

ПРАКТИКУМ ПО ЭВМ

ОТЧЁТ

Выполнила студентка 422 группы  
Резанова Анфиса Сергеевна

Москва, 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задача 1</b>	<b>2</b>
1.1	Машинное $\epsilon$ . . . . .	2
1.2	$X = X + 1$ . . . . .	2
1.3	$Y = 10^{20} + Y$ . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Задача 2</b>	<b>3</b>
2.1	Прямое рекуррентное соотношение . . . . .	3
2.2	Обратное рекуррентное соотношение . . . . .	3
2.3	Интегральная сумма . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Метод Эйлера</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Задача 4</b>	<b>4</b>
4.1	$y = x^2$ . . . . .	5
4.2	функция из 3 задачи . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Метод Эйлера использовать нельзя</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Метод Рунге-Кутты</b>	<b>11</b>
6.1	со своей функцией . . . . .	11
6.2	гармонический осциллятор . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Выбор шага</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Основная задача</b>	<b>14</b>

# 1 Задача 1

На прямой континуум чисел, а в ЭВМ их конечное число (как минимум из-за конечной памяти). Вероятность попадания конкретного числа из множества мощности континуум в конечное множество чисел нулевая, потому что точка множество нулевой меры. Поэтому чтобы как-либо работать с числами в ЭВМ есть “сетка”: если два числа расположены в одной ячейке сетки, то они неразличимы. Равномерная сетка неудобна, потому что в таком случае очень большие при этом числа будут различаться довольно точно, но меньшие по модулю и при этом более популярные числа из окрестности нуля будут различаться с той же погрешностью, поэтому вводится относительная погрешность, а именно вблизи нуля самая мелкая сетка с размером – машинным эпсилон, и чем дальше от нуля, тем крупнее сетка.

## 1.1 Машинное эпсилон

```
while(1+eps>1){eps/=1.1;}
```

Для типа double машинное эпсилон  $\epsilon = 5.14054 \cdot 10^{-20}$

## 1.2 $X = X + 1$

Минимальное  $X$ , такое что  $X = X + 1$ :

```
while((1+x) != x){x *=k;}
```

k	X	t, c
1.1	$1.94532 \cdot 10^{19}$	0.063
2	$1.84467 \cdot 10^{19}$	0,047

## 1.3 $Y = 10^{20} + Y$

Минимальное  $Y$ , такое что  $Y = 10^{20} + Y$ :

```
while((pow(10,20)+y) != y){y *=k; }
```

k	Y	t, c
1.1	$2.80046 \cdot 10^{39}$	0.063
2	$2.72226 \cdot 10^{19}$	0,047

В таблицах  $k$  - коэффициент при умножении в цикле поиска  $X$ ,  
 $t$  - время работы программы.

## 2 Задача 2

Вычисление интеграла на отрезке  $[0,1]$  от функции

$$f(x) = \frac{x^n}{x+6}.$$

### 2.1 Прямое рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{1}{n} - 6I_{n-1}$$

$$n = 31: I_{31} = -7.09911 \cdot 10^7$$

### 2.2 Обратное рекуррентное соотношение

$$I_{n-1} = \frac{1}{6n} - \frac{I_n}{6}$$

Положим  $I_{62} = 0$ , тогда  $I_{31} = 0.00462905$

### 2.3 Интегральная сумма

$$n = 1000, \delta = \frac{1}{n}, x = i\delta$$

$$S_n = \delta \sum_{i=1}^n f(x),$$

$$I_{31} = 0.00448359$$

## 3 Метод Эйлера

$$f(x) = 5\cos(8x) + e^{3x^2} + \frac{1}{\cos(\cos(x))}$$

Отрезок  $[0,1]$ ,  $x_0 = 1$

$$f'(x) = -40\sin(8x) + 6x \cdot e^{3x^2} - \frac{\sin(x) \cdot \operatorname{tg}(\cos(x))}{\cos(\cos(x))},$$

$$R_1 = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right|,$$

$$R_2 = \frac{h}{2} + 2\frac{\varepsilon}{h}, \varepsilon = 10^{-8}.$$

h	$R_1$	$R_2$
1	162650	0.5
0.1	62.1068	0.0500002
0.01	4.60882	0.005002
0.001	0.447106	0.00052
0.0001	0.0445748	0.00025
$10^{-5}$	0.00445612	0.002005
$10^{-6}$	0.000445591	0.0200005
$10^{-7}$	4.46501e-05	0.2
$10^{-8}$	4.4784e-06	2
$10^{-9}$	9.19181e-06	20
$10^{-10}$	2.07988e-05	200
$10^{-11}$	0.000172396	2000
$10^{-12}$	0.00666217	20000
$10^{-13}$	0.0776541	200000
$10^{-14}$	0.109471	$2 \cdot 10^6$
$10^{-15}$	10.152	$2 \cdot 10^7$
$10^{-16}$	63.5061	$2 \cdot 10^8$
$10^{-17}$	88.0913	$2 \cdot 10^9$
$10^{-18}$	1604.07	$2 \cdot 10^{10}$
$10^{-19}$	16763.8	$2 \cdot 10^{11}$
$10^{-20}$	168361	$2 \cdot 10^{12}$

