PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

l'**Université Galatasaray**
Spécialité : **Mathématiques**

Formalisation du théorème de Desargues en Lean 4
Rapport 1

Préparé par **Abdullah Uyu**
Résponsable : **Can Ozan Oğuz**

5 novembre 2023

Introduction

Lean 4 est un assistant de preuve. La transcription d'une preuve en langage humain dans un assistant de preuve est appelée *formalisation*. Lean 4 dispose d'une grande bibliothèque de preuves, y compris de nombreuses preuves du niveau de licence, appelée mathlib4. Dans cette bibliothèque, il y a d'importants théorèmes manquants, et le théorème de Desargue est l'un d'entre eux.

Objectifs du Projet

Les deux aspects principaux de ce projet sont l'apprentissage des rudiments de la théorie des géométries projectives, et de la programmation en Lean 4. Avec ces deux aspects, le but ultime est de formaliser le théorème de Desargue dans Lean 4.

Résultats Préliminaires

Pour motiver les géométries projectives, on commence par considérer les droites passant par l'origine dans le plan. On peut représenter la plupart de ces lignes par des points sur l'axe $y = 1$.

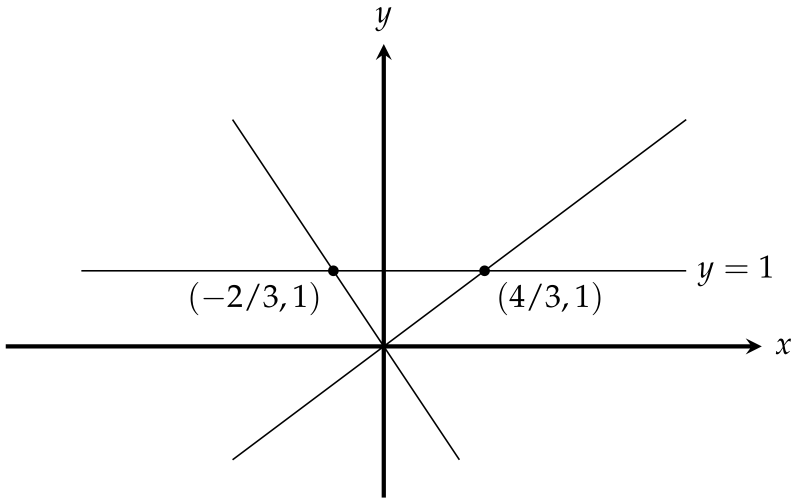

Figure 1: La représentation des droites passant par l'origine dans le plan

La seule droite que l'on n'a pas réussi à représenter est l'axe x. On notera également que l'on peut bien sûr choisir n'importe quel axe pour la représentation, à l'exception de ceux qui passent par l'origine. Cette impossibilité dans les cas d'exception est clairement visible sur la Figure 1. Si l'on choisit un tel axe, la droite que l'on ne parviendra pas à représenter sera la droite (passant par l'origine) qui est parallèle à cet axe.

Effectuons la même procédure pour l'espace. On peut représenter la plupart des droites passant par l'origine par des points sur le plan $z = 1$.

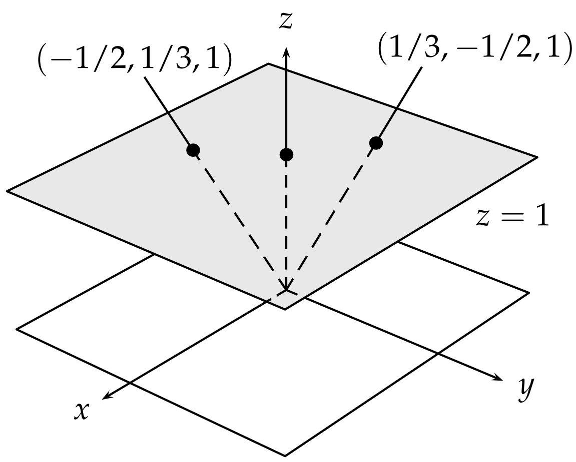

Figure 2: La représentation des droites passant par l'origine dans l'espace

Maintenant, les seules droites que nous ne pouvons pas représenter sont exactement les droites du plan que nous avons représenté précédemment. La remarque sur le choix de l'axe de représentation s'étend ici comme tout plan ne passant pas par l'origine peut être utilisé. De plus, le plan irreprésentable sera celui (qui passe par l'origine) qui est parallèle au plan de représentation.

Ce processus s'appelle la *projectivisation d'un espace vectoriel*. Écrivons-le en langage d'algèbre linéaire.

