

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA GENERAL
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS
COPADI

FORMULARIO COPADI

¡MÁS DE 400 FÓRMULAS DE MATEMÁTICAS!

ING. ÉRIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA
ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

ESTA OBRA SE REALIZÓ GRACIAS A LA DGAPA, A TRAVÉS DE UN PROYECTO PAPIME

PRÓLOGO

Las asignaturas de matemáticas en la Facultad de Ingeniería, que fundamentalmente se imparten en su División de Ciencias Básicas, constituyen herramientas muy poderosas -y en ocasiones son un auténtico lenguaje- para la comprensión y aplicación de las asignaturas físicas y también para aquellas propias de las carreras de ingeniería. Son apoyos valiosos para los estudios de posgrado -maestrías y doctorados- y para el ejercicio profesional.

Es por ello que, para contar con estudiantes con una formación sólida en Ciencias Básicas y que tengan buenas posibilidades de éxito en su devenir académico y profesional, resulta importante y trascendente su aprendizaje de las diferentes ramas de las matemáticas que deben estudiar como son el Álgebra, la Geometría Analítica, El Álgebra Lineal, el Cálculo con una y varias variables, las Ecuaciones Diferenciales y las Matemáticas Avanzadas.

Y para esto hemos pensado en proporcionar a los estudiantes de ingeniería estos formularios, que con sus más de 400 expresiones, pretenden apoyar y hacer más eficiente el estudio y aprendizaje de las matemáticas primero y después constituirse en un manual para su quehacer futuro, ya sea académico o laboral.

Esperamos que este formulario sea de mucha utilidad para el trabajo académico de alumnos y profesores de ingeniería que ven y aprecian esta disciplina como un detonante para el desarrollo de la sociedad. Es sabido que la ingeniería es unión entre los seres humanos y la naturaleza, y que uno de los principales objetivos de su quehacer es el de mejorar la calidad de la vida en el entorno de su práctica.

Aprovechamos este espacio para agradecer a la Lic. Ana María Vieyra Ávila y al pasante de ingeniería Jorge Alejandro Rangel Rangel por su colaboración en las labores administrativas y de seguimiento para el logro de esta publicación.

Ing. Érik Castañeda de Isla Puga
Ing. Pablo García y Colomé

ÍNDICE

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	1
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	2
RECTA Y CIRCUNFERENCIA	3
LAS CÓNICAS: PARÁBOLA, ELIPSE E HIPÉRBOLA	5
GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO	7
CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS	10
FÓRMULAS DE DERIVACIÓN ORDINARIA	11
FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN	13
SERIES INFINITAS	15
SERIES DE POTENCIAS	18
ALGUNAS FUNCIONES REPRESENTADAS POR SERIES DE POTENCIAS	20
FUNCIONES HIPERBÓLICAS. IDENTIDADES, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN	22
MÁXIMOS Y MÍNIMOS. UNA O MÁS VARIABLES	24
GEOMETRÍA DIFERENCIAL. FÓRMULAS DE FRENET-SERRET. CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA.	27
LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES. LONGITUD DE ARCO, ÁREA BAJO LA CURVA, ÁREA ENTRE DOS CURVAS, ÁREA DE SUPERFICIES, VOLÚMENES	29
MASA, MOMENTOS, CENTROS DE MASA Y CENTROIDE	31
ALGUNOS CASOS DE DERIVACIÓN EXPLÍCITA EN FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL	33
ALGUNOS CASOS DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA EN FUNCIONES DE UNA Y MÁS VARIABLES	35
COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS	37
OPERADORES VECTORIALES GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL Y LAPLACIANO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES	41
TEOREMAS DE GREEN, STOKES Y GAUSS	42
TRANSFORMADAS DE LAPLACE	44
SERIES DE FOURIER	45

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

CATETO OPUESTO = *catop* ; CATETO ADYACENTE = *catad* ; HIPOTENUSA = *hipo*

$$\sin \theta = \frac{\text{catop}}{\text{hipo}} ; \cos \theta = \frac{\text{catad}}{\text{hipo}} ; \tan \theta = \frac{\text{catop}}{\text{catad}}$$

IDENTIDADES

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} ; \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} ; \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ; \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 ; \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 ; \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta ; \cos(-\theta) = \cos \theta ; \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ; \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ; \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ; \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta ; \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 ; \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} ; \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} ; \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta ; \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

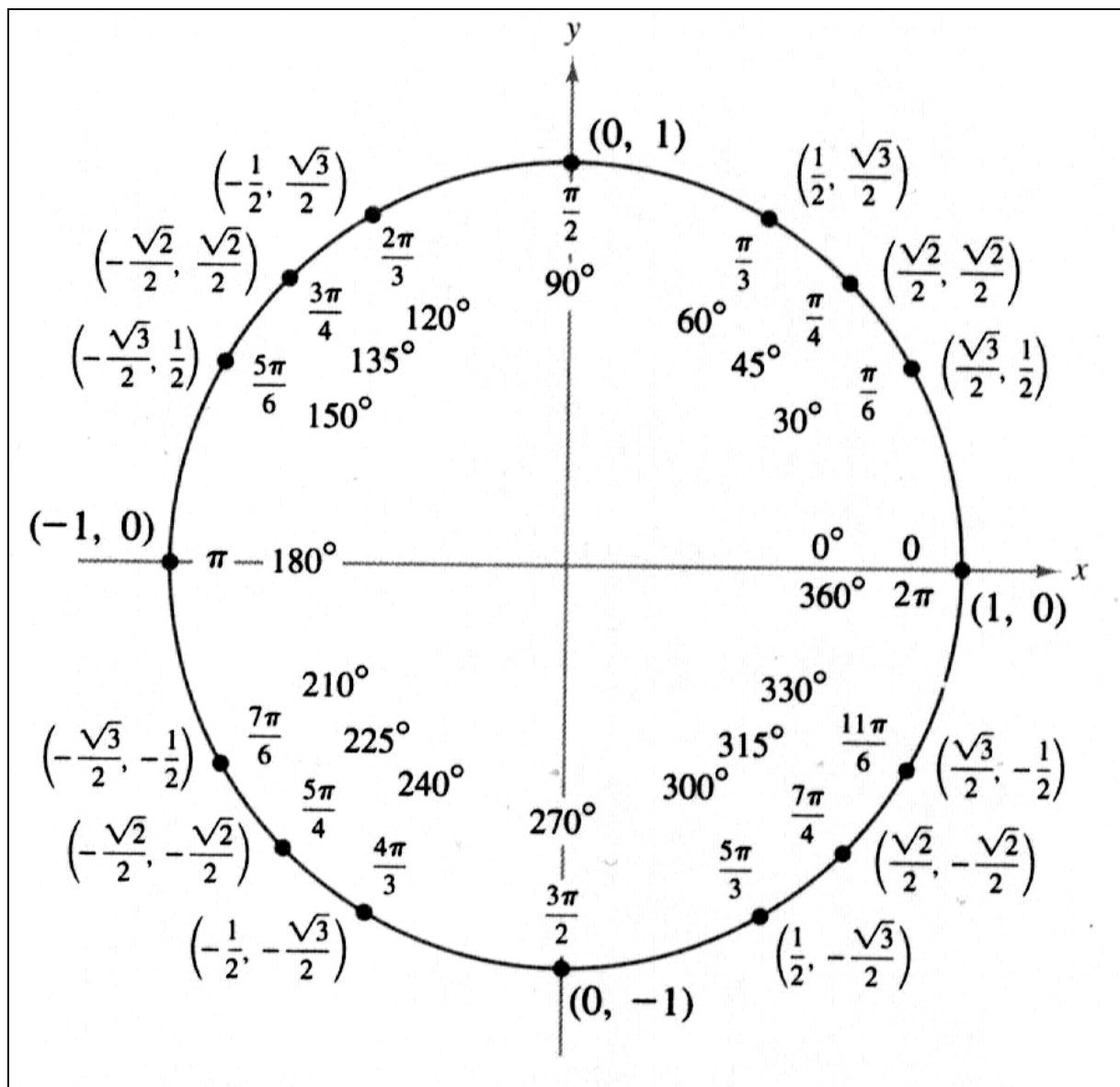
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

EN LA FIGURA SE PRESENTA EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO DE RADIO LA UNIDAD POR LO QUE EN CADA PUNTO, CORRESPONDIENTE A UN ÁNGULO DETERMINADO, LA ABCISCA ES EL COSENO Y LA ORDENADA EL SEÑO DEL ÁNGULO CONSIDERADO Y A PARTIR DE ESOS VALORES SE PUEDEN DETERMINAR LAS DEMÁS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y CONOCER DE TODAS ELLAS SU VALOR Y SIGNO DEPENDIENDO DEL CUADRANTE EN ESTUDIO.



