

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Практикум на ЭВМ
Решение задачи оптимального управления
Отчет

Выполнила студентка 4-го курса 422-ой группы
кафедры теоретической механики и мехатроники
Резанова Анфиса Сергеевна

Преподаватель:
ассистент кафедры вычислительной математики
Самохин Александр Сергеевич

Содержание

1	Постановка задачи	1
2	Формализация задачи	1
3	Система необходимых условий оптимальности	2
4	Аномальный случай	3
5	Краевая задача	3
6	Численное решение краевой задачи методом стрельбы	4
7	Тест решения задачи Коши для гармонического осциллятора	4
8	Аналитическое решение при $\alpha = 0$	5
9	Численное решение	6
10	Оценка точности решения задачи Коши	9

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Лагранжа с параметром α :

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_0^1 \ddot{x}^2 - \frac{48 \dot{x}}{2 + \cos(\alpha x)} dt \rightarrow extr, \\ x(1) &= \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

в которой отрезок времени фиксирован, и нет ограничения "меньше или равно." Для данной задачи необходимо:

- формализовать задачу как задачу оптимального управления;
- свести задачу к краевой задаче с помощью принципа максимума Понтрягина;
- численно и аналитически решить полученную краевую задачу, обосновать точность полученных результатов и сравнить полученные экстремали на оптимальность при различных значениях параметра $\alpha = \{0; 0.1; 1; 5.1\}$.

2. Формализация задачи

Положим $\ddot{x} = u$ и $\dot{x} = y$. Тогда задача (1.1) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= u, u \in \mathbb{R}, \\ B_1 &= x(1) = 0 \\ B_2 &= y(0) = 0 \\ \alpha &= const \in \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}, \\ B_0 &= \int_0^1 (u^2 - \frac{48y}{2 + \cos \alpha x}) dt \rightarrow extr. \end{aligned} \right. \tag{2.1}$$

3. Система необходимых условий оптимальности

Построим функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathfrak{L} := \int_0^1 L dt + l, \text{ где}$$

$$L = \lambda_0(u^2 - \frac{48y}{2+\cos \alpha x}) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u) - \text{Лагранжиан}$$

$$l = \lambda_1 x(1) + \lambda_2 y(0) - \text{терминант}$$

$$H = p_x y + p_y u - \lambda_0(u^2 - \frac{48y}{2+\cos \alpha x})$$

Необходимые условия оптимальности:

а) Уравнения Эйлера - Лагранжа

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0 \frac{48\alpha y \sin \alpha x}{(2+\cos \alpha x)^2} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x + \frac{48\lambda_0}{2+\cos \alpha x} \end{cases} \quad (3.1)$$

б) Условие оптимальности по управлению

$$\hat{u} = \arg \max_{u \in U} (p_y u - \lambda_0 u^2) = \frac{p_y}{2\lambda_0}, \lambda_0 \neq 0 \quad (3.2)$$

в) Условие трансверсальности

$$\begin{aligned} p_x(0) &= 0, p_x(1) = -\lambda_1 \\ p_y(0) &= \lambda_2, p_y(1) = 0 \end{aligned}$$

г) Условия стационарности нет, так как концы $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$ фиксированы

д) Условия дополняющей нежесткости нет, так как в задаче нет условия вида "меньше или равно"

е) Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$

ж) Множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (НЕРОН)

з) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя)

4. Анормальный случай

Случай $\lambda_0 = 0$.

Уравнения Эйлера - Лагранжа с условием трансверсальности:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} p_x(0) &= 0, \quad p_x(1) = -\lambda_1 \\ p_y(0) &= \lambda_2, \quad p_y(1) = 0 \end{aligned}$$

То есть $p_x = \text{const}$ и $\dot{p}_y = -\text{const}$. Из краевых условий получаем $p_x = 0$ и $\lambda_1 = 0$, поэтому $p_y = \text{const}$. Но чтобы не было противоречия с краевыми условиями придется положить $\lambda_2 = 0$, то есть противоречие с условием НЕРОН. Значит случай $\lambda_0 = 0$ невозможен.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то можем выбрать следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}$$

