Практикум по ЭВМ

Отчёт

Выполнила студентка 422 группы
Резанова Анфиса Сергеевна

Москва, 2021

Содержание

1 Задача 1

На прямой континуум чисел, а в ЭВМ их конечное число (как минимум из-за конечной памяти). Вероятность попадания конкретного числа из множества мощности континуум в конечное множество чисел нулевая, потому что точка множество нулевой меры. Поэтому чтобы как-либо работать с числами в ЭВМ есть "сетка": если два числа расположены в одной ячейке сетки, то они неразличимы. Равномерная сетка неудобна, потому что в таком случае очень большие при этом числа будут различаться довольно точно, но меньшие по модулю и при этом более популярные числа из окрестности нуля будут различаться с той же погрешностью, поэтому вводится относительная погрешность, а именно вблизи нуля самая мелкая сетка с размером – машинным эпсилон, и чем дальше от нуля, тем крупнее сетка.

1.1 Машинное эпсилон

while(1+eps>1){eps/=1.1;}

Для типа double машинное эпсилон $\epsilon = 5.14054 \cdot 10^{-20}$

1.2 $X = X + 1$

Минимальное X, такое что $X = X + 1$:

while((1+x) != x){x *=k;}

k	X	t, c
1.1	$1.94532 \cdot 10^{19}$	0.063
2	$1.84467 \cdot 10^{19}$	0,047

1.3 $Y = 10^{20} + Y$

Минимальное Y, такое что $Y = 10^{20} + Y$:

while((pow(10,20)+y) != y){y *=k; }

k	Y	t, c
1.1	$2.80046 \cdot 10^{39}$	0.063
2	$2.72226 \cdot 10^{19}$	0,047

В таблицах k - коэффициент при умножении в цикле поиска X,
t - время работы программы.

2 Задача 2

Вычисление интеграла на отрезке [0,1] от функции

$$f(x) = \frac{x^n}{x+6}.$$

2.1 Прямое рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{1}{n} - 6I_{n-1}$$

n = 31: $I_{31} = -7.09911 \cdot 10^7$

2.2 Обратное рекуррентное соотношение

$$I_{n-1} = \frac{1}{6n} - \frac{I_n}{6}$$

Положим $I_{62} = 0$, тогда $I_{31} = 0.00462905$

2.3 Интегральная сумма

$n = 1000, \delta = \frac{1}{n}, x = i\delta$

$$S_n = \delta \sum_{i=1}^{n} f(x),$$

$I_{31} = 0.00448359$

3 Метод Эйлера

$$f(x) = 5cos(8x) + e^{3x^2} + \frac{1}{cos(cos(x))}$$

Отрезок [0,1], $x_0 = 1$

$$f'(x) = -40sin(8x) + 6x \cdot e^{3x^2} - \frac{sin(x) \cdot tg(cos(x))}{cos(cos(x))},$$

$$R_1 = |f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}|,$$

$$R_2 = \frac{h}{2} + 2\frac{\varepsilon}{h}, \varepsilon = 10^{-8)}.$$

h	R_1	R_2
1	162650	0.5
0.1	62.1068	0.0500002
0.01	4.60882	0.005002
0.001	0.447106	0.00052
0.0001	0.0445748	0.00025
10^{-5}	0.00445612	0.002005
10^{-6}	0.000445591	0.0200005
10^{-7}	4.46501e-05	0.2
10^{-8}	4.4784e-06	2
10^{-9}	9.19181e-06	20
10^{-10}	2.07988e-05	200
10^{-11}	0.000172396	2000
10^{-12}	0.00666217	20000
10^{-13}	0.0776541	200000
10^{-14}	0.109471	$2 \cdot 10^6$
10^{-15}	10.152	$2 \cdot 10^7$
10^{-16}	63.5061	$2 \cdot 10^8$
10^{-17}	88.0913	$2 \cdot 10^9$
10^{-18}	1604.07	$2 \cdot 10^{10}$
10^{-19}	16763.8	$2 \cdot 10^{11}$
10^{-20}	168361	$2 \cdot 10^{12}$