RECTA Y CIRCUNFERENCIA

LA LÍNEA RECTA

PENDIENTE DE LA RECTA: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad ; \quad x_1 \neq x_2$

ECUACIÓN DE LA RECTA "PUNTO PENDIENTE": $y - y_1 = m(x - x_1)$

ECUACIÓN DE LA RECTA "PENDIENTE ORDENADA AL ORIGEN": $y = m x + b$

m = PENDIENTE DE LA RECTA

b = ORDENADA AL ORIGEN

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad ; \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

a = ABSCISA AL ORIGEN

b = ORDENADA AL ORIGEN

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

$$A x + B y + C = 0$$

FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$$

p = LONGITUD DE LA NORMAL QUE VA DEL ORIGEN A LA RECTA

$0 < \omega < 360^\circ$ MEDIDO DESDE LA PARTE POSITIVA DEL EJE "x" A LA NORMAL

DISTANCIA DE UNA RECTA $A x + B y + C = 0$ A UN PUNTO (x_1, y_1)

$$d = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD CON LAS PENDIENTES DE DOS RECTAS

SEAN m_1 y m_2 LAS PENDIENTES DE DOS RECTAS ℓ_1 y ℓ_2 . ENTONCES:

ℓ_1 y ℓ_2 SON PARALELAS $\Rightarrow m_1 = m_2$

SEAN m_1 y m_2 LAS PENDIENTES DE DOS RECTAS ℓ_1 y ℓ_2 . ENTONCES:

ℓ_1 y ℓ_2 SON PERPENDICULARES $\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

LA CIRCUNFERENCIA

ECUACIÓN CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO " r " : $x^2 + y^2 = r^2$

ECUACIÓN CON CENTRO EN EL PUNTO (h, k) Y RADIO " r " : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

LA CIRCUNFERENCIA EXISTE, ES DECIR, TIENE RADIO DIFERENTE DE CERO SI $D^2 + E^2 - 4F > 0$ Y ENTONCES, LAS COORDENADAS DE SU CENTRO SON $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ Y EL RADIO ES $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

ECUACIÓN MEDIANTE UN DETERMINANTE

LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR LOS TRES PUNTOS

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ NO COLINEALES, ESTÁ DADA POR EL DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

TRASLACIÓN DE LOS EJES COORDENADOS

SEA UN NUEVO ORIGEN DE COORDENADAS $O'(h, k)$ Y SEAN RESPECTIVAMENTE (x, y) y (x', y') LAS COORDENADAS DE UN PUNTO, ANTES Y DESPUÉS DE LA TRASLACIÓN. ENTONCES, LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA ORIGINAL AL NUEVO SON:

$$x = x' + h \quad y = y' + k$$

ROTACIÓN DE LOS EJES COORDENADOS

SI LOS EJES COORDENADOS GIRAN UN ÁNGULO θ EN TORNO DE SU ORIGEN COMO CENTRO DE ROTACIÓN Y LAS COORDENADAS DE UN PUNTO SON, RESPECTIVAMENTE, (x, y) y (x', y') , ANTES Y DESPUÉS DE LA ROTACIÓN, ENTONCES LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA ORIGINAL AL NUEVO SON.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

LAS CÓNICAS: PARÁBOLA, ELIPSE E HIPÉRBOLA

PARÁBOLA

p = DISTANCIA DEL VÉRTICE AL FOCO = DISTANCIA DEL VÉRTICE A LA DIRECTRIZ
FOCO SOBRE EL EJE

VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " x "

$$y^2 = 4 p x$$

DIRECTRIZ: $x = -p$; FOCO $(p, 0)$

VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " y "

$$x^2 = 4 p y$$

DIRECTRIZ. $y = -p$; FOCO $(0, p)$

VÉRTICE EN EL PUNTO (h, k) EJE FOCAL PARALELO AL EJE " x "

$$(y - k)^2 = 4 p (x - h)$$

VÉRTICE EN EL PUNTO (h, k) EJE FOCAL PARALELO AL EJE " y "

$$(x - h)^2 = 4 p (y - k)$$

LONGITUD DEL LADO RECTO = $4 p$; EXCENTRICIDAD: $e = 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CÓNICA: $A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$; CON $A = 0$ ó $C = 0$

ELIPSE

$2 a$ = LONGITUD DEL EJE MAYOR ; $2 b$ = LONGITUD DEL EJE MENOR

$2 c$ = DISTANCIA ENTRE LOS FOCOS

$$c^2 = a^2 - b^2$$

FOCOS SOBRE EL EJE MAYOR

CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " x "

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FOCOS: $(c, 0)$ y $(-c, 0)$

CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " y "

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

FOCOS: $(0, c)$ y $(0, -c)$

CENTRO EN EL PUNTO (h, k) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE " x "

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

CENTRO EN EL PUNTO (h, k) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE " y "

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

LONGITUD DEL LADO RECTO = $\frac{2b^2}{a}$; EXCENTRICIDAD: $e = \frac{c}{a} < 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CÓNICA: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; CON A y C DEL MISMO SIGNO

HIPÉRBOLA

$2a$ = LONGITUD DEL EJE TRANSVERSO ; $2b$ = LONGITUD DEL EJE CONJUGADO

$2c$ = DISTANCIA ENTRE LOS FOCOS

$$c^2 = a^2 + b^2$$

FOCOS SOBRE EL EJE TRANSVERSO

CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " x "

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FOCOS: $(c, 0)$ y $(-c, 0)$

CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " y "

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

FOCOS: $(0, c)$ y $(0, -c)$

CENTRO EN EL PUNTO (h, k) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE " x "

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

CENTRO EN EL PUNTO (h, k) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE " y "

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

LONGITUD DEL LADO RECTO = $\frac{2b^2}{a}$; EXCENTRICIDAD: $e = \frac{c}{a} > 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CÓNICA: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; CON A y C DE SIGNO DISTINTO

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

VECTORES

MÓDULO DE UN VECTOR: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

PRODUCTO ESCALAR: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad ; \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

ORTOGONALIDAD: \vec{a} y \vec{b} SON ORTOGONALES $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{matrix}$

COMP VECT \vec{a} $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad ; \quad \text{COMP ESC } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES: $\theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

$\alpha = \arccos \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \beta = \arccos \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \gamma = \arccos \frac{a_3}{|\vec{a}|}$
 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

PRODUCTO VECTORIAL: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad ; \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

PARALELISMO: \vec{a} y \vec{b} SON PARALELOS $\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{matrix}$

ÁREA DEL PARALELOGRAMO = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

PRODUCTO MIXTO: $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\text{VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO} = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

LOS PUNTOS A, B, C y D SON COPLANARES
SI EL PRODUCTO MIXTO $[\vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD}]$ ES NULO

$$\text{DOBLE PRODUCTO VECTORIAL} \begin{cases} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \end{cases}$$

LA RECTA EN EL ESPACIO

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{v}$$

DONDE $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ES UN PUNTO DE LA RECTA Y $\vec{v}(a, b, c)$ ES UN VECTOR PARALELO A ELLA

$$\text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA} \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

$$\text{ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA EN FORMA SIMÉTRICA: } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA EN FORMA GENERAL

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\text{DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA: } d = \frac{|(\vec{Q} - \vec{P}_0) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}; \text{ DONDE } Q \text{ ES EL PUNTO}$$

$$\text{ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS: } \theta = \arccos \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

$$\text{CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS RECTAS: } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$\text{CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS RECTAS: } \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\text{DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS: } d = \frac{|(\vec{P}_{02} - \vec{P}_{01}) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

EL PLANO EN EL ESPACIO

ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

$$\overline{P} = \overline{P}_0 + r \overline{v}_1 + s \overline{v}_2 \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

DONDE $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ES UN PUNTO DEL PLANO Y $\overline{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\overline{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ SON DOS VECTORES DE DIRECCIÓN DEL PLANO NO PARALELOS

$$\text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO: } \begin{cases} x = x_0 + r a_1 + s a_2 \\ y = y_0 + r b_1 + s b_2 \\ z = z_0 + r c_1 + s c_2 \end{cases}$$

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO QUE CONTIENE AL PUNTO P_0 y CUYO VECTOR NORMAL ES \overline{N}

$$(\overline{P} - \overline{P}_0) \cdot \overline{N} = 0$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO: $A x + B y + C z + D = 0$,

DONDE SU VECTOR NORMAL ESTÁ DADO POR: $\overline{N} = (A, B, C)$

$$\text{DISTANCIA DE UN PUNTO } Q \text{ A UN PLANO: } d = \frac{|(\overline{Q} - \overline{P}_0) \cdot \overline{N}|}{|\overline{N}|}$$

$$\text{ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS: } \theta = \arccos \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| |\overline{N}_2|}$$

$$\text{CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD: } \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$$

$$\text{CONDICIÓN DE PARALELISMO: } \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \overline{0}$$

LA DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS SE CALCULA COMO LA DISTANCIA ENTRE UN PUNTO DE UN PLANO Y EL OTRO PLANO

$$\text{ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO: } \theta = \arcsen \frac{|\overline{N} \cdot \overline{v}|}{|\overline{N}| |\overline{v}|}$$

$$\text{CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA: } \overline{N} \cdot \overline{v} = 0$$

$$\text{CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA: } \overline{N} = k \overline{v}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS

CON CENTRO: $Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = N$

SI $N = 0$ Y DOS COEFICIENTES SON NULOS, EL LUGAR GEOMÉTRICO SON LOS PLANOS COORDENADOS.

