BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Devoir #2

Les réponses aux **questions** sont à remettre le jeudi 21 septembre 2023.

Banque de portes quantiques

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Exercice 1: Quelque part sur la sphère de Block

En utilisant la forme général d'un état quantique d'un qubit

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|1\rangle,$$

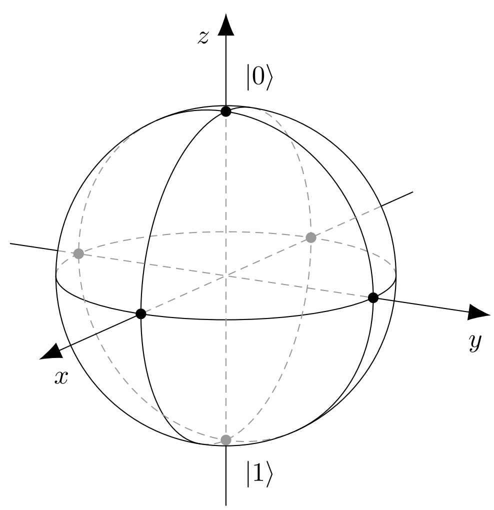
illustrez où se trouvent sur la sphère de Bloch les états quantiques définis par les angles suivants :

a) $\theta = \pi/4, \varphi = \pi$

b) $\theta = \pi, \varphi = 0$

c) $\theta = \pi, \varphi = 13\pi/15$

d) $\theta = \pi/2, \varphi = -\pi/2$



Question 1: Identités

Démontrez les identités suivantes :

a) $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$

b) $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^{\dagger} = \hat{Y}$

c) $\hat{S}\hat{Z}\hat{S}^{\dagger} = \hat{Z}$

d) $\hat{X}\hat{Z}\hat{X} = -\hat{Z}$

Solution question 1

En utilisant les produits matriciels on montre que

a) $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{Z}$$

b) $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^{\dagger} = \hat{Y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{Y}$$

c) $\hat{S}\hat{Z}\hat{S}^{\dagger} = \hat{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{Z}$$

d) $\hat{X}\hat{Z}\hat{X} = -\hat{Z}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\hat{Z}$$

Question 2: Les matrices de Pauli (8 pts)

Les matrices qui représentent les portes quantiques $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z}$ sont des matrices très utiles en mécanique quantique. On les appelle les matrices de Pauli et elles ont des propriétés bien spéciales.

a) Montrez que ces matrices sont Hermitiennes. Une matrice Harmitienne est une matrice qui est égale à son conjugué Hermitien $\hat{M} = \hat{M}^{\dagger} = \left(\hat{M}^{\intercal}\right)^{*}$.

b) Calculez tous les produits suivants

$$\hat{X}\hat{Y}, \quad \hat{Z}\hat{X}, \quad \hat{Y}\hat{Z}, \quad \hat{Y}\hat{X}, \quad \hat{X}\hat{Z}, \quad \text{et} \quad \hat{Z}\hat{Y}$$

et exprimez chacun des résultats à l'aide d'une seule matrice de Pauli. Êtes-vous en mesure de formuler une relation générale pour le produit de deux matrices de Pauli différentes ? Vous pouvez l'expliquer en vos mots et pas seulement grâce à une formule mathématique.