4 Задача 4

$y_K = y_0 + hy'(t_k), [t_0, T]$

4.1 $y = x^2$

$y = x^2, [t_0, T] = [0, 10]$

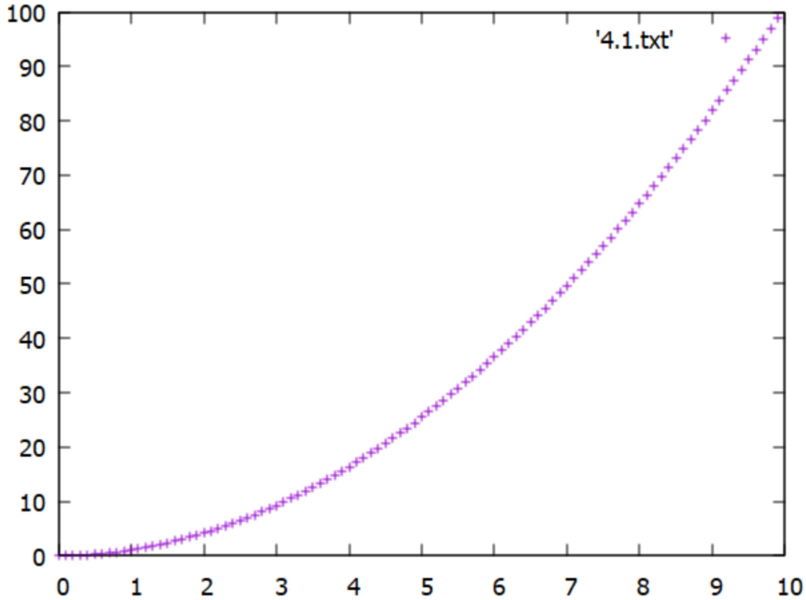

Рис.1 $h = 0.1$, ошибка $|y_k - T^2| = 1$

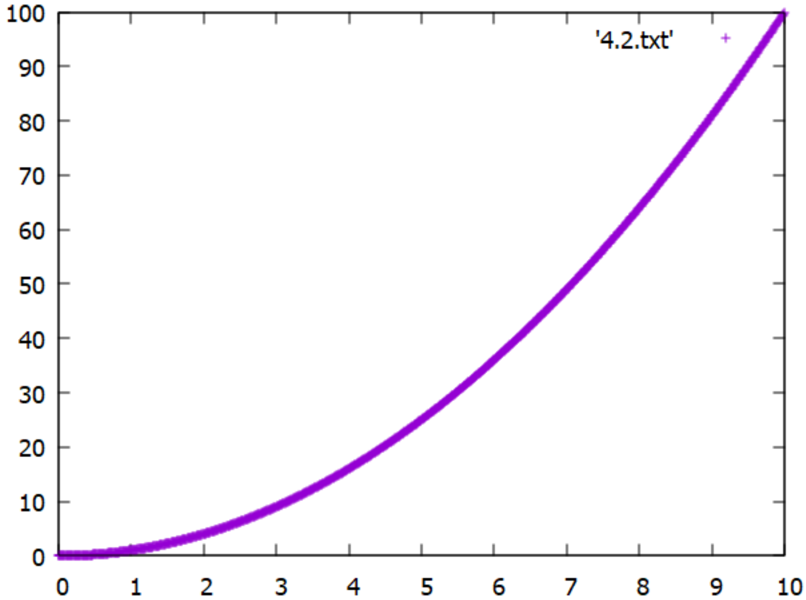

Рис.2 $h = 0.01$, ошибка $|y_k - T^2| = 0.1$

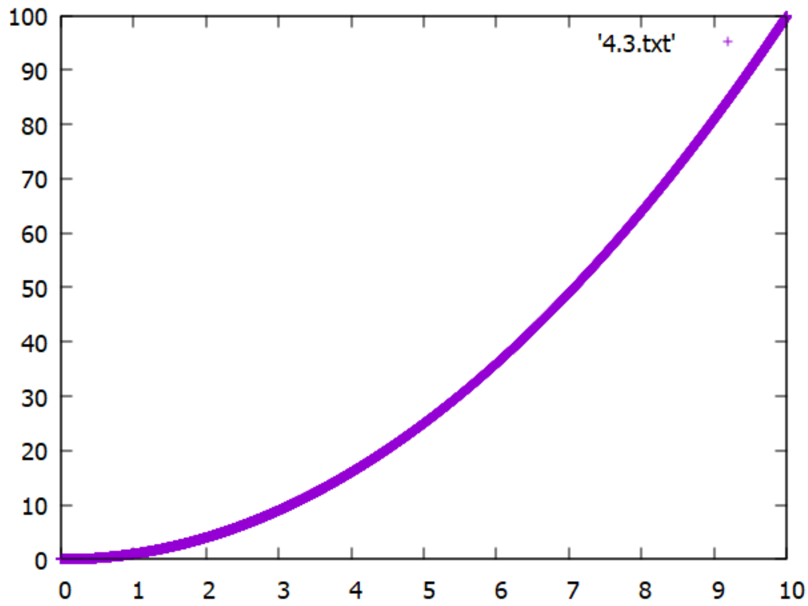

Рис.3 $h = 0.001$, ошибка $|y_k - T^2| = 0,01$

4.2 функция из 3 задачи

$$f(x) = 5cos(8x) + e^{3x^2} + \frac{1}{cos(cos(x))}, [t_0, T] = [0; 2.5]$$

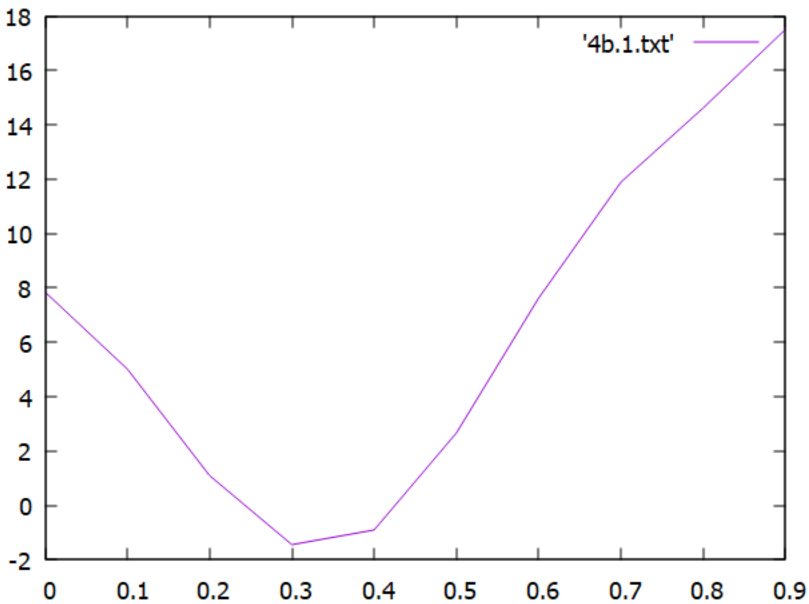

Рис.4 $h = 0.1$, ошибка $|y_k - f(T)| = 3.01484$

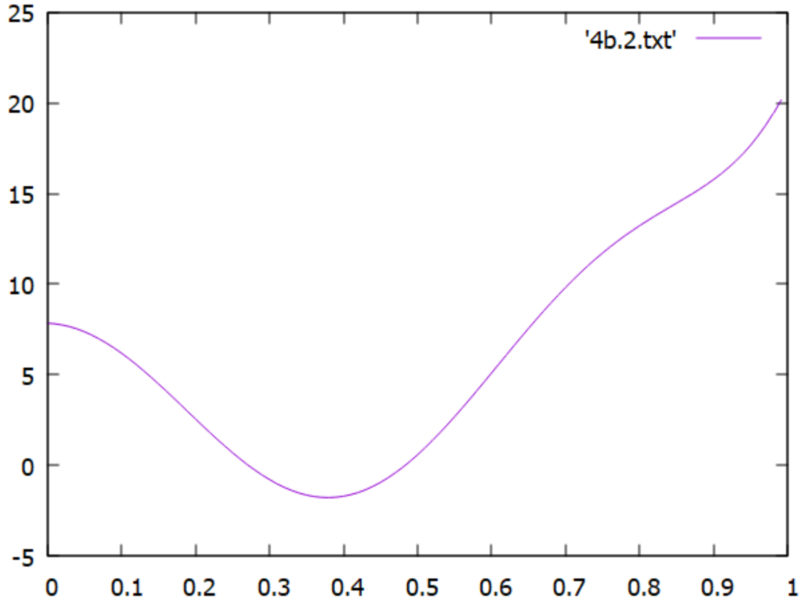

