Экзамен по аналитической геометрии

Лектор: Гусейн — Заде С. М. • Автор: Пшеничный Никита[*], группа 109

I курс • Осенний семестр 2023 г.

Аннотация

При подготовке этого файла я использовал: курс лекций С. М. Гусейн — Заде, записи лекций И. А. Дынникова на *teach-in*, книгу «Лекции по аналитической геометрии» А. П. Веселова и Е. В. Троицкого, книгу «Геометрические свойства кривых второго порядка» А. В. Акопяна и А. А. Заславского и курс семинаров А. А. Гайфуллина.

Экзаменационные вопросы

[*]Telegram: @pshenikita

1 Координаты на плоскости и в пространстве. Координаты точек и координаты векторов

Определение 1.1. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис, а v — произвольный вектор. **Координатами вектора** v называется набор чисел $(v_1, \ldots, v_k)$ такой, что $v = \sum_i v_i e_i$.

Определения линейной зависимости, базиса и векторного пространства — из курса алгебры.

Утверждение. Определение выше корректно.

Доказательство. Требуется доказать, что координаты определены для каждого вектора в пространстве, причём, единственным образом:

1. **Существование**. Система $\{e_1, \ldots, e_k\}$ линейно зависима, а $\{e_1, \ldots, e_k, v\}$ — нет. Значит, $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu \in \mathbb{R}$, т. ч. $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu v = 0$, при этом $\mu \neq 0$ (иначе уравнение становится неразрешимым в силу линейной независимости базиса). Поэтому разделим на μ и выразим вектор v:
$$v = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\lambda_i}{\mu} \right) e_i.$$
2. **Единственность**. Пусть есть два выражения v через базисные векторы:
$$v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k, \quad v = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k.$$
Тогда, вычтя одно уравнение из другого, получим
$$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k) e_k = 0.$$
Это уравнение разрешимо только если $\alpha_i = \beta_i$ для всех i (из линейной независимости базисных векторов). Значит, два наших выражения совпадают, а преполагалось, что они различны. Получили противоречие, доказывающее единственность координат каждого вектора.

Получаем биекцию $\mathcal{F}$ из множества геометрических векторов размерности k в $\mathbb{R}^k$. При этом, если $v \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} (v_1, \ldots, v_k)$, то будем писать $v = (v_1, \ldots, v_k)$. ■

Нетрудно заметить, что если $u = (u_1, \ldots, u_k)$ и $v = (v_1, \ldots, v_k)$, то $u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_k + v_k)$.

Определение 1.2. Набор из точки O и базисных векторов $\{e_1, \ldots, e_k\}$ называется **репером**. Точка O при этом называется **началом координат**. Система координат, заданная таким образом, называется **аффинной**.

Определение 1.3 (Координаты точки). В аффинной системе координат $M \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_k)$ — координаты $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Исходя из определения координат точки и замечания выше, с точки зрения координат корректна запись $\overrightarrow{AB} = B - A$.

2 Замена координат на плоскости и в пространстве

Определение 2.1. Пусть даны два базиса $\{e_1, \ldots, e_k\}$ и $\{f_1, \ldots, f_k\}$. **Матрицей перехода** от первого ко второму называется $C = (c_{ij})$, где c_{ij} — i-ая координата вектора f_j в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Нетрудно заметить, что при этом $\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_k \end{pmatrix} \cdot C$.

Определение 2.2. Два базиса **одинаково ориентированы**, если det матрицы перехода от первого ко второму положителен, **противоположно ориентированы**, если отрицателен.

Логичный вопрос — а что если det матрицы перехода равен 0? Ну тогда базис, в который мы попали, на самом деле не базис. Это можно понять так: в курсе алгебры доказывалась верхняя оценка на ранг произведения — он не превосходит ранг каждого из множителей. Но если det матрицы перехода нулевой, то её ранг строго меньше её размера, т. е. меньше количества базисных векторов. А значит, и ранг системы векторов, в которую мы попали, меньше их количества, т. е. эта система линейно зависима, а значит, не базис.

Нетрудно проверить, что отношение «базисы одинаково ориентированы» является отношением эквивалентности, а потому все базисы разбиваются на два класса эквивалентности.

Определение 2.3. Ориентация — выбор класса эквивалентности одинаково ориентированных векторов.

То есть, «ввести ориентацию» значит принять какой-то класс «положительно ориентированным», а какой-то — «отрицательно». Положительной будем считать ориентацию стандартного базиса.

Следующая теорема не применяется на практике, но полезна для развития интуитивного понимания того, что такое замены координат.

Теорема 2.1 (Непрерывная деформируемость одинаково ориентированных базисов). Два базиса одинаково ориентированы $\Leftrightarrow$ первый можно непрерывно деформировать во второй.

Расшифруем, что значит «непрерывно деформировать базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в базис $\{f_1, \dots, f_k\}$». Это значит предъявить такие $a_1(t), \dots, a_k(t)$, непрерывно зависящие от t (введём нормировку $0 \leqslant t \leqslant 1$), что $a_i(0) = e_i$, $a_i(1) = f_i$ и $\forall t$ система $\{a_1(t), \dots, a_k(t)\}$ является базисом.

Доказательство. Докажем в обе стороны:

$\Leftarrow$. Пусть $C(t)$ — матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_k\}$ к $\{a_1(t), \dots, a_k(t)\}$. Известно, что $\det C(0) > 0$, $\det C(t) \neq 0 \ \forall t$, отсюда (из непрерывности) следует $\det C(t) > 0 \ \forall t$, в частности, $\det C(1) > 0$.

Тут следует понимать, что непрерывность $\det C(t)$ ещё нужно доказывать. Кажется, это легко делается через определение det через перестановки: каждый множитель в каждом слагаемом непрерывно меняется относительно t, а значит, и вся сумма непрерывна по t.

$\Rightarrow$. Разложим матрицу C в произведение элементарных: $C = C_1 \dots C_N$. Причём, элементарные матрицы могут быть не любыми, а только такими: $E + \lambda E_{ij}$, (при $i \neq j$ соответствует преобразованию «прибавить к i-ой строке j-ую с коэффициентом λ» а при $i = j$ — «умножить i-ую строку на $\mu = 1 + \lambda$»). Если в них λ и μ заменить на функции $k(t) \in C[0;1]$: $k(0) = 1$, а $k(1)$ равен тому коэффициенту, что стоит на этом месте в сответствующей элементарной матрице в разложении C. Получим непрерывную $C(t)$ и $C(0) = E$, $C(1) = C$. ■

Теорема 2.2. Пусть даны два репера: $(O, e_1, \dots, e_n)$ и $(O', e'_1, \dots, e'_n)$, причём C — матрица перехода между их базисами, а $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x'_1, \dots, x'_n)$ — соответствующие им системы координат. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + O',$$

где под O' понимаем столбец координат этой точки в первой системе.

Доказательство. Дано $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot O'$ и $\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot C$. Точки с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x'_1, \dots, x'_n)$ совпадают:

$$O + \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O' + \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + (O' - O).$$

Пользуясь условием, получаем

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \left(C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + O' \right).$$

А так как разложение по базису для каждого вектора (каждой точки) единственно, то его можно убрать, получив верное равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + O',$$

■

Примечание. Как следствие, координаты векторов определяются по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Это вызвано тем, что $\overrightarrow{AB} = B - A$ с точки зрения координат, и при вычитании свободный член сокращается.

Утверждение. Если C_1 — матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_k\}$ к $\{f_1, \dots, f_k\}$, а C_2 — от $\{f_1, \dots, f_k\}$ к $\{g_1, \dots, g_k\}$, то матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_k\}$ к $\{g_1, \dots, g_k\}$ выглядит как $C = C_1 C_2$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — координаты в первом базисе, $x'_1, \dots, x'_k$ — во втором, $x''_1, \dots, x''_k$ — в третьем. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 C_2}_{=C} \cdot \begin{pmatrix} x''_1 \\ \vdots \\ x''_k \end{pmatrix}.$$

■

3 Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение в координатах (в ортогональных и в произвольных аффинных)

Определение 3.1. Функция $f(v)$ называется **линейной**, если $f(u+v) = f(u) + f(v)$ и $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

По $f(e_1), \ldots, f(e_k)$ можно восстановить f:

$$f(v) = f\left(\sum_i v_i e_i\right) = \sum_i v_i f(e_i).$$

Возникает система координат на множестве линейных функций: числа $f(e_1), \ldots, f(e_k)$ могут быть любыми и однозначно определяют f, поэтому вполне разумно называть их координатами функции f.

Определение 3.2 (Скалярное произведение). $(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v)$ *«Пока так...»* (c)

Утверждение (Свойства скалярного произведения[1]).

1. **Билинейность**: $(u+v, w) = (u, w)+(v, w)$, $(u, v+w) = (u, v)+(u, w)$, $(\lambda u, v) = \lambda(u, v) = (u, \lambda v)$.
2. **Симметричность**: $(u, v) = (v, u)$.
3. **Положительная определённость**: $u \neq 0 \Rightarrow (u, u) > 0$.

Как сказал Иван Алексеевич, «Свойства расположены в порядке убывания важности».

Примечание. Для поиска проекции $v^{\parallel}$ вектора v на вектор u есть простая и полезная формула:

$$v^{\parallel} = \frac{(u, v)}{(u, u)} u.$$

Осознать её истинность можно, просто расписав скалярные произведения по определению. Из неё совсем легко выводятся два свойства ниже (без неё они тоже выводятся, но там нужно думать; с ней думать не нужно).

Доказательство. Докажем аддитивность (остальные пункты очевидны). Первое свойство — $(u, v) = (u, v^{\parallel})$, где $v^{\parallel}$ — проекция вектора v на направление вектора u. Второе свойство — $(v+w)^{\parallel} = v^{\parallel}+w^{\parallel}$. Отсюда

$$(u, v + w) = (u, (v + w)^{\parallel}) = (u, v^{\parallel} + w^{\parallel}) = (u, v^{\parallel}) + (u, w^{\parallel}) = (u, v) + (u, w).$$

Линейность по второму аргументу доказывается аналогично. ∎

Утверждение. Пусть имеем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ и векторы $u = (u_1, \ldots, u_k)$ и $v = (v_1, \ldots, v_k)$ (координаты в данном базисе). Тогда

$$(u, v) = \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j (e_i, e_j).$$

Доказательство. Применим билинейность:

$$(u, v) = \left(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j\right) = \sum_i u_i \left(e_i, \sum_j v_j e_j\right) = \sum_i u_i \sum_j v_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j (e_i, e_j).$$

Получается, для подсчёта скалярного произведения нам нужно знать $k(k+1)/2$ чисел — значения скалярного произведения на базисных векторах. ∎

Определение 3.3. Базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ **ортонормирован**[2], если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

[1]Потом станут аксиомами; все метрические теоремы геометрии выводятся из этих свойств

Примечание. В ортонормированном базисе $(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_k v_k$.

Теорема 3.1. $f(*) = (u, *)$ — общий вид линейной функции. Иными словами, любую линейную функцию от $*$ можно представить как скалярное произведение с каким-то вектором. При этом, $(u, *) = (v, *)$ в смысле равенства функций равносильно $u = v$.

