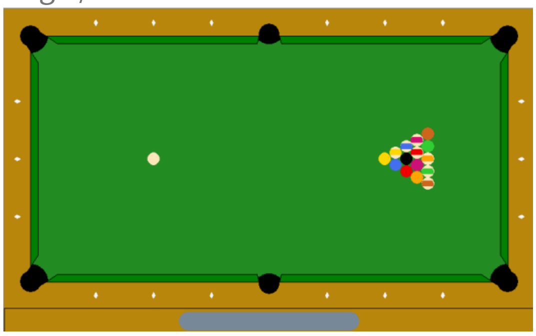
# 1 Einführung

## 1.1 Aufgabenstellung

> Aufgabe: Erstellen Sie ein initiales Spielfeld wie angegeben. Durch Mouseevents soll zu Spielbeginn die Stoßrichtung und Geschwindigkeit der weißen Kugel vorgegeben werden. Dazu ist mit der Mouse ein Queue anzutragen. Im weiteren Spielverlauf sollen alle Kugeln wie beim klassischen Poolbillard per Queue bewegt werden. Nutzen Sie die in der Vorlesung gegebenen Grundlagen zur Darstellung und Simulation von Stoßereignissen. Beachten Sie die unterschiedlichen Bewegungsgleichungen für Kugel/Kugel bzw. Kugel/Banden-Kontakt. Zusätzlich soll
>
> 

Billiard ist ein Geschicklichkeitsspiel bei dem Kugeln mit Hilfe eines Stabes, der Queue genannt wird, in Löcher gestossen werden. Dabei werden die 15 farbigen Kugeln nicht direkt mit dem Stab angespielt. Vielmehr spielt man mit dem Queue den weißen Spielball, der dann die anderen Kugeln so anstossen muss, dass diese in die Löcher fallen. Bei der von uns betrachteten Variante dem Poolbillard muss die schwarze 8 zuletzt eingelocht werden.

## 1.2 Stoss

Der wichtigste physikalische Vorgang bei der Simulation eines Billardspiels ist der Stoss. Dieser ist das Zusammentreffen zwischen zwei Körpern, bei dem die Kinetische Energie konstant bleibt. Bei der Kollision wird die kinetische Energie zunächst in potentielle Energie umgewandelt. Dies geschieht durch eine Verformung der Körper, welche die gespeicherte Energie dann wieder als kinetische Energie abgeben.

Grundsätzlich lassen sich Stossvorgänge in elastisch und inelastisch einteilen. Beim elastischen Stoss wird die gesamte kinetische Energie bei der Verformung der Körper in potentielle Energie umgewandelt. Beim inelastischen Stoss wird hingegen ein Teil der Energie in andere Energieformen konvertiert – vor allem Wärme, Schall und die plastische Verformung von einem der Körper.

Im makroskopischen Bereich ist der elastische Stoss nur als Idealisierung zu betrachten, da immer Wärme erzeugt wird. Wirklich elastische Kollisionen sind nur auf der Ebene von Atomen oder Quantenobjekten möglich. Zur Vereinfachung kann man den Verlust von kinetischer Energie vernachlässigen, unter der Voraussetzung, dass er gegenüber der Bewegungsenergie sehr klein ist. Bei der Kollision von zwei Billardkugeln – welche oft als Beispiel für den elastischen Stoss verwendet wird ist dies der Fall (Cross 2014).

Im gegensatz zu den Kugeln, welche aus Phenoplast hergestellt werden, besteht der Bandenspiegel um den Tisch herum aus vulkanisierten Elastomeren, welche dazu dienen den Energieverlust des Balles gering zu halten. Je nach den gewählten Materialien unterscheidet sich das Effet verhalten des Balles. In unserem Fall gehen wir von einer harten und dichten Bande aus. Der Stoss kann so als rein elastisch betrachtet werden.