SI $N = 0$ Y UN COEFICIENTE ES NULO, EL LUGAR GEOMÉTRICO SON LOS EJES COORDENADOS.

SI $N = 0$ Y TODOS LOS COEFICIENTES TIENEN EL MISMO SIGNO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL ORIGEN DE COORDENADAS.

SI $N = 0$ Y DOS COEFICIENTES TIENEN EL MISMO SIGNO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL CONO ELÍPTICO.

SI $N > 0$ Y DOS COEFICIENTES SON NULOS, EL LUGAR GEOMÉTRICO SON DOS PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS.

SI $N > 0$ Y UN COEFICIENTE ES NULO, EL LUGAR GEOMÉTRICO SON CILINDROS PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS.

SI $N > 0$ Y TODOS LOS COEFICIENTES SON POSITIVOS, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL ELIPSOIDE.

SI $N > 0$ Y DOS COEFICIENTES SON POSITIVOS Y EL OTRO NEGATIVO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA O UN MANTO.

SI $N > 0$ Y DOS COEFICIENTES SON NEGATIVOS Y EL OTRO POSITIVO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS O DOS MANTOS.

SIN CENTRO: $Kx^2 + Ly^2 = Pz$ ($P > 0$)

SI K Y L SON NULOS, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES EL PLANO xy .

SI K Ó L ES NULO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES UN CILINDRO PARABÓLICO.

SI K Y L TIENEN EL MISMO SIGNO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES UN PARABOLOIDE ELÍPTICO.

SI K Y L TIENEN DIFERENTE SIGNO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES UN PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN ORDINARIA

$$y = cu \quad ; \quad u = f(x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

$$y = c \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y = \sqrt{u} \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

$$y = u^n \quad ; \quad u = f(x) \quad ; \quad n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$y = u \pm v \quad ; \quad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$y = uv \quad ; \quad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v$$

$$y = \frac{u}{v} \quad ; \quad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y = |u| \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{u}{|u|} \frac{du}{dx}$$

$$y = \ln u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$y = \log_b u \quad ; \quad u = f(x) \quad ; \quad b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} \log_b e$$

$$y = e^u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$y = a^u \quad ; \quad u = f(x) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$y = u^v \quad ; \quad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$y = \operatorname{sen} u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$y = \cos u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

$$y = \tan u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$y = \cot u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$y = \sec u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$y = \operatorname{csc} u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$y = \operatorname{angsen} u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{ang} \cos u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{ang} \tan u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y = \operatorname{ang} \cot u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y = \operatorname{ang} \sec u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = \operatorname{ang} \operatorname{csc} u \quad ; \quad u = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

$$\int k f(u) du = k \int f(u) du$$

$$\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$$

$$\int du = u + C$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + C = \ln |\sec u| + C$$

$$\int \cot u du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{angsen} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{ang} \tan \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ang} \sec \frac{|u|}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

SERIES INFINITAS

SERIE TELESCÓPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} ; \quad S = 1$$

SERIE GEOMÉTRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n ; \quad \text{CONVERGE SI } |r| < 1 ; \quad S = \frac{a}{1-r}$$

$$\text{DIVERGE SI } |r| \geq 1$$

SERIE ARMÓNICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ; \quad \text{DIVERGENTE}$$

SERIE ARMÓNICA "p"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} ; \quad 0 \leq p \leq 1 \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

$$p > 1 \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = S \Rightarrow R_n = S - S_n ; \quad \text{ESTÁ ACOTADO POR: } 0 < R_n < \frac{1}{n^{p-1}(p-1)}$$

CONVERGENCIA O DIVERGENCIA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S & \Rightarrow \text{converge} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty & \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

DONDE S_n ES LA SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES

$$\sum a_n \text{ es convergente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente}$$

$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ convergen} \Rightarrow \begin{cases} \sum (a_n + b_n) \text{ converge} \\ \sum (a_n - b_n) \text{ converge} \\ \sum c a_n \text{ converge ; } c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum a_n \text{ diverge} &\Rightarrow \sum c a_n \text{ diverge ; } c \in \mathbb{R} \\ \sum a_n \text{ converge y } \sum b_n \text{ diverge} &\Rightarrow \sum (a_n + b_n) \text{ diverge} \end{aligned}$$

PRUEBA DE LA INTEGRAL

SI f ES POSITIVA, CONTINUA Y DECRECIENTE PARA $x \geq 1$ ENTONCES LA SERIE $f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$

i) converge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente

ii) diverge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente

PRUEBA DE LA COMPARACIÓN

SEAN $\sum a_n$ y $\sum b_n$ SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS. ENTONCES:

i) si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ entonces $\sum a_n$ converge

ii) si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ entonces $\sum a_n$ diverge

PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE

SEAN $\sum a_n$ y $\sum b_n$ SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS. ENTONCES:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{las dos convergen} \\ o \\ \text{las dos divergen} \end{cases}$$

PRUEBA DE LA SERIE ALTERNADA

$$\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} a_n \text{ es convergente}$$

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

$\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ es convergente

$\sum a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente

$\sum a_n$ es condicionalmente convergente si $\begin{cases} \sum a_n \text{ converge} \\ \sum |a_n| \text{ diverge} \end{cases}$

PRUEBA DE LA RAZÓN

SEA $\sum a_n$ UNA SERIE CON TÉRMINOS NO NULOS. ENTONCES:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es absolutamente convergente}$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1 \text{ ó } \rightarrow \infty \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente}$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow \text{el criterio no decide}$

PRUEBA DE LA RAÍZ

SEA $\sum a_n$ UNA SERIE INFINITA. ENTONCES:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es absolutamente convergente}$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1 \text{ ó } \rightarrow \infty \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente}$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \text{el criterio no decide}$

SERIES DE POTENCIAS

UNA SERIE DE LA FORMA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ES CONOCIDA COMO "SERIE DE POTENCIAS EN x "

TEOREMA

SI $\sum a_n x^n$ ES UNA SERIE DE POTENCIAS, ENTONCES UNA DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES ES CIERTA:

- LA SERIE CONVERGE SÓLO SI $x = 0$.
- LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE PARA TODA $x \in \mathbb{R}$.
- EXISTE UN NÚMERO POSITIVO r TAL QUE LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE SI $|x| < r$ Y DIVERGENTE SI $|x| > r$

SI c ES UN NÚMERO REAL, UNA SERIE DE LA FORMA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \cdots + a_n (x - c)^n + \cdots$$

ES CONOCIDA COMO "SERIE DE POTENCIAS EN $x - c$ "

TEOREMA

SI $\sum a_n (x - c)^n$ ES UNA SERIE DE POTENCIAS, ENTONCES UNA DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES ES CIERTA:

- LA SERIE CONVERGE SÓLO SI $x - c = 0$, ESTO ES, SI $x = c$.
- LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE PARA TODA $x \in \mathbb{R}$.
- EXISTE UN NÚMERO POSITIVO r TAL QUE LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE SI $|x - c| < r$ Y DIVERGENTE SI $|x - c| > r$.

TEOREMA

SEA UNA SERIE DE POTENCIAS $\sum a_n x^n$ CON UN RADIO DE CONVERGENCIA NO NULO r
Y CONSIDÉRESE LA FUNCIÓN f DEFINIDA POR:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

PARA TODA x EN EL INTERVALO DE CONVERGENCIA. SI $-r < x < r$, ENTONCES:

$$(1) \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$(2) \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots$$

NOTA. ES POSIBLE PROBAR QUE ESTAS DOS SERIES DE POTENCIAS TIENEN EL MISMO
RADIO DE CONVERGENCIA QUE LA SERIE ORIGINAL $\sum a_n x^n$.