Доказательство. Заметим, что в теореме ни слова не сказано про базис, в котором мы работаем, а поэтому мы вольны выбрать какой нам удобно. А нам, конечно, удобно выбирать ортонормированный. Итак, пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — ортонормированный базис, а f — какая-то линейная функция. Тогда она определяется значениями на базисных векторах. А можно сказать, что она определяется вектором $\mathcal{F} = \big(f(e_1), \ldots, f(e_k)\big)$. Тогда

$$f(*) = \sum_i *_i f(e_i) = \sum_i *_i \mathcal{F}_i = (*, \mathcal{F}).$$

Вторая часть утверждения теперь очевидна. ■

Лемма 3.1 (из Веселова и Троицкого). Пусть в некотором ортонормированном базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ вектор $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Тогда

$$a_i = (a, e_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Доказательство. Здесь я приведу 2 доказательства. Первое я сам придумал, и поэтому оно мне нравится, но второе намного проще.

1. Мы знаем, что координаты вектора определены единственным образом, поэтому осталось лишь доказать, что предложенные в формулировке подходят. Заметим, что функция $f(a) = \sum\limits_{i=1}^{k} (a, e_i) e_i$ линейна (из линейности скалярного произведения). В доказательстве предыдущей теоремы мы показали, что f однозначно определяется вектором $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_k))$. Подставим в f вектор e_j и посмотрим, что получится:

   $$f(e_j) = \sum_{i=1}^{k} (e_j, e_i) e_i = (e_j, e_j) e_j = e_j,$$

   т. к. по определению ортонормированного базиса все скалярные произведения (e_i, e_j) при $i \neq j$ зануляются. Значит, $\mathcal{F} = \{e_1, \ldots, e_k\}$, а $f(a) = (a, \mathcal{F}) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i e_i = a$. Получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} (a, e_i) e_i = a$, то есть, (a, e_i) подходят в качестве координат.

2. А можно просто спроецировать вектор a на базисные. Заметим, что из ортонормированности имеем

   $$a^{\|e_i} = \frac{(a, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = (a, e_i) e_i,$$

   Ясно, что a есть сумма $a^{\|e_i}$ по всем i. А выписав сумму, мы получим буквально выражение a через базисные векторы с коэффициентами (a, e_i). Значит, это координаты (по определению). Единственный косяк — я не понимаю, где мы использовали ортогональность базиса. Видимо, формула для проекции верна только в ортогональных базисах, но это нужно будет уточнить.

■

[2] Отдельный вопрос — «А существуют ли вообще ортонормированные базисы?». Да, существуют. Самый простой пример — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

4 Ортогональные (сохраняющие ориентацию) замены координат на плоскости

Утверждение. Любая ортогональная матрица 2×2 с определителем, равным 1, представляется в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу как матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к e_1', e_2'. Тогда для некоторого φ $e_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ (т. к. $|e_1'| = 1$). Перпендикулярный к нему вектор e_2' единичной длины имеет один из двух видов — $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ или $(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ (все координаты в первом базисе). Располагая эти векторы по столбцам в матрицу, получим ровно два вида — те, что в формулировке утверждения. ■

Примечание. Первая матрица соответствует повороту на угол φ против часовой стрелки, а вторая — симметрии относительно прямой, проходящей через начало координат под углом $\varphi/2$ к оси абсцисс.

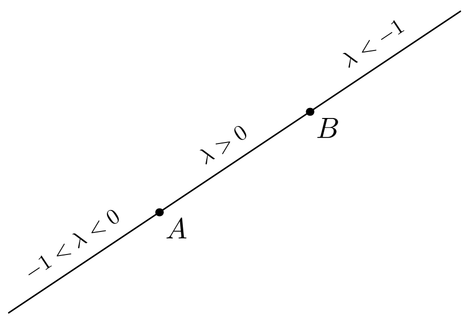
5 Деление отрезка в заданном отношении

Определение 5.1. Пусть A и B — различные точки, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ не равны нулю одновременно. Говорят, что точка M **делит отрезок AB в заданном отношении** $\lambda : \mu$, если $\mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Утверждение. В любой аффинной системе координат $M = \dfrac{\mu A + \lambda B}{\lambda + \mu}$.

Доказательство. Из определения, $\mu(M - A) = \lambda(B - M)$, отсюда $M = \dfrac{\mu A + \lambda B}{\lambda + \mu}$. ■

Обычно запись $\lambda : \mu$ заменяют на одно число λ (говоря, что точка делит отрезок в отношении λ), при этом имея в виду, что эта точка делит отрезок в отношении $\lambda : 1$. Такая замена некорректна при $\mu = 0$. Но в этом случае будем считать $\lambda = \infty$. Следующая схема показывает значение λ в зависимости от расположения точки M:



Примечание. Середина отрезка AB делит его в отношении 1, точка A — в отношении 0, B — ∞. В отношении -1 отрезок AB делит бесконечно удалённая точка. Это можно увидеть как из определения, так и из формулы выше.

6 Прямая на плоскости. Параметрическое задание и задание уравнением

Определение 6.1 (от Сабира Меджидовича). Прямая — траектория равномерно движущейся частицы.

Следуя этому определению, можно сказать, что прямую на плоскости однозначно задаёт начальная точка движения (x_0, y_0) и вектор скорости частицы $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Исходя из этих соображений, можем записать **параметрическое задание прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

По сути, мы выбираем на прямой точку и направляющий вектор. А вместе мы называли это «репер», на нём t — аффинная координата. Поэтому на самом деле, мы не только задаём объект, но и выбираем на нём систему координат. И то же самое будет с плоскостями в пространстве.

Утверждение. Пусть имеем две прямые $\ell_1 = \{P_1 + t \cdot v_1\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\ell_2 = \{P_2 + t \cdot v_2\}_{t \in \mathbb{R}}$. Тогда

$$\ell_1 = \ell_2 \Leftrightarrow \operatorname{rk} \left\{ v_1, v_2, \overrightarrow{P_1 P_2} \right\} = 1.$$

Доказательство. Условие равносильно тому, что система

$$P_1 + t \cdot v_1 = P_2 + s \cdot v_2$$

имеет бесконечно много решений. Записывая её в матричном виде, получим

$$\left(\begin{array}{cc|c} v_1 & -v_2 & \overrightarrow{P_1 P_2} \end{array} \right).$$

Условие на совместность (теорема Кронекера — Капеллли):

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \left(\begin{array}{cc|c} v_1 & -v_2 & \overrightarrow{P_1 P_2} \end{array} \right),$$

условие на неопределённость $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \end{pmatrix} < 2$, ну и ясно дело ранг этой матрицы не может равняться нулю (иначе оба вектора нулевые). Отсюда и получаем требуемое. ■

Прямую можно задать не только параметрически, но и уравнением первого порядка:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Теорема 6.1. Два этих способа задания эквивалентны.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть имеем параметрическое задание прямой ℓ:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\beta x = -\beta x_0 - \alpha\beta t, \\ \alpha y = \alpha y_0 + \alpha\beta t. \end{cases}$$

Сложив получившиеся уравнения, получим уравнение первого порядка, в котором коэффициенты при x и при y не равны нулю одновременно.

$\Leftarrow$. Заметим, что при $(A, B) \neq (0, 0)$ уравнение $Ax + By + C = 0$ имеет хотя бы одно решение (из теоремы Кронекера — Капелли). Обозначим его за (x_0, y_0). Тогда можем выписать семейство решений уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 - Bt, \\ y = y_0 + At \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Получили систему уравнений, в которой коэффициенты при t не равны нулю одновременно. ■

Примечание. Из доказательства этого утверждения мы получили, что направляющий вектор прямой $Ax + By + C = 0$ можно выписать в виде $(-B, A)$. Как следствие, *любой направляющий вектор прямой должен обнулять её линейную часть* (причём, это критерий).

Утверждение (может быть полезно для решения задач). Пусть имеем две прямые $\ell_1 = (x_0, y_0) + (\alpha, \beta)t$ и $\ell_2 : Ax + By + C = 0$. Тогда

$$\ell_1 = \ell_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ A\alpha + B\beta = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Первое условие равносильно $(x_0, y_0) \in \ell_2$, а второе — что $(\alpha, \beta) \parallel \ell_2$. Теперь утверждение становится очевидным. ■

Утверждение. Пусть имеем две прямые $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

$$\ell_1 = \ell_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Здесь деление подразумевается в смысле пропорциональности: знаменатель может быть равен нулю, но тогда равен нулю и числитель.

Доказательство. Справедливость утверждения в сторону $\Leftarrow$ очевидна. Здесь докажем в другую сторону. Запишем условие совпадения прямых алгебраически — система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений. Это значит, что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Отсюда и следует требуемое. ■

7 Расстояние от точки до прямой на плоскости

Здесь работаем в прямоугольной системе координат.

Лемма 7.1 (О нормали к прямой). Пусть дана прямая $\ell : Ax + By + C = 0$. Тогда $n = (A, B) \perp \ell$.

Доказательство. Если $v = (\alpha, \beta) \parallel \ell$, то $A\alpha + B\beta = 0$ и (т. к. система координат прямоугольна) $(n, v) = 0$. Значит, $v \perp n$. ■

Теорема 7.1. Пусть даны прямая $\ell : Ax + By + C = 0$ и произвольная точка $M = (x_0, y_0)$. Тогда

$$\rho(M, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Здесь следует ответить на несколько вопросов. Первый — что мы называем расстоянием? Расстоянием мы называем наименьшую длину вектора от одного объекта до другого. Второй — почему расстояние существует? Выберем на прямой репер с аффинной координатой t, тогда расстояние от фиксированной M до точки на ℓ с координатой t — это функция $t \mapsto \rho(t)$. Причём на $\pm\infty$ эта функция бесконечно большая. А здесь математический анализ говорит, что у этой функции должен быть минимум. Вот этот минимум и есть расстояние от точки до прямой.

Доказательство. Теперь в доказательстве ответим на третий вопрос — почему расстояние от точки до прямой — это перпендикуляр? Проведём из точки M перпендикуляр и наклонную на ℓ.

Из элементарной геометрии мы знаем, что против большего угла лежит большая сторона, а значит, наклонная больше перпендикуляра.

Выберем на прямой произвольную точку $O = (x_1, y_1)$ и проведём вектор $u = \overrightarrow{OM} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$. Искомое расстояние — длина проекции u на нормаль ℓ — вектор $n = (A, B)$. У для нахождения проекции вектора на вектор мы выводили формулу:

$$u^{\|} = \frac{(u,n)}{(n,n)}n = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{A^2 + B^2}n = \frac{Ax_0 + By_0 \overbrace{- Ax_1 - By_1}^{C}}{A^2 + B^2}n.$$

Итак, $\rho(M, \ell) = |u^{\|}| = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. ■

8 Пучок прямых на плоскости. Собственные и несобственые пучки

Определение 8.1. Собственный пучок прямых на плоскости — семейство всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Определение 8.2. Несобственный пучок прямых на плоскости — семейство всех прямых, параллельных некоторому фиксированному направлению.