## 4 Задача 4

$$y_K = y_0 + hy'(t_k), [t_0, T]$$

## 4.1 $y = x^2$

$y = x^2, [t_0, T] = [0, 10]$

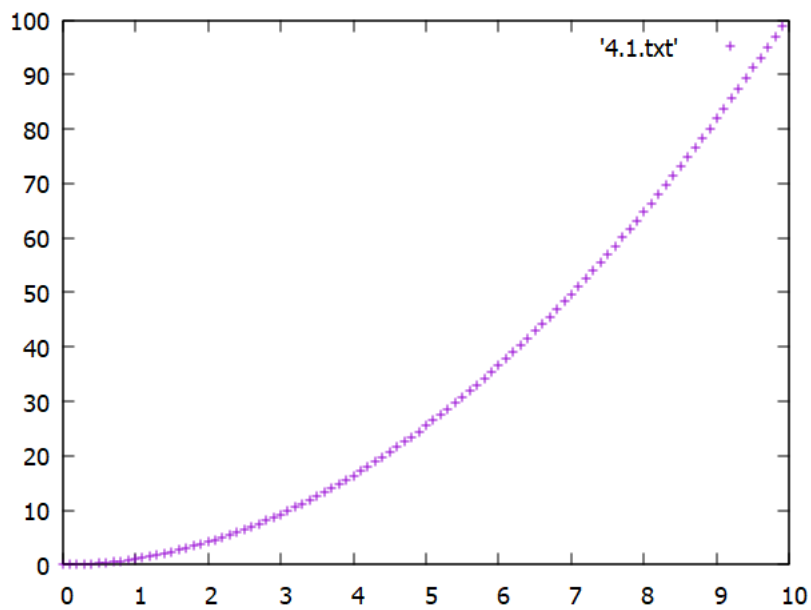


Рис.1  $h = 0.1$ , ошибка  $|y_k - T^2| = 1$

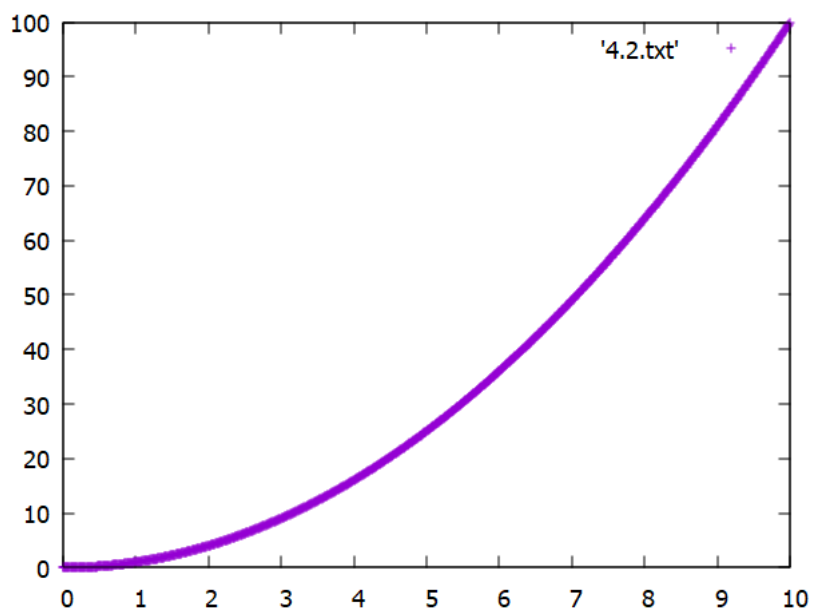


Рис.2  $h = 0.01$ , ошибка  $|y_k - T^2| = 0.1$

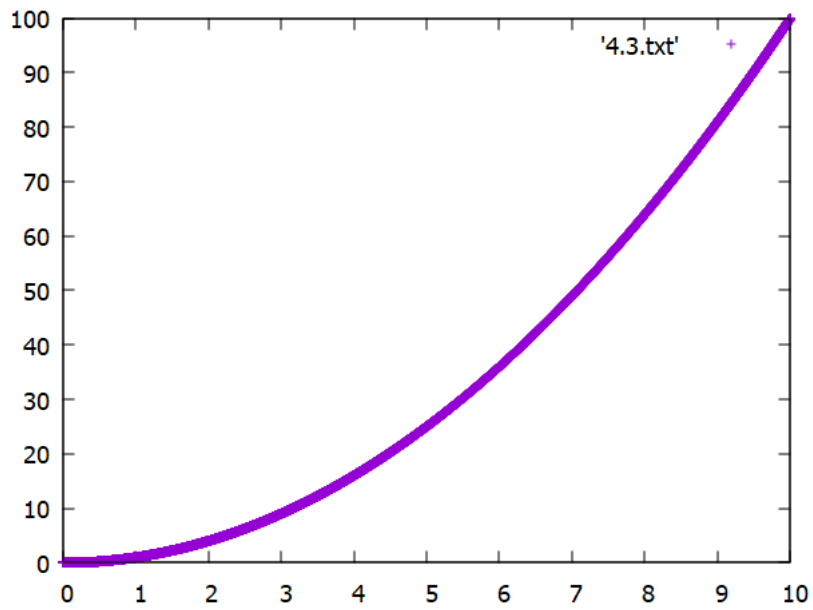


Рис.3  $h = 0.001$ , ошибка  $|y_k - T^2| = 0,01$

## 4.2 функция из 3 задачи

$$f(x) = 5\cos(8x) + e^{3x^2} + \frac{1}{\cos(\cos(x))}, [t_0, T] = [0; 2.5]$$

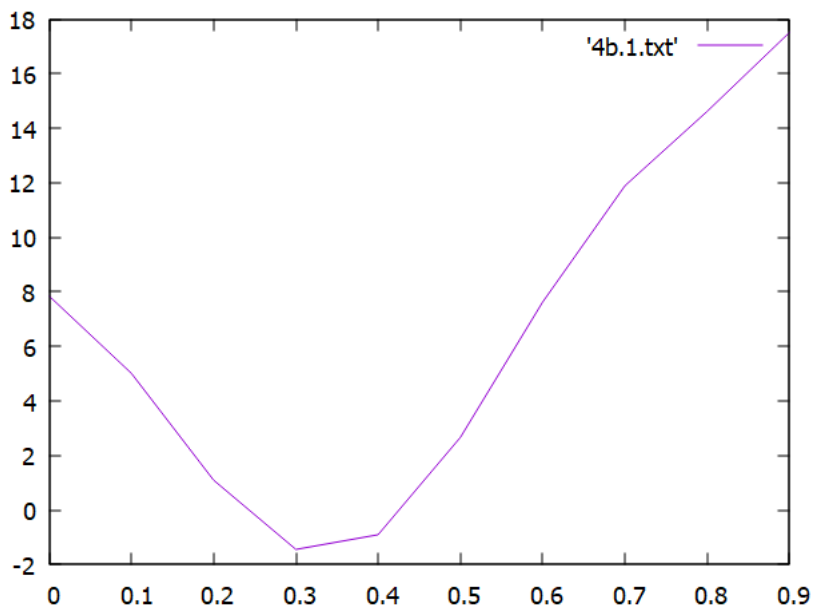