Définition 1 ([FF00, p. 27])**.** Soit V un espace vectoriel. Sur $V^\bullet := V \setminus \{0\}$, on définit une relation binaire comme suit : $x \sim y$ ssi x, y sont linéairement indépendants. Comme ceci est une relation d'équivalence, l'ensemble quotient $\mathcal{P}(V) := V^\bullet/\sim$ est bien défini. $\mathcal{P}(V)$ est appelée la *projectivisation de l'espace vectoriel V*.

Pour simplifier le langage, nous aurons également besoin de la définition de l'union disjointe.

Définition 2. Soit A et B deux ensembles. L'union $(A \times \{1\}) \cup (B \times \{0\})$, noté $A \dot\cup B$, est appelée *union disjointe* de A et B.

La motivation ci-dessus peut donc être formulée comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) &= \mathcal{P}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \\
&\cong \mathbb{R}^2 \dot\cup \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\
&= \mathbb{R}^2 \dot\cup \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\
&\cong \mathbb{R}^2 \dot\cup \mathbb{R} \dot\cup \mathcal{P}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Cela résume ce que l'on fait mathématiquement lorsque l'on fait des dessins en perspective : On prend un plan ($\mathbb{R}^2$), on choisit un horizon ($\mathbb{R}$) et un point de fuite ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$). La proposition suivante n'est qu'une généralisation de ce processus.

Proposition 1 ([FF00, p. 28])**.** *Pour un K-espace vectoriel V, il existe une bijection naturelle*

$$s : \mathcal{P}(V \times K) \to V \dot\cup \mathcal{P}(V)$$

induite par la fonction $t : (V \times K)^\bullet \to V \dot\cup \mathcal{P}(V)$ définie par $t(x, \xi) = \xi^{-1}x$ if $\xi \neq 0$ et $t(x, 0) = [x]$ pour $x \neq 0$, où $[x]$ désigne le point de $\mathcal{P}(V)$ représenté par x.

Définition 3 ([FF00, p. 26])**.** Une *géométrie projective* est un ensemble G accompagné d'une relation ternaire $\ell \subseteq G \times G \times G$ telle que les axiomes suivants sont satisfaits :

(L_1) $\ell(a, b, a)$ pour tout $a, b \in G$.

(L_2) $\ell(a, p, q)$, $\ell(b, p, q)$ et $p \neq q \implies \ell(a, b, p)$.

(L_3) $\ell(p, a, b)$ et $\ell(p, c, d) \implies \ell(q, a, c)$ et $\ell(q, b, d)$ pour un $q \in G$.

Les éléments de G sont appelés les *points* de la géométrie. Et trois points a, b, c sont dits *colinéaires* si $\ell(a, b, c)$.

Notons l'exemple le plus important pour une géométrie projective. Lors d'une discussion sur la chaîne de Zulip de Lean 4, Joseph Myers a conseillé d'énoncer le théorème sur cet exemple, mais pas sur la définition abstraite d'une géométrie projective. De plus, il est noté que la version du théorème en géométrie euclidienne, qui est probablement même connue de nombreux élèves du lycée, peut être déduite de l'énoncé du théorème sur cet important modèle de géométrie projective.

Proposition 2 ([FF00, p. 27])**.** *Pour un espace vectoriel V, $\mathcal{P}(V)$ est une géométrie projective si pour tout élément $X, Y, Z \in \mathcal{P}(V)$ on définit : $\ell(X, Y, Z)$ ssi X, Y, Z ont des représentants x, y, z linéairement dépendants.*

Notons maintenant la définition d'un isomorphisme de géométries projectives.

Définition 4 ([FF00, p. 27])**.** Un *isomorphisme* de géométries projectives est une bijection $g : G_1 \to G_2$ satisfaisant $\ell_1(a, b, c)$ ssi $\ell_2(ga, gb, gc)$. Si $G_1 = G_2$, alors on dit que g est une *collinéation*.

Prochaines Étapes

Tout d'abord, la preuve en langage humain du théorème sera minutieusement assimilée. Pour cela, le livre "Modern Projective Geometry" [FF00] de Claude-Alain Faure et Alfred Frölicher sera utilisé. Ce livre offre un cadre complet pour l'étude des géométries projectives. En particulier, le théorème de Desargue est compris en termes d'endomorphismes des géométries projectives et la preuve est effectuée en conséquence.

Deuxièmement, l'existence des transcriptions de la machinerie requise, dans mathlib4 sera vérifiée. Quelques exemples seraient la définition de la projectivisation, des morphismes entre des espaces projectifs, etc.

Enfin, le schéma complet de la preuve sera transcrit. Cela nécessitera probablement une bonne maîtrise de la programmation en Lean 4, et il est prévu que cette exigence soit satisfaite en cours de route.

Références

[FF00] C.A. Faure and A. Frölicher. *Modern Projective Geometry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.