TEOREMA. SERIE DE TAYLOR

SI f ES UNA FUNCIÓN TAL QUE

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

PARA TODA x EN UN INTERVALO ABIERTO QUE CONTIENE A c , ENTONCES

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

SE CONOCE COMO "SERIE DE TAYLOR PARA $f(x)$ EN c "

TEOREMA. SERIE DE MACLAURIN

SI $c = 0$ EN LA SERIE DE TAYLOR, SE CONSIDERA ENTONCES A LA FUNCIÓN f TAL QUE

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

PARA TODA x EN UN INTERVALO ABIERTO $(-r, r)$, Y ENTONCES

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

SE CONOCE COMO "SERIE DE MACLAURIN PARA $f(x)$ "

POR LA FÓRMULA DE TAYLOR, SE TIENE QUE SU POLINOMIO DE GRADO ENÉSIMO EQUIVALE A LA FUNCIÓN MENOS EL RESIDUO, ES DECIR, QUE

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x) \quad \text{DONDE} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

PARA ALGÚN VALOR DE z ENTRE c Y x . EN EL SIGUIENTE TEOREMA SE UTILIZA EL RESIDUO $R_n(x)$ PARA ESPECIFICAR LAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS REPRESENTATIVA DE LA FUNCIÓN $f(x)$.

TEOREMA

SEA UNA FUNCIÓN f CON DERIVADAS DE TODOS LOS ÓRDENES A TRAVÉS DEL INTERVALO QUE CONTIENE A c . ENTONCES, SI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

PARA TODA x EN EL INTERVALO, ENTONCES LA FUNCIÓN $f(x)$ ES REPRESENTADA POR LA SERIE DE TAYLOR PARA $f(x)$ EN c .

ALGUNAS FUNCIONES REPRESENTADAS POR SERIES DE POTENCIAS

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(0, 2)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^n + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-1, 1)$

CONOCIDA POR ALGUNOS COMO "SERIE GEOMÉTRICA"

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-1, 1)$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

NOTA. EL TÉRMINO ENÉSIMO CONSIDERA A PARTIR DEL SEGUNDO TÉRMINO CON $n = 1$

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\operatorname{angsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $[-1, 1]$

$$\operatorname{ang} \tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $[-1, 1]$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-\infty, \infty)$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(0, 2]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-1, 1)$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \dots$$

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(-1, 1^*)$

* LA CONVERGENCIA EN $x = \pm 1$ DEPENDE DEL VALOR DE "k"

FUNCIONES HIPERBÓLICAS: IDENTIDADES, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$\coth^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$y = \sinh u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$$

$$y = \cosh u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \sinh u \cdot u'$$

$$y = \tanh u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$$

$$y = \coth u ; u = f(x) \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$$

$$y = \operatorname{sech} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot u'$$

$$y = \operatorname{cosech} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech} u \coth u \cdot u'$$

$$y = \sinh^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$y = \cosh^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} ; u > 1$$

$$y = \tanh^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2} ; |u| < 1$$

$$y = \coth^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2} ; |u| > 1$$

$$y = \sec h^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}} ; 0 < u < 1$$

$$y = \csc h^{-1} u ; u = f(x) \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}} ; u \neq 0$$

INTEGRACIÓN DE Y CON LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \tanh u \, du = \ln(\cosh u) + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln|\sinh u| + C$$

$$\int \sec hu \, du = \tanh^{-1}|\sinh u| + C$$

$$\int \csc hu \, du = \ln\left|\tanh \frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \sec h^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \csc h^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \sec hu \tanh u \, du = -\sec hu + C$$

$$\int \csc hu \coth u \, du = -\csc hu + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C;$$

ésta, donde $u > a > 0$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C; |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C; |u| > a \end{cases}$$

ésta en forma compacta es:

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C; u \neq a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \csc h^{-1} \frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a} \sinh^{-1} \frac{a}{|u|} + C; u \neq 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \sec h^{-1} \frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a} \cosh^{-1} \frac{a}{|u|} + C; 0 < u < a$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS. UNA O MÁS VARIABLES

FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE ESCALAR

$$y = f(x)$$

PUNTOS CRÍTICOS

SON AQUELLOS PUNTOS DONDE f ES CONTINUA
Y LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN ES NULA O NO EXISTE, ES DECIR, DONDE

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} \text{ no existe}$$

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA CADA PUNTO CRÍTICO

$$f'(x) > 0 \quad \text{a} \quad f'(x) < 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO RELATIVO}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{a} \quad f'(x) < 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO RELATIVO}$$

SI NO HAY CAMBIO DE SIGNO NO HAY EXTREMO RELATIVO

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA CADA PUNTO CRÍTICO

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO RELATIVO}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO RELATIVO}$$

SI $f''(x) = 0$ NO SE PUEDE APLICAR ESTE CRITERIO

PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CONCAVIDAD

SON AQUELLOS PUNTOS DONDE f ES CONTINUA Y LA SEGUNDA DERIVADA ES NULA
O NO EXISTE Y DONDE LA CONCAVIDAD DE UNA CURVA CAMBIA

UNA CURVA ES CÓNCAVA HACIA ARRIBA CUANDO SUS TANGENTES ESTÁN POR DEBAJO DE ELLA
Y CÓNCAVA HACIA ABAJO CUANDO SUS TANGENTES ESTÁN POR ENCIMA DE ELLA

$$f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad f''(x) < 0 \Rightarrow \text{PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad f''(x) > 0 \Rightarrow \text{PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL

$$z = f(x, y)$$

PUNTOS CRÍTICOS O ESTACIONARIOS SON AQUELLOS EN LOS CUALES z ES CONTINUA

Y LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ SE ANULAN O NO EXISTEN

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA
HESSIANO

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2$$

$$g(x_0, y_0) > 0 \quad y \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad (o \quad f_{yy}(x_0, y_0) < 0) \Rightarrow \text{MÁXIMO RELATIVO}$$

$$g(x_0, y_0) > 0 \quad y \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad (o \quad f_{yy}(x_0, y_0) > 0) \Rightarrow \text{MÍNIMO RELATIVO}$$

$$g(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{PUNTO SILLA}$$

$$g(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \text{EL CRITERIO NO DECIDE}$$

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA (FORMA MATRICIAL)
PARA CADA PUNTO CRÍTICO SE CALCULA LA MATRIZ HESSIANA

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

SE CALCULA E IGUALA A CERO EL DETERMINANTE

$$\det(H - \lambda I) = 0$$

LOS SIGNOS DE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS λ_1 y λ_2 DETERMINAN
LA NATURALEZA DEL PUNTO CRÍTICO:

$$\lambda_1 > 0 \quad y \quad \lambda_2 > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO RELATIVO}$$

$$\lambda_1 < 0 \quad y \quad \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO RELATIVO}$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 > 0 & o & \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 & & \lambda_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{PUNTO SILLA}$$

SI POR LO MENOS UN VALOR CARACTERÍSTICO ES CERO, EL CRITERIO NO DECIDE

GENERALIZACIÓN

SEAN: LA FUNCIÓN $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ CON PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS;
 $f(\bar{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ EN UNA REGIÓN D DEL ESPACIO n -DIMENSIONAL; $\bar{r}_0 \in D$ UN
PUNTO CRÍTICO TAL QUE $f_{x_i}(\bar{r}_0) = 0$ Y H LA MATRIZ HESSIANA DEFINIDA POR:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} ; \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ; \quad f_{ij} = f_{ji}$$

ENTONCES:

- i) $f(\bar{r}_0)$ ES UN MÁXIMO RELATIVO DE f SI LOS VALORES CARACTERÍSTICOS DE LA MATRIZ HESSIANA VALUADA EN \bar{r}_0 SON TODOS NEGATIVOS.
- ii) $f(\bar{r}_0)$ ES UN MÍNIMO RELATIVO DE f SI LOS VALORES CARACTERÍSTICOS DE LA MATRIZ HESSIANA VALUADA EN \bar{r}_0 SON TODOS POSITIVOS.
- iii) $f(\bar{r}_0)$ ES UN PUNTO SILLA (MINIMÁXIMO) SI EXISTEN VALORES CARACTERÍSTICOS DE LA MATRIZ HESSIANA VALUADA EN \bar{r}_0 CON SIGNOS DIFERENTES.
- iv) EL CRITERIO NO DECIDE SI UNO POR LO MENOS DE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS DE LA MATRIZ HESSIANA VALUADA EN \bar{r}_0 VALE CERO.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

SEA $z = f(\bar{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ UNA FUNCIÓN ESCALAR CONTINUA Y DIFERENCIABLE EN UNA REGIÓN CERRADA $D \subset \mathfrak{R}^n$ DONDE f ESTÁ SUJETA A LAS CONDICIONES:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \quad (o \geq 0) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \quad (o \geq 0) \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \quad (o \geq 0) \end{aligned} \quad m < n$$

Y SEA EL PROBLEMA:

OPTIMIZAR LA FUNCIÓN OBJETIVO: $z = f(\bar{r})$

SUJETA A LAS RESTRICCIONES: $g_i(\bar{r}) \leq 0 \quad (o \geq 0) \quad ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, m < n$

SI EXISTE UN EXTREMO RELATIVO DE f EN \bar{r}_0 , ENTONCES $\bar{\nabla} L = 0$, ES DECIR,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Y ADEMÁS

$$g_k(\bar{r}) = 0 \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, m < n$$

ESTAS DOS EXPRESIONES FORMAN UN SISTEMA DE $m + n$ ECUACIONES,

$$f_{x_1} + \lambda_1 g_{1x_1} + \dots + \lambda_m g_{mx_1} = 0$$

\vdots

$$f_{x_n} + \lambda_1 g_{1x_n} + \dots + \lambda_m g_{mx_n} = 0$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

\vdots

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

DONDE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ SE CONOCEN COMO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

A PARTIR DE ESTE SISTEMA PUEDEN SER DETERMINADAS LAS INCÓGNITAS $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

AQUÍ, LOS VALORES DE x_1, x_2, \dots, x_n SON LAS COORDENADAS DEL PUNTO EN EL QUE PUEDE HABER UN EXTREMO CONDICIONADO.