Рис.4  $h = 0.1$ , ошибка  $|y_k - f(T)| = 3.01484$

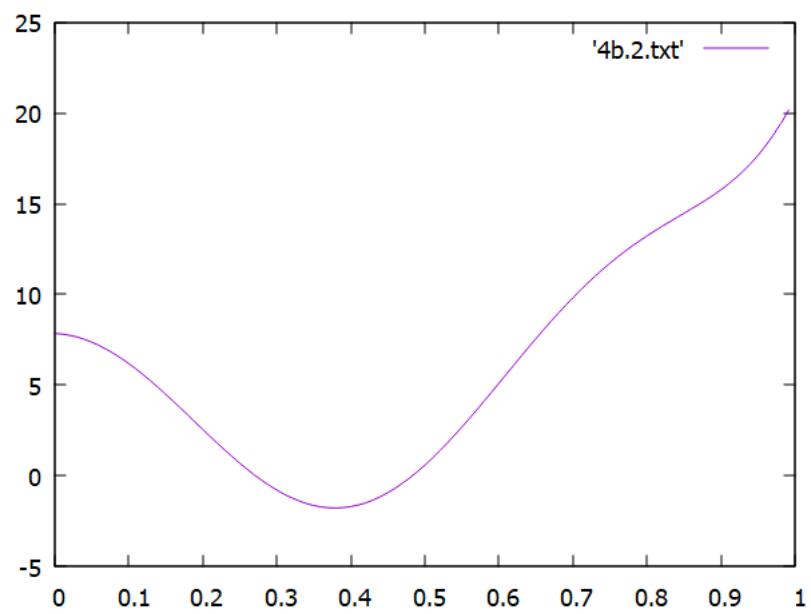


Рис.5  $h = 0.01, |y_k - f(T)| = 0.391685$

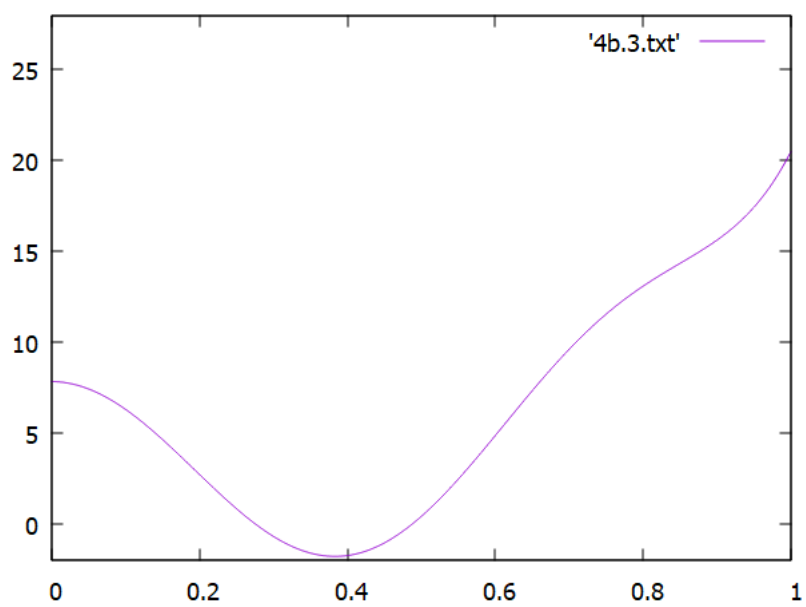


Рис.6  $h = 0.001, |y_k - f(T)| = 0.0400745$



## 5 Метод Эйлера использовать нельзя

h	T	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $
0.1	$1\pi$	0.0560329	2.17124
0.1	$10\pi$	0.097298	3.79211
0.1	$100\pi$	$5.17628 \cdot 10^6$	$3.32102 \cdot 10^6$
0.1	$1000\pi$	$6.29136 \cdot 10^{67}$	$4.242622 \cdot 10^{67}$
0.1	$10000\pi$	nan	nan
0.1	$100000\pi$	nan	nan
0.01	$1\pi$	0.00843405	2.01584
0.01	$10\pi$	0.00354095	0.170098
0.01	$100\pi$	0.0468341	3.80989
0.01	$1000\pi$	644590	$6.59925 \cdot 10^6$
0.01	$10000\pi$	$1.41924 \cdot 10^{68}$	$8.26089 \cdot 10^{67}$
0.01	$100000\pi$	nan	nan
0.01	$1000000\pi$	nan	nan
0.001	$1\pi$	0.000406938	2.00157
0.001	$10\pi$	$6.39894 \cdot 10^{-5}$	0.015832
0.001	$100\pi$	0.000737064	0.170089
0.001	$1000\pi$	0.00337112	3.81047
0.001	$10000\pi$	66406.8	$6.63524 \cdot 10^6$
0.001	$100000\pi$	$1.71934 \cdot 10^{67}$	$1.64599 \cdot 10^{68}$
0.001	$1000000\pi$	nan	nan

