МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Практикум на ЭВМ
Решение задачи оптимального управления
Отчет

Выполнила студентка 4-го курса 422-ой группы
кафедры теоретической механики и мехатроники
Резанова Анфиса Сергеевна

Преподаватель:
ассистент кафедры вычислительной математики
Самохин Александр Сергеевич

Содержание

Москва, декабрь 2021 г.

1. Постановка задачи

Рассматрим задачу Лагранжа с параметром α:

$$B_0 = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2 - \frac{48\ \dot{x}}{2+\cos(\alpha x)}\ dt \to extr, \tag{1.1}$$
$$x(1) = \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\},$$

в которой отрезок времени фиксирован, и нет ограничения "меньше или равно."Для данной задачи необходимо:

- формализовать задачу как задачу оптимального управления;
- свести задачу к краевой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина;
- численно и аналитически решить полученную краевую задачу, обосновать точность полученных результатов и сравнить полученные экстремали на оптимальность при различных значения параметра $\alpha = \{0; 0.1; 1; 5.1\}$.

2. Формализация задачи

Положим $\ddot{x} = u$ и $\dot{x} = y$. Тогда задача (1.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, u \in \mathbb{R}, \\ B_1 = x(1) = 0 \\ B_2 = y(0) = 0 \\ \alpha = const \in \{0.0; 0.1; 1.0; 5.1\}, \\ B_0 = \int_0^1 (u^2 - \dfrac{48y}{2+\cos\alpha x})dt \to extr. \end{cases} \tag{2.1}$$

3. Система необходимых условий оптимальности

Построим функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathfrak{L} := \int_0^1 L dt + l, \text{ где}$$

$$L = \lambda_0(u^2 - \tfrac{48y}{2+\cos\alpha x}) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u) \text{ - Лагранжиан}$$

$$l = \lambda_1 x(1) + \lambda_2 y(0) \text{ - терминант}$$

$$H = p_x y + p_y u - \lambda_0(u^2 - \tfrac{48y}{2+\cos\alpha x})$$

Необходимые условия оптимальности:

а) Уравнения Эйлера - Лагранжа

$$\begin{cases} \dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0 \frac{48\alpha y \sin\alpha x}{(2+\cos\alpha x)^2} \\ \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x + \frac{48\lambda_0}{2+\cos\alpha x} \end{cases} \tag{3.1}$$

б) Условие оптимальности по управлению

$$\hat{u} = \arg \underset{u\in U}{abs} \max(p_y u - \lambda_0 u^2) = \frac{p_y}{2\lambda_0}, \lambda_0 \neq 0 \tag{3.2}$$

в) Условие трансверсальности

$$p_x(0) = 0,\ p_x(1) = -\lambda_1$$
$$p_y(0) = \lambda_2,\ p_y(1) = 0$$

г) Условия стацинарости нет, так как концы $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$ фиксированы

д) Условия дополняющей нежесткости нет, так как в задаче нет условия вида "меньше или равно"

е) Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$

ж) Множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю (НЕРОН)

з) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя)

4. Анормальный случай

Случай $\lambda_0 = 0$.
Уравнения Эйлера - Лагранжа с условием трансверсальности:

$$\begin{cases} \dot{p_x} = 0 \\ \dot{p_y} = -p_x \end{cases} \tag{4.1}$$

$$p_x(0) = 0,\ p_x(1) = -\lambda_1$$
$$p_y(0) = \lambda_2,\ p_y(1) = 0$$

То есть $p_x = const$ и $\dot{p_y} = -const$. Из краевых условий получаем $p_x = 0$ и $\lambda_1 = 0$, поэтому $p_y = const$. Но чтобы не было противеречия с краевыми условиями придется положить $\lambda_2 = 0$, то есть противоречие с условием НЕРОН. Значит случай $\lambda_0 = 0$ невозможен.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то можем выбрать следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2}$$

