

Devoir #2

Les réponses aux **questions** sont à remettre le jeudi 21 septembre 2023.

Banque de portes quantiques

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Exercice 1: Quelque part sur la sphère de Bloch

En utilisant la forme général d'un état quantique d'un qubit

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |1\rangle,$$

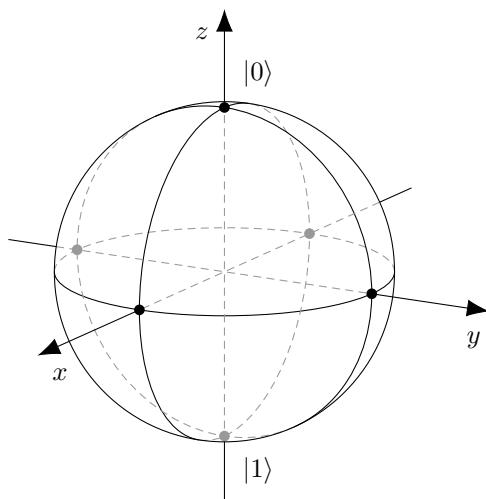
illustrez où se trouvent sur la sphère de Bloch les états quantiques définis par les angles suivants :

a) $\theta = \pi/4, \varphi = \pi$

c) $\theta = \pi, \varphi = 13\pi/15$

b) $\theta = \pi, \varphi = 0$

d) $\theta = \pi/2, \varphi = -\pi/2$



Question 1: Identités

Démontrez les identités suivantes :

a) $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$

c) $\hat{S}\hat{Z}\hat{S}^\dagger = \hat{Z}$

b) $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^\dagger = \hat{Y}$

d) $\hat{X}\hat{Z}\hat{X} = -\hat{Z}$

Solution question 1

En utilisant les produits matriciels on montre que

a) $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{Z}$$

b) $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^\dagger = \hat{Y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{Y}$$

c) $\hat{S}\hat{Z}\hat{S}^\dagger = \hat{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{Z}$$

d) $\hat{X}\hat{Z}\hat{X} = -\hat{Z}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\hat{Z}$$

Question 2: Les matrices de Pauli (8 pts)

Les matrices qui représentent les portes quantiques \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} sont des matrices très utiles en mécanique quantique. On les appelle les matrices de Pauli et elles ont des propriétés bien spéciales.

- Montrez que ces matrices sont Hermitiennes. Une matrice Hermitienne est une matrice qui est égale à son conjugué Hermitien $\hat{M} = \hat{M}^\dagger = (\hat{M}^\top)^*$.
- Calculez tous les produits suivants

$$\hat{X}\hat{Y}, \quad \hat{Z}\hat{X}, \quad \hat{Y}\hat{Z}, \quad \hat{Y}\hat{X}, \quad \hat{X}\hat{Z}, \quad \text{et} \quad \hat{Z}\hat{Y}$$

et exprimez chacun des résultats à l'aide d'une seule matrice de Pauli. Êtes-vous en mesure de formuler une relation générale pour le produit de deux matrices de Pauli différentes? Vous pouvez l'expliquer en vos mots et pas seulement grâce à une formule mathématique.