ist d die Strecke zwischen der Rotationsachse des Rollkörpers und der Stelle, an der sich dessen Außenradius mit der weitergedachten Höhe des Untergrundes schneidet. Da beim Billard entscheidend ist, dass die Rollreibung möglichst gering ist, werden Billardtische in der Regel aus Schiefer gefertigt, da dieser Stein besonders spröde ist. Auch Tische mit Holz oder Stahlplatten werden gefertigt. Der Tisch wird dann mit einem schweren Tuch bespannt.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die zur Simulation des

Spiele nötig sind erklärt, so wie die Schritte die Nötig sind um sie in einer numerischen Simulation einzusetzen.

die iterative und diskrete Natur von Computerprogrammen macht es Sinn die aktuelle Position \vec{p} anhand der zuletzt errechneten zu bestimmen.

2.1 Physikalisch

2.1.1 Geradlinige Bewegung

Bevor es überhaupt zu den in der Einleitung angesprochenen Stößen kommen kann, muss zunächst die geradlinige Bewegung der Kugeln realisiert werden. Da die Ausgabe als 2D Grafik erfolgt, ist es naheliegend auch ein 2-Dimensionales Koordinatensystem für die Positionen und die Bewegungen der Kugeln zu wählen. Demnach hat jede Kugeln eine Position, eine Geschwindigkeit und eine Beschleunigung als Eigenschaften.

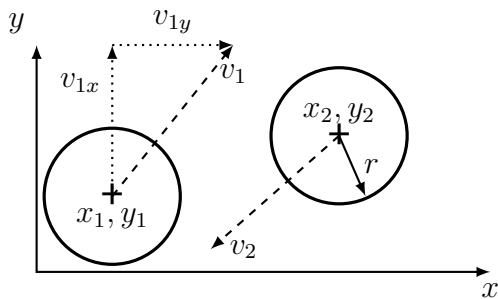


Abbildung 2: Koordinaten und Geschwindigkeiten von Kugeln

Die aktuelle Position der Kugel lässt sich in x, bzw y Richtung lässt sich also durch $x = v * t + x_0$ berechnen. Da in unserem die einzige wirkende Beschleunigung die konstante Rollreibung ist, lässt sich diese einfach als abnehmende Geschwindigkeit darstellen. Durch

$$\vec{p}_t = \vec{p}_{t-1} + \vec{v}_t$$

Hier wird dann noch in jedem Iterationsschritt die Geschwindigkeit um den durch die Rollreibung vorgegebenen Faktor verringert. $\vec{v}_t = \vec{v}_{t-1} \cdot (1 - \mu_R)$.

2.1.2 Kollision mit der Bande

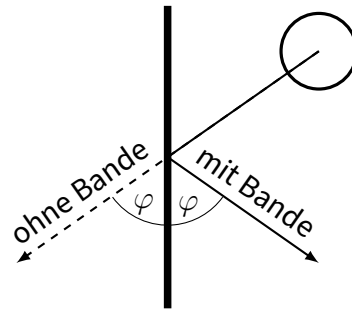


Abbildung 3: Kollision mit der Bande

Das nächste physikalische Problem ist die Kollision von Kugeln und Bande. Hier handelt es sich wie eingangs erwähnt um einen elastischen Stoß. Da die Bande unbeweglich und gerade ist gilt, dass sich nur der Anteil der Kraft im Vorzeichen ändert, welcher Senkrecht zur Wand steht. Demnach wäre die Geschwindigkeit nach der Kollision in

$$v_0 = \begin{bmatrix} -v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{bmatrix}$$

2.2 Informatik

Nachdem im vorherigen Kapitel die physikalischen Grundlagen diskutiert wurden die Notwendig sind, um ein zweidimensionales Billardspiel zu Modellieren, soll es nun um einige Ideen gehen die zur Praktischen Umsetzung notwendig sind.

2.2.1 Representation der Kugeln

In diesem Fall ist es recht naheliegend eine Klasse für die Kugeln zu setzen, wobei die Klasse folgende Attribute und Methoden hat.

Kugel	
n	: int
r	: double
pos	: TVektor
next	: TVektor
v	: TVektor
inGame	: bool
color	: TColor
init()	: void
move()	: void
draw()	: void

Abbildung 4: Kugelklasse UML-Diagramm

Masse Auffällig ist hier, dass die Kugel, kein Attribut für ihr Masse besitzt. Da angenommen wird, dass alle Kugeln die gleiche Masse besitzen spielt diese bei den Stossereignissen zwischen den Kugeln keine Rolle. Lediglich bei

der beim abbremsen durch die Rollreibung würde das Gewicht eine Rolle spielen. Andererseits kann die Verlangsamung aber auch durch eine simple Konstante abgebildet werden und die Kugeln benötigt somit kein Attribut der Masse.