5. Краевая задача

На основе принципа максимума Понтрягина исходная задача сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p_x} = -\frac{24\alpha y \sin \alpha x}{(2+\cos \alpha x)^2} \\ \dot{p_y} = -p_x + \frac{24}{2+\cos \alpha x} \end{cases} \tag{5.1}$$

$$p_x(0) = 0,\ x(1) = 0$$
$$y(0) = 0,\ p_y(1) = 0$$

$$\alpha \in \{0; 0.1; 1; 5.1\}$$

6. Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Решим поставленную краевую задачу численно методом стрельбы. Не хватает значений $x(t)$ и $p_y(t)$ в момент времени $t = 0$ для решения задачи Коши, выберем их в качестве параметров пристрелки: $\alpha_1 = x(0)$, $\alpha_2 = p_y(0)$. Выбрав значения $\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и решив задачу Коши на отрезке $[0, 1]$, получим функции функции $x(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $y(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_x(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_y(t)[\alpha_1, \alpha_2]$, а следовательно и их значения в момент времени $t = 1$. Для решения краевой задачи нужно подобрать $\overrightarrow{\alpha}$ так, что

$$x(1) = 0,$$
$$p_y(1) = 0.$$

Вектор-функцией невязок:

$$\overrightarrow{X}(\overrightarrow{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(1)[\alpha_1, \alpha_2] \\ p_y(1)[\alpha_1, \alpha_2] \end{pmatrix}$$

Решение краевой задачи свелось к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными. При этом задача Коши решается методом Рунге - Кутты 8 порядка.

7. Тест решения задачи Коши для гармонического осциллятора

Для проверки правильности решения задачи Коши написанной программой, проведём тест для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = z, & x(0) = 0, \\ \dot{z} = -x, & z(0) = 1. \end{cases}$$

T	tol	$\lvert\tilde{x}(T)-x(T)\rvert$	$\lvert\tilde{z}(T)-z(T)\rvert$	N steps	step
π	10^8	$1.239588e-006$	$3.564569e-007$	7.000000	0.463085
π	10^{10}	$2.534765e-008$	$1.296486e-008$	9.000000	0.360177
π	10^{12}	$5.686261e-015$	$2.908784e-014$	38.000000	0.085305
10π	10^8	$3.039035e-005$	$9.591056e-006$	30.000000	1.050531
10π	10^{10}	$4.525526e-007$	$2.222394e-007$	51.000000	0.617959
10π	10^{12}	$4.743601e-014$	$2.768896e-013$	366.000000	0.086109
$10^2\pi$	10^8	$3.248034e-004$	$1.040824e-004$	265.000000	1.185884
$10^2\pi$	10^{10}	$4.694852e-006$	$2.305026e-006$	471.000000	0.667217
$10^2\pi$	10^{12}	$8.309473e-013$	$2.739142e-012$	3651.000000	0.086075
$10^3\pi$	10^8	$3.268465e-003$	$1.054073e-003$	2613.000000	1.202332
$10^3\pi$	10^{10}	$4.718234e-005$	$2.314840e-005$	4668.000000	0.673028
$10^3\pi$	10^{12}	$6.927812e-012$	$2.736211e-011$	36500.000000	0.086074
$10^4\pi$	10^8	$3.252741e-002$	$1.106083e-002$	26076.000000	1.204787
$10^4\pi$	10^{10}	$4.721032e-004$	$2.314967e-004$	46643.000000	0.673542
$10^4\pi$	10^{12}	$4.301402e-010$	$2.733840e-010$	364990.000000	0.086074
$10^5\pi$	10^8	$3.005474e-001$	$1.607709e-001$	258996.000000	1.212989
$10^5\pi$	10^{10}	$4.723146e-003$	$2.304946e-003$	466492.000000	0.673451
$10^5\pi$	10^{12}	$1.310974e-008$	$2.734140e-009$	3649887.000000	0.086074

T	R_x	R_y
π	47.903480	28.494145
10π	66.153205	44.156479
$10^2\pi$	68.182882	46.154603
$10^3\pi$	68.273078	46.535503
$10^4\pi$	67.898999	48.779703
$10^5\pi$	62.632715	70.750473

8. Аналитическое решение при $\alpha = 0$

Положим в краевой задаче α равное 0. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p_x} = 0, \\ \dot{p_y} = -p_x + 8 \end{cases} \tag{8.1}$$

$$p_x(0) = 0,\ x(1) = 0$$

$$y(0) = 0,\ p_y(1) = 0$$

Отсюда $p_x = 0$, $p_y = 8t - 8$, $y = 4t^2 - 8t$ и $x = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + \frac{8}{3}$. Параметры пристрелки аналитически получились $x(0) = \frac{8}{3}$ и $p_y(0) = -8$.