Рис.5 $h = 0.01, |y_k - f(T)| = 0.391685$

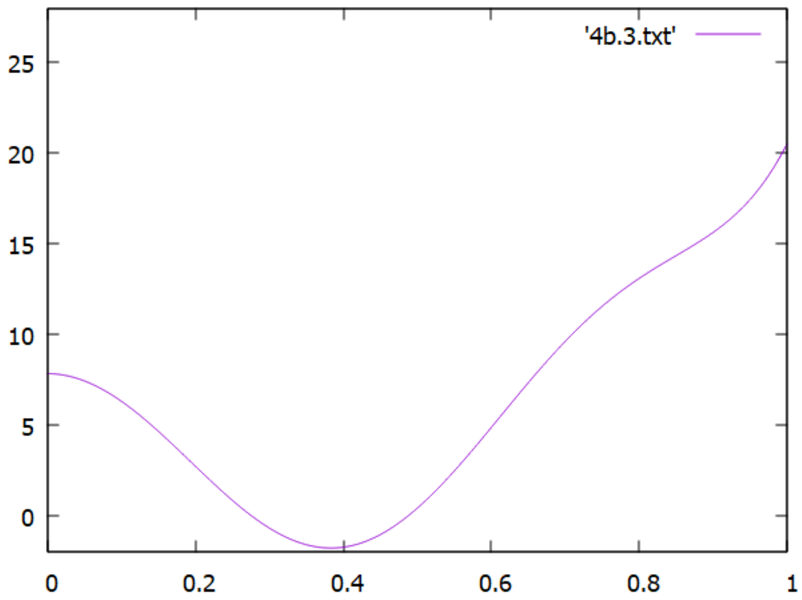

Рис.6 $h = 0.001, |y_k - f(T)| = 0.0400745$

5 Метод Эйлера использовать нельзя

h	T	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$
0.1	1π	0.0560329	2.17124
0.1	10π	0.097298	3.79211
0.1	100π	$5.17628 \cdot 10^{6}$	$3.32102 \cdot 10^{6}$
0.1	1000π	$6.29136 \cdot 10^{67}$	$4.242622 \cdot 10^{67}$
0.1	10000π	nan	nan
0.1	100000π	nan	nan
0.01	1π	0.00843405	2.01584
0.01	10π	0.00354095	0.170098
0.01	100π	0.0468341	3.80989
0.01	1000π	644590	$6.59925 \cdot 10^{6}$