PARA EL CASO DE UNA FUNCIÓN $z = f(x, y)$ Y UNA RESTRICCIÓN $g(x, y, z) = 0$,

EL SISTEMA A RESOLVER SERÍA EL SIGUIENTE:

$$f_x + \lambda g_x = 0 \quad ; \quad f_y + \lambda g_y = 0 \quad ; \quad f_z + \lambda g_z = 0 \quad ; \quad g(x, y, z) = 0$$

Y PARA EL CASO DE LA MISMA FUNCIÓN $z = f(x, y)$ PERO CON DOS RESTRICCIONES,

EL SISTEMA SERÍA:

$$f_x = \lambda_1 g_{1x} + \lambda_2 g_{2x} \quad ; \quad f_y = \lambda_1 g_{1y} + \lambda_2 g_{2y} \quad ; \quad f_z = \lambda_1 g_{1z} + \lambda_2 g_{2z} \quad ; \quad g_1(x, y, z) = 0 \quad ; \quad g_2(x, y, z) = 0$$

GEOMETRÍA DIFERENCIAL. FÓRMULAS DE FRENET-SERRET CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

$\vec{r}(t)$ = ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA CURVA EN \mathfrak{R}^3
 s = PARÁMETRO "LONGITUD DE ARCO"

VECTOR TANGENTE UNITARIO: $\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ YA QUE $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$

VECTOR NORMAL UNITARIO: $\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}$; CURVATURA: $k = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$; RADIO DE CURVATURA: $\rho = \frac{1}{k}$

VECTOR BINORMAL UNITARIO: $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

\vec{T} y \vec{N} FORMAN EL PLANO OSCULADOR
 \vec{T} y \vec{B} FORMAN EL PLANO RECTIFICADOR
 \vec{N} y \vec{B} FORMAN EL PLANO NORMAL

TORSIÓN = τ $|\tau| = \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right|$; RADIO DE TORSIÓN: $\sigma = \frac{1}{\tau}$

FÓRMULAS DE FRENET-SERRET $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{T}}{ds} = k \vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -k \vec{T} + \tau \vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N} \end{array} \right.$

$\vec{r}(t)$ = ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA CURVA EN \mathfrak{R}^3
 t = PARÁMETRO CUALQUIERA

VECTOR TANGENTE UNITARIO: $\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\left| \vec{r}' \right|}$

$$\text{VECTOR NORMAL UNITARIO: } \bar{N} = \frac{(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'|}$$

$$\text{VECTOR BINORMAL UNITARIO: } \bar{B} = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}$$

$$\text{CURVATURA: } k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3} ; \text{ RADIO DE CURVATURA: } \rho = \frac{1}{k}$$

$$\text{TORSIÓN: } \tau = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2} ; \text{ RADIO DE TORSIÓN: } \sigma = \frac{1}{\tau}$$

CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

SEA $\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ EL VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA Y SEA "t" UN PARÁMETRO.

$$\text{VELOCIDAD: } \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} ; \text{ RAPIDEZ: } v = |\bar{v}| ; \text{ ACELERACIÓN: } \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

EL VECTOR VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA SIEMPRE ES TANGENTE A LA CURVA Y TIENE LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO.

COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{T} + \frac{v^2}{\rho} \bar{N} \quad \Rightarrow \quad a_T = \frac{dv}{dt} \quad \text{y} \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

a_T (ACELERACIÓN TANGENCIAL) Y a_N (ACELERACIÓN NORMAL)

LA ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA ES UN VECTOR SITUADO EN EL PLANO DE LA TANGENTE Y LA NORMAL A LA CURVA (PLANO OSCULADOR) CON COMPONENTES TANGENCIAL

Y NORMAL DADAS POR $\frac{dv}{dt}$ Y $\frac{v^2}{\rho}$ RESPECTIVAMENTE.

LA ACELERACIÓN ES ÚNICAMENTE TANGENCIAL CUANDO EL MOVIMIENTO ES RECTILÍNEO ($\rho \rightarrow \infty$)

Y ES ÚNICAMENTE NORMAL CUANDO LA RAPIDEZ ES CONSTANTE ($\frac{dv}{dt} = 0$).

LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES: LONGITUD DE ARCO, ÀREA BAJO LA CURVA, ÀREA ENTRE DOS CURVAS, ÁREAS DE SUPERFICIES, VOLÚMENES

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

SEA f UNA FUNCIÓN CUYA GRÁFICA ES UNA CURVA SUAVE C , CONTINUA EN EL INTERVALO $[a, b]$. LA LONGITUD DE ARCO DE LA GRÁFICA DE f , DEL PUNTO $A(a, f(a))$ AL PUNTO $B(b, f(b))$ ESTÁ DADA POR:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

NOTA. TAMBIÉN SE PUDE REALIZAR EL CÁLCULO EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE "y".

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA EXPRESADA EN FORMA PARAMÉTRICA

SEA UNA FUNCIÓN CUYA GRÁFICA ES UNA CURVA SUAVE (CONTINUA) C DADA PARAMÉTRICAMENTE POR LAS ECUACIONES $x = f(t)$ y $y = g(t)$; $a \leq t \leq b$; SI C NO SE CORTA A SÍ MISMA, EXCEPTO POSIBLEMENTE EN $t = a$ y $t = b$, ENTONCES LA LONGITUD L DE LA CURVA C ESTÁ DADA POR:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES

SI UNA CURVA SUAVE C ES LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUYA ECUACIÓN POLAR ES $r = f(\theta)$ DE $\theta = \alpha$ A $\theta = \beta$ ES POSIBLE CALCULAR SU LONGITUD L MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$L = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

ÁREA BAJO LA CURVA

SI f ES UNA FUNCIÓN INTEGRABLE Y $f(x) \geq 0$ PARA TODA $x \in [a, b]$, ENTONCES EL ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR LA GRÁFICA DE f , EL EJE DE LAS ABSCISAS Y LAS RECTAS $x = a$ y $x = b$, SE OBTIENE A TRAVÉS DE:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

NOTA. TAMBIÉN SE PUDE REALIZAR EL CÁLCULO EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE "y".

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

SI f Y g SON DOS FUNCIONES CONTINUAS Y $f(x) \geq g(x)$ PARA TODA $x \in [a, b]$, ENTONCES EL ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR LAS GRÁFICAS DE f Y g Y LAS RECTAS $x = a$ y $x = b$, ESTÁ DADA POR:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

ÁREA DE UNA REGIÓN EN COORDENADAS POLARES

SI LA FUNCIÓN f (EN COORDENADAS POLARES) ES CONTINUA Y $f(\theta) \geq 0$ EN EL INTERVALO $[\alpha, \beta]$, DONDE $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, ENTONCES EL ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR LAS GRÁFICAS DE $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$, Y $\theta = \beta$ SE CALCULA POR MEDIO DE LA EXPRESIÓN.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

SI f ES UNA CURVA SUAVE Y $f(x) \geq 0$ EN EL INTERVALO $[a, b]$, ENTONCES EL ÁREA DE LA SUPERFICIE GENERADA AL GIRAR LA GRÁFICA DE f ALREDEDOR DEL EJE DE LAS ABSCISAS, SE DETERMINA CON:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

NOTA. SI LA FUNCIÓN ES NEGATIVA EN PARTE DEL INTERVALO, ENTONCES SE PODRÍA UTILIZAR LA MISMA EXPRESIÓN CON EL VALOR ABSOLUTO DE $f(x)$.

NOTA. TAMBIÉN SE PUDE REALIZAR EL CÁLCULO EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE "y".