9. Численное решение

Возьмем значения параметров пристрелки равными $x(0) = p_y(0) = -1$. Переключения управления не было ни при одном из этих значениях параметра α, в результате работы метода Ньютона получим:

α	$y(0)$	$p_x(0)$	B_0
0	$2.666667e + 000$	$-8.000000e + 000$	$6.400000e + 001$
0.1	$2.656083e + 000$	$-7.997094e + 000$	$6.382897e + 001$
1	$1.820509e + 000$	$-7.214684e + 000$	$4.591400e + 001$
5.1	$1.739786e + 000$	$-6.651364e + 000$	$5.615804e + 001$

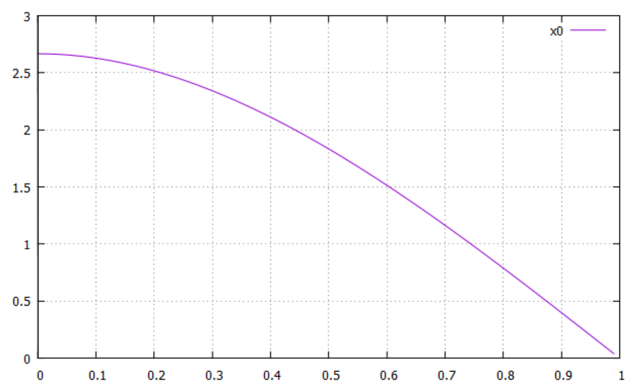

Рис. 1: $\alpha = 0$, $x(t)$

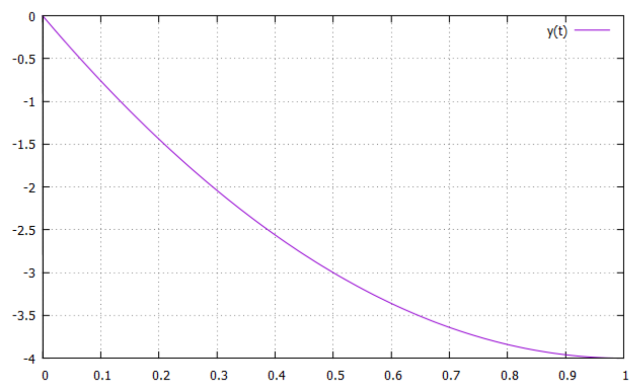

Рис. 2: $\alpha = 0$, $y(t)$

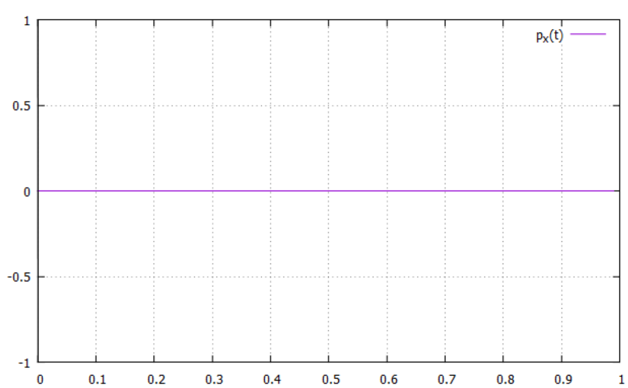

Рис. 3: $\alpha = 0$, $p_x(t)$

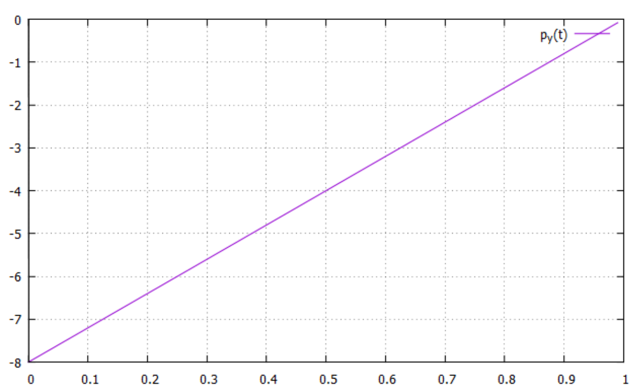

Рис. 4: $\alpha = 0$, $p_y(t)$

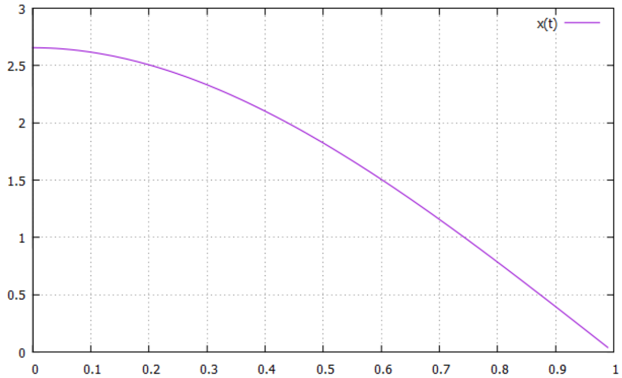

Рис. 5: $\alpha = 0.1$, $x(t)$