0.01	10000π	$1.41924 \cdot 10^{68}$	$8.26089 \cdot 10^{67}$
0.01	100000π	nan	nan
0.01	1000000π	nan	nan
0.001	1π	0.000406938	2.00157
0.001	10π	$6.39894 \cdot 10^{-5}$	0.015832
0.001	100π	0.000737064	0.170089
0.001	1000π	0.00337112	3.81047
0.001	10000π	66406.8	$6.63524 \cdot 10^{6}$
0.001	100000π	$1.71934 \cdot 10^{67}$	$1.64599 \cdot 10^{68}$
0.001	1000000π	nan	nan

Графики z(x)

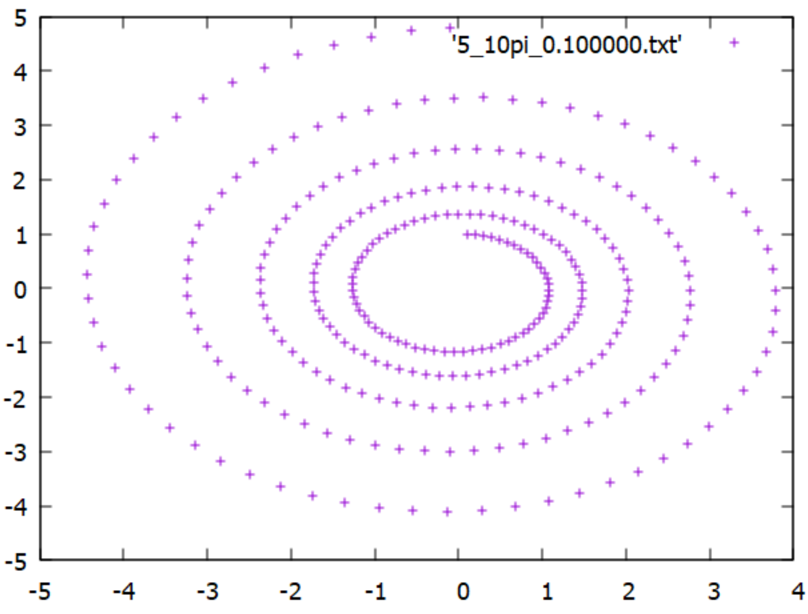

Рис. 7 $T = 10\pi, h = 0.1$
Ошибка $\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert = 0.097298, \lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert = 3.79211$

