PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

l'UNIVERSITÉ GALATASARAY

Spécialité : **Mathématiques**

# Formalisation du théorème de Desargues en Lean 4

Rapport 2

Préparé par **Abdullah Uyu**
Résponsable : **Can Ozan Oğuz**

*5 novembre 2023*

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

## 1 Motivation

Lean 4 est un assistant de preuve. La transcription d'une preuve en langage humain dans un assistant de preuve est appelée *formalisation*. Lean 4 dispose d'une grande bibliothèque de preuves, y compris de nombreuses preuves du niveau de licence, appelée mathlib4. Dans cette bibliothèque, il y a d'importants théorèmes manquants, et le théorème de Desargue est l'un d'entre eux.

## 2 Objectifs du Projet

Les deux aspects principaux de ce projet sont l'apprentissage des rudiments de la théorie des géométries projectives, et de la programmation en Lean 4. Avec ces deux aspects, le but ultime est de formaliser le théorème de Desargue dans Lean 4.

# Chapitre 2

# Géometrie Projective

## 1 Rudiments

Pour motiver les géométries projectives, on commence par considérer les droites passant par l'origine dans le plan. On peut représenter la plupart de ces lignes par des points sur l'axe $y = 1$.

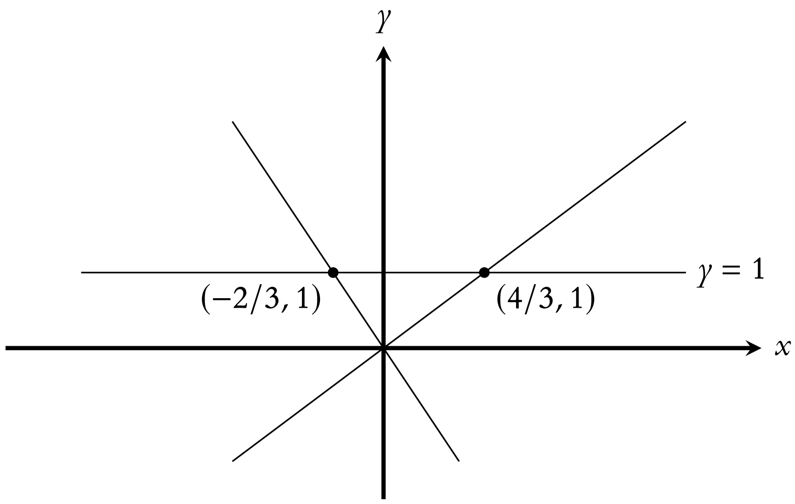


Figure 1 – La représentation des droites passant par l'origine dans le plan

La seule droite que l'on n'a pas réussi à représenter est l'axe $x$. On notera également que l'on peut bien sûr choisir n'importe quel axe pour la représentation, à l'exception de ceux qui passent par l'origine. Cette impossibilité dans les cas d'exception est clairement visible sur la figure 1. Si l'on choisit un tel axe, la droite que l'on ne parviendra pas à représenter sera la droite (passant par l'origine) qui est parallèle à cet axe.
Effectuons la même procédure pour l'espace. On peut représenter la plupart des droites passant par l'origine par des points sur le plan $z = 1$.

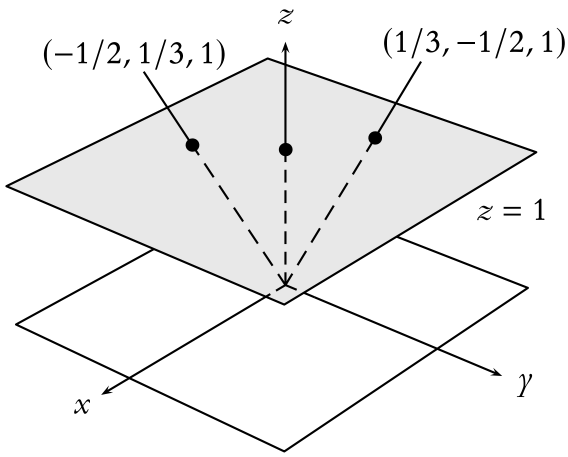


FIGURE 2 – La représentation des droites passant par l'origine dans l'espace

Maintenant, les seules droites que nous ne pouvons pas représenter sont exactement les droites du plan que nous avons représenté précédemment. La remarque sur le choix de l'axe de représentation s'étend ici comme tout plan ne passant pas par l'origine peut être utilisé. De plus, le plan irreprésentable sera celui (qui passe par l'origine) qui est parallèle au plan de représentation.

## 2 Projectivisation d'un espace vectoriel

Ce processus s'appelle la *projectivisation d'un espace vectoriel*. Écrivons-le en langage d'algèbre linéaire.