Нетрудно заметить, что для любых двух различных прямых плоскости ℓ_1 и ℓ_2 существует единственный пучок, содержащий их.

На самом деле, пучок через две прямые $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пишется следующим образом:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, пучок получается несобственым (пропорциональность коэффициентов сохраняется), а иначе — собственным (действительно, если есть точка (x_0, y_0), обнуляющая оба выражения в левых частях уравнений прямых, она обнуляет и их линейную комбинацию). Отсюда можно сделать вывод, что прямая ℓ_3 лежит в пучке, образованном прямыми ℓ_1 и ℓ_2 тогда и только тогда, когда вектор (A_3, B_3, C_3) есть линейная комбинация векторов (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). Переформулировка даёт следующее

Утверждение. Прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 ($\ell_i : A_ix + B_iy + C_i = 0$) лежат в одном пучке тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 0$$

9 Плоскость в пространстве. Параметрическое задание и задание уравнением

Плоскость в пространстве (как и прямую на плоскости) можно задать, выбрав на неё репер:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t + \beta_1 s, \\ y = y_0 + \alpha_2 t + \beta_2 s, \\ z = z_0 + \alpha_3 t + \beta_3 s \end{cases} \qquad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

А ещё плоскость можно задать уравнением первого порядка: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Утверждение. Эти два задания эквивалентны.

Доказательство. $\Rightarrow$. Легко видеть, что точка $M = (x_1, y_1, z_1)$ лежит в плоскости тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Действительно, это условие соответствую компланарности базисных векторов плоскости и вектора $\overrightarrow{OA}$, где O — начало координат. Разложив этот определитель по первой строке, получим уравнение первого порядка по x, y, z. Если все его коэффициенты нулевые, то базисные векторы сонаправлены, а такого быть не может.

$\Leftarrow$. Аналогично случаю прямой на плоскости. ∎

10 Расстояние от точки до плоскости

Аналогично случаю прямой на плоскости.

11 Прямая в пространстве. Параметрическое задание и задание уравнениями

Прямую в пространстве всё так же можно задать параметрически, выбрав на ней репер:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Можно системой уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

где $(A_1, B_1, C_1) \neq (0, 0, 0)$ и $(A_2, B_2, C_2) \neq (0, 0, 0)$ и векторы (A_1, B_1, C_1, D_1) и (A_2, B_2, C_2, D_2) линейно независимы.

А можно в канонической форме:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

Здесь опять же деление понимается как пропорциональность.

Утверждение. Эти способы задания эквивалентны.

Доказательство. Для начала, разберёмся с системой. Мы уже знаем, что уравнение первого порядка в пространстве (с выписанными условиями) задаёт плоскость. А система из двух таких уравнений — пересечение этих плоскостей.

Пусть имеем параметрическое задание прямой. Выберем ещё два вектора, с которыми направляющий вектор прямой образует линейно независимую систему (можно, т. к. размерность пространства 3, а любая линейно независимую систему, в частности, из одного вектора, дополняется до базиса). Если репер прямой дополнить одним из этих векторов, получим одну плоскость, а если другим — другую. Запишем уравнения этих плоскостей в виде уравнений первого порядка, их пересечение задаётся системой уравнений первого порядка, а это и есть требуемый вид.

Теперь обратно, пусть имеем систему уравнений первого порядка с указанными выше условиями на коэффициенты. Тогда каждое из уравнений задаёт плоскость, причём они не параллельны и не совпадают. Пусть наши плоскости $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$. Среди A_1, B_1, C_1 есть ненулевой. Не ограничивая общности, пусть это A_1. Тогда $x = -\dfrac{D_1}{A_1} - \dfrac{B_1}{A_1}y - \dfrac{C_1}{A_1}z$. Подставив в уравнение второй плоскости, получим:

$$A_2\left(-\frac{D_1}{A_1} - \frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1}z\right) + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

По сути, мы записали уравнение пересечения этих плоскостей в репере второй плоскости. А получили уравнение первой степени (причём, все коэффициенты линейной части этого уравнения не могут быть нулевыми), то есть, прямую на этой плоскости.

Равносильность третьего и первого заданий очевидна. ■

12 Пучок плоскостей в пространстве. Условие принадлежности плоскости пучку, определённому двумя плоскостями

Определение 12.1. Собственый пучок плоскостей в пространстве — семейство всех плоскостей, содержащих некоторую прямую.

Определение 12.2. Несобственный пучок плоскостей в пространстве — семейство всех плоскостей, параллельных некоторой фиксированной плоскости.

Опять же, для любых двух плоскостей однозначно определён пучок, в котором они лежат (т. к. однозначно определена прямая пересечения или плоскость, которой они параллельны).

Утверждение. Плоскости π_1, π_2, π_3 ($\pi_i : \underbrace{A_i x + B_i y + C_i z + D_i}_{=f_i} = 0$) лежат в одном пучке тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} < 3$$

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0) : \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0.$$

Не ограничивая общности, пусть $\gamma \neq 0$. Тогда $f_3 = \dfrac{-\alpha f_1 - \beta f_2}{\gamma}$. ■

Примечание. Как следствие получаем, что пучок через две плоскости $\pi_1 : f_1 = 0$ и $\pi_2 : f_2 = 0$ пишется как $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. Можно было сначала понять это и доказывать, как для пучка прямых на плоскости.

13 Связка плоскостей в пространстве. Условие принадлежности плоскости связке, определённой тремя плоскостями

Определение 13.1. Собственная связка плоскостей в пространстве — семейство плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Определение 13.2. Несобственная связка плоскостей в пространстве — семейство плоскостей, параллельных некоторому фиксированному направлению.

Аналогично рассуждению для пучка прямых, связка однозначно определяется тремя плоскостями и пишется как линейная комбинация левых частей уравнений этих плоскостей. И аналогично же получается

Утверждение. Плоскости $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ лежат в одной связке тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} = 0.$$

14 Векторное произведение векторов. Определение и основные свойства. Вычисление векторного произведения в ортогональных координатах

Сначала посмотрите следующий билет.

Определение 14.1. Векторным произведением векторов u и v называется вектор $[u, v]$ такой[3], что $V(*, u, v) = (*, [u, v])$ в смысле равенства функций.

Лемма 14.1 (Свойства векторного произведения).

1. $[u, v] \perp u, v$
2. $|[u, v]| = |S(u, v)|$
3. Если u и v линейно независимы, то базис $\{u, v, [u, v]\}$ положительно ориентирован
4. Функция $f(u, v) = [u, v]$ полилинейна и кососимметрична

Доказательство. Докажем по пунктам:

1. $(u, [u, v]) = V(u, u, v) = 0$, значит $u \perp [u, v]$. Аналогично для v.

2. Возьмём вектор w, перпендикулярный u и v. Тогда $[u, v] \parallel w$ и поэтому

$$|S(u, v)| \cdot |w| = |V(u, v, w)| = |([u, v], w)| = |[u, v]| \cdot |w| \Rightarrow |w| = |S(u, v)|.$$

3. Заметим, что $V(u, v, [u, v]) = ([u, v], [u, v]) > 0$ при $u, v \neq 0$ из положительной определённости скалярного произведения. Значит, $\{u, v, [u, v]\}$ — положительно ориентированный базис

4. Верно в силу полилинейности и кососимметричности функции $V(*, u, v)$.

[3] Функция V линейна (из предыдущего билета) и такой вектор есть (и только один) в силу теоремы 3.1

■

Утверждение (Формула для векторного произведение в прямоугольной положительно ориентированной системе координат). Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Тогда

$$[u, v] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right).$$

Доказательство. Возьмём вектор $w = (w_1, w_2, w_3)$. Посчитаем $V(u, v, w)$, разложив определитель по строке:

$$V(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = w_1 \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} + w_2 \det \begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix} + \\ + w_3 \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = (w, [u, v]).$$

■

Лемма 14.2 (Формула Лагранжа).

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b).$$

Доказательство. Обе части линейны по a, b и c. Поэтому достаточно проверить равенство на базисных векторах (т. к. линейная функция задаётся своими значениями на базисных векторах). Заметим, что если $b = c$, то обе части обращаются в ноль. Поэтому осталось проверить при $b \neq c$. Если векторы a, b и c попарно различны, то $[b, c] = \pm a$, поэтому правая часть нулевая. Левая часть нулевая, т. к. зануляются оба скалярных произведения. Значит, нужно проверить при $a = b \neq c$. Также можно заметить, что функции в левой и правой части кососимметричны, поэтому достаточно рассмотреть только этот случай, причём порядок векторов a, b и c можно выбрать так, чтобы $[b, c] = a$ и $[b, a] = c$. Заметим, что при этом левая часть равна c, а правая — тоже c. ■

Теорема 14.1 (Тождество Якоби).

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0.$$

Доказательство. Из леммы 15.2 получаем

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = b(a, c) - c(a, b) + a(c, b) - b(c, a) + a(b, c) - a(b, c) = 0.$$

Требуемое получается из симметричности скалярного произведения. ■

15 Ориентированная площадь параллелограмма на плоскости и ориентированный объём параллелепипеда в пространстве. Выражение ориентированной площади и ориентированного объёма через определители

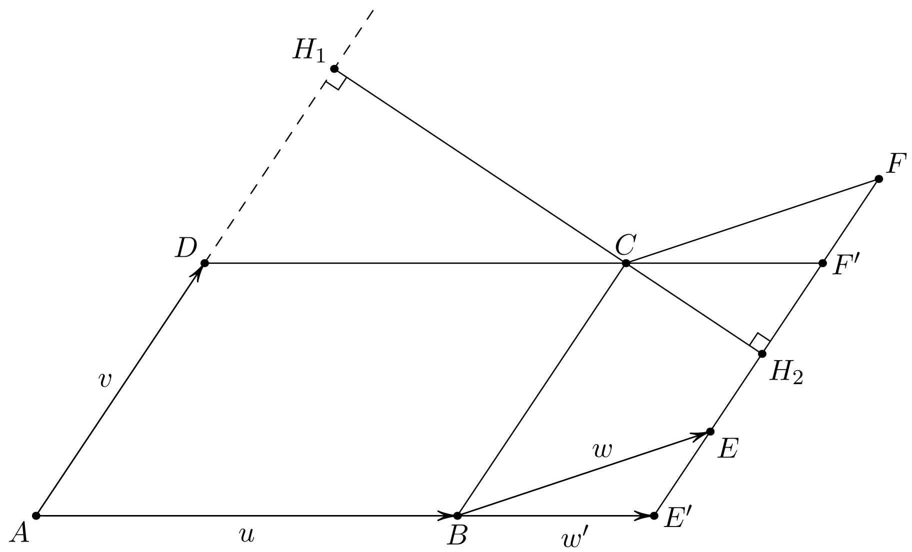
Определение 15.1. Обозначим за $S(u, v)$ **ориентированную площадь** параллелограмма, натянутого на вектора u и v. Считаем знак площади таким же, как знак ориентации базиса $\{u, v\}$[4].

Определение 15.2. Обозначим за $V(u, v, w)$ **ориентированный объём** параллелепипеда, натянутого на вектора u, v и w. Считаем знак площади таким же, как знак ориентации базиса $\{u, v, w\}$.