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

SEA UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL $f(x, y) \geq 0$ DEFINIDA EN UNA REGIÓN R EN EL PLANO xy DONDE f TIENE PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES EN LA REGIÓN. ENTONCES EL ÁREA DE LA SUPERFICIE (GRÁFICA DE f) SE CALCULA MEDIANTE:

$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^2} dA$$

NOTA. ESTA FÓRMULA TAMBIÉN PUEDE UTILIZARSE CUANDO LA FUNCIÓN ES NEGATIVA.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

SEA UNA FUNCIÓN f (EN EL PLANO xy) CONTINUA EN EL INTERVALO $[a, b]$, Y SEA R LA REGIÓN LIMITADA POR LA GRÁFICA DE f , EL EJE DE LAS ABSCISAS Y LAS RECTAS $x = a$ Y $x = b$. EL VOLUMEN DEL SÓLIDO DE GENERACIÓN GENERADO AL GIRAR LA REGIÓN R ALREDEDOR DEL EJE x ES.

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

NOTA. TAMBIÉN SE PUEDE REALIZAR EL CÁLCULO EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE "y".

VOLUMEN DE UN SÓLIDO MEDIANTE UNA INTEGRAL DOBLE

SEA UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL EN \mathbb{R}^3 TAL QUE $f(x, y) \geq 0$ PARA TODO (x, y) EN UNA REGIÓN R DEL PLANO xy . EL VOLUMEN DEL SÓLIDO BAJO LA GRÁFICA DE $z = f(x, y)$ Y SOBRE LA REGIÓN R ES:

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

VOLUMEN DE UN SÓLIDO MEDIANTE UNA INTEGRAL TRIPLE

SEA UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL f EN \mathbb{R}^4 TAL QUE $f(x, y, z) = 1$ A TRAVÉS DE UNA REGIÓN VOLUMÉTRICA Q . ENTONCES, EL VOLUMEN DE ESTA REGIÓN Q ESTÁ DADO POR LA INTEGRAL TRIPLE:

$$V = \iiint_Q dV$$

MASA, MOMENTOS, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE

MOMENTO DE UN SISTEMA EN \mathbb{R}^1

EL MOMENTO CON RESPECTO AL ORIGEN DE UN SISTEMA DE MASAS m_1, m_2, \dots, m_n , LOCALIZADAS EN LOS PUNTOS x_1, x_2, \dots, x_n DEL EJE DE LAS ABSCISAS, ESTÁ DADO POR

$$M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

SI LA MASA TOTAL DEL SISTEMA ES $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, SU CENTRO DE MASA ESTÁ DADO POR

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m}$$

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA EN \mathbb{R}^2

SI SE TIENE UN SISTEMA DE MASAS PUNTUALES m_1, m_2, \dots, m_n LOCALIZADAS EN LOS PUNTOS

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ EN UN PLANO COORDENADO Y SEA $m = \sum_{k=1}^n m_k$ LA MASA TOTAL DEL SISTEMA, ENTONCES:

A) EL MOMENTO DEL SISTEMA CON RESPECTO AL EJE x ESTÁ DADO POR:

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k$$

B) EL MOMENTO DEL SISTEMA CON RESPECTO AL EJE y ESTÁ DADO POR:

$$M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

C) LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA DEL SISTEMA SON:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad y \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

MOMENTOS, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE DE UNA LÁMINA

CONSIDÉRESE UNA LÁMINA, UNA PLACA PLANA O BIEN, UNA DISTRIBUCIÓN PLANA DE MASA QUE TIENE LA FORMA DETERMINADA POR UNA CIERTA REGIÓN R EN EL PLANO xy . SI ESTA PLACA PLANA TIENE UNA DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA DADA

POR $\rho = \rho(x, y)$, FUNCIÓN CONTINUA EN R , Y SU MASA ESTÁ DADA POR $m = \iint_R \rho(x, y) dA$, ENTONCES:

A) SU PRIMER MOMENTO O MOMENTO ESTÁTICO CON RESPECTO AL EJE x ES:

$$M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA$$

B) SU PRIMER MOMENTO O MOMENTO ESTÁTICO CON RESPECTO AL EJE y ES:

$$M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA$$

C) LAS COORDENADAS DE SU CENTRO DE MASA SON:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_R x \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA} \quad y \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_R y \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA}$$

D) SI LA DENSIDAD DE LA PLACA ES CONSTANTE SE DICE QUE ÉSTA ES HOMOGÉNEA Y LAS COORDENADAS DE SU CENTRO DE MASA, QUE SE CONOCE COMO CENTROIDE, ESTÁN DADAS POR LAS EXPRESIONES SIGUIENTES:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R dA} \quad y \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R dA}$$

DE LAS CUALES SE OBTIENE QUE:

$$\iint_R x \, dA = \bar{x} A(R) \quad y \quad \iint_R y \, dA = \bar{y} A(R)$$

DONDE $A(R) = \iint_R dA$ ES EL ÁREA DE LA REGIÓN, ES DECIR, DE LA PLACA.

E) SUS SEGUNDOS MOMENTOS O MOMENTOS DE INERCIA, CON RESPECTO A LOS EJES x y y , ASÍ COMO CON RESPECTO AL ORIGEN, CONOCIDO ÉSTE ÚLTIMO COMO MOMENTO POLAR DE INERCIA, ESTÁN DADOS, RESPECTIVAMENTE POR:

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) \, dA \quad ; \quad I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) \, dA \quad ; \quad I_o = \iint_R (x^2 + y^2) \, dA = I_x + I_y$$

MOMENTOS, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE DE UN CUERPO

SI UN SÓLIDO TIENE LA FORMA DE UNA REGIÓN Q TRIDIMENSIONAL, ES DECIR, VOLUMÉTRICA, Y SU DENSIDAD ES $\rho = \rho(x, y, z)$, FUNCIÓN CONTINUA EN Q , ENTONCES:

A) SU MASA ESTÁ DADA POR:

$$M = \iiint_Q \rho(x, y, z) \, dV$$

B) SUS MOMENTOS CON RESPECTO A LOS PLANOS COORDENADOS xy , xz y yz SON:

$$M_{xy} = \iiint_Q z \rho(x, y, z) \, dV \quad ; \quad M_{xz} = \iiint_Q y \rho(x, y, z) \, dV \quad ; \quad M_{yz} = \iiint_Q x \rho(x, y, z) \, dV$$

C) LAS COORDENADAS DE SU CENTRO DE MASA SON:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

D) SI Q ES HOMOGÉNEA, ENTONCES LA DENSIDAD ρ ES CONSTANTE Y LAS COORDENADAS DE SU CENTRO DE MASA O CENTROIDE SON:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_Q x \, dV}{\iiint_Q dV} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\iiint_Q y \, dV}{\iiint_Q dV} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\iiint_Q z \, dV}{\iiint_Q dV}$$

$$\text{DE DONDE:} \quad \iiint_Q x \, dV = \bar{x} V(Q) \quad ; \quad \iiint_Q y \, dV = \bar{y} V(Q) \quad ; \quad \iiint_Q z \, dV = \bar{z} V(Q)$$

DONDE $V(Q) = \iiint_Q dV$ ES EL VOLUMEN DE LA REGIÓN, ES DECIR, DEL SÓLIDO.

E) SUS SEGUNDOS MOMENTOS O MOMENTOS DE INERCIA, CON RESPECTO A LOS EJES x , y y z , ASÍ COMO CON RESPECTO AL ORIGEN, CONOCIDO ÉSTE ÚLTIMO COMO MOMENTO POLAR DE INERCIA, ESTÁN DADOS, RESPECTIVAMENTE POR:

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad ; \quad I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad ; \quad I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

$$I_o = \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

ALGUNOS CASOS DE DERIVACIÓN EXPLÍCITA EN FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL

SEA $z = f(x, y)$; ENTONCES SUS DERIVADAS PARCIALES SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Y LA DIFERENCIAL TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

SEA $z = f(x, y, u)$; ENTONCES SUS DERIVADAS PARCIALES SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

Y SU DIFERENCIAL TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

SEA $z = f(x, y)$ DONDE $x = f(t)$; $y = g(t)$

SUS DERIVADAS PARCIALES SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

SU DERIVADA TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Y LA DIFERENCIAL TOTAL ES:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

DONDE $dx = f'(t) dt$ y $dy = g'(t) dt$

SEA $z = f(x, y, u)$ DONDE $x = g(t)$; $y = h(t)$; $u = k(t)$

SUS DERIVADAS PARCIALES SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

SU DERIVADA TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt}$$

Y SU DIFERENCIAL TOTAL ES:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

DONDE $dx = g'(t) dt$; $dy = h'(t) dt$ y $du = k'(t) dt$

SEA $z = f(x)$ y $x = g(s, t)$
 ENTONCES SUS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A s y t SON:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial t}$$

Y SU DIFERENCIAL ESTÁ DADA POR:

$$dz = f'(x) dx$$

$$\text{DONDE} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt$$

SEA $z = f(x, y)$ DONDE $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$
 ENTONCES SUS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A x, y, u, v SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Y SU DIFERENCIAL TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

DONDE

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad \text{y} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

SEA $z = f(x, y, u)$ DONDE $x = g(r, s)$; $y = h(r, s)$; $u = k(r, s)$
 ENTONCES SUS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A x, y, u, r, s SON:

$$\frac{\partial z}{\partial x} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} ; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s}$$

Y SU DIFERENCIAL TOTAL ESTÁ DADA POR:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

DONDE

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds ; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad \text{y} \quad du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds$$

ALGUNOS CASOS DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA EN FUNCIONES ESCALARES DE UNA VARIABLE Y DE VARIABLE VECTORIAL

UNA ECUACIÓN CON DOS VARIABLES

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}$$

UNA ECUACIÓN CON TRES VARIABLES

$$F(x, y, z) = 0$$

$$z = f(x, y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$x = f(y, z) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} \quad y \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x}$$

$$y = f(x, z) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$$

DOS ECUACIONES CON TRES VARIABLES

$$F(x, y, z) = 0 \quad ; \quad G(x, y, z) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad y \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{y, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{z, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} \quad y \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)} \quad y \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}$$

NOTA. COMO SE OBSERVA, SE UTILIZAN DETERMINANTES JACOBIANOS, FORMADOS POR LAS DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES, CON RESPECTO A LAS VARIABLES DE LAS CUALES DEPENDEN.

