PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

l'UNIVERSITÉ GALATASARAY

Spécialité : **Mathématiques**

Formalisation du théorème de Desargue en Lean 4

Rapport 1

Préparé par **Abdullah Uyu**

Résponsable : **Can Ozan Oğuz**

5 novembre 2023

Introduction

Lean 4 est un assistant de preuve. La transcription d'une preuve en langage humain dans un assistant de preuve est appelée *formalisation*. Lean 4 dispose d'une grande bibliothèque de preuves, y compris de nombreuses preuves de licence, appelée mathlib4. Dans cette bibliothèque, il y a d'importants théorèmes manquants, et le théorème de Desargue est l'un d'entre eux.

Objectifs du Projet

Ce projet vise à formaliser le théorème de Desargue dans Lean 4, en trois étapes. Tout d'abord, la preuve en langage humain du théorème sera minutieusement assimilée. Pour cela, le livre "Modern Projective Geometry" de Claude-Alain Faure et Alfred Frölicher sera utilisé. Ce livre offre un cadre complet pour l'étude des géométries projectives. En particulier, le théorème de Desargue est compris en termes d'endomorphismes des géométries projectives et la preuve est effectuée en conséquence. Deuxièmement, l'existence des transcriptions de la machinerie requise, dans mathlib4 sera vérifiée. Quelques exemples seraient la définition de la projectivisation, des fonctions partielles, etc. Enfin, le schéma complet de la preuve sera transcrit. Cela nécessitera probablement une bonne maîtrise de la programmation en Lean 4, et il est prévu que cette exigence soit satisfaite en cours de route.

Résultats Préliminaires

Tout le matériel mentionné dans cette section est tiré du livre susmentionné. Il est à noter qu'ils étaient à l'origine en anglais et qu'ils ont donc été traduits. Notons tout d'abord la définition d'une géométrie projective.

Définition 1. Une *géométrie projective* est un ensemble G accompagné d'une relation ternaire $\ell \subseteq G \times G \times G$ telle que les axiomes suivants sont satisfaits :

(L_1) $\ell(a, b, a)$ pour tout $a, b \in G$.

(L_2) $\ell(a, p, q)$, $\ell(b, p, q)$ et $p \neq q \implies \ell(a, b, p)$.

(L_3) $\ell(p, a, b)$ et $\ell(p, c, d) \implies \ell(q, a, c)$ et $(\ell(q, b, d)$ pour un $q \in G$.

Les éléments de G sont appelés les *points* de la géométrie. Et trois points a, b, c sont dits *colinéaires* si $\ell(a, b, c)$.

Un système équivalent d'axiomes utilisant l'ensemble, par exemple, $a \star b$, créé par ℓ est omis ici, par souci de concision. La définition de morphisme sera donnée à l'aide de ce système.

Notons l'exemple le plus important pour une géométrie projective. En fait, la formalisation sera effectuée avec cet exemple mais pas avec la définition abstraite ci-dessus. De plus, la version du théorème dans la géométrie euclidienne ne sera qu'une instance du théorème sur cet exemple.

Proposition 1. *Soit V un espace vectoriel. Sur $V^\bullet := V \setminus \{0\}$, on définit une relation binaire comme suit: $x \sim y$ ssi x, y sont linéairement indépendants. Comme ceci est une* *relation d'équivalence, l'ensemble quotient $\mathcal{P}(V) := V^\bullet / \sim$ est bien défini et devient une géométrie projective si pour tout élément $X, Y, Z \in \mathcal{P}(V)$ on définit : $\ell(X, Y, Z)$ ssi X, Y, Z ont des représentants x, y, z linéairement dépendants.*

Notons maintenant la définition d'un isomorphisme de géométries projectives et une proposition d'isomorphisme.

Définition 2. Un *isomorphisme* de géométries projectives est une bijection $g : G_1 \to G_2$ satisfaisant $\ell_1(a, b, c)$ ssi $\ell_2(ga, gb, gc)$. Si $G_1 = G_2$, alors on dit que g est une *collinéation*.