Утверждение. Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$. Тогда

$$S(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Докажем, что S — полилинейная и кососимметрическая функция. Заметим, что кососимметричность прямо следует из определения. Для полилинейности необоходимо, чтобы $S(u + w, v) = S(u, v) = S(w, v)$. В доказательстве будем использовать картинку, поэтому нужно рассмотреть два очень похожих случая — когда ориентация базисов $\{u, v\}$ и $\{w, v\}$ одинаковая и когда она разная. Мы рассмотрим случай, когда она одинаковая, второй случай рассматривается аналогично.



Построим параллелограммы, фигурирующие в условии. Затем обозначим точки, как на рисунке. Из точки C опустим перпендикуляры CH_1 и CH_2 на прямые AD и EF соответственно. Прямые AD и EF сонаправленны одному и тому же вектору v, а значит, параллельны, поэтому точки C, H_1 и H_2 коллинеарны. А ещё, $EF = BC = AD$, т. к. получены друг из друга параллельным переносом. Отметим точки $F' = CD \cap EF$, $E' = AB \cap EF$. Заметим, что $S(ADFE) = S(ADF'E')$, т. к. у этих параллелограммов равные основания ($EF = E'F'$) и высоты к этим основаниям (в силу $AD \parallel EF$). Аналогично, $S(BCFE) = S(BCF'E')$. Иными словами, $S(u + w, v) = S(u + v', v)$ и $S(w, v) = S(w', v)$. Отсюда

$$S(u, v) + S(w, v) = S(u, v) + S(w', v) = CH_1 \cdot AD + CH_2 \cdot EF = H_1H_2 \cdot AD = S(u + w', v)$$

с одной стороны и

$$S(u + w', v) = S(u + w, v)$$

с другой. Отсюда $S(u + w, v) = S(u, v) + S(w, v)$.

Итак, $S(u, v) = S \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ полилинейна и кососимметрична, а (из курса алгебры) отсюда следует, что $S = S(E) \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$, а $S(E) = S(e_1, e_2) = 1$. ■

По аналогичным причинам выполнено

[4] если эти векторы линейно зависимы, то площадь равна нулю и вопрос про знак не очень интересный

Утверждение. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ и $w = (w_1, w_2, w_3)$. Тогда

$$V(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

16 Выражение объёма выражение объёма параллелепипеда через скалярное и векторное произведение (смешанное произведение)

Определение 16.1. **Смешанное произведение** $(u, v, w) = ([u, v], w)$.

Примечание. По определению векторного произведения $(u, v, w) = V(u, v, w)$. А из доказанного ранее,

$$(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

17 Ортогональные замены координат и ортогональные матрицы

Определение 17.1. Матрица C **ортогональна**, если $CC^T = E$ (или же $C^T = C^{-1}$).

Заметим, что при вычислении CC^T мы умножаем строки матрицы C на столбцы C^T, т. е. строки матрицы C. А в результате получаем E, что означает, что, перемножив i-ую строку матрицы C на себя, мы получим 1, а перемножив i-ую строку на j-ую, получим 0. И то же самое со столбцами. И это не совпадение. Если текущий базис ортогональный, то в нём скалярные произведения пишутся как сумма произведений соответствующих координат векторов. А по столбцам в C стоят как раз координаты нового базиса. А мы сейчас показали, что его матрица Грама единичная, а значит, он ортогональный. Ниже приведено другое доказательство этого же факта.

Утверждение. Для ортогональной матрицы C верно $\det C = \pm 1$.

Доказательство. $1 = \det E = \det(C^T C) = \det C^T \det C = (\det C)^2$. ■

Теорема 17.1. Пусть имеем два базиса $\{e_1, \dots, e_k\}$ и $\{f_1, \dots, f_k\}$, а C — матрица перехода от первого ко второму. Тогда из следующих утверждений любые два влекут третье:

1. Базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ ортонормирован
2. Базис $\{f_1, \dots, f_k\}$ ортонормирован
3. Матрица C ортогональна

Доказательство. Переформулируем условие. Что значит, что $\{e_1, \dots, e_k\}$ ортонормирован? Это значит, что

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_k \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_k \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично для $\{f_1, \dots, f_k\}$. А что значит, что матрица C ортогональна? Это значит, что $CC^T = E$. Теперь покажем, что из первого и третьего следует второе:

$$\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{C^T C}_{=E} \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = E.$$

Схожим образом доказываются остальные пункты. ■

18 Матрица Грама системы векторов. Связь с площадью и объёмом

Определение 18.1. **Матрица Грама** набора векторов $v_1, \dots, v_k$ — матрица

$$G(v_1, \dots, v_k) = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,k}, \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

Теорема 18.1.

$$S^2(u, v) = \det G(u, v), \quad V^2(u, v, w) = \det G(u, v, w).$$

Доказательство. Вспомним, что определитель инвариантен относительно транспонирования и что определитель произведения равен произведению определителей:

$$V^2(u,v,w) = (u,v,w)^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,v) & (u,w) \\ (v,u) & (v,v) & (v,w) \\ (w,u) & (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = \det G(u,v,w).$$

С площадью аналогично, меняется лишь размер матрицы (теперь 2×2). ■

19 Ортогональные замены координат в пространстве: углы Эйлера

Теорема 19.1. Любая ортогональная матрица 3×3 с определителем, равным 1, представляется в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть имеем два положительно ориентированных прямоугольных репера $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_1'e_2'e_3'$. Матрица замены координат по сути является матрицей перехода от первого базиса ко второму. Если $e_3 = e_3'$, то всё сводится к замене координат в плоскости Oe_1e_2 с матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же $e_3 = -e_3'$, то подходит такая матрица (берём $\theta = \pi$):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первым поворотом (вокруг вектора e_3) мы совместили e_1 и e_1'. Вторым поворотом (вокруг вектора e_1) мы совместили e_3 и e_3'. А e_2 некуда деваться, он обязан совпасть с e_2' в силу ортонормированности и положительной ориентированности базисов.

Теперь пусть e_3 и e_3' не коллинеарны. Тогда определим вектор $f = \dfrac{[e_3, e_3']}{|[e_3, e_3']|}$. Этот вектор является направляющим для прямой пересечения плоскостей Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$. Теперь базисы можно совместить композицией из трёх поворотов вокруг векторов — от e_1 к f (вокруг e_3), от e_3 к e_3' (вокруг нового e_1) и от нового e_1 к e_1' (вокруг нового e_3). Матрицы для этих поворотов имеют в точности такой вид, какой указан в формулировке теоремы (с тем же порядком). Их композиция (как доказывалось ранее) задаётся произведением соответствующих матриц в порядке применения движений. ■

20 Алгебраические кривые на плоскости. Теорема «об отщеплении прямой»

Определение 20.1. Кривая называется **алгебраической**, если в некоторой аффинной системе координат она задаётся уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

где f — многочлен. **Порядком** кривой называется степень f.

Теорема 20.1 (Об отщеплении прямой). Алгебраическая кривая произвольного порядка на плоскости содержит в себе прямую $\ell : \underbrace{Ax + By + C}_{f} = 0$ тогда и только тогда, когда $f \mid F$.

Доказательство. $\Leftarrow$. Тогда множество решений уравнения $f = 0$ входит в множество решений $F = 0$ (иными словами, $f = 0 \Rightarrow F = 0$), значит, в ГМТ: $F = 0$ содержится ГМТ: $f = 0$, т. е. данная прямая.

$\Rightarrow$. Не ограничивая общности, пусть $A \neq 0$. Тогда разделим F на f как многочлены от x с остатком $r(y)$, т. е. получим разложение $F(x) = F_1(x) \cdot f(x) + r(y)$. предположим, что $r \neq 0$, т. е. найдётся точка y_0, в которой $r(y_0) \neq 0$. Выберем x_0 так, чтобы выполнялось $f(x_0, y_0) = 0$: $x_0 = -1/A(By_0 + C)$. Тогда

$$0 = F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \cdot F_1(x_0, y_0) + r(y_0) = r(y_0).$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. ■

Теорема 20.2. Пусть имеем алгебраическую кривую $\Gamma : f = 0$. При некоторой аффинной замене координат она будет иметь уравнение $\Gamma : g = 0$. Тогда g — многочлен, причём $\deg g = \deg f$.

Доказательство. Сначала докажем, что g — многочлен. Для этого вспомним формулу аффинного преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \end{pmatrix} + O'.$$

Выразив $x_1, \ldots, x_k$ из неё и подставив в уравнение $f = 0$, получим уравнение Γ в новой системе координат. Оно, очевидно, является многочленом.

Теперь покажем, что $\deg g = \deg f$. Во-первых, $\deg f \geqslant \deg g$ (т. к. выражения старых координат через новые линейно, степень не могла увеличиться). А во-вторых, $\deg g \geqslant \deg f$, потому что можно прийти от g к f обратным преобразованием (матрица C обратима). Отсюда следует $\deg f = \deg g$.
■

21 Плоские кривые второй степени. Аффинная классификация

Определение 21.1. Две квадрики **аффинно** (**метрически**) **эквивалентны**, если одна из них может быть переведена в другую аффинным (изометрическим) преобразованием.

Теорема 21.1 (Метрическая классификация квадрик). Две квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые канонический вид.

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть есть две системы координат: Oe_1e_2 и $\widetilde{O}\widetilde{e}_1\widetilde{e}_2$, в которых кривая имеет одинаковые канонические уравнения. Тогда изометрия, переводящая один репер в другой, переводит одну кривую в другую.

$\Rightarrow$. Рассмотрим две метрически эквивалентные квадрики и каноническую систему Oxy для первой из них и её образ $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}$ при изометрии, переводящей первую квадрику во вторую (она существует из определения). В первой системе координат квадрики имеют уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, причём F_1 — каноническое уравнение. Тогда вторая квадрика имеет два уравнения в новой системе координат: то же, что первая кривая имела в исходной системе, т. е. $F(x', y') = 0$, и то, что получается заменой координат, т. е. $F_2'(x', y') = F_2(x(x', y'), y(x', y')) = 0$. Таким образом, $F_1(x', y') = 0$ — каноническое уравнение для второй квадрики (с точностью до умножения на множитель). ■

Лемма 21.1. Для любой кривой второго порядка существует аффинная система координат, в которой она имеет один из следующих видов:

1. $x^2 + y^2 = 1$ (эллипсы)
2. $x^2 + y^2 = -1$ (мнимые эллипсы)
3. $x^2 - y^2 = 1$ (гиперболы)
4. $x^2 = 2y$ (параболы)
5. $x^2 + y^2 = 0$ (пары мнимых пересекающихся прямых)
6. $x^2 - y^2 = 0$ (пары пересекающихся прямых)
7. $x^2 = 1$ (пары пареллельных прямых)
8. $x^2 = -1$ (пары мнимых параллельных прямых)
9. $x^2 = 0$ (пара совпавших прямых)

Доказательство. Берём каноническое уравнение и «растягиваем» оси. ■

Теорема 21.2 (Аффинная классификация квадрик). Две квадрики аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.

Доказательство. Аналогично теореме о метрической классификации получаем, что две квадрики с одинаковыми названиями аффинно эквивалентны.