5. Краевая задача

На основе принципа максимума Понтрягина исходная задача сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_x = -\frac{24\alpha y \sin \alpha x}{(2+\cos \alpha x)^2} \\ \dot{p}_y = -p_x + \frac{24}{2+\cos \alpha x} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$p_x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$y(0) = 0, \quad p_y(1) = 0$$

$$\alpha \in \{0; 0.1; 1; 5.1\}$$

6. Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Решим поставленную краевую задачу численно методом стрельбы. Не хватает значений $x(t)$ и $p_y(t)$ в момент времени $t = 0$ для решения задачи Коши, выберем их в качестве параметров пристрелки: $\alpha_1 = x(0)$, $\alpha_2 = p_y(0)$. Выбрав значения $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и решив задачу Коши на отрезке $[0, 1]$, получим функции $x(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $y(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_x(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_y(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, а следовательно и их значения в момент времени $t = 1$. Для решения краевой задачи нужно подобрать $\vec{\alpha}$ так, что

$$\begin{aligned}x(1) &= 0, \\p_y(1) &= 0.\end{aligned}$$

Вектор-функцией невязок:

$$\vec{X}(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(1)[\alpha_1, \alpha_2] \\ p_y(1)[\alpha_1, \alpha_2] \end{pmatrix}$$

Решение краевой задачи свелось к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными. При этом задача Коши решается методом Рунге - Кутты 8 порядка.

7. Тест решения задачи Коши для гармонического осциллятора

Для проверки правильности решения задачи Коши написанной программой, проведём тест для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = z, & x(0) = 0, \\ \dot{z} = -x, & z(0) = 1. \end{cases}$$

T	tol	$ \tilde{x}(T) - x(T) $	$ \tilde{z}(T) - z(T) $	N steps	step
π	10^8	$1.239588e - 006$	$3.564569e - 007$	7.000000	0.463085
π	10^{10}	$2.534765e - 008$	$1.296486e - 008$	9.000000	0.360177
π	10^{12}	$5.686261e - 015$	$2.908784e - 014$	38.000000	0.085305
10π	10^8	$3.039035e - 005$	$9.591056e - 006$	30.000000	1.050531
10π	10^{10}	$4.525526e - 007$	$2.222394e - 007$	51.000000	0.617959
10π	10^{12}	$4.743601e - 014$	$2.768896e - 013$	366.000000	0.086109
$10^2\pi$	10^8	$3.248034e - 004$	$1.040824e - 004$	265.000000	1.185884
$10^2\pi$	10^{10}	$4.694852e - 006$	$2.305026e - 006$	471.000000	0.667217
$10^2\pi$	10^{12}	$8.309473e - 013$	$2.739142e - 012$	3651.000000	0.086075
$10^3\pi$	10^8	$3.268465e - 003$	$1.054073e - 003$	2613.000000	1.202332
$10^3\pi$	10^{10}	$4.718234e - 005$	$2.314840e - 005$	4668.000000	0.673028
$10^3\pi$	10^{12}	$6.927812e - 012$	$2.736211e - 011$	36500.000000	0.086074
$10^4\pi$	10^8	$3.252741e - 002$	$1.106083e - 002$	26076.000000	1.204787
$10^4\pi$	10^{10}	$4.721032e - 004$	$2.314967e - 004$	46643.000000	0.673542
$10^4\pi$	10^{12}	$4.301402e - 010$	$2.733840e - 010$	364990.000000	0.086074
$10^5\pi$	10^8	$3.005474e - 001$	$1.607709e - 001$	258996.000000	1.212989
$10^5\pi$	10^{10}	$4.723146e - 003$	$2.304946e - 003$	466492.000000	0.673451
$10^5\pi$	10^{12}	$1.310974e - 008$	$2.734140e - 009$	3649887.000000	0.086074

T	R_x	R_y
π	47.903480	28.494145
10π	66.153205	44.156479
$10^2\pi$	68.182882	46.154603
$10^3\pi$	68.273078	46.535503
$10^4\pi$	67.898999	48.779703
$10^5\pi$	62.632715	70.750473

8. Аналитическое решение при $\alpha = 0$

Положим в краевой задаче α равное 0. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = -p_x + 8 \end{cases} \quad (8.1)$$

$$p_x(0) = 0, x(1) = 0$$

$$y(0) = 0, p_y(1) = 0$$

Отсюда $p_x = 0$, $p_y = 8t - 8$, $y = 4t^2 - 8t$ и $x = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + \frac{8}{3}$. Параметры пристрелки аналитически получились $x(0) = \frac{8}{3}$ и $p_y(0) = -8$.