2.2.2 Kollisionserkennung

Um nun zu erkennen, ob eine Kugel mit einer anderen Kollidiert kann der Hypothenusensatz angewendet werden. Hierzu kann man die Positionen pos von zwei Kugeln subtrahieren und erhält so einen Vektor für den Abstand. Eine Kollision zwischen zwei Kugeln liegt also vor, wenn gilt:

$$r \geq \sqrt{(k1_{pos,x} - k2_{pos,x})^2 + (k1_{pos,y} - k2_{pos,y})^2}$$

Hierbei bezeichnen k1 und k2 jeweils eine Instanz der Kugel-Klasse.

Die Erkennung von Kollisionen mit der Bande gestaltet sich rechnerisch noch simpler.

$$r \geq |k_{pos,x} - Bande_x|$$

Allerdings kann es hier zu einem Optische störenden Phänomen kommen, bei dem die Kugel für einen Frame außerhalb der Spielfeldes gezeichnet wird. Da die Berechnung für die einzelnen Frames diskret verläuft, wird erst wieder im nächsten Durchlauf überprüft, ob die Bedingung für die Kollision erfüllt ist. Besonders bei hohen Geschwindigkeiten der Kugel, kann es also dazu kommen, dass diese

merklich außerhalb der Spielgrenzen dargestellt wird.

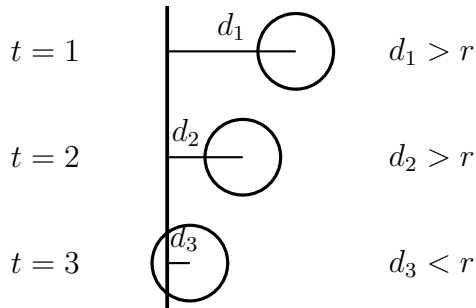


Abbildung 5: Erst für t_3 wird die Kollision erkannt.

Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten dieses Problem zu lösen. Zum einen kann eine Höchstgeschwindigkeit eingeführt werden, um die Bewegung in Pixeln pro Iteration zu verringern. Eine Option ist es die Anzahl an Iterationen zu erhöhen um den selben Effekt zu erreichen. Die Lösung die jedoch nicht nur stochastische Sicherheit bietet ist die kontinuierliche Kollisionskontrolle CCD.

2.2.3 Continuous Collision Detection (CCD)

Um sicherzugehen, dass keine Kugeln außerhalb des Spielfeldes angezeigt werden können wurde an den Rändern eine CCD implementiert. Dabei wird berechnet, ob im kommenden Zeitschritt eine Kollision mit der Bande auftritt, falls dies der Fall ist, wird Position errechnet, welche die Kugel, nach der Richtungsänderung haben wird. Diese Position

wird dann in das Attribut `next` der entsprechenden Kugel gespeichert und im nächsten Zeitschritt als Position der Kugel gesetzt.

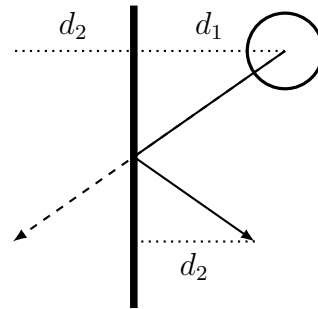


Abbildung 6: CCD Schaubild

Zur Berechnung ist vor allem der Anteil der Zeit wichtig, nach der die Kollision mit der Bande stattfinden würde. Um die kritische Zeit t_c zu erhalten, gilt:

$$t_c = \text{Bande}_x + r - \frac{k_{\text{next},x}}{k_{\text{pos},x} - k_{\text{next},x}}$$

Hier ist t_c der Anteil der Zeit an einem Zeitschritt, nach dem die Kollision auftreten würde, wenn die Kugel die Bahn entlang der gestrichelten Linie in Abbildung 2.5 weiter mit konstanter Geschwindigkeit verfolgt. $k_{\text{next},x}$ ist in diesem Szenario die Hypothetische Position, ohne CCD. Wenn man nun den die t_c kennt kann man die Strecken d_1 und d_2 bestimmen. Hier ergibt sich

$$d_1 = t_c k_{v,x}$$

$$d_2 = (1 - t_c) k_{v,x}$$

$$k_{\text{next},x} = \text{Bande}_x + r + (1 - t_c) k_{v,x} (1 - \mu_R)$$

Der $(1 - \mu_R)$ Term, geht aus der Einbeziehung

der Rollreibung hervor. Da in jedem Zeitschritt die Geschwindigkeit durch die Reibung verringert wird, muss dies auch bei der Berechnung der zukünftigen Positionen einbezogen werden.