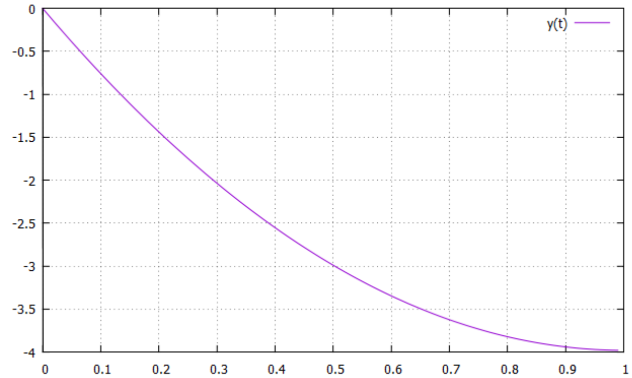

Рис. 6: $\alpha = 0.1$, $y(t)$

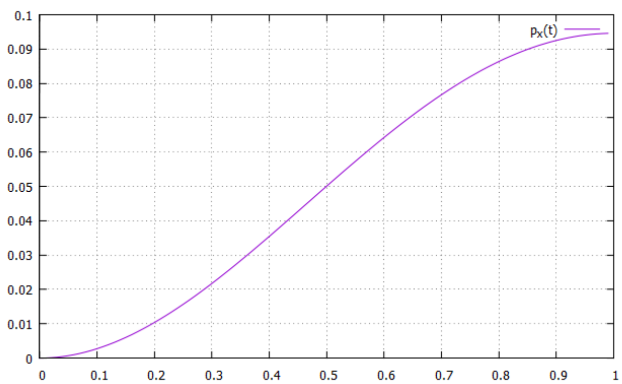

Рис. 7: $\alpha = 0.1$, $p_x(t)$

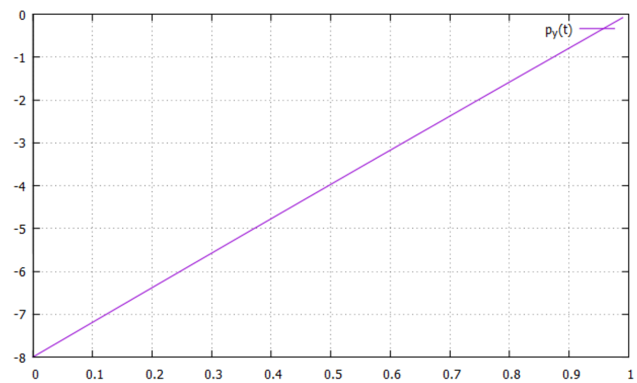

Рис. 8: $\alpha = 0.1$, $p_y(t)$

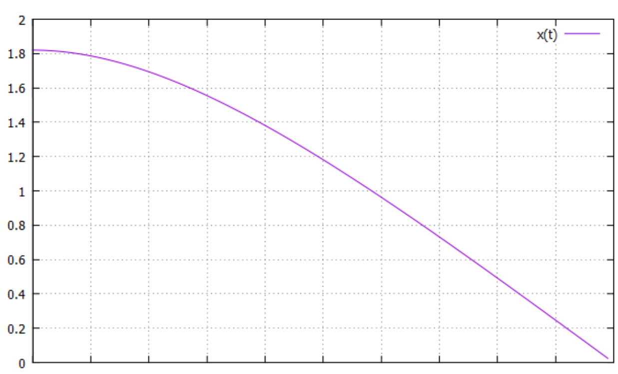

Рис. 9: $\alpha = 1$, $x(t)$

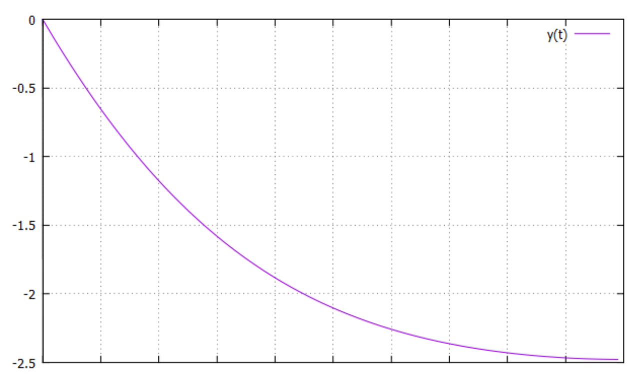

Рис. 10: $\alpha = 1$, $y(t)$

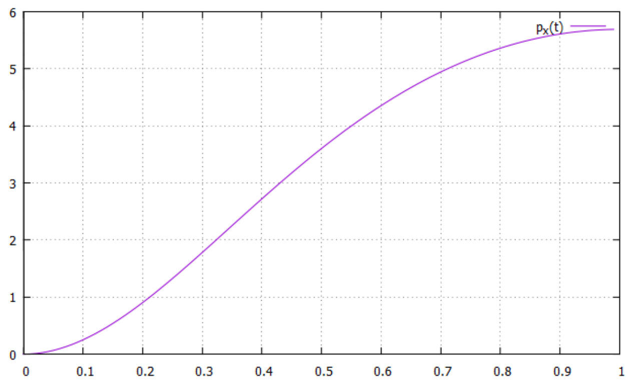

Рис. 11: $\alpha = 1$, $p_x(t)$

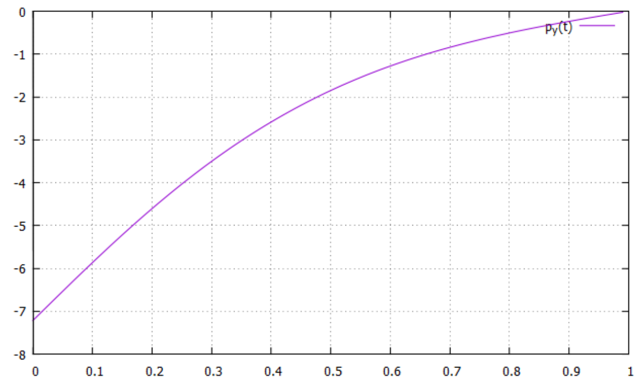

Рис. 12: $\alpha = 1$, $p_y(t)$

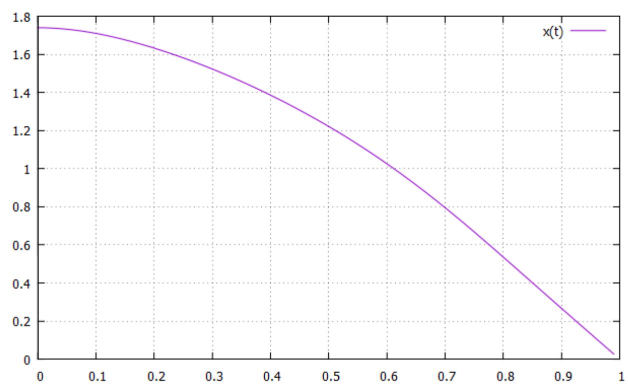

Рис. 13: $\alpha = 5.1$, $x(t)$

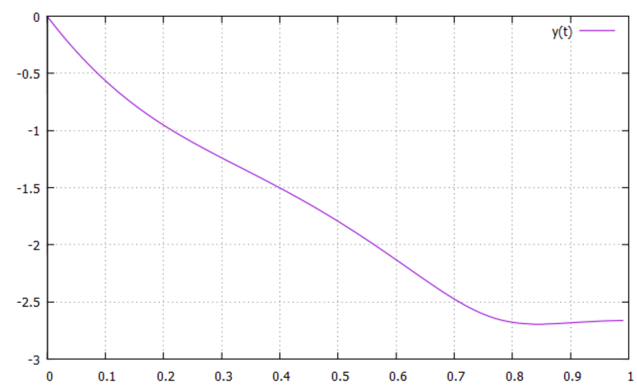

Рис. 14: $\alpha = 5.1$, $y(t)$

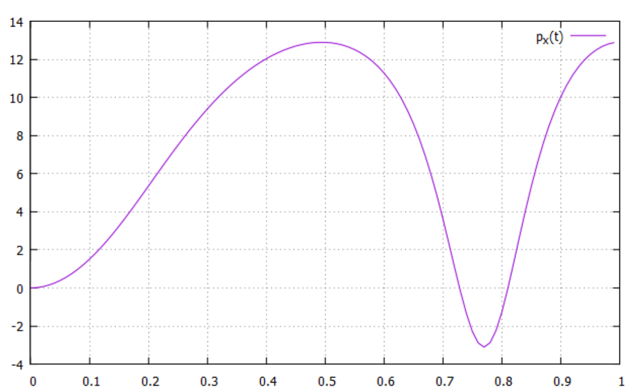

Рис. 15: $\alpha = 5.1$, $p_x(t)$

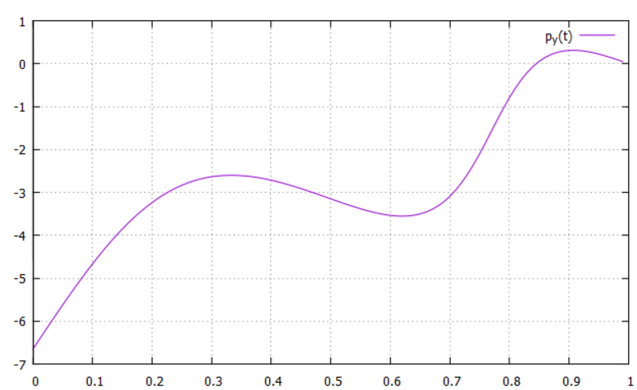

Рис. 16: $\alpha = 5.1$, $p_y(t)$