Графики  $z(x)$

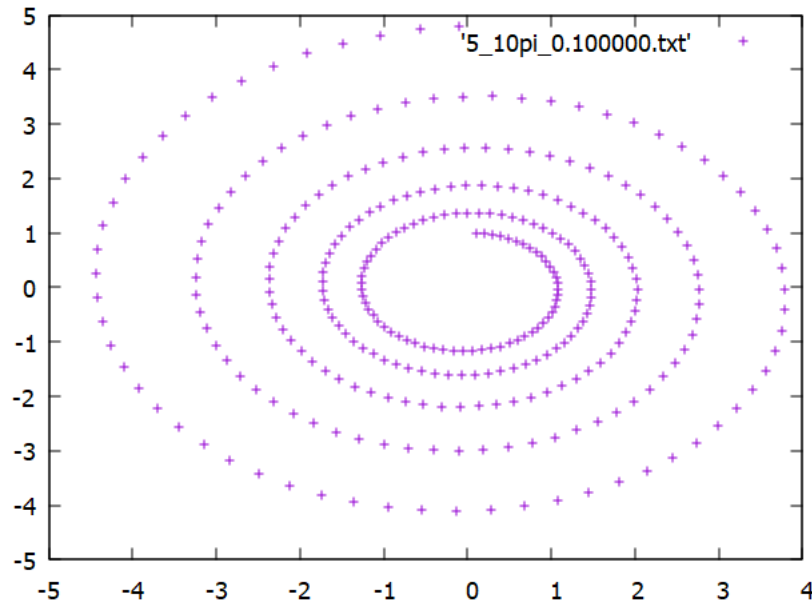


Рис. 7  $T = 10\pi, h = 0.1$

Ошибка  $|\tilde{x}(T) - x(T)| = 0.097298, |\tilde{z}(T) - z(T)| = 3.79211$

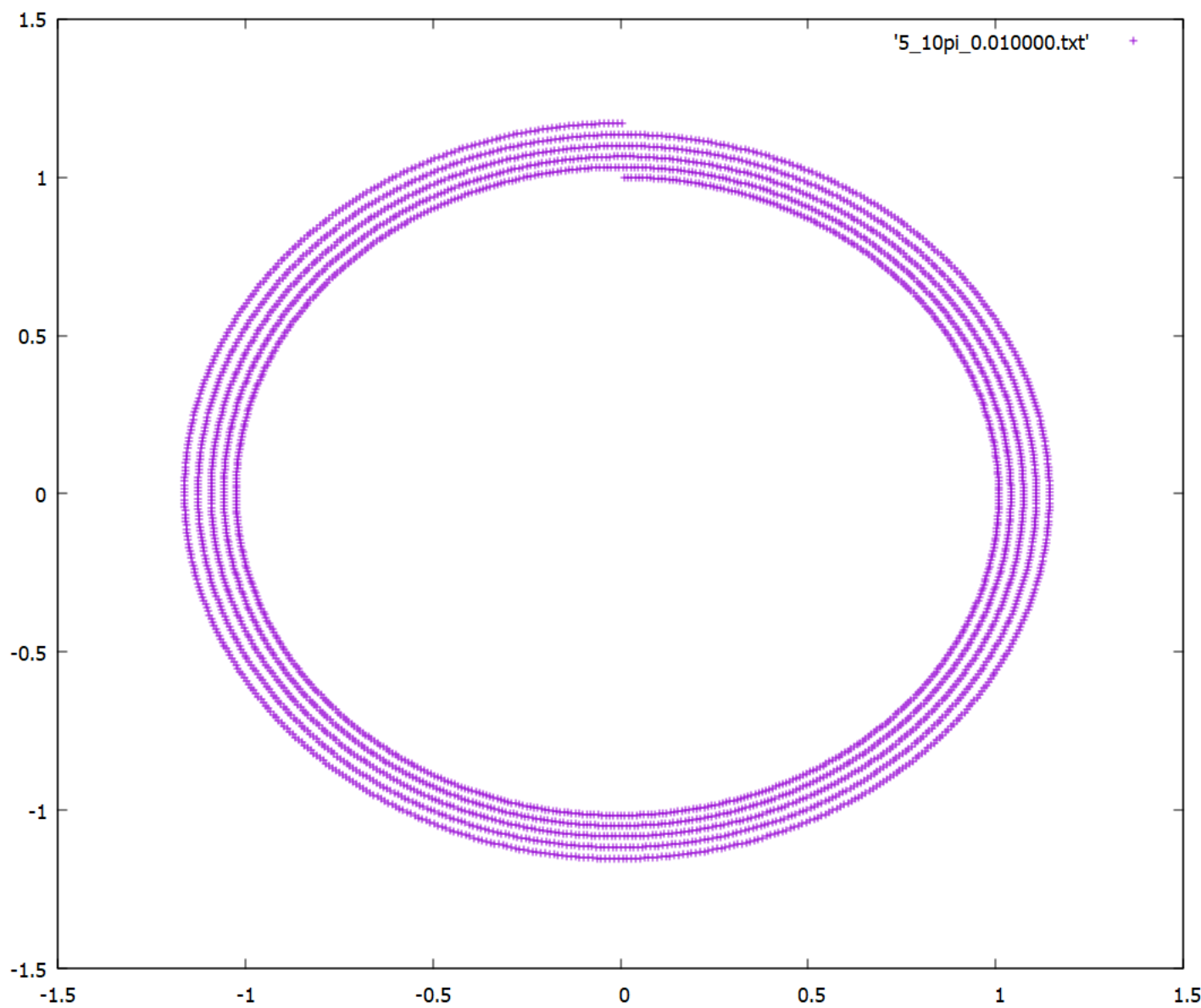


Рис. 8  $T = 10\pi, h = 0.01$   
 Ошибка  $|\tilde{x}(T) - x(T)| = 0.00354095, |\tilde{z}(T) - z(T)| = 0.170098$