Обратно, докажем, что квадрики с разными названиями аффинно неэквивалентны. У коник никакие три точки не лежат на одной прямой, в отличие от остальных квадрик. Поскольку при аффинных преобразованиях сохраняется условие числа точек пересечения и деления в данном отношении, центр переходит в центр, а асимптотическое направление — в асимптотическое. Так как у параболы нет центра, а у эллипса и гиперболы есть, причём у эллипса нет асимптотических направлений, а у гиперболы есть. Получаем, что эллипс, гипербола и парабола аффинно неэквивалентны. Пары прямых различаются геометрически. Наконец, у мнимого эллипса нет асимптотических направлений, а у пары мнимых параллельных прямых есть. ■

22 Ортогональная классификация кривых второй степени. Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Общий вид кривой второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Для удобства обозначим $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$.

Теорема 22.1. Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых **каноническими уравнениями данной квадрики**)

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **эллипс**.
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **мнимый эллипс**.
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **пара пересекающихся мнимых прямых**.
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ — **гипербола**.
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **пара пересекающихся прямых**.
6. $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ — **парабола**.
7. $y^2 - a^2 = 0$ $(a > 0)$ — **пара параллельных прямых**.
8. $y^2 + a^2 = 0$ $(a > 0)$ — **пара параллельных мнимых прямых**.
9. $y^2 = 0$ — **пара совпавших прямых**.

Доказательство. Докажем, что из общего уравнения квадрики можно получить одно из указанных в формулировке с помощью одного поворота и одного параллельного переноса (эти преобразования являются ортогональными, сохраняющими ориентацию) и, возможно, одной перестановки осей (меняет ориентацию). Понятно, что если $a_{12} = 0$, то выделением полных квадратов (а геометрически — параллельным переносом) мы получим канонический вид (уйдёт вся линейная часть). Поэтому задача поворота — как раз занулить a_{12} (иными словами, сделать матрицу квадратичной формы диагональной). Итак, рассмотрим произвольный поворот:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F'(x', y') = F(x, y) = F(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') = a_{11}(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')^2 + \\ + 2a_{12}(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') + a_{22}(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y')^2 + \ldots$$

Коэффициент при $2x'y'$, т. е. a'_{12} равен

$$-a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = (a_{22} - a_{11})\frac{\sin 2\varphi}{2} + a_{12}\cos 2\varphi.$$

Хотим, чтобы он был равен нулю. Возьмём φ таким, что $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. Такой φ всегда существует, потому что если $a_{12} = 0$, то нам вовсе никакой поворот был не нужен. Тогда новый вид нашей кривой

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + 2b_1 \widetilde{x} + 2b_2 \widetilde{y} + b_0 = 0.$$

Рассмотрим случаи:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда выделяем полные квадраты (делаем параллельный перенос):

$$F'(x', y') = \widetilde{F}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + 2b_1 \widetilde{x} + 2b_2 \widetilde{y} + b_0 = \lambda_1 \underbrace{\left(\widetilde{x} + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2}_{x'} + \lambda_2 \underbrace{\left(\widetilde{y} + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2}_{y'} +$$
$$+ \left(b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \tau.$$

   Здесь в зависимости от знаков λ_1, λ_2 и τ можем получить эллипс, мнимый эллипс, гиперболу, пару пересекающихся прямых и пару мнимых пересекающися прямых.

2. Один из λ_1 и λ_2 нулевой (оба нулевыми быть не могут, иначе мы аффинным преобразованием уменьшили степень уравнения, а так не бывает) и $b_1 \neq 0$. Может, не ограничивая общности, сказать, что $\lambda_1 = 0$. Если видим иное, меняем местами x и y (это преобразование ортогонально, а больше мы от него ничего и не требуем). Тогда, выделив оставшийся полный квадрат, получим что-то вида $\lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x'$ (свободный член выносим в x'). Это парабола.

3. Если $\lambda_1 = b_1 = 0$, то, выделив полный квадрат у $\widetilde{y}$, получим $\lambda_2 {y'}^2 + \tau$. Это может быть пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых или пара совпавших прямых.

$\blacksquare$

Здесь приведём алгоритм эффективного приведения кривой к каноническому виду (рассказал Александр Александрович).

Лемма 22.1. Пусть Q — матрица квадратичной формы многочлена $F(x, y)$. Пусть в новой системе координат эту кривую задаёт многочлен

$$F^*(x^*, y^*) := F(x(x^*, y^*), y(x^*, y^*))$$

с матрицей квадратичной формы Q^*. Тогда $Q^* = C^T Q C$.

Доказательство. Имеем

$$F^*(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \ldots =$$
$$= \left(C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)^T Q \left(C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \underbrace{C^T Q C}_{Q^*} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \ldots$$

За $\ldots$ обозначаем линейную часть в соответствующих уравнениях. $\blacksquare$

Итак, сначала из системы

$$\frac{\partial F(x, y)}{dx} = \frac{\partial F(x, y)}{dy} = 0$$

найдём центр (центры) нашей кривой. Так мы попадаем в следующие три случая:

1. **Точка**. Если найденный центр — точка, то мы сразу получаем начало новой системы координат. Осталось найти новые базисные вектора. Пусть C — матрица замены координат, при которой матрица квадратичной формы становится диагональной. Тогда новая матрица квадратичной формы $Q^* = C^T QC$ (из леммы 22.1). Мы делали ортогональную замену, поэтому $C^{-1} = C^T$. Умножим равенство на C слева. Получаем $QC = CQ^*$. По столбцам C стоял координаты новых базисных векторов. Значит, когда мы умножаем Q на новый базисных вектор, то получается он же, умноженный на какое-то число (т. к. матрица Q^* диагональна). Итак, базисные векторы канонической системы координат — собственные для матрицы квадратичной формы. Итак, найдём собственные векторы:

$$Q\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow (Q-\lambda E)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0.$$

Эта система уравнений может иметь ненулевое решение только если матрица $Q-\lambda E$ вырождена, т. е. $\det(Q-\lambda E) = 0$. А это характеристическое уравнение. Оно квадратное относительно λ. Причём, непростое. **Лемма 22.2 («Не очень чудо»).** Оба корня характеристического уравнения вещественны.

Доказательство. По словам Александра Александровича, есть какое-то умное доказательство. Но я его не знаю, а поэтому здесь будет тупое.

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$
$$D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11}-a_{22})^2 + (2a_{12})^2 \geqslant 0.$$

Один корень — это два совпадающих. ■

Теперь без труда находим базисные векторы и каноническую систему координат. Проводя соответствующую замену, получаем и каноническое уравнение кривой.

2. **Прямая**. За начало координат берём любую точку на найденной прямой, а в качестве базисных векторов — её направляющий вектор и вектор нормали.

3. **Ничего**. Если центра нет, тогда наша кривая — обязательно парабола. У неё есть единственное асимптотическое направление — её ось. То есть, уравнение

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} Q \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

имеет единственное решение (с точностью до пропорциональности). Находим его, это будет один из базисных векторов. Второй — перпендикулярный ему. Теперь хотим найти вершину (центр новой системы координат). Для этого введём следующее **Определение 22.1. Градиентом** функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в точке $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ назовём вектор

$$\left(\frac{\partial F}{dx_1}, \frac{\partial F}{dx_2}, \ldots, \frac{\partial F}{dx_k}\right)\Bigg|_{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)}.$$

Параметризуем точку, которой мы «ходим» по этой кривой: $F(x(t), y(t)) = 0$ при всех t. Нам известно, что $F(x(t), y(t)) = 0$ для всех t. Возьмём производную от обеих частей, применив правило дифференцирования сложной функции. Получим:

$$\frac{\partial F}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{dx}, \frac{\partial F}{dy}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

А вектор $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ — это вектор касательной в точке t. Это символизирует, что *градиент всюду перпендикулярен касательной.* Итак, нам это всё нужно было в контексте поиска вершины параболы. Действительно, вершина — единственная точка, в которой градиент параллелен оси параболы. Поэтому условия на вершину мы налагаем следующие:

$$-\beta \cdot \frac{\partial F}{dx} + \alpha \cdot \frac{\partial F}{dy} = 0, \quad F(x,y) = 0.$$

Итак, мы нашли каноническую систему координат, к чему и стремились.

23 Квадратичные формы от двух и от трех переменных. Матрица квадратичной формы и ее изменение при замене координат

Тут от нас хотят (видимо) только лемму 22.1, она была в прошлом билете.

24 Инварианты кривой второй степени

Определение 24.1. Многочлен $\chi = \det(X - \lambda E)$ называется **характеристическим многочленом** матрицы X.

Теорема 24.1. Значения характеристического многочлена матрицы квадратичной формы не меняются в зависимости от выбора ортогональной системы координат.

Доказательство. Пусть в одной системе координат характеристический многочлен $\chi = \det(Q - \lambda E)$, а в другой (в которую мы перешли с помощью матрицы C) — $\chi^* = \det(Q^* - \lambda E)$. Отметим, что в силу ортогональности матрицы C имеем $E = C^T C$, а в силу леммы 22.1 $Q^* = C^T Q C$. Итак,

$$\chi^*(\lambda) = \det(Q^* - \lambda E) = \det(C^T Q C - \lambda C^T C) = \det C^T \det(Q - \lambda E) \det C = (\det C)^2 \chi(\lambda) = \chi(\lambda).$$

■

Примечание. Квадрат определителя ортогональной матрицы равен 1 в силу того, что

$$(\det C)^2 = \det C \cdot \det C^T = \det(C \cdot C^{-1}) = \det E = 1.$$

Как следствие последней теоремы получаем, что коэффициенты характеристического уравнения инварианты при ортогональных заменах. Посмотрим же на эти коэффициенты.

А мы их уже видели! В доказательстве леммы 22.1 мы уже раскрывали скобки и получали, что коэффициент при λ^2 равен 1 (не очень удивительно, что он инвариант, правда?), при λ он равен $\operatorname{tr} Q$ со знаком «минус» (но красоты ради мы знак уберём), а свободный член равен $\det Q$. Мы нашли уже 2 инварианта, найдём и третий. Это определитель матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Дело в том, что при ортогональных заменах эта матрица меняется так же, как и матрица квадратичной части (настолько так же, что там и доказательство такое же). Единственное отличие в том, что вместо матрицы C берётся **расширенная матрица преобразования**

$$D := \begin{pmatrix} \begin{matrix} & C & \end{matrix} & \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Она уже, конечно, не ортогональная, но разложив её определитель по третьей строке, получим $\det D = \det C = \pm 1$. Итак,

$$\det \mathcal{A}^* = \det(D^T \mathcal{A} D) = (\det D)^2 \det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}.$$

Определение 24.2. Величины $I_1 := \operatorname{tr} Q$, $I_2 := \det Q$ и $I_3 := \det A$ называются **ортогональными инвариантами** уравнения второго порядка.

Примечание. Очень важное замечание. Как говорил Александр Александрович, «Называть эти величины инвариантами кривой нельзя, их надо называть инвариантами уравнения». Действительно, домножим уравнение $F(x, y) = 0$ на ненулевое число λ. Кривая, задаваемая им, не изменится, а инварианты — да, но предсказуемо: $I_k \mapsto \lambda^k I_k$. Потому что изменилось уравнение.