### 1.3 Rollreibung

Das zweite physikalische Phänomen, welches beim Billardtisch auftaucht ist die Rollreibung der Kugel auf dem Tisch beziehungsweise Tuch. Die Rollreibung lässt sich durch die nachfolgende Gleichung bestimmen.

$$F_R = c_R \cdot F_N$$

$F_R$ : Rollwiderstand

$F_N$ : Normalkraft

$c_R$ : Rollwiderstandskoeffizient

Die Rollreibung entsteht durch die Verformung des Untergrundes durch das rollende Objekt, sowie an durch die Verformung des Objektes selbst. Je weicher der Untergrund oder Objekt desto größer die Verformung und dementsprechend die Reibung.

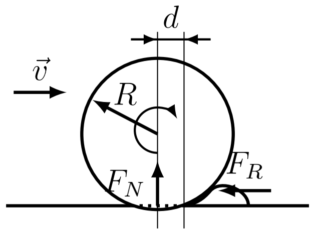



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung der Kräfte und Verformungen beim Rollvorgang.

Die Verformung des Untergrundes besteht aus einem Einsinken des Körpers und einer Anhäufung von Material vor dem Körper selbst. Dies ist Schematisch in der obigen Skizze dargestellt. Ein Weicherer untergrund führt zu mehr Einsinken und damit auch zu mehr Material in der Bahn des Rollkörpers. Wenn die tiefe des Einsinkens bekannt ist lässt sich hieraus auch der Rollwiderstandskoeffizient zu $c_R = \frac{d}{R}$ bestimmen. Hierbei ist $d$ die Strecke zwischen der Rotationsachse des Rollkörpers und der Stelle, an der sich dessen Außenradius mit der weitergedachten Höhe des Untergrundes schneidet. Da beim Billard entscheidend ist, dass die Rollreibung möglichst gering ist, werden Billardtische in der Regel aus Schiefer gefertigt, da dieser Stein besonders spröde ist. Auch Tische mit Holz oder Stahlplatten werden gefertigt. Der Tisch wird dann mit einem Schweren Tuch bespannt

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten die zur Simulation des

Spiels nötig sind erklärt, so wie die Schritte die Nötig sind um sie in einer numerischen Simulation einzusetzen.

## 2.1 Physikalisch

### 2.1.1 Geradlinige Bewegung

Bevor es überhaupt zu den in der Einleitung angesprochenen Stössen kommen kann, muss zunächst die geradlinige Bewegung der Kugeln realisiert werden. Da die Ausgabe als 2D Grafik erfolgt, ist es naheliegend auch ein 2-Dimensionales Koordinatensystem für die Positionen und die Bewegungen der Kugeln zu wählen. Demnach hat jede Kugeln eine Position, eine Geschwindigkeit und eine Beschleunigung als Eigenschaften.

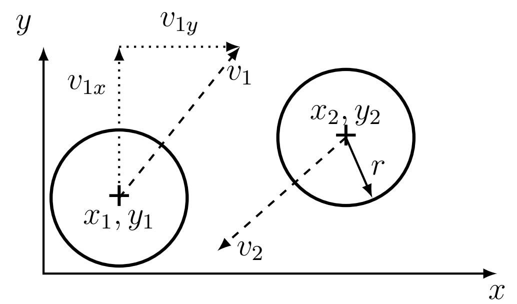



**Abbildung 2:** Koordinaten und Geschwindigkeiten von Kugeln

Die aktuelle Position der Kugel lässt sich in x, bzw y Richtung lässt sich also durch $x = v * t + x_0$ berechnen. Da in unserem die einzige wirkende Beschleunigung die konstante Rollreibung ist, lässt sich diese einfach als abnehmende Geschwindigkeit darstellen. Durch die iterative und diskrete Natur von Computerprogrammen macht es Sinn die aktuelle Position $\vec{p}$ anhand der zuletzt errechneten zu bestimmen.

$$\vec{p}_t = \vec{p}_{t-1} + \vec{v}_t$$

Hier wird dann noch in jedem Iterationsschritt die Geschwindigkeit um den durch die Rollreibung vorgegebenen Faktor verringert. $\vec{v}_t = \vec{v}_{t-1} \cdot (1 - \mu_R)$ .