9. Численное решение

Возьмем значения параметров пристрелки равными $x(0) = p_y(0) = -1$. Переключения управления не было ни при одном из этих значениях параметра α , в результате работы метода Ньютона получем:

α	$y(0)$	$p_x(0)$	B_0
0	$2.666667e + 000$	$-8.000000e + 000$	$-2.133333e + 001$
0.1	$2.656083e + 000$	8.09774	$-2.150560e + 001$
1	$-4.491674e + 000$	$1.347502e + 001$	$-7.896706e + 001$
5.1	$-4.004424e + 000$	$1.201327e + 001$	$-6.002084e + 001$

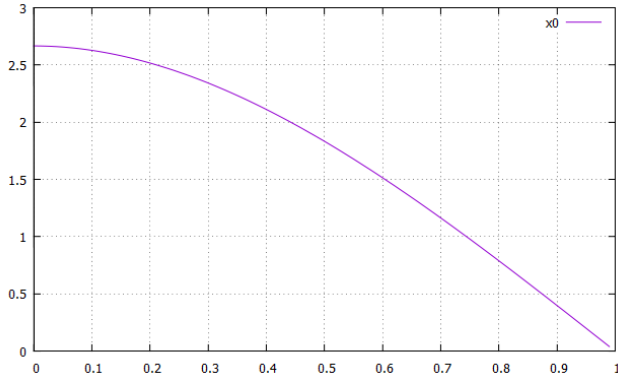


Рис. 1: $\alpha = 0$, $x(t)$

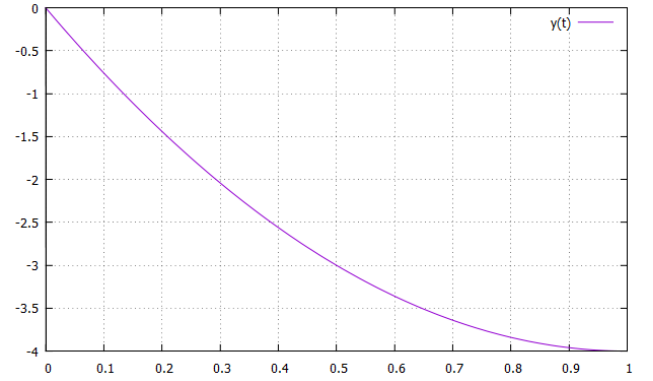


Рис. 2: $\alpha = 0$, $y(t)$

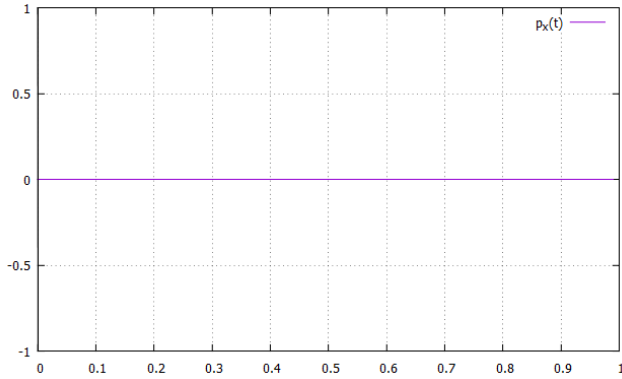


Рис. 3: $\alpha = 0$, $p_x(t)$

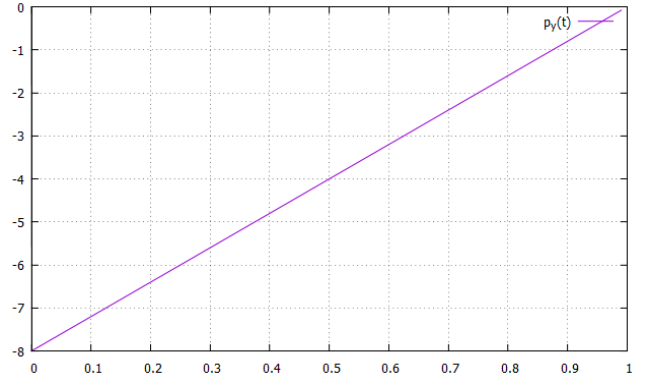


Рис. 4: $\alpha = 0$, $p_y(t)$

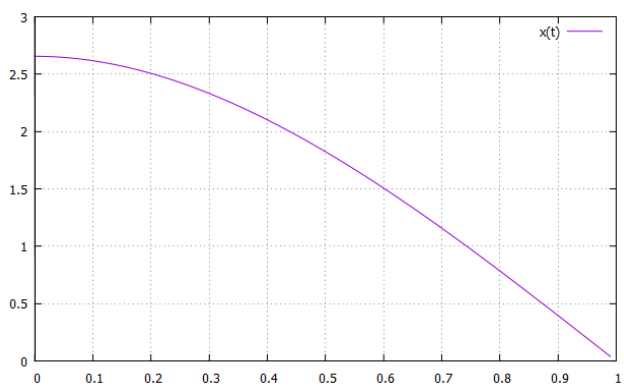