Proposition 2. *Pour un K-espace vectoriel V, il existe une bijection naturelle*

$$s : \mathcal{P}(V \times K) \to V \,\dot\cup\, \mathcal{P}(V)$$

induite par la fonction $t : (V \times K)^\bullet \to V \,\dot\cup\, \mathcal{P}(V)$ définie par $t(x, \xi) = \xi^{-1}x$ if $\xi \neq 0$ et $t(x, 0) = [x]$ pour $x \neq 0$, où $[x]$ désigne le point de $\mathcal{P}(V)$ représenté par x. Il existe donc une relation ternaire unique $\bar\ell$ sur $V \,\dot\cup\, \mathcal{P}(V)$ pour laquelle $V \,\dot\cup\, \mathcal{P}(V)$ devient une géométrie projective et s un isomorphisme. De plus, on a:

1. $\bar\ell(x, y, z)$ *ssi $x - z$ et $y - z$ sont linéairement dépendants dans V,*
2. $\bar\ell(x, y, [z])$ *ssi $x - y = \mu z$ pour un $\mu \in K$*
3. $\bar\ell(x, [y], [z])$ *ssi $[y] = [z]$,*
4. $\bar\ell([x], [y], [z])$ *ssi $\ell([x], [y], [z])$.*

Pour arriver à définir les endomorphisms, on note les définitions de fonction partielle, de noyau et domaine d'un fonction partielle, de sous-espace d'un géométrie projective, de morphisme et d'hyperplan.

Définition 3. Une *fonction partielle* de X dans Y est une fonction $f : X \setminus N \to Y$ définie sur le complément d'un sous-ensemble $N \subseteq X$. Si f est une fonction partielle de X dans Y, on écrit $f : X \dashrightarrow Y$, ou encore $f : X \to Y$ si on sait que $N = \emptyset$. L'ensemble N est appelé *noyau* de f et sera désigné par $\operatorname{Ker} f$. L'ensemble $X \setminus N$ est appelé *domaine* de f et sera désigné par $\operatorname{Dom} f$.

Définition 4. Un *sous-espace* d'un géométrie projective G est un sous-ensemble $E \subseteq G$ satisfaisant:

$$a, b \in E \implies a \star b \subseteq E$$

Définition 5. Un *morphisme* d'un géométrie projective G_1 dans un géométrie projective G_2 est une fonction partielle $g : G_1 \dashrightarrow G_2$ satisfaisant les axiomes suivant:

(M_1) $\operatorname{Ker} g$ est un sous-espace de G_1,

(M_2) si $a, b \notin N$, $c \in N$ et $a \in b \star c$, alors $ga = gb$,

(M_3) si $a, b, c \notin N$ et $a \in b \star c$, alors $ga \in gb \star gc$.

Définition 6. Un *hyperplan* d'une géométrie projective G est un sous-espace H de G qui est maximal parmi les sous-espaces stricts de G.

Nous définissons enfin les endomorphismes, ainsi que le centre et l'axe d'un endomorphisme.

Définition 7. Un *endomorphisme* d'un géométrie projective G est un morphisme $\varphi : G \dashrightarrow G$. Un *centre* d'un endomorphisme $\varphi : G \dashrightarrow G$ est un point $z \in G$ tel que $\varphi x \in x \star z$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} \varphi$. Un *axe* d'un endomorphisme $\varphi : G \dashrightarrow G$ est un hyperplan $H \subseteq G$ tel que $\varphi x = x$ pour tout $x \in H \cap \operatorname{Dom} \varphi$.

Prochaines Étapes

La dernière session d'étude a porté sur la compréhension de base des morphismes, c'est pourquoi un approfondissement des morphismes est prévu. Par exemple, le livre donne *l'implosion* et *l'explosion* comme exemples d'endomorphismes. Comme la compréhension visuelle est essentielle dans cette étude, la visualisation de ces exemples apparaît comme une suite immédiate.

Références

[1] C.A. Faure and A. Frölicher. *Modern Projective Geometry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.