Теорема 24.2 (Из Веселова и Троицкого). Произвольный ортогональный инвариант J многочлена второй степени, полиномиально зависящий от его коэффициентов, является многочленом от I_1, I_2, I_3.

Доказательство — позже.

25 Полуинвариант кривой второй степени

Определение 25.1.

$$I_2^* := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

называется **полуинвариантом** (или «почти инвариантом», как у Веселова и Троицкого) уравнения второго порядка.

Теорема 25.1. Если $I_2 = I_3 = 0$, то I_2^* является ортогональным инвариантом[5].

Для начала, докажем вспомогательную лемму

Лемма 25.1. Характеристический многочлен матрицы $\mathcal{A}$ инвариантен относительно прямоугольных замен координат с общим началом.

Доказательство. В этом случае имеем $x_0 = y_0 = 0$ и

$$D = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & C & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что написана ортогональная матрица, а значит, можем повторить доказательство теоремы 24.1. ■

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + (a_0 + a_{11} + a_{22})\lambda^2 -$$
$$- \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right) \lambda + \det \mathcal{A} =$$
$$= -\lambda^3 + (a_0 + I_1)\lambda^2 - (I_2^* + I_2)\lambda + I_3.$$

[5]Ещё I_2^* сохраняется независимо от значений остальных инвариантов при ортогональных преобразованиях с общим началом координат.

Если производится замена с тем же началом, то (в силу предыдущей леммы) коэффициенты (а значит, и I_2^*) сохраняются. Поэтому осталось показать инвариантность I_2^* при сдвигах. Тут уже нам понадобится условие равенства нулю I_2 и I_3. Во-первых, можно считать a_{12} равным нулю, т. к. (мы доказывали в ортогональной классификации кривых второго порядка) это можно сделать одним поворотом. Поэтому из $I_2 = 0$ получаем $a_{11}a_{22} = 0$. Без ограничения общности, можно положить $a_{22} = 0$ («поменять местами x и y» — это ортогональная замена, сохраняющая начало координат). Из соотношения $I_3 = -a_2^2 a_{11} = 0$ получаем $a_2 = 0$ (получить I_3 легко, разложив его по второй строке; $a_{11} \neq 0$, так как иначе уменьшается степень уравнения). Рассмотрим сдвиг

$$x = \widetilde{x} + x_0, \quad y = \widetilde{y} + y_0.$$

Тогда

$$\widetilde{F} = a_{11}(\widetilde{x} + x_0)^2 + 2a_1(\widetilde{x} + x_0) + a_0 = \underbrace{a_{11}}_{\widetilde{a}_{11}} \widetilde{x}^2 + 2\underbrace{(a_{11}x_0 + a_1)}_{\widetilde{a}_1}\widetilde{x} + \underbrace{(a_{11}x_0^2 + 2a_1x_0 + a_0)}_{\widetilde{a}_0},$$

при этом

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix},$$

поэтому $I_2^* = a_{11}a_0 - a_1^2$. Отсюда находим

$$\widetilde{I}_2^* = \widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1^2 = a_{11}(a_{11}x_0^2 + 2a_1x_0 + a_0) - (a_{11}x_0 + a_1)^2 = a_{11}a_0 - a_1^2 = I_2^*.$$

■

26 Определение канонического уравнения кривой второй степени через значения инвариантов и полуинварианта

Теорема 26.1. Следующая таблица даёт необходимые и достаточные условия принадлежности кривой второго порядка к одному из девяти видов в терминах инвариантов.

Эллипс	$I_2 > 0,$	$I_1 I_3 < 0$
Мнимый эллипс	$I_2 > 0,$	$I_1 I_3 > 0$
Пара мнимых пересекающихся прямых	$I_2 > 0,$	$I_3 = 0$
Гипербола	$I_2 < 0,$	$I_3 \neq 0$
Пара пересекающихся прямых	$I_2 < 0,$	$I_3 = 0$
Парабола	$I_2 = 0,$	$I_3 \neq 0$
Пара параллельных прямых	$I_2 = I_3 = 0,$	$I_2^* < 0$
Пара мнимых параллельных прямых	$I_2 = I_3 = 0,$	$I_2^* > 0$
Пара совпавших прямых	$I_2 = I_3 = 0,$	$I_2^* = 0$

Доказательство. Проведём доказательство для эллипса (для остальных аналогично).

$\Rightarrow$. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Для него вычисляем значения инвариантов:

$$I_1 = \frac{1}{a^2} + \frac{a}{b^2} > 0, \quad I_2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0, \quad I_3 = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} < 0.$$

Итак, $I_2 > 0$ и $I_1 I_3 < 0$. При умножении на константу $\lambda \neq 0$ инвариант I_2 умножается на λ^2 и не меняет знак, а $I_1 I_3$ умножается на λ^4 и тоже не меняет знак.

$\Leftarrow$. Пусть имеем уравнение второго порядка с указанными инвариантами. Приведём матрицу квадратичной части к диагональному виду (при этом инварианты не изменяются, т. к. мы не домножаем ни на какую константу, мы только делаем поворот), а затем сделаем сдвиг (тоже ни на что не домножаем). Тогда получим матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Мы знаем про инварианты:

$$I_2 = a_{11}a_{22} > 0, \quad I_1 I_3 = (a_{11} + a_{22})a_0 < 0.$$

$a_{11}a_{22} > 0$, значит, либо оба коэффициента больше нуля, либо оба меньше. Если оба больше, то их сумма положительная и $a_0 < 0$ (из второго неравенства). Перенеся a_0 в правую часть и разделив на $-a_0$, получим действительно уравнение эллипса:

$$\underbrace{(a_{11}/(-a_0))}_{1/a^2} x^2 + \underbrace{(a_{22}/(-a_0))}_{1/b^2} y^2 = 1.$$

Если оба коэффициента меньше нуля, то их сумма меньше нуля и $a_0 > 0$ и, сделав те же операции, что и в прошлом случае, получаем уравнение эллипса. ■

27 Сопряженные диаметры кривой второй степени. Касательные к кривой второй степени

Определение 27.1. Ненулевой вектор (α, β) имеет **асимптоническое направление** по отношению к кривой второго порядка, если

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

где Q — матрица квадратичной формы этой кривой.

Примечание. Это свойство не меняется при умножении на ненулевой множитель, т. е. является свойством квадрики, а не уравнения.

Утверждение. Определение асимптотического направления корректно, т. е. не зависит от выбора системы координат.

Доказательство. Пусть C — матрица ортогонального преобразования. Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(C \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \right)^T QC \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \underbrace{C^T Q C}_{Q^*} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}.$$

■

Теорема 27.1. Прямая ℓ неасимптотического направления по отношению к кривой второго порядка Γ либо имеет с ней две точки пересечения (различные или совпавшие), либо не пересекается с ней. Прямая ℓ асимптотического направления по отношению к кривой второго порядка Γ либо содержится в Γ, либо имеет с ней одну общую точку, либо не пересекается с ней.

Доказательство. Рассмотрим пересечение параметрически заданной прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

с данной кривой второго порядка. Подставив x и y в уравнение $F = 0$, получим уравнение $F(t) = 0$ со старшим коэффициентом, равным

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Если направление (α, β) неасимптотическое, то этот коэффициент не равен нулю и имеет 0, 1 или 2 корня. Однако, если корень 1, то в левой части просто выделился полный квадрат и два корня совпали. Если же направление (α, β) асимптотическое, то получаем линейное уравнение, которое имеет 0, 1 или бесконечно много корней, что соответствует перечисленным в утверждении теоремы случаям. ■

Теорема 27.2. Середины ходр кривой Γ данного неассимптотического направления (α, β) лежат на прямой

$$\alpha \cdot \frac{\partial F}{dx} + \beta \cdot \frac{\partial F}{dy} = 0. \tag{$*$}$$

Доказательство. Пусть имеем кривую второго порядка $\Gamma : F = 0$ и прямую ℓ, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Тогда, в силу неасимптотичности направления (α, β), уравнение $F(t) = 0$ квадратное, если оно пересекает Γ в двух точках: t_1 и t_2 (выберем (x_0, y_0) так, чтобы она была серединой отрезка, соединяющего эти две точки), то они находятся так

$$F_2 t^2 + F_1 t + F_0 = 0,$$

где

$$F_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad F_1 = \alpha \cdot \frac{\partial F}{dx} + \beta \cdot \frac{\partial F}{dy}, \quad F_0 = F(x_0, y_0).$$

Заметим, что аффинные координаты точек пересечения t_1 и t_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 0,$$

т. к. точка (x_0, y_0) — середина отрезка между ними и имеет координату 0 на ℓ (потому что мы её так выбрали). А из формул Виета, $t_1 + t_2 = -F_1/F_2$. Мы знаем, что $F_2 \neq 0$, а поэтому $F_1 = 0$, а это и значит, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению $(*)$.

Осталось показать, что уравнение $(*)$ действительно задаёт прямую (не вырождается в уравнение нулевой степени). Пусть это не так, т. е. оба коэффициента (при x и при y) равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta, \\ a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \end{cases}.$$

Сложив эти уравнения, получим ровно условие

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

что противоречит неасимптотичности направления (α, β). ■

Определение 27.2. Прямая, существование которой мы доказали, называется **диаметром**, сопряжённым неасимптотическому направлению (α, β).

Примечание. В окружности сопряжение — это просто перпендикулярность.

Определение 27.3. **Центром кривой** Γ называется такая точка M, что если X лежит в Γ, то и $2M - X$ тоже лежит в Γ.

Примечание. Центр может быть не один. А ещё, их может вообще не быть. Следующая таблица даёт представление о том, что происходит при каждом типе кривой:

Эллипс *Пара мнимых пересекающихся прямых* *Гипербола* *Пара пересекающихся прямых*	точка
Пара параллельных прямых *Пара совпавших прямых*	прямая
Парабола	нет

Лемма 27.1. Пусть $M(x_0, y_0)$ — центр кривой Γ. Существуют две различные прямые неасимптотических направлений, проходящие через M и пересекающие Γ.