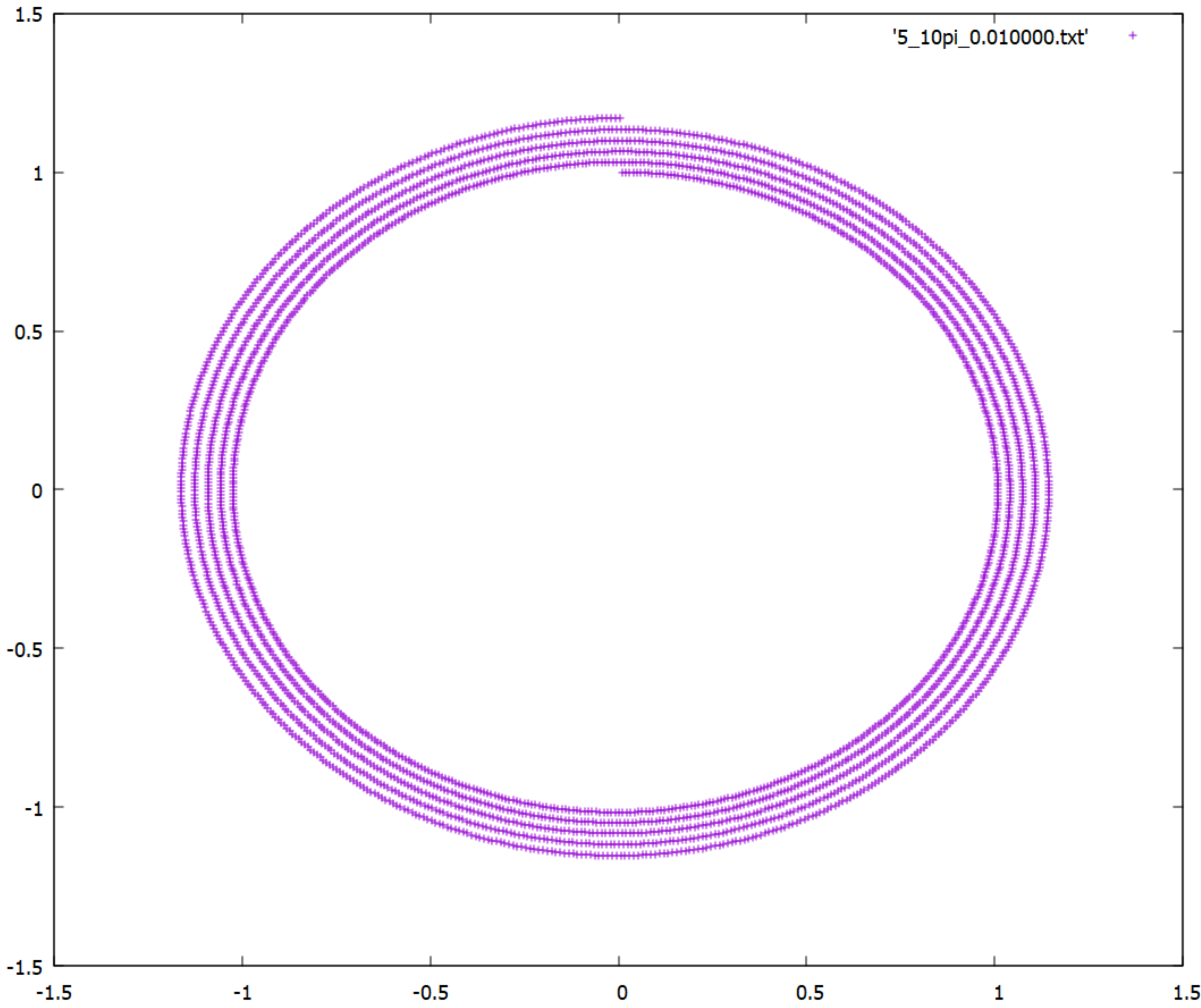

Рис. 8 $T = 10\pi, h = 0.01$
Ошибка $|\widetilde{x}(T) - x(T)| = 0.00354095, |\widetilde{z}(T) - z(T)| = 0.170098$