### 2.1.2 Kollision mit der Bande

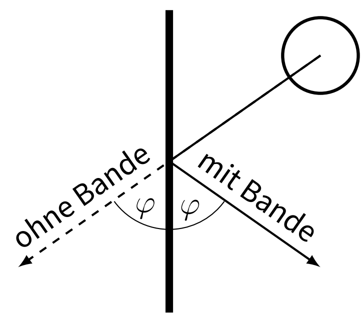



**Abbildung 3:** Kollision mit der Bande

Das nächste physikalische Problem ist die Kollision von Kugeln und Bande. Hier handelt es sich wie eingangs erwähnt um einen einen elastischen Stoss. Da die Bande unbeweglich und gerade ist gilt, dass sich nur der Anteil der Kraft im Vorzeichen ändert, welcher Senkrecht zur Wand steht. Demnach wäre die Geschwindigkeit nach der Kollision in Abbildung 2.2

$$v_0 = \begin{bmatrix} -v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{bmatrix}$$

## 2.2 Informatik

Nachdem im vorherigen Kapitel die physikalischen Grundlagen diskutiert wurden die Notwendig sind, um ein zweidimensionales Billardspiel zu Modellieren, soll es nun um einige Ideen gehen die zur Praktischen Umsetzung notwendig sind.

### 2.2.1 Representation der Kugeln

In diesem Fall ist es recht naheliegend eine Klasse für die Kugeln zu setzen, wobei die Klasse folgende Attribute und Methoden hat.

| **Kugel** | | |
|---|---|---|
| n | : | int |
| r | : | double |
| pos | : | TVektor |
| next | : | TVektor |
| v | : | TVektor |
| inGame | : | bool |
| color | : | TColor |
| init() | : | void |
| move() | : | void |
| draw() | : | void |

**Abbildung 4:** Kugelklasse UML-Diagram

**Masse** Auffällig ist hier, dass die Kugel, kein Attribut für ihr Masse besitzt. Da angenommen wird, dass alle Kugeln die gleiche Masse besitzen spielt diese bei den Stossereignissen zwischen den Kugeln keine Rolle. Lediglich bei der beim abbremsen durch die Rollreibung würde das Gewicht eine Rolle spielen. Andererseits kann die Verlangsamung aber auch durch eine simple Konstante abgebildet werden und die Kugeln benötigt somit kein Attribut der Masse.

### 2.2.2 Kollisionserkennung

Um nun zu erkennen, ob eine Kugel mit einer anderen Kollidiert kann der Hypothenusensatz angewendet werden. Hierzu kann man die Positionen $\mathsf{pos}$ von zwei Kugeln subtrahieren und erhält so einen Vektor für den Abstand. Eine Kollision zwischen zwei Kugeln liegt also vor, wenn gilt:

$$r \geq \sqrt{(\mathsf{k1}_{\mathsf{pos,x}} - \mathsf{k2}_{\mathsf{pos,x}})^2 + (\mathsf{k1}_{\mathsf{pos,y}} - \mathsf{k2}_{\mathsf{pos,y}})^2}$$

Hierbei bezeichnen $\mathsf{k1}$ und $\mathsf{k2}$ jeweils eine Instanz der Kugel-Klasse.

Die Erkennung von Kollisionen mit der Bande gestaltet sich rechnerisch noch simpler.

$$r \geq |\mathsf{k}_{\mathsf{pos,x}} - \mathsf{Bande}_{\mathsf{x}}|$$

Allerdings kann es hier zu einem Optische störenden Phänomen kommen, bei dem die Kugel für einen Frame außerhalb der Spielfeldes gezeichnet wird. Da die Berechnung für die einzelnen Frames diskret verläuft, wird erst wieder im nächsten Durchlauf überprüft, ob die Bedingung für die Kollision erfüllt ist. Besonders bei hohen Geschwindigkeiten der Kugel, kann es also dazu kommen, dass diese merklich außerhalb der Spielgrenzen dargestellt wird.