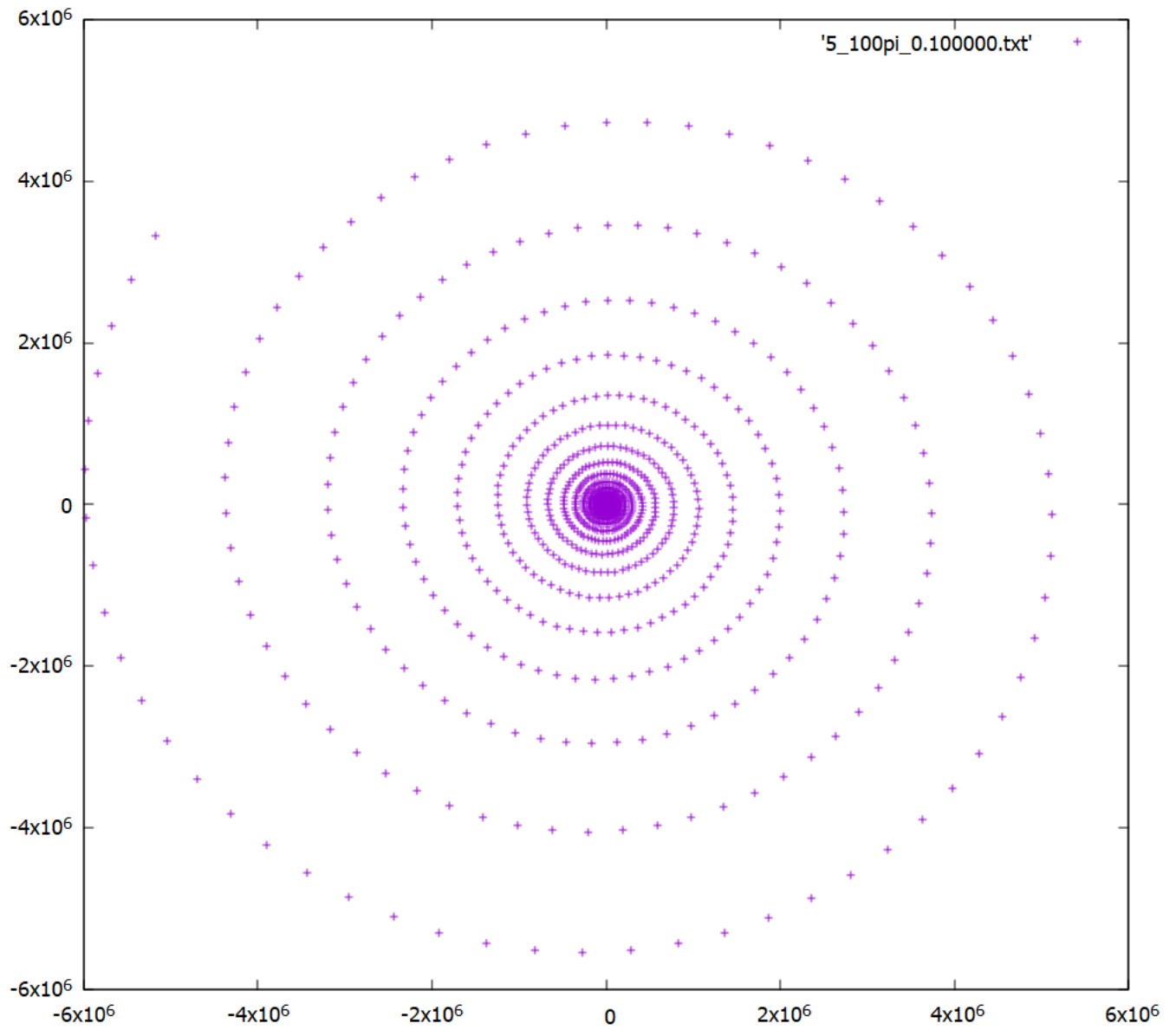


Рис. 9  $T = 100\pi, h = 0.1$   
 Ошибка  $|\tilde{x}(T) - x(T)| = 5.17628 \cdot 10^6, |\tilde{z}(T) - z(T)| = 3.32102 \cdot 10^6$

```
for(int n=0; n < wπ/h; n++){
     $x_K = x + h \cdot z;$ 
     $z_K = z - h \cdot x;$ 
     $x = x_K;$ 
     $z = z_K;$ 
}
```

## 6 Метод Рунге-Кутта

$c_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	$a_{i6}$	$b_7$
0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{45}{19372}$	$\frac{-56}{25360}$	$\frac{32}{64448}$	$\frac{-212}{729}$			
$\frac{5}{9}$	$\frac{6561}{9017}$	$\frac{2187}{-355}$	$\frac{6561}{46732}$	$\frac{729}{49}$	$\frac{-5103}{18656}$		
1	$\frac{3168}{35}$	33	$\frac{5247}{500}$	$\frac{176}{125}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
1	$\frac{384}{384}$	0	$\frac{1113}{1113}$	$\frac{192}{192}$	$\frac{6784}{6784}$	$\frac{84}{84}$	
$y_1$	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	

### 6.1 со своей функцией

h	$ \tilde{y}(T) - y(T) $	$ y_{rk}(T) - y(T) $
0.1	3.01484	$5.42422 \cdot 10^{-7}$
0.01	0.391685	$6.34346 \cdot 10^{-12}$
0.001	0.0400745	$6.56333 \cdot 10^{-14}$
0.0001	0.00401651	$7.53717 \cdot 10^{-12}$
$10^{-5}$	0.000401741	$1.53966 \cdot 10^{-10}$