Рис. 5: $\alpha = 0.1, x(t)$

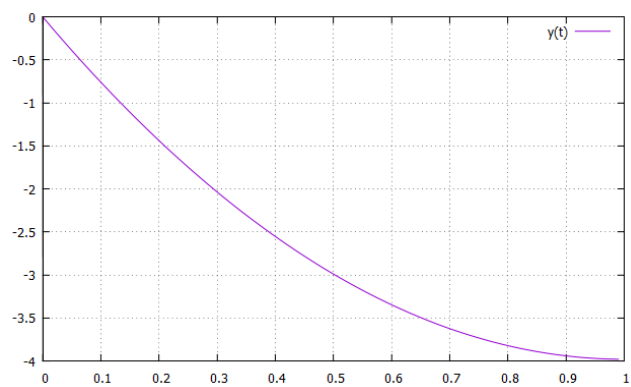


Рис. 6: $\alpha = 0.1, y(t)$

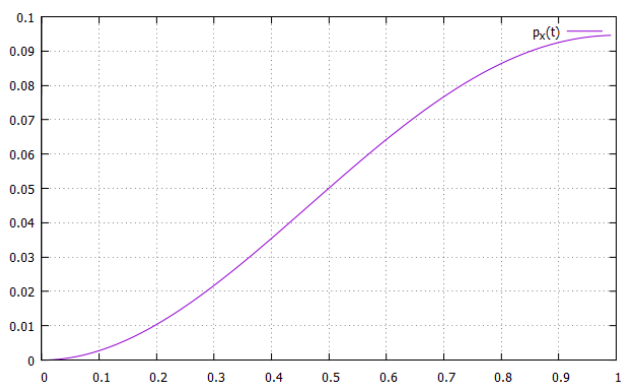


Рис. 7: $\alpha = 0.1, p_x(t)$

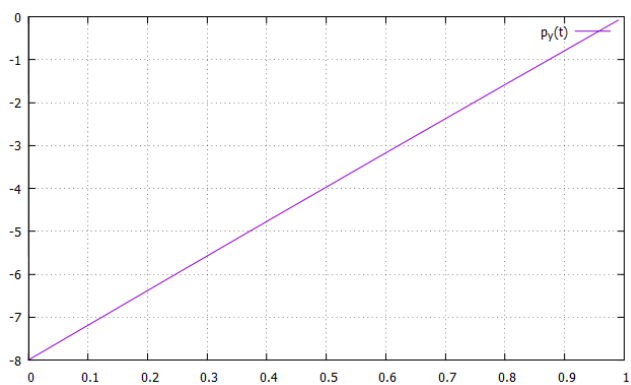


Рис. 8: $\alpha = 0.1, p_y(t)$

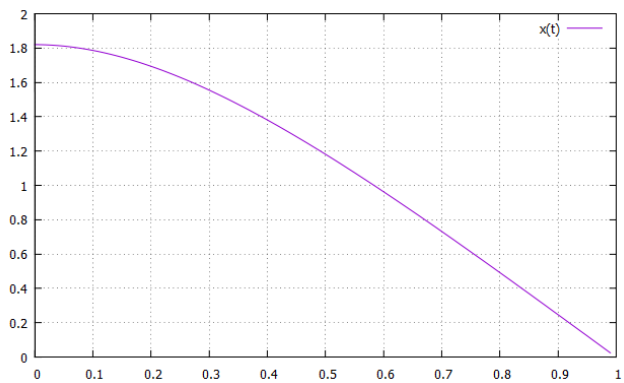


Рис. 9: $\alpha = 1, x(t)$

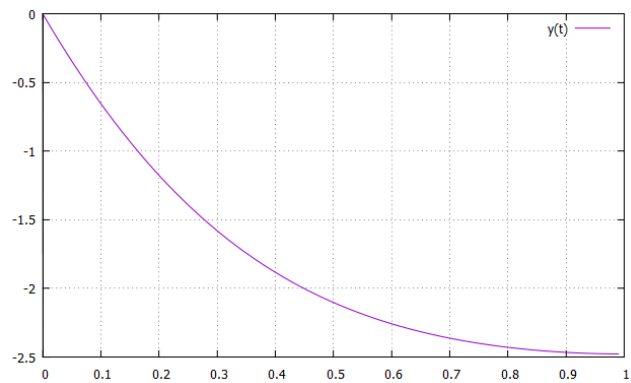


Рис. 10: $\alpha = 1, y(t)$

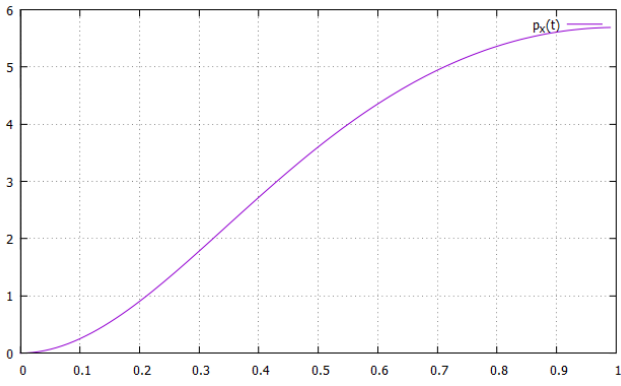


Рис. 11: $\alpha = 1, p_x(t)$

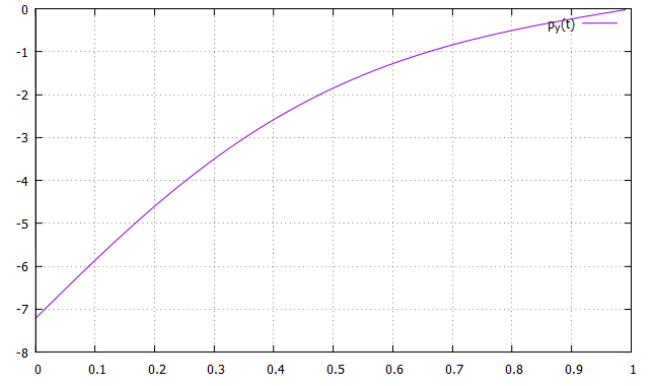


Рис. 12: $\alpha = 1, p_y(t)$

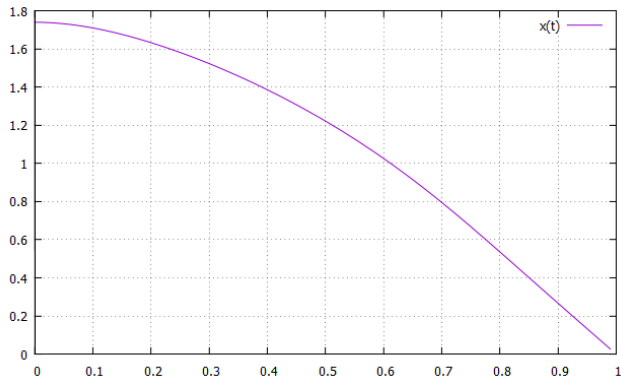


Рис. 13: $\alpha = 5.1, x(t)$

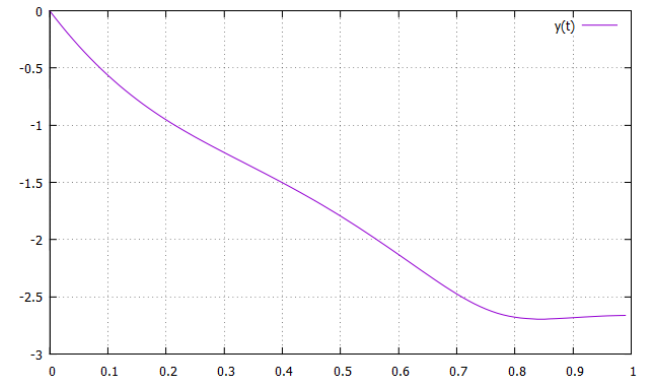


Рис. 14: $\alpha = 5.1, y(t)$

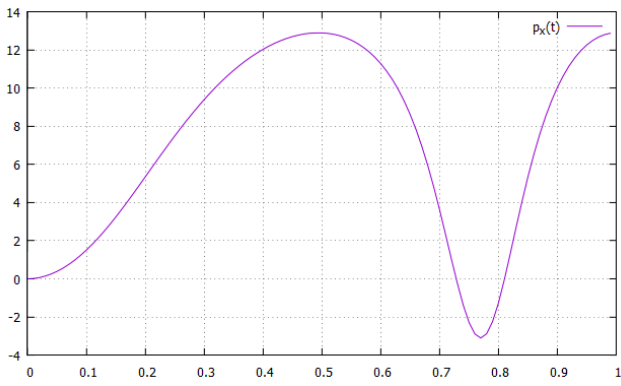


Рис. 15: $\alpha = 5.1, p_x(t)$