**Définition 1** ([FF00, p. 27]). Soit $V$ un espace vectoriel. Sur $V^\bullet := V \setminus \{0\}$, on définit une relation binaire comme suit : $x \sim y$ si et seulement si $x, y$ sont linéairement dépendants. Comme ceci est une relation d'équivalence, l'ensemble quotient $\mathscr{P}(V) := V^\bullet/\sim$ est bien défini. $\mathscr{P}(V)$ est appelée la *projectivisation de l'espace vectoriel $V$*.

La motivation ci-dessus peut donc être formulée comme suit :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathbf{R}^3) &= \mathscr{P}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}) \\ &\cong \mathbf{R}^2 \dot\cup \mathscr{P}(\mathbf{R}^2) \\ &= \mathbf{R}^2 \dot\cup \mathscr{P}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \\ &\cong \mathbf{R}^2 \dot\cup \mathbf{R} \dot\cup \mathscr{P}(\mathbf{R}).\end{aligned}$$

Cela résume ce que l'on fait mathématiquement lorsque l'on fait des dessins en perspective : On prend un plan ($\mathbf{R}^2$), on choisit un horizon ($\mathbf{R}$) et un point de fuite ($\mathscr{P}(\mathbf{R})$). La proposition suivante n'est qu'une généralisation de ce processus.

**Proposition 1** ([FF00, p. 28]). *Pour un $K$-espace vectoriel $V$, il existe une bijection naturelle*

$$s : \mathscr{P}(V \times K) \to V \dot\cup \mathscr{P}(V)$$

*induite par la fonction $t : (V \times K)^\bullet \to V \dot\cup \mathscr{P}(V)$ définie par $t(x, \xi) = \xi^{-1}x$ si $\xi \neq 0$ et $t(x, 0) = [x]$ pour $x \neq 0$, où $[x]$ désigne le point de $\mathscr{P}(V)$ représenté par $x$.*

**Définition 2** ([FF00, p. 26]). Une *géométrie projective* est un ensemble $G$ accompagné d'une relation ternaire $\ell \subseteq G \times G \times G$ telle que les axiomes suivants sont satisfaits :

($L_1$) $\ell(a,b,a)$ pour tout $a,b \in G$.

($L_2$) $\ell(a,p,q)$, $\ell(b,p,q)$ et $p \neq q \implies \ell(a,b,p)$.

($L_3$) $\ell(p,a,b)$ et $\ell(p,c,d) \implies \ell(q,a,c)$ et $\ell(q,b,d)$ pour un $q \in G$.

Les éléments de $G$ sont appelés les *points* de la géométrie. Et trois points $a,b,c$ sont dits *colinéaires* si $\ell(a,b,c)$.

Notons l'exemple le plus important pour une géométrie projective. Lors d'une discussion sur la chaîne de Zulip de Lean 4, Joseph Myers a conseillé d'énoncer le théorème sur cet exemple, mais pas sur la définition abstraite d'une géométrie projective. De plus, il est noté que la version du théorème en géométrie euclidienne, qui est probablement même connue de nombreux élèves du lycée, peut être déduite de l'énoncé du théorème sur cet important modèle de géométrie projective.

**Proposition 2** ([FF00, p. 27]). *Pour un espace vectoriel $V$, $\mathscr{P}(V)$ est une géométrie projective si pour tout élément $X,Y,Z \in \mathscr{P}(V)$ on définit : $\ell(X,Y,Z)$ si et seulement si $X,Y,Z$ ont des représentants $x,y,z$ linéairement dépendants.*

Notons maintenant la définition d'un isomorphisme de géométries projectives.

**Définition 3** ([FF00, p. 27]). Un *isomorphisme* de géométries projectives est une bijection $g : G_1 \to G_2$ satisfaisant $\ell_1(a,b,c)$ si et seulement si $\ell_2(ga,gb,gc)$. Si $G_1 = G_2$, alors on dit que $g$ est une *collinéation*.

Toutes les applications linéaires bijectives induisent une colinéation.

*Exemple* 1. Soit $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire bijective. L'application $g : \mathscr{P}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$, $[x] \mapsto [T(x)]$ est une isomorphisme de géometries projectives. L'application $g$ est bien définie : Soit $x,y \in \mathbf{R}^n$ tel que $[x] = [y]$, i.e. $x = ky$ pour un $k \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} [T(x)] &= [T(ky)] && x \text{ définition} \\ &= [kT(y)] && T \text{ linéaire} \\ &= [T(y)] && \text{définition } 1. \end{aligned}$$