### 6.2 гармонический осциллятор

Сравнение метода погрешности для метода Эйлера и Рунге-Кутта 6 порядка

h	T	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ x_{rk}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$ z_{rk}(T) - z(T) $
0.1	$10\pi$	0.097298	0.0839745	3.79211	0.00353218
0.1	$100\pi$	$5.17628 \cdot 10^6$	0.0407235	$3.32102 \cdot 10^6$	0.000830409
0.1	$1000\pi$	$6.29136 \cdot 10^{67}$	0.00734777	$4.242622 \cdot 10^{67}$	$3.5624 \cdot 10^{-5}$
0.01	$10\pi$	0.00354095	0.00407345	0.170098	$8.29654 \cdot 10^{-6}$
0.01	$100\pi$	0.0468341	0.000734641	3.80989	$2.69857 \cdot 10^{-7}$
0.01	$1000\pi$	644590	0.00734634	$6.59925 \cdot 10^6$	$2.69848 \cdot 10^{-5}$
0.001	$10\pi$	$6.39894 \cdot 10^{-5}$	7.34641e-05	0.015832	$2.69849 \cdot 10^{-9}$
0.001	$100\pi$	0.000737064	0.000734641	0.170089	$2.69849 \cdot 10^{-7}$
0.001	$1000\pi$	0.00337112	0.00034641	3.81047	$5.99999 \cdot 10^{-8}$

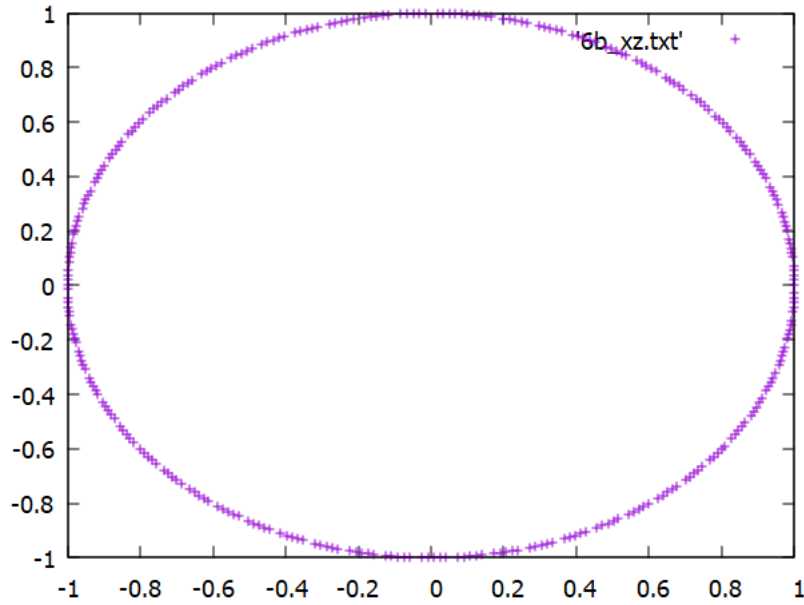


Рис.10  $T = 10\pi, h = 0.1$

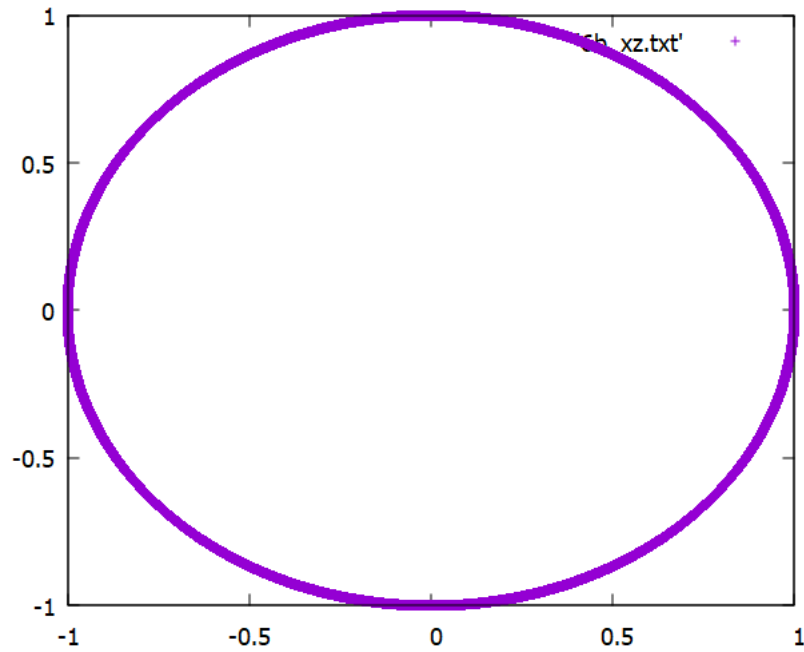


Рис.11  $T = 1000\pi, h = 0.001$

## 7 Выбор шага

Решаем систему  $\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = -x \end{cases}$  на отрезке  $[0, T]$  с начальными условиями  $x_0 = 0, z_0 = 1$  методом Рунге Кутты 5 порядка. На каждом шаге определяем подходящее  $h$  в зависимости от требуемой точности.  $tol$  - величина допустимой погрешности.