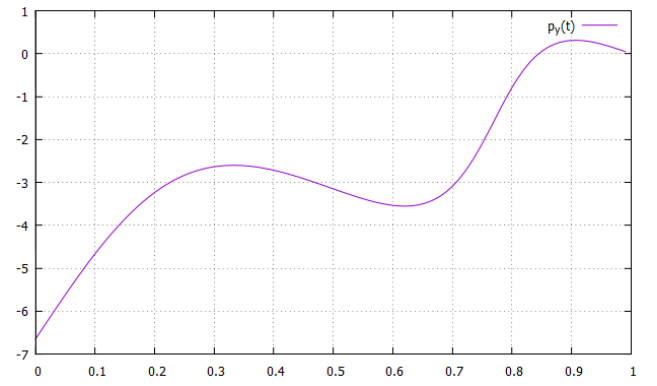


Рис. 16: $\alpha = 5.1, p_y(t)$

10. Оценка точности решения задачи Коши

Матрица Якоби нашей системы при $\alpha = 0$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности определяется логарифмическая норма матрицы $\mu(J)$ – максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$. В нашем случае получаем:

$$\frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}, \lambda_{3,4} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \mu(J) = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}$ – максимальное собственное значение матрицы.

Оценка глобальной погрешности δ_K вычисляется по формуле

$\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i)e^{L_i}$, где r_i – главный член в оценке локальной погрешности, вычисляемый на каждом шаге решения задачи Коши, а

$$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(J) ds = \left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\right)(t_{i+1} - t_i).$$

α	tol	$\delta_K(1)$
0	10^{-8}	$1.228392e - 010$
0	10^{-10}	$1.283244e - 010$
0	10^{-12}	$1.354076e - 010$

Список литературы

- [1] *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
- [2] *К. Г. Григорьев., И. С. Григорьев., М. П. Заплетин.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. М., Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
- [3] *И. С. Григорьев.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. // М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005 С. 28–33.
- [4] *Александров В. В., Бахвалов Н. С., Григорьев К. Г. и др.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1988.