D'où, $g$ est bien définie.
Montrons que $g$ est injective. Soit $[x],[y] \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ tel que $[T(x)] = [T(y)]$, i.e. $T(x) = kT(y)$ pour un $k \in \mathbf{R}$. Comme $T$ est linéaire, $T(x) = T(ky)$. De plus, $x = ky$ car $T$ est injective. Par la définition de la classe d'équivalence, on obtient $[x] = [y]$. D'où $g$ est injective. Pour la surjectivité, prenons $[x] \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$. Comme $T$ est bijective, $T^{-1}$ existe, et $[T^{-1}(x)] \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$. Ainsi $g([T^{-1}(x)]) = [T(T^{-1}(x))] = [x]$. D'où, $g$ est surjective. On a montré que $g$ est bijective.
Vérifions la condition d'isomorphisme. Soit $[x],[y],[z] \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$. Supposons que $\ell([x],[y],[z])$. On a des équivalences :

$$\begin{aligned} &\iff ax + by + cz = 0 && \text{proposition } 2 \\ &\iff T(ax + by + cz) = 0 && T \text{ linéaire, injective} \\ &\iff aT(x) + bT(y) + cT(z) = 0 && T \text{ linéaire} \\ &\iff \ell([T(x)],[T(y)],[T(z)]) && \text{proposition } 2 \end{aligned}$$

# Chapitre 3

# Formalisation

Commençons par transcrire la définition 2. Il faut d'abord représenter d'une certaine manière les points, c'est-à-dire les éléments d'une géométrie projective, et la relation de colinéarité. Les points de la géométrie projective seront abstraits, c'est-à-dire un *type*. La relation de colinéarité peut être représentée par une fonction qui prend trois points et renvoie vrai ou faux ; après tout, lorsque l'on dit qu'une relation $\ell$ est valable, ce que l'on fait, c'est prendre trois points et se demander s'ils sont colinéaires ou non.

```
class HasCollinear (P : Type) where
collinear : P → P → P → Prop

export HasCollinear (collinear)

variable {Point : Type} [HasCollinear Point]
```

Ici, la flèche entre les types `P` peut être considérée comme la flèche entre le domaine et le codomaine dans les définitions de fonctions dans le langage habituel des mathématiques, c'est-à-dire le symbole "$\rightarrow$".
Comme le point reste abstrait, il a fallu dire à Lean que l'existence d'une interprétation de la colinéarité est assurée, c'est-à-dire que la colinéarité des points est quelque chose que l'on peut décider. Dans le code, cela est satisfait par la dernière ligne : `Point` est un type dont la colinéarité existe.
Maintenant, on peut énoncer les axiomes $L_1$, $L_2$ et $L_3$ dans la définition 2.

```
axiom l1 (a b : Point) : collinear a b a
axiom l2 (a b p q : Point) : collinear a p q → collinear b p q →
p ≠ q → collinear a b p
axiom l3 (a b c d p: Point) : collinear p a b → collinear p c d →
∃ q : Point , collinear q a c ∧ collinear q b d
```

Il y a quelques points à noter ici. Tout d'abord, les flèches utilisées ici sont différentes de celles que nous avons utilisées ci-dessus, même si elles sont représentées par le même caractère typographique : Il s'agit de flèches d'implication, pour lesquelles nous utilisons normalement le symbole "$\Longrightarrow$". Deuxièmement, les conditions des axiomes qui contiennent des conjonctions logiques sont converties en implications sérielles. Expliquons cette équivalence logique. Supposons qu'on a une condition de la forme

$(p \wedge q) \implies r$. On a des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\iff \neg(p \wedge q) \vee r \\ &\iff (\neg p \vee \neg q) \vee r \\ &\iff \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ &\iff p \implies (\neg q \vee r) \\ &\iff p \implies (q \implies r) \end{aligned}$$

Grâce à ces axiomes, nous pouvons prouver la proposition suivante.

**Proposition 3.** *Toute relation ternaire $\ell$ qui satisfait les deux axiomes $L_1$ et $L_2$ est symétrique.*

Dans la preuve, on va dériver la colinéarité de toutes les permutations possibles de trois points $a, b, c$ à partir de $\ell(a, b, c)$. Ici, on ne donnera que $\ell(a, c, b)$ et les cinq autres versions seront omises.

```
theorem acb (a b c : Point) : collinear a b c → collinear a c b := by
intro col -- Supposons que $\ell(a,b,c)$.
obtain rfl | hbc := eq_or_ne b c -- Si $b = c$,
exact col -- le résultat est trivial,
apply l2 a c b c -- sinon on applique $\text{L}_2$;
exact col -- première condition de $\text{L}_2$
apply l1 c b -- deuxième condition de $\text{L}_2$
exact hbc -- troisième condition de $\text{L}_2$.
```

Ce code est la transcription exacte de la phrase “Si $b = c$, le résultat est trivial, et sinon on applique $\mathrm{L}_2$ à $\ell(a, b, c)$ et $\ell(c, b, c)$”.

## Références

[FF00] C.A. Faure et A. Frölicher. *Modern Projective Geometry*. T. 521. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000.