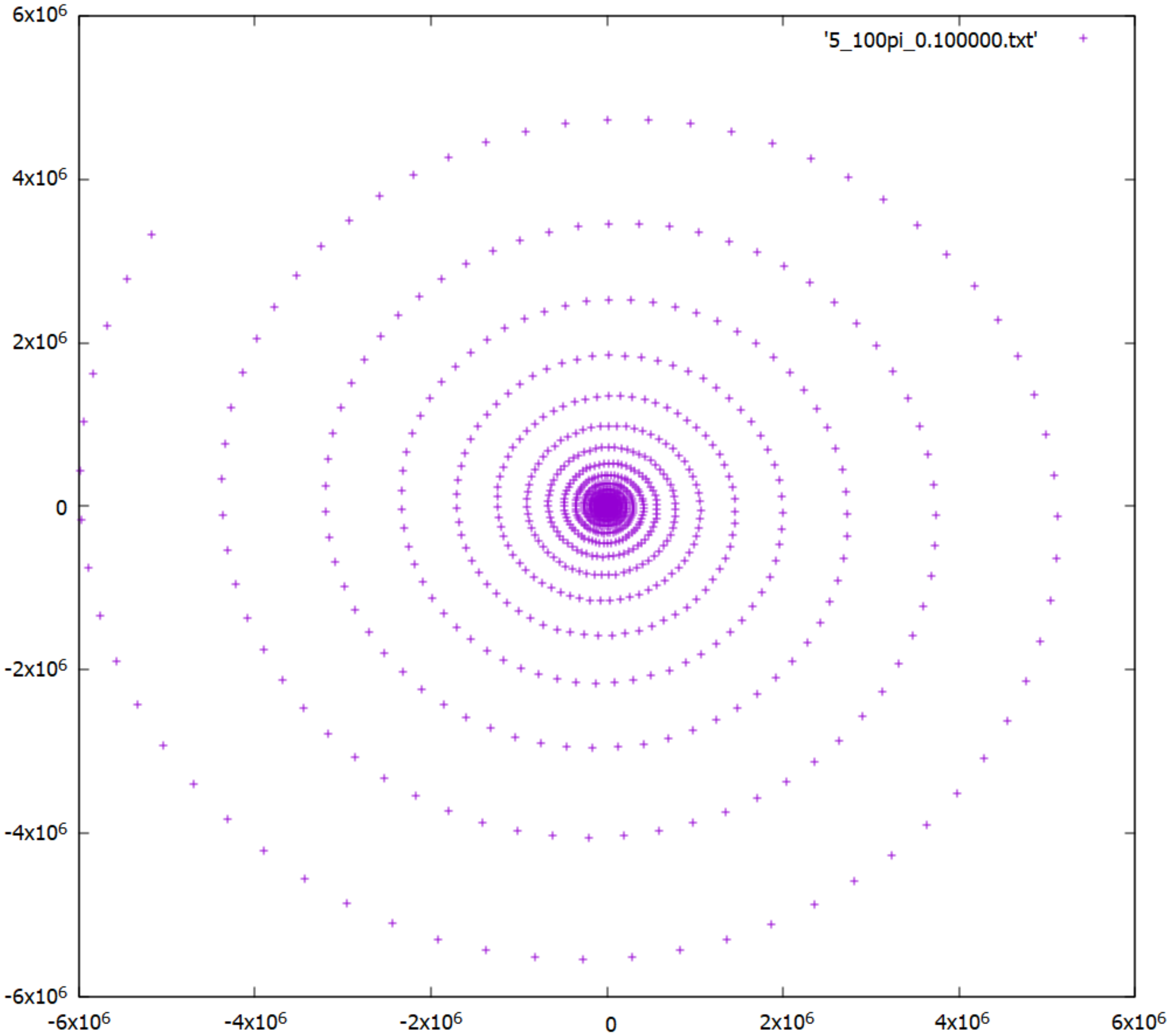

Рис. 9 $T = 100\pi, h = 0.1$

Ошибка $|\widetilde{x}(T) - x(T)| = 5.17628 \cdot 10^6, |\widetilde{z}(T) - z(T)| = 3.32102 \cdot 10^6$

for(int n=0; $n < w\pi/h; n++$){

$x_K = x + h \cdot z;$

$z_K = z - h \cdot x;$

$x = x_K;$

$z = z_K;$

}

6 Метод Рунге-Кутта

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	b_7
0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{-56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{-212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$\frac{-355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{-5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
y_1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	

6.1 со своей функцией

h	$\lvert\widetilde{y}(T) - y(T)\rvert$	$\lvert y_{rk}(T) - y(T)\rvert$
0.1	3.01484	$5.42422 \cdot 10^{-7}$
0.01	0.391685	$6.34346 \cdot 10^{-12}$
0.001	0.0400745	$6.56333 \cdot 10^{-14}$
0.0001	0.00401651	$7.53717 \cdot 10^{-12}$
10^{-5}	0.000401741	$1.53966 \cdot 10^{-10}$