10. Оценка точности решения задачи Коши

Матрица Якоби нашей системы при $\alpha = 0$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности определяется логарифмическая норма матрицы $\mu(J)$ – максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$. В нашем случае получаем:

$$\frac{J+J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - \tfrac{3}{4}\lambda^2 + \tfrac{1}{16} = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \tfrac{\sqrt{5}}{4} \pm \tfrac{1}{4},\ \lambda_{3,4} = -\tfrac{\sqrt{5}}{4} \pm \tfrac{1}{4}$$

$\Rightarrow \mathrm{J}+\mathrm{J}^T{}_{\overline{2}}$, $\mu(J) = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}$ - максимальное собственное значение матрицы .
Оценка глобальной погрешности δ_K вычисляется по формуле
$\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i)e^{L_i}$, где r_i - главный член в оценке локальной погрешности, вычисляемый на каждом шаге решения задачи Коши, а
$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(J)ds = (\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4})(t_{i+1} - t_i)$.

α	tol	$\delta_K(1)$
0	10^{-8}	$1.228392e-010$
0	10^{-10}	$1.283244e-010$
0	10^{-12}	$1.354076e-010$

Список литературы

[1] *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

[2] *К. Г. Григорьев., И. С. Григорьев., М. П. Заплетин.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. М., Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

[3] *И. С. Григорьев.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. // М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005 С. 28–33.

[4] *Александров В. В., Бахвалов Н. С., Григорьев К. Г. и др.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1988.