$$h_{\text{new}} = h \min(fac_{\text{max}}, \max(fac_{\text{min}}, fac \cdot \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{6}}));$$

$$fac_{\text{max}} = 1.5, fac_{\text{min}} = 0.7, fac = 0.9$$

$$h_{\text{new}} = h \cdot \min(1.5, \max(0.7, 0.9 \cdot (\frac{\text{tol}}{\text{err}})^{\frac{1}{6}}));$$

T = 10π:

tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$N_{\text{steps}}$	Step
$10^{-7}$	$1.63004e - 07$	$6.24647e - 07$	213	0.148279
$10^{-9}$	$6.55247e - 10$	$6.40948e - 09$	533	0.0593927
$10^{-11}$	$2.60218e - 12$	$6.43409e - 11$	1336	0.023726

T = 100π:

tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$N_{\text{steps}}$	Step
$10^{-7}$	$1.6381e - 06$	$6.27567e - 06$	2111	0.148898
$10^{-9}$	$6.55587e - 09$	$6.41309e - 08$	5301	0.0593097
$10^{-11}$	$2.63527e - 11$	$6.43446e - 10$	13313	0.0236191

T = 1000π:

tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$N_{\text{steps}}$	Step
$10^{-7}$	$1.63881e - 05$	$6.27839e - 05$	21090	0.14897
$10^{-9}$	$6.55712e - 08$	$6.41346e - 07$	52981	0.0593012
$10^{-11}$	$2.76667e - 10$	$6.43451e - 09$	133083	0.0236084

T = 10000π:

tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$N_{\text{steps}}$	Step
$10^{-7}$	0.000163854	0.000627885	210872	0.148982
$10^{-9}$	$6.54449e - 07$	$6.41349e - 06$	529779	0.0593005
$10^{-11}$	$2.80155e - 09$	$6.43451e - 08$	$1.33078e + 06$	0.0236073

T = 100000π:

tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	$N_{\text{steps}}$	Step
$10^{-7}$	0.00163481	0.00627992	$2.10751e + 06$	0.149067
$10^{-9}$	$6.53739e - 06$	$6.41349e - 05$	$5.29772e + 06$	0.0593008
$10^{-11}$	$2.10524e - 08$	$6.43451e - 07$	$1.33078e + 07$	0.0236072

Числа Рунге:

$$\begin{cases} R_x = \left| \frac{x_{10^{-7}} - x_{10^{-9}}}{x_{10^{-9}} - x_{10^{-11}}} \right| \approx 100^{\frac{s}{s+1}}; \\ R_z = \left| \frac{z_{10^{-7}} - z_{10^{-9}}}{z_{10^{-9}} - z_{10^{-11}}} \right| \approx 100^{\frac{s}{s+1}} \end{cases}$$

T	$R_x(T)$	$R_z(T)$
10π	248.756	97.4349
100π	249.872	97.8388
1000π	249.983	97.876
10000π	250.441	97.8828
100000π	249.875	97.8996

## 8 Основная задача

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + x^3 = \beta \cos(t) \\ \alpha \in \{0.2, 1.0\}, \beta \in \{0.3, 1.0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y - x^3 + \beta \cos(t) \\ \alpha \in \{0.2, 1.0\}, \beta \in \{0.3, 1.0\}. \end{cases}$$

Задача решается методом стрельбы. За начальные условия в задаче Коши взяты параметры пристрелки  $\bar{\alpha} = \{x, T\}$ . Начальный момент времени  $t = 0$ .

Особая точка системы  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , из неё выпускаем луч  $y = 0$ , на котором, двигая  $x$ , ищем точку и период  $T$  периодического решения.

$$\text{Невязка: } \bar{X}(\bar{\alpha}) = \begin{cases} |x(T) - x| \\ |y(T) - y| \end{cases}.$$

Норму невязок оцениваем величиной  $\varepsilon = 10^{-7}$ .  $\Delta = 10^{-8}$ .

Решаем систему  $\|\bar{X}(\bar{\alpha})\| = \bar{0}$  методом Ньютона: через итерационный процесс с параметрами пристрелки, по которым составляем невязки, дальше по ним решается СЛАУ для поиска новых параметров пристрелки  $\alpha_i$  для перехода на следующую итерацию. В итоге находим такие  $\alpha_i$ , для которых  $\|\bar{X}(\bar{\alpha})\| = \bar{0}$ , то есть получено периодическое решение. Чтобы новые невязки не оказывались дальше от необходимой точки, чем предыдущие, присваиваем  $\alpha_{new} = \alpha + \gamma \cdot h$ , где  $h$  - решение СЛАУ, а  $\gamma$  делится пополам до тех пор, пока не приближаемся к периодическому решению лучше, чем за предыдущий шаг.

## Список литературы

- [1] Hajrer E., Nyorsett S., Vanner G. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи* - 1990 - 512с.