Доказательство. Для точки и прямых утверждение очевидно, докажем его для коник. Возьмём две точки P и Q, лежащие на Γ и не симметричные относительно M и пусть P' и Q' — соответственно их образы при симметрии относительно M Тогда $(PM \cap \Gamma) \supset \{P, P'\}$, $(QM \cap \Gamma) \supset \{Q, Q'\}$. Более того, третьих точек в персечениях нет, так как иначе прямая, содержащая их, имеет асимптотическое направление и содержится в Γ, т. е. Γ распадается на две прямые и не является коникой. ■

Теорема 27.3 (Формула для нахождения центра). $M(x_0, y_0)$ является центром непустой кривой второго порядка $F = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{dx} = \frac{\partial F}{dy} = 0.$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть (α_i, β_i) $(i = 1, 2)$ — направляющие векторы прямых, определённых по предыдущей лемме. Точка точка $M(x_0, y_0)$, как середина соответствующих хорд, принадлежит соответствующим диаметрам, т. е. удовлетворяем уравнениям

$$\alpha_i \cdot \frac{\partial F}{dx} = \beta_i \cdot \frac{\partial F}{dy} = 0.$$

Это система уравнений относительно $\frac{\partial F}{dx}$ и $\frac{\partial F}{dy}$. Она совместна (т. к. однородна) и определена (т. к. матрица коэффициентов невырождена в силу неколлинеарности векторов (α_i, β_i)). Значит, она имеет единственное решение

$$\frac{\partial F}{dx} = \frac{\partial F}{dy} = 0.$$

$\Leftarrow$. Пусть точка M удовлетворяем выписанным в условии уравнениям. Тогда она лежит на любой прямой вида $(*)$, т. е. хотя бы на двух из них. Их пересечение — с одной стороны — центр, а с другой — точка M. А пересечение двух непараллельных прямых — это одна точка, поэтому M — центр. ■

Теорема 27.4. Если непустая кривая второго порядка имеет единственный центр, то диаметр, сопряжённый направлению (α, β), имеет неасимптотическое направление (α^*, β^*), причём диаметр, сопряжённый направлению (α^*, β^*), имеет направление (α, β).

Доказательство. Рассмотрим сопряжённый к (α, β) диаметр

$$\alpha \cdot \frac{\partial F}{dx} + \beta \cdot \frac{\partial F}{dy} = 0.$$

Пусть эта прямая имеет направление (α^*, β^*). Тогда этот вектор должен при подстановке занулять линейную часть, т. е.

$$\alpha(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*) + \beta(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} Q \begin{pmatrix}\alpha^* \\ \beta^*\end{pmatrix}. \qquad (\star^1)$$

Предположим, что направление (α^*, β^*) асимптотическое. Тогда выполнено ещё и

$$\begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^*\end{pmatrix} Q \begin{pmatrix}\alpha^* \\ \beta^*\end{pmatrix} = 0. \qquad (\star^2)$$

Вместе $(\star^1)$ и $(\star^2)$ дают нам систему уравнений на $u = a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*$ и $v = a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*$. Матрица коэффициентов этой системы составлена из векторов (α, β) и (α^*, β^*). Она невырождена (иначе эти векторы коллинеарны, что точно неправда в силу $(\star^1)$ и неасимптотичности направления (α, β)). А ещё эта система однородна, поэтому имеет единственное решение $u = v = 0$. Отсюда

$$0 = u + v = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} Q \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}.$$

Получили противоречие, значит, направление (α^*, β^*) неасимптотическое. Вторая часть теоремы получается из $(\star^1)$ путём транспонирования (матрица Q симметрическая). ■

Примечание. Из этой теоремы видно, что диаметры можно разбить на пары.

Определение 27.4. Два диаметра кривой с единственным центром, делящие пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются **сопряжёнными**.

Определение 27.5. Точка (x, y) алгебраической кривой с уравнением $F = 0$ называется **особой**, если в ней выполнены условия

$$\frac{\partial F}{dx} = \frac{\partial F}{dy} = 0.$$

Определение 27.6. **Касательной** к алгебраической кривой Γ в неособой точке (x_0, y_0) называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая Γ по совпавшим точкам (или содержащаяся в ней).

Примечание. Определение Александра Александровича: «Касательная — это кратный корень».

Теорема 27.5. Касательная к кривой $F = 0$ в неособой точке пишется так:

$$\left.\frac{\partial F}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{dy}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) = 0.$$

Доказательство. Во-первых, она параллельная касательной (мы выше через градиент это показывали). А во-вторых, она проходит через правильную точку — (x_0, y_0). Значит, это и правда касательная! Если вы неудовлетворены этим доказательством, обратитесь к Веселову и Троицкому, там написано более длинное и убедительное рассуждение. Это доказательство нам рассказал Александр Александрович. ■

Теорема 27.6 (Критерий касания от Александра Александровича). Если $I_3 \neq 0$, то критерий того, что прямая $Ax + By + C = 0$ касается поверхности второго порядка $F = 0$ пишется так:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0.$$

Примечание. Используем с умом! Может так получиться, что прямая, которую вы хотите проверить сюда подходит, но формально касательной не является. Как так? Очень просто. Она касается нашей кривой, но в бесконечно удалённой точке. Так, мы можем получить асимптоту у гиперболы: она сюда подходит, и в проективной геометрии она бы правда касалась нашей кривой. Однако в аффинной геометрии бесконечно удалённой точки нет, поэтому получается грусть и тоска. Чтобы проверить, что вы попали в этот случай, посмотрите, будет ли в вашей прямой лежать центр кривой $F = 0$. Если будет, значит, вы действительно попали в этот случай и такую плоскость мы касательной не считаем.

Почему она вообще возникает? Потому что аффинная наука неправильная. Правильная — проективная. В проективной геометрии всё хорошо, и найденая нами плоскость являлась бы касательной. В аффинной же возникает такая маленькая неприятность. Но всё равно штука очень полезная.

И это не какой-то случай, которого вы никогда не встретите! Наш одногруппник попался на этом на контрольной, после чего мы и узнали, что есть такой подвох.

Доказательство. Из предыдущей теоремы можно сделать вывод, что касательная в точке (x_0, y_0) пишется так:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Кто не верит — пусть проверит (просто раскройте скобки и убедитесь, что написана правда). Чтобы эта прямая совпала с прямой $Ax + By + C = 0$, коэффициенты у них должны быть пропорциональны. Иными словами,

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{A}$ симметрическая, т. е. $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$. А ещё, из условия $I_4 \neq 0$, поэтому кривая у $\mathcal{A}$ есть обратная. Транспонируем и умножаем на $(\lambda\mathcal{A})^{-1}$ слева.

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем полученную строку в уравнение кривой:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

получим

$$\left(\mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right)^T \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0.$$

■

28 Эллипс и его геометрические свойства

Определение 28.1 (Геометрическое определение эллипса). Эллипс — геометрическое место точек X, сумма расстояний от которых до некоторых фиксированных точек F_1 и F_2 постоянна и больше $|F_1F_2|$:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** эллипса.

Утверждение. Аналитическое и геометрическое определения эллипса эквивалентны.

Теорема 28.1 (Оптическое свойство). Касательная в точке X эллипса является внешней биссектрисой угла $\angle F_1XF_2$.

Теорема 28.2 (Изогональное свойство). Пусть дана точка P снаружи эллипса. Проведём касательные PA и PB к эллипсу из неё. Тогда PF_1 и PF_2 изогональны относительно угла $\angle APB$.

29 Гипербола и её геометрические свойства

Определение 29.1 (Геометрическое определение гиперболы). Гипербола — геометрическое место точек X, модуль разности от которых до некоторых фиксированных точек F_1 и F_2 постоянен и меньше $|F_1F_2|$:

$$\big||XF_1| - |XF_2|\big| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы.

Утверждение. Аналитическое и геометрическое определения гиперболы эквивалентны.

Теорема 29.1 (Оптическое свойство). Касательная в точке X гиперболы является биссектрисой угла $\angle F_1XF_2$.

Теорема 29.2 (Изогональное свойство). Пусть дана точка P снаружи гиперболы. Проведём касательные PA и PB к эллипсу из неё. Тогда PF_1 и PF_2 изогональны относительно угла $\angle APB$.

30 Парабола и её геометрические свойства

Определение 30.1 (Геометрическое определение параболы). Парабола — геометрическое место точек X, равноудалённых от фиксированной точки F и фиксированной прямой d. Точка F называется **фокусом** параболы, а прямая d — её **директрисой**.

Утверждение. Аналитическое и геометрическое определения параболы эквивалентны.

Теорема 30.1 (Оптическое свойство). Касательная в точке X параболы является биссектрисой угла $\angle F_1XH$, где H — основание перпендикуляра из X на d.

Примечание. Аналога изогонального свойства для параболы нет.

31 Задание кривой второй степени в полярных координатах. Рациональная параметризация кривой второго порядка

Теорема 31.1 (Директориальное свойство коник). Пусть F — некоторая точка, d — некоторая прямая, такая что $F \notin d$, e — некоторое положительное число. Тогда геометрическое место точек X, таких что

$$|XF| = e\rho(X, d)$$

является

- эллипсом, при $e < 1$
- гиперболой, при $e > 1$
- параболой, при $e = 1$

Доказательство. Поместим фокус в начало системы координат, а директрису расположим параллельно оси ординат на расстоянии s. При $e = 1$, очевидно, что данное ГМТ — парабола.

Рассмотрим случай, когда $e \neq 1$.

$$|XF| = \sqrt{x^2 + y^2} = e|x + s|.$$

Возведём в квадрат:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = e^2 \cdot x^2 + 2e^2 s \cdot x + e^2 \cdot s^2 \\ (1 - e^2)x^2 - 2e^2 s \cdot x + y^2 = e^2 s^2 \\ (1 - e^2)\left(x - \frac{e^2 s}{1 - e^2}\right) + y^2 = e^2 s^2 + \frac{e^4 s^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 s^2}{1 - e^2}. \end{gathered}$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} \widehat{x} = x - \dfrac{e^2 s}{1 - e^2}, \\ \widehat{y} = y. \end{cases}$$

Получим уравнение:

$$\frac{(1 - e^2)^2}{e^2 s^2} x^2 + \frac{(1 - e^2)}{e^2 s^2} y^2 = 1.$$

При $e < 1$ получим уравнение эллипса, при $e > 1$ — гиперболы. ■

Определение 31.1. Число e называется **эксцентриситетом**. Число $p = es$ называется **фокальным параметром**.

Формулы, связывающие все величины, которые у нас появились:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

Также

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ для эллипса}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ для гиперболы}.$$

Теорема 31.2. В обобщённых полярных координатах коники пишутся так:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Доказательство. В обобщённых полярных координатах одну и ту же точку можно задать как координатами (r, φ), так и координатами $(-r, \varphi+\pi)$. Поэтому в записи директориального свойства в полярных координатах

$$r = e|r\cos\varphi + s|$$

можно раскрыть модуль без дополнительных знаков. Приведя к нормальному виду, получаем

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

■

32 Кривые второй степени, проходящие через пятерки и четверки точек

Теорема 32.1. Существует и единственна квадрика, проходящая через данные различные пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, \dots, 5)$ — точки в некоторой прямоугольной системе координат. Для нахождения коэффициентов уравнения искомой квадрики возникает система из 5 линейных уравнений

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_1x_i + 2a_2y_i + a_0 = 0, \quad i = 1, \dots, 5$$

от 6 неизвестных с точностью до умножения на ненулевой множитель. Такая система всегда имеет решение. Оно однозначно с точностью до умножения на константу, если уравнения линейно независимы. Допустим противное. Пусть, например, пятое уравнение является линейной комбинацией первый четырёх, так что любая квадрика, проходящая через $P_1, \dots, P_4$, проходит и через P_5. Рассмотрим два случая:

1. Три точки из $P_1, \dots, P_4$, например, P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, которую мы обозначим ℓ. Проведём прямую m, содержащую P_4 и не содержащую P_5. Так как 4 точки не лежат на одной прямой, получаем, что $m \neq \ell$ и $m \cup \ell$ — квадрика, не содержащая P_5. Противоречие.