DOS ECUACIONES CON CUATRO VARIABLES

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad ; \quad G(x, y, u, v) = 0$$

$$\begin{aligned} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{u, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} & y \quad \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{v, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, u}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} & y \quad \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, v}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, v}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} & y \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{y, v}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{u, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} & y \quad \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{J\left(\frac{F, G}{u, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} \end{aligned}$$

NOTA. SE PROCEDERÍA DE MANERA SEMEJANTE CON TODAS LAS COMBINACIONES POSIBLES DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES Y DOS INDEPENDIENTES.

TRES ECUACIONES CON CINCO VARIABLES

$$F(x, y, z, u, v) = 0 \quad ; \quad G(x, y, z, u, v) = 0 \quad ; \quad H(x, y, z, u, v) = 0$$

$$\begin{aligned} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{u, y, z}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} & y \quad \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{v, y, z}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x, u, z}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} & y \quad \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x, v, z}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, u}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} & y \quad \frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, v}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} \end{aligned}$$

NOTA. SE PROCEDERÍA DE MANERA SEMEJANTE CON TODAS LAS COMBINACIONES POSIBLES DE TRES VARIABLES DEPENDIENTES Y DOS INDEPENDIENTES.

COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

COORDENADAS POLARES

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN

LAS COORDENADAS CARTESIANAS (x, y) Y LAS COORDENADAS POLARES (r, θ)
SE RELACIONAN A TRAVÉS DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{ang} \tan \frac{y}{x} \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

$$r \cos(\theta - \omega) = p$$

DONDE r ES LA DISTANCIA DEL POLO A UN PUNTO $P(r, \theta)$ DE LA RECTA Y p ES LA DISTANCIA DEL POLO AL PUNTO $N(p, \omega)$ DE LA RECTA, MEDIDA SOBRE LA PERPENDICULAR A ELLA.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

DONDE r ES LA DISTANCIA DEL POLO AL PUNTO $P(r, \theta)$ DE LA CIRCUNFERENCIA, c ES LA DISTANCIA DEL POLO A SU CENTRO EN EL PUNTO $C(c, \alpha)$ Y a ES SU RADIO.

ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

$$r = \frac{e d}{1 \pm e \cos \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{e d}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$$

DONDE e ES LA EXCENTRICIDAD DE LA CÓNICA Y d ES LA DISTANCIA DEL POLO A LA RECTA DIRECTRIZ. REPRESENTA A UNA CÓNICA, LA CUAL SERÁ PARÁBOLA SI $e = 1$, ELIPSE SI $0 < e < 1$ E HIPÉRBOLA SI $e > 1$

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE

LA PENDIENTE m DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA DE ECUACIÓN $r = f(\theta)$
EN EL PUNTO $P(r, \theta)$ ESTÁ DADA POR

$$m = \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN

LAS COORDENADAS CARTESIANAS (x, y, z) Y LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ, θ, z)

SE RELACIONAN A TRAVÉS DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$x = \rho \cos \theta \quad ; \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad z = z$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \theta = \operatorname{angtan} \frac{y}{x} \quad ; \quad z = z$$

DONDE $\rho = \text{CONSTANTE}$ REPRESENTA UNA FAMILIA DE CILINDROS CUYO EJE DE SIMETRÍA ES EL EJE z ,
 $\theta = \text{CONSTANTE}$ REPRESENTA UNA FAMILIA DE SEMIPLANOS VERTICALES QUE CONTIENEN AL EJE z Y
 $z = \text{CONSTANTE}$ REPRESENTA UNA FAMILIA DE PLANOS HORIZONTALES PARALELOS AL PLANO xy .

NOTA. SE TRATA DE UN SISTEMA COORDENADO CURVILÍNEO ORTOGONAL.

DIFERENCIAL DE LONGITUD DE ARCO

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

NOTA. SI $z = 0$, SE TIENE EL SISTEMA ORTOGONAL PLANO DENOMINADO
 SISTEMA COORDENADO POLAR.

DIFERENCIAL DE ÁREA

$$dA = \rho \, d\rho \, d\theta$$

(SISTEMA COORDENADO POLAR)

DIFERENCIAL DE VOLUMEN

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

GRADIENTE

$$\bar{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{e}_z$$

DIVERGENCIA

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (f_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho f_3) \right]$$

ROTACIONAL

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{e}_\rho & \rho \bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & \rho f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

LAPLACIANO

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]$$

NOTA. $\phi = \phi(\rho, \theta, z)$ y $\bar{F} = f_1 \bar{e}_\rho + f_2 \bar{e}_\theta + f_3 \bar{e}_z$

INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\iiint_Q f(\rho, \theta, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} \int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(\rho, \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

DONDE ρ ES EL FACTOR DE ESCALA O JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

COORDENADAS ESFÉRICAS

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN

LAS COORDENADAS CARTESIANAS (x, y, z) Y LAS COORDENADAS ESFÉRICAS (r, φ, θ)
SE RELACIONAN A TRAVÉS DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$x = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad z = r \cos \varphi$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad \varphi = \operatorname{ang} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ; \quad \theta = \operatorname{ang} \tan \left(\frac{y}{x} \right)$$

DONDE r = CONSTANTE, REPRESENTA UNA FAMILIA DE ESFERAS CON CENTRO EN EL ORIGEN, φ = CONSTANTE REPRESENTA UNA FAMILIA DE SEMICONOS CON EL EJE z COMO EJE DE SIMETRÍA Y θ = CONSTANTE, REPRESENTA UNA FAMILIA DE SEMIPLANOS VERTICALES QUE CONTIENEN AL EJE z .

DIFERENCIAL DE LONGITUD DE ARCO

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (d\theta)^2$$

DIFERENCIAL DE VOLUMEN

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

GRADIENTE

$$\bar{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \bar{e}_\theta$$

DIVERGENCIA

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_1 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r f_2 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r f_3) \right]$$

ROTACIONAL

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r \bar{e}_\varphi & r \sin \varphi \bar{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ f_1 & r f_2 & r f_3 \sin \varphi \end{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \varphi}$$

LAPLACIANO

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right]$$

NOTA. $\phi = \phi(r, \varphi, \theta)$ y $\bar{F} = f_1 \bar{e}_r + f_2 \bar{e}_\varphi + f_3 \bar{e}_\theta$

INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\iiint_Q f(r, \varphi, \theta) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

DONDE $r^2 \sin \varphi$ ES EL FACTOR DE ESCALA O JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

OPERADORES VECTORIALES, GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL Y LAPLACIANO, EN COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

TEOREMA. GRADIENTE EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

SEAN $\phi = \phi(u, v, w)$ UNA FUNCIÓN ESCALAR DIFERENCIABLE Y $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA COORDENADO CURVILÍNEO ORTOGONAL. ENTONCES EL GRADIENTE DE ϕ EN ESTE SISTEMA ESTÁ DADO POR:

$$\bar{\nabla} \phi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \bar{e}_w$$

TEOREMA. DIVERGENCIA EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

SEA $\bar{\phi} = \phi_1(u, v, w) \bar{e}_u + \phi_2(u, v, w) \bar{e}_v + \phi_3(u, v, w) \bar{e}_w$ UNA FUNCIÓN VECTORIAL DIFERENCIABLE EN EL SISTEMA CURVILÍNEO ORTOGONAL DE VECTORES BASE \bar{e}_u, \bar{e}_v y \bar{e}_w . ENTONCES LA DIVERGENCIA DE ESTE SISTEMA ES:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w \phi_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w \phi_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v \phi_3) \right]$$