6.2 гармонический осциллятор

Сравнение метода погрешности для метода Эйлера и Рунге-Кутта 6 порядка

h	T	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert x_{rk}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	$\lvert z_{rk}(T) - z(T)\rvert$
0.1	10π	0.097298	0.0839745	3.79211	0.00353218
0.1	100π	$5.17628 \cdot 10^{6}$	0.0407235	$3.32102 \cdot 10^{6}$	0.000830409
0.1	1000π	$6.29136 \cdot 10^{67}$	0.00734777	$4.242622 \cdot 10^{67}$	$3.5624 \cdot 10^{-5}$
0.01	10π	0.00354095	0.00407345	0.170098	$8.29654 \cdot 10^{-6}$
0.01	100π	0.0468341	0.000734641	3.80989	$2.69857 \cdot 10^{-7}$
0.01	1000π	644590	0.00734634	$6.59925 \cdot 10^{6}$	$2.69848 \cdot 10^{-5}$
0.001	10π	$6.39894 \cdot 10^{-5}$	7.34641e-05	0.015832	$2.69849 \cdot 10^{-9}$
0.001	100π	0.000737064	0.000734641	0.170089	$2.69849 \cdot 10^{-7}$
0.001	1000π	0.00337112	0.00034641	3.81047	$5.99999 \cdot 10^{-8}$

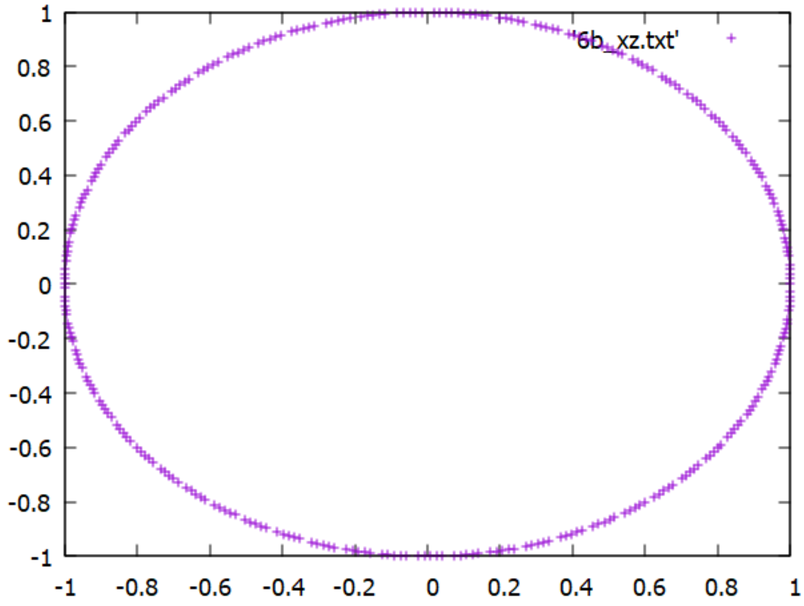

Рис.10 $T = 10\pi, h = 0.1$

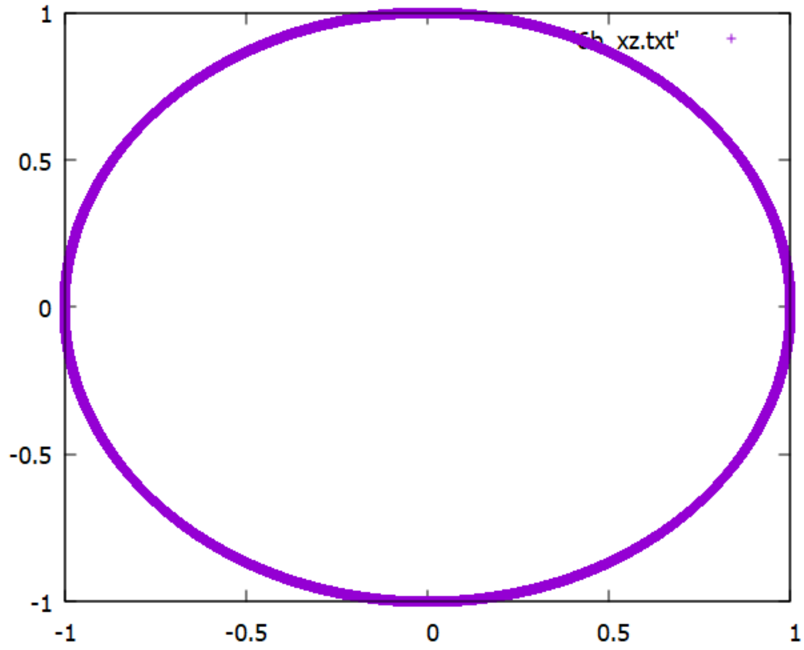

Рис.11 $T = 1000\pi, h = 0.001$

7 Выбор шага

Решаем систему $\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = -x \end{cases}$ на отрезке [0, T] с начальными условиями $x_0 = 0, z_0 = 1$ методом Рунге Кутта 5 порядка. На каждом шаге определяем подходящее h в зависимости от требуемой точности. tol - величина допустимой погрешности.