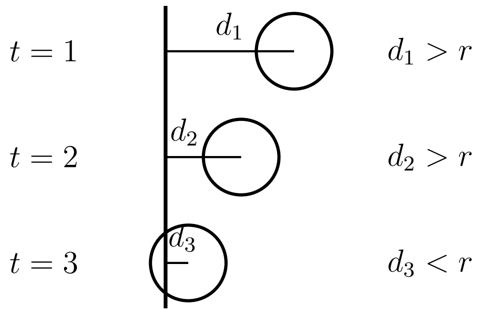



**Abbildung 5:** Erst für $t_3$ wird die Kollision erkannt.

Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten dieses Problem zu lösen. Zum einen kann eine Höchstgeschwindigkeit eingeführt werden, um die Bewegung in Pixeln pro Iteration zu verringern. Eine Option ist es die Anzahl an Iterationen zu erhöhen um den selben Effekt zu erreichen. Die Lösung die jedoch nicht nur stochastische Sicherheit bietet ist die kontinuierliche Kollisionskontrolle CCD.

### 2.2.3 Continuous Collision Detection (CCD)

Um sicherzugehen, dass keine Kugeln außerhalb des Spielfeldes angezeigt werden können wurde an den Rändern eine CCD implementiert. Dabei wird berechnet, ob im kommenden Zeitschritt eine Kollision mit der Bande Auftritt, falls dies der Fall ist, wird Position errechnet, welche die Kugel, nach der Richtungsänderung haben wird. Diese Position wird dann in das Attribut `next` der entsprechenden Kugel gespeichert und im nächsten Zeitschritt als Position der Kugel gesetzt.

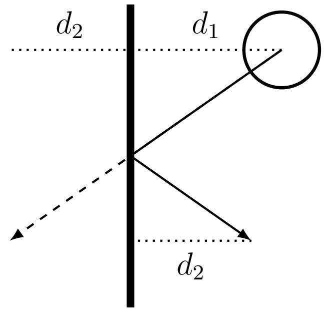



**Abbildung 6:** CCD Schaubild

Zur Berechnung ist vor allem der Anteil der Zeit wichtig, nach der die Kollision mit der Bande stattfinden würde. Um die kritische Zeit $t_c$ zu erhalten, gilt:

$$t_c = \text{Bande}_x + r - \frac{\text{k}_{\text{next,x}}}{\text{k}_{\text{pos,x}} - \text{k}_{\text{next,x}}}$$

Hier ist $t_c$ der Anteil der Zeit an einem Zeitschritt, nach dem die Kollision auftreten würde, wenn die Kugel die Bahn entlang der gestrichelten Linie in Abbildung 2.5 weiter mit Konstanter geschwindigkeit verfolgt. $\text{k}_{\text{next,x}}$ ist in diesem Szenario die Hypothetische Position, ohne CCD. Wenn man nun den die $t_c$ kennt kann man die Strecken $d_1$ und $d_2$ bestimmen. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} d_1 &= t_c \text{k}_{\text{v,x}} \\ d_2 &= (1 - t_c)\text{k}_{\text{v,x}} \\ \text{k}_{\text{next,x}} &= \text{Bande}_{\text{x}} + r + (1 - t_c)\text{k}_{\text{v,x}}(1 - \mu_R) \end{aligned}$$

Der $(1 - \mu_R)$ Term, geht aus der Einbeziehung der Rollreibung hervor. Da in jedem Zeitschritt die Geschwindigkeit durch die Reibung verringert wird, muss dies auch bei der Berechnung der zukünftigen Positionen einbezogen werden.

Die so erhalten X-Koordinate wird als Position für die Kugel k im nächsten Zeitschritt gesetzt. Somit übertritt die Kugel niemals die Grenze des Spielfeldes und der oben genannte Darstellungsfehler wird behoben.

# 3 Erklärung der Graphischen Oberfläche

# 4 Ergebnisse und Diskussion

# Zusammenfassung

Cross, R. 2014. „Ball collision experiments“. *Physics Education* 50 (1): 52–57. https://doi.org/10.1088/0031-9120/50/1/52.