2. Никакие три точки из $P_1, \dots, P_4$ не лежат на одной прямой. Тогда определены две квадрики:

$$q_1 := (P_1P_2) \cup (P_3P_4) \quad \text{и} \quad q_2 := (P_1P_4) \cup (P_2P_3).$$

   По предположению $P_5 \in q_1$, $P_5 \in q_2$. Но пересечение $q_1 \cap q_2$ равно $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Противоречие.

Полученные противоречия доказывают теорему. ■

33 Поверхности второй степени. Аффинная классификация

Тут всё то же самое, что и для кривых за исключением доказательства того, что если поверхности имеют разные названия, то они аффинно неэквивалентны.

Лемма 33.1. $r := \operatorname{rk} Q$ и $R := \operatorname{rk} \mathcal{A}$ являются аффинными инвариантами.

Доказательство. В курсе алгебры доказывалась верхняя и нижняя оценка на ранг матрицы. Выглядело это так:

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}.$$

По лемме 22.1 мы знаем, что $Q^* = C^T Q T$ (там нигде не использовалось, что матрица ортогональна), отсюда можно получить, что

$$\operatorname{rk} Q \leqslant \operatorname{rk} Q^* \leqslant \operatorname{rk} Q,$$

аналогично для матрицы $\mathcal{A}$. ■

Примечание. Делая выводы из предыдущей леммы, можно разделить поверхности на классы следующим образом:

	Условия	**Поверхности**
I	$r = 3$, $R = 3$ или $R = 4$	1 — 6
II	$r = 2$, $R = 4$	7, 8
III	$r = 2$, $R = 2$ или $R = 3$	9 — 13
IV	$r = 1$, $R = 3$	14
IV	$r = 1$, $R = 1$ или $R = 2$	15 — 17

Из того, что r и R являются аффинными инвариантами, достаточно показать неэквивалентность в пределах каждого из классов I — V.

Точка (мнимый конус), прямая (пара мнимых пересекающихся плоскостей), пары параллельных, пересекающихся или совпавших плоскостей, очевидно, неэквивалентны ни друг другу, ни другим поверхностям. Рассмотрим пустые множества: мнимый эллиптический цилиндр имеет одно асимптотическое направление, мнимый эллипсоид не имеет асимптотических направлений, пара мнимых параллельных плоскостей имеет целую плоскость асимптотических направлений. Кроме того, эллипсоид ограничен, в толичие от других нерассмотренных поверхностей. Для оставшихся типов имеет следующие таблицы (первая — для типа I, вторая — для III):

Название	**Наличие центров**	**Прямолинейные образующие**
однополостный гиперболоид	1	есть
двуполостный гиперболоид	1	нет
эллиптический параболоид	нет	нет
гиперболический параболоид	нет	есть

Название	**Наличие центров**	**Прямолинейные образующие**
эллиптический цилиндр	прямая	одно
гиперболический цилиндр	прямая	две плоскости
параболический цилиндр	нет	неважно[6]

34 Ортогональная классификация поверхностей второй степени. Приведение уравнения поверхности к каноническому виду

Теорема 34.1 (Метрическая классификация поверхностей второго порядка). Для любой квадрики сщуествует прямоугольная система координат, в которой она имеет одиниз следующих 17 видов:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ — **эллипсоид**

[6]Действительно, неважно, потому что нам нужно лишь показать отличие параболического цилиндра от остальных. Однако, если интересно, асимптотические направления параболического цилиндра — это все, параллельные плоскости $y = 0$.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ — **мнимый эллипсоид**

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **однополостный гиперболоид**

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **двуполостный гиперболоид**

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **конус**

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **мнимый конус**

7. $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p \geqslant q > 0)$ — **эллиптический параболоид**

8. $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p \geqslant q > 0)$ — **гиперболический параболоид**

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **эллиптический цилиндр**

10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **мнимый эллиптический цилиндр**

11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **пара мнимых пересекающихся плоскостей**

12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$ — **гиперболичекий цилиндр**

13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$ — **пара пересекающихся плоскостей**

14. $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ — **параболический цилиндр**

15. $y^2 = a^2$ $(a > 0)$ — **пара параллельных плоскостей**

16. $y^2 = -a^2$ $(a > 0)$ — **пара мнимых параллельных плоскостей**

17. $y^2 = 0$ — **пара совпавших плоскостей**

Теорема 34.2 (Веселов и Троицкий её не доказывают и я не буду). Есть прямоугольная система координат с тем же началом, в которой матрица квадратичной части имеет диагональный вид

$$Q^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственные значений матрицы Q.

Лемма 34.1. Для любого многочлена второй степени в пространстве существует один из следующих пяти видов:

1. $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tau$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$
2. $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z$ $(\lambda_1\lambda_2 b_3 \neq 0)$

3. $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$

4. $F = \lambda_1 x^2 + 2b_2 y$ $(\lambda_1 b_2 \neq 0)$

5. $F = \lambda_1 x^2 + \tau$ $(\lambda_1 \neq 0)$

Доказательство. Тут надо просто перебирать случаи и верить в себя. После диагонализации матрицы квадратичной формы вид F будет такой:

$$F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b_0 = 0.$$

Перебирать надо случаи, указанные в скобках в формулировке. Там выделяются полные квадраты и всё приводится к тому виду, к какому нам хочется (ну как хочется, нужно). ■

Теперь докажем теорему об ортогональной классификации.

Доказательство. К сожалению, я не успеваю тут расписать подробно. Примените предыдущую лемму и разберите случаи. Тут главное — помнить канонические уравнения, которые мы должны по итогу получить и помнить, что их должно быть 17. Всё получится. ■

Приводить к каноническому виду поверхности — почти то же самое, что и кривые, поэтому допишу этот кусок, если будет время (вряд ли).

35 Инварианты поверхности второй степени. Частичная классификация поверхностей второй степени с помощью инвариантов

Нам эту задачу давал на дом Александр Александрович (задачи 720 — 722 в задачнике Ю. М. Смирнова) и в тот вечер я не пожалел времени на аналитическую геометрию, поэтому здесь будет полная классификация поверхностей. На экзамене можно рассказать всё до полуинвариантов (их спрашивать не должны), но, если хотите удивить экзаменатора, расскажите про полуинварианты тоже, ему понравится.

Здесь (как и в случае поверхностей) ортогональными инвариантами будут являться коэффициенты характеристического многочлена матрицы квадратичной формы и определитель «большой» матрицы поверхности. Характеристический многочлен выглядит теперь так:

$$\chi(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda_3 + I_3,$$

где

$$I_1 := \operatorname{tr} Q = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 := \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix},$$
$$I_3 := \det Q = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad I_4 := \det \mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

А ещё здесь есть полуинварианты, которые являются инвариантами при заменах координат с общим началом:

$$I_3^* = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{pmatrix},$$
$$I_2^* = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Доказывается это так же, как и в двумерном случае — сначала доказываем аналог леммы 25.1, а потом так же (втупую, через арифметику и боль) доказываем аналоги теоремы 25.1:

Теорема 35.1. I_3^* является ортогональным инвариантом, если $I_3 = I_4 = 0$.

Теорема 35.2. I_2^* является ортогональным инвариантом, если $I_2 = I_3 = I_4 = I_3^* = 0$.

Итак, классификация:

Теорема 35.3. Следующая таблица даёт необходимые и достаточные условия принадлежности кривой второго порядка к одному из семнадцати видов в терминах инвариантов:

Эллипсоид
Мнимый эллипсоид
Мнимый конус
Однополостный гиперболоид
Двуполостный гиперболоид
Конус
Эллиптический параболоид
Гиперболический параболоид
Эллиптический цилиндр
Мнимый эллиптический цилин
Пара мнимых пересекающихся
Гиперболический цилиндр
Пара действительных пересека
Параболический цилиндр
Пара действительных параллел
Пара мнимых параллельных пл
Пара совпавших плоскостей

Доказательство. Всё, что до черты — это то, что вас обязаны спросить на экзамене, это знать надо. После черты — полуинварианты, их можно не знать. Я умею доказывать красиво всё, что до черты, после черты мы поступаем аналогично случаю для кривых (там разобран только эллипс, но в остальных случаях и даже здесь всё правда аналогично).

Итак, как же доказывать это красиво. А вот как. У всего, что мы умеем классифицировать без полуинварианта есть нечто общее — у них нет линейной части (только квадратичная и свободный коэффициент), поэтому их однозначно определяет знак коэффициентов квадратичной части и знак свободного члена. А коэффициенты квадратичной части — это корни характеристического уравнения и все наши требования к нему будут выражаться в формулировках вроде «у этого уравнения должно быть 3 корня одного знака» (кстати, это будет эллипсоид или мнимый эллипсоид). А это уже вполне алгебраическое условие на коэффициенты многочлена. А эти коэффициенты как раз являются ортогональными инвариантами I_1, I_2 и I_3. Потом нам нужно согласовать знак корней со знаком свободного члена. Например, в случае эллипсоида три корня должны быть одного знака, а свободный коэффициент — другого. Это выражается в условии $I_4 < 0$. Для мнимого эллипсоида — наоборот, $I_4 > 0$, потому что теперь и свободный член должен быть такого же знака с корнями. Так разбираются все случаи. А всё, что с полуинвариантами, делается перебором. ■

36 Плоскость, сопряженная к направлению для поверхности второй степени. Касательные плоскости к поверхности второй степени

Всё то же самое, что и в двумерном случае с точностью до количества букв.

37 Прямолинейные образующие поверхностей второй степени

Определение 37.1. Назовём **прямолинейной образующей** поверхности прямую, целиком в ней содержащуюся. Как правило, это понятие не применяется к распадающимся поверхностям.

Прямолинейные образующие есть только у тех кривых, у которых в уравнениях выделяются разности квадратов. Это

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}}_{\text{однополостный гиперболоид}}, \qquad \underbrace{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z}_{\text{гиперболический параболоид}}\ , \quad \underbrace{\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}_{\text{конус}}.$$

Теорема 37.1. Прямолинейные образующие любой поверхности имеют асимптотическое направление.

Доказательство. Прямая с этим направлением (по определению) содержится в поверхности, а если её направление неасимптотическое, то она либо её не пересекает, либо пересекает в двух точках (быть может, совпавших). Доказательство этих утверждений такое же, как и в плоскости. ∎

Утверждение ниже (с почти неизменным доказательством) будет верно и для однополостного гиперболоида (а конус нам неинтересен).

Теорема 37.2. Гиперболический параболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства, и эти две прямые пересекаются ровно по этой точке. Две различные прямые из одного семейства скрещиваются, а из разных — пересекаются.

Доказательство. Асимптотические направления (α, β, γ) гиперболического параболоида находятся из уравнения: $\dfrac{\alpha^2}{p}-\dfrac{\beta^2}{q}=0$, т. е. лежат в плоскостях

$$\pi_1 : \frac{\alpha}{\sqrt{p}}-\frac{\beta}{\sqrt{q}}=0, \quad \pi_2 : \frac{\alpha}{\sqrt{p}}+\frac{\beta}{\sqrt{q}}=0.$$

∎