$$h_{\text{new}} = h \min(facmax, \max(facmin, fac \cdot \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{6}}));$$
$$facmax = 1.5,\ facmin = 0.7,\ fac = 0.9$$

$$h_{\text{new}} = h \cdot \min(1.5, \max(0.7, 0.9 \cdot \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{6}}));$$

T = 10π:

tol	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	N_{steps}	Step
10^{-7}	0.00190173	$2.84124e-06$	192	0.164229
10^{-9}	$7.50001e-05$	$1.34896e-08$	480	0.0657533
10^{-11}	$5.35519e-06$	$1.21545e-10$	1203	0.0262086

T = 100π:

tol	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	N_{steps}	Step
10^{-7}	0.00162033	$1.1704e-05$	1906	0.16491
10^{-9}	$6.30868e-05$	$1.08799e-07$	4785	0.0656884
10^{-11}	$3.77143e-06$	$1.07952e-09$	12017	0.0261533

T = 1000π:

tol	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	N_{steps}	Step
10^{-7}	0.00183347	0.000105663	19043	0.16498
10^{-9}	0.000106664	$1.07377e-06$	47832	0.065682
10^{-11}	$4.7323e-06$	$1.07352e-08$	120152	0.0261478

T = 10000π:

tol	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	N_{steps}	Step
10^{-7}	0.000751888	0.00104017	190398	0.165003
10^{-9}	$7.72553e-05$	$1.06839e-05$	478310	0.0656814
10^{-11}	$4.16937e-06$	$1.07249e-07$	$1.2015e+06$	0.0261472

T = 100000π:

tol	$\lvert\widetilde{x}(T) - x(T)\rvert$	$\lvert\widetilde{z}(T) - z(T)\rvert$	N_{steps}	Step
10^{-7}	0.00138301	0.0104002	$1.90214e+06$	0.165161
10^{-9}	$8.62417e-05$	0.000106813	$4.78304e+06$	0.065682
10^{-11}	$4.76479e-06$	$1.07241e-06$	$1.2015e+07$	0.0261472

Числа Рунге:

$$\begin{cases} R_x = \left|\frac{x_{10^{-7}} - x_{10^{-9}}}{x_{10^{-9}} - x_{10^{-11}}}\right| \approx 100^{\frac{s}{s+1}}; \\ R_z = \left|\frac{z_{10^{-7}} - z_{10^{-9}}}{z_{10^{-9}} - z_{10^{-11}}}\right| \approx 100^{\frac{s}{s+1}} \end{cases}$$

T	$R_x(T)$	$R_z(T)$
10π	26.2292	211.53
100π	26.2536	107.642
1000π	16.9408	98.3868
10000π	9.23068	97.3361
100000π	18.0328	97.3462

8 Основная задача

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + x^3 = \beta cos(t) \\ \alpha \in \{0.2, 1.0\}, \beta \in \{0.3, 1.0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y - x^3 + \beta cos(t) \end{cases} \\ \alpha \in \{0.2, 1.0\}, \beta \in \{0.3, 1.0\}. \end{cases}$$

Задача решается методом стрельбы. За начальные условия в задаче Коши взяты параметры пристрелки $\overline{\alpha} = \{x, T\}$.Начальный момент времени $t = 0$. Особая точка системы $(x_0, y)0) = (0, 0)$, из неё выпускае луч $y = 0$, на котором, двигая x, ищем точку и период T периодического решения.

Невязка: $\overline{X}(\overline{\alpha}) = \begin{cases} |x(T) - x| \\ |y(T) - y| \end{cases}$.

Норму невязок оцениваем величиной $\varepsilon = 10^{-7}$. $\Delta = 10^{-8}$. Решаем систему $||\overline{X}(\overline{\alpha})|| = \overline{0}$ методом Ньютона: через итерационный процесс с параметрами пристрелки, по которым составляем невязки, дальше по ним решается СЛАУ для поиска новых параметров пристрелки α_i для перехода на следующую итерацию. В итоге находим такие α_i, для которых $||\overline{X}(\overline{\alpha})|| = \overline{0}$, то есть получено периодическое решение. Чтобы новые невязки не оказывадись дальше от необходимой точки, чем предыущие, присваиваем $\alpha_{new} = \alpha + \gamma \cdot h$, где h - решение СЛАУ, а γ делится пополам до тех пор, пока не приближаемся к периодическому решению лучше, чем за предыдущий шаг.

Список литературы

[1] Hajrer E., Nyorsett S., Vanner G. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи* - 1990 - 512с.