Die so erhaltene X-Koordinate wird als Position für die Kugel k im nächsten Zeitschritt gesetzt. Somit übertritt die Kugel niemals die Grenze des Spielfeldes und der oben genannte Darstellungsfehler wird behoben.

3 Erklärung der Graphischen Oberfläche

3.1 Queue

Der Zentralpunkt der Weißkugel wird nur berücksichtigt, damit der Schlag zwischen Billardqueue und Weißkugel vereinfacht wird. Deshalb werden nur die Richtung und die Kraft des Billardqueue im Programm kontrolliert.

Wie in der Abbildung gezeigt, ist es notwendig, dass das Billardqueue rund um die Weißkugel 360° drehen kann. Außerdem muss es erfüllt werden, dass das Billardqueue sich verändert, wenn die Richtung der Zielkugel wechselt wird. Dieses stellt sicher, dass das Billardqueue in der Richtung bewegt wird. Deshalb wird der drehende Winkel des Billardqueue bestimmt, wenn der drehende Winkel der Zielkugel festgelegt wird. Im Folgenden wird das Festlegen des Winkels von der Zielkugel beschrieben.

Grundlegende Änderung der Zielkugel wird in der Abbildung dargestellt. Da es eingestellt wird, dass die Zielkugel der Bewegung der Maus entspricht, werden die Länge und der Winkel der Zielkugel im Gegensatz zur Weißkugel geändert. Die Position der Zielkugel wird bestimmt und danach die Differenzwerte zwischen Weißkugel und Zielkugel werden auch bekommen.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$
$$\alpha = \arccos \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Nach Formel wird der Winkel durch die beiden Differenzwerte berechnet. Aber es ist zu beachten, dass es ein Problem mit $\tan(\alpha)$ bei $\alpha = 90^\circ$ gibt. Wenn α als 90° gleich wird, wird die Ankathete gleich 0. Nach dem Prinzip, dass der Nenner nicht gleich 0 ist, geht das Programm schief. Deswegen wird der Winkel durch Formel 2 berechnet. Die Richtungen des Billardqueue und der Zielkugel können daher eingestellt und berechnet werden.

Die Kraft des Billardqueue wird durch die Buttons in zwei Formen gezeigt, wie in der Abbildung dargestellt.

Wenn das Button "Distanzenkraft" gedrückt wird, wird die Größe der Kraft proportional entsprechend der Distanzen zwischen Weißkugel und Zielkugel geändert. Wenn das Button "Zeitenkraft" gedrückt wird, wird die Größe der Kraft mit der Zeit proportional hin und

her geändert.

Im Programm ist es ersichtlich, dass die Größe der Kraft in eingestellter Umfang durch die rote Balkenänderung intuitiv dargestellt wird. Die niedrigste Grenze wird gestellt, um Gleitreibung zu vermeiden, und die höchste Grenze wird gestellt, um übermäßige Kollision zu vermeiden.

Spieler_Name Wann das entsprechende Button in der Abbildung gedrückt wird, wird die Inputbox angezeigt, um den Name der Spieler, der man nennen möchte, einzugeben. Ansonsten wird der Standardname angezeigt.

Tischplatte Auf der Tischplatte liegen 6 schwarzen Löcher und 16 Kugeln. Die Kugeln sind mit nummern und Farben gekennzeichnet. Die statistische Daten bzw. die Maße und Positionen der Kugeln sind In einem bestimmten Verhältnis standardisiert.

Spielereihe In jeder Runde sollte nur ein Spieler schlagen. Die Stelle des gelben Kugel zeigt den Spieler, der in dieser Runde schlagen sollte. Wenn die Reihe des Spielers gewechselt wird, entsteht der Hinweis „Spieler austauschen“.

Zugehörigkeit Nachdem ein Spieler erst den Kugeln ins Loch geschlägt, wird die Zugehörigkeit bestimmt. In einem Spiel sollte

die bestimmte Zugehörigkeit nicht mehr verändert werden. Der Text auf gelbem Hintergrund zeigt, welche Kugeln(vollfarbe Kuglen oder Halbfarbe Kuglen) die unten gezeigten Spieler schlagen sollten.

Kugeln in löcher Das unter der Spielereihe stehenden Feld zeigt, welche Kuglen in diesem Augenblick in löcher sein, d.h. nicht in dem Game sind.

3.2 Gameover

Wenn ein Spieler den schwarzen Kugel zur falschen Zeit ins Loch geschlagen hat, wird der andere Spieler den Winner. In diesem Moment beendet das Spiel und taucht diesen Hinweis auf.

3.3 Winner

Wenn ein Spieler das Spiel gewinnt, tauscht bald diesen Hinweis auf.

Cross, R. 2014. „Ball collision experiments“. *Physics Education* 50 (1): 52–57. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/50/1/52>.