TEOREMA. ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

SEA $\bar{\phi} = \phi_1(u, v, w) \bar{e}_u + \phi_2(u, v, w) \bar{e}_v + \phi_3(u, v, w) \bar{e}_w$ UNA FUNCIÓN VECTORIAL DIFERENCIABLE EN EL SISTEMA CURVILÍNEO ORTOGONAL DE VECTORES BASE \bar{e}_u, \bar{e}_v y \bar{e}_w . ENTONCES EL ROTACIONAL EN ESTE SISTEMA ES:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\phi} = \frac{1}{h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_w \phi_3) - \frac{\partial}{\partial w} (h_v \phi_2) \right] \bar{e}_u + \frac{1}{h_u h_w} \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_u \phi_1) - \frac{\partial}{\partial u} (h_w \phi_3) \right] \bar{e}_v + \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v \phi_2) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u \phi_1) \right] \bar{e}_w$$

TEOREMA. LAPLACIANO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

SEA $\phi = \phi(u, v, w)$ UNA FUNCIÓN ESCALAR DIFERENCIABLE DOS VECES Y $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA COORDENADO CURVILÍNEO ORTOGONAL. ENTONCES, EL LAPLACIANO DE ϕ EN ESTE SISTEMA ESTÁ DADO POR:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \right]$$

NOTA. EN ESTAS EXPRESIONES, $h_u = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|$; $h_v = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|$; $h_w = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right|$ SON LOS "FACTORES DE ESCALA".

TEOREMAS DE GREEN, STOKES Y GAUSS

TEOREMA DE GREEN

SEA R UNA REGIÓN LIMITADA POR UNA CURVA SIMPLE CERRADA C . SI

$M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ SON FUNCIONES CONTINUAS SOBRE R ,

ENTONCES SE CUMPLE QUE:

$$\int_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

FORMAS ALTERNATIVAS DEL TEOREMA DE GREEN

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{k} \, dA$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{N} = \iint_R \text{div } \vec{F} \, dA$$

INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA DE UNA REGIÓN

SI R ES UNA REGIÓN LIMITADA POR UNA CURVA SIMPLE CERRADA C ,
ENTONCES EL ÁREA DE R ESTÁ DADA POR:

$$A = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$$

TEOREMA DE STOKES

SEA S UNA SUPERFICIE TAL QUE SU PROYECCIÓN SOBRE LOS PLANOS xy , xz , yz SON REGIONES LIMITADAS POR CURVAS SIMPLES CERRADAS. SEA TAMBIÉN $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ UN CAMPO VECTORIAL CONTINUO Y DIFERENCIABLE DOS VECES. Y SUPÓNGASE QUE C ES UNA CURVA SIMPLE CERRADA QUE LIMITA A LA SUPERFICIE S . ENTONCES SE CUMPLE QUE.

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

DONDE \vec{N} ES UN VECTOR UNITARIO NORMAL A LA SUPERFICIE S
Y dS ES EL DIFERENCIAL DE ÁREA DE S .

Y, SI

$$\bar{F} = M(x, y, z) \hat{i} + N(x, y, z) \hat{j} + O(x, y, z) \hat{k} \quad \text{y} \quad \bar{n} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

ENTONCES ESTE TEOREMA TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\oint_C M dx + N dy + O dz = \iint_S \{ [O_y - N_z] \cos \alpha + [M_z - O_x] \cos \beta + [N_x - M_y] \cos \gamma \} dS$$

TEOREMA DE GAUSS

SI LA FUNCIÓN VECTORIAL $\bar{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z) \hat{i} + f_2(x, y, z) \hat{j} + f_3(x, y, z) \hat{k}$ TIENE PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN UNA REGIÓN R DEL ESPACIO \mathbb{R}^3 , LIMITADA POR UNA SUPERFICIE REGULAR S , ENTONCES LA INTEGRAL DE VOLUMEN DE LA DIVERGENCIA DE \bar{F} DENTRO DE S ES IGUAL A LA INTEGRAL DE SUPERFICIE EXTERNA DE \bar{F} SOBRE S , ES DECIR:

$$\oiint_S (\bar{F} \cdot \bar{N}) dS = \iiint_R \text{div } \bar{F} dV$$

Y, SI

$$\bar{N} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

ES UN VECTOR UNITARIO NORMAL A LA SUPERFICIE S ,
ENTONCES ESTE TEOREMA TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\oiint_S (f_1 \cos \alpha + f_2 \cos \beta + f_3 \cos \gamma) dS = \iiint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV$$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t); t \geq 0$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	RESTRICCIONES EN " $s \in \Re$ "
$\delta(t)$ (FUNCIÓN DELTA DE DIRAC)	1	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
t^n ; n , entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^n e^{at}$; n , entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$t \text{ sen } at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
$t^2 \text{ sen } at$	$\frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$	$s > 0$
$t^2 \cos at$	$\frac{2s(s^2 - 3a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$	$s > 0$
$e^{at} \text{ sen } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \text{ senh } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	$s > b + a$
$e^{at} \cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$	$s > b + a$

SERIES DE FOURIER

DEFINICIÓN

LA SERIE DE FOURIER CORRESPONDIENTE A LA FUNCIÓN f , LA CUAL SE SUPONE DEFINIDA EN EL INTERVALO $c \leq x \leq c+2L$, DONDE c y $L > 0$ SON CONSTANTES, SE DEFINE COMO:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{DONDE} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases}$$

SI f y f' SON CONTINUAS EN $[c, c+2L]$ SALVO EN UN CONJUNTO FINITO DE PUNTOS, EN LOS QUE EXISTEN SUS LÍMITES LATERALES, Y SI $f(x)$ ESTÁ PERIODICAMENTE DEFINIDA CON UN PERIODO DE $2L$, O SEA, QUE $f(x+2L) = f(x)$, ENTONCES LA SERIE CONVERGE HACIA $f(x)$ SI x ES UN PUNTO DE CONTINUIDAD, Y HACIA $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ SI x ES UN PUNTO DE DISCONTINUIDAD.

FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

SI SE SUPONE QUE LAS SERIES ANTERIORES CONVERGEN HACIA $f(x)$, SE TIENE QUE:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \text{DONDE} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

$$\frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

FORMA GENERAL DE LA IDENTIDAD DE PARSEVAL

$$\frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) g(x) dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

DONDE a_n, b_n y c_n, d_n SON LOS COEFICIENTES DE FOURIER QUE CORRESPONDEN A $f(x)$ y $g(x)$ RESPECTIVAMENTE.

SERIES DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES DE USO FRECUENTE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{\pi} \left(\frac{\text{sen} x}{1} + \frac{\text{sen} 3x}{3} + \frac{\text{sen} 5x}{5} + \dots \right)$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 2\pi \Rightarrow \pi - 2 \left(\frac{\text{sen} x}{1} + \frac{\text{sen} 2x}{2} + \frac{\text{sen} 3x}{3} + \dots \right)$$

$$f(x) = |\text{sen} x| \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen} x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{sen} x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{\pi} \left(\frac{\text{sen} 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \text{sen} 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \text{sen} 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

$$f(x) = x(\pi - x) \quad ; \quad 0 < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$$

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x) \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow 12 \left(\frac{\text{sen} x}{1^3} - \frac{\text{sen} 2x}{2^3} + \frac{\text{sen} 3x}{3^3} - \dots \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - \alpha \\ 1 & \pi - \alpha < x < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\text{sen} \alpha \cos x}{1} - \frac{\text{sen} 2\alpha \cos 2x}{2} + \frac{\text{sen} 3\alpha \cos 3x}{3} - \dots \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & ; \quad 0 < x < \pi \\ -x(\pi - x) & ; \quad -\pi < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{\pi} \left(\frac{\text{sen} x}{1^3} + \frac{\text{sen} 3x}{3^3} + \frac{\text{sen} 5x}{5^3} + \dots \right)$$

$$f(x) = \text{sen } \mu x \quad ; \quad -\pi < x < \pi \quad ; \quad \mu \neq \text{entero} \Rightarrow \frac{2\text{sen } \mu \pi}{\pi} \left(\frac{\text{sen} x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\text{sen} 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3\text{sen} 3x}{3^2 - \mu^2} - \dots \right)$$

$$f(x) = \cos \mu x \quad ; \quad -\pi < x < \pi \quad ; \quad \mu \neq \text{entero} \Rightarrow \frac{2\mu \text{sen } \mu \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \dots \right)$$

$$f(x) = e^{\mu x} \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow \frac{2\text{senh } \mu \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\mu \cos nx - n \text{sen } nx)}{\mu^2 + n^2} \right)$$

$$f(x) = \text{senh } \mu x \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow \frac{2\text{senh } \mu \pi}{\pi} \left(\frac{\text{sen} x}{1^2 + \mu^2} - \frac{2\text{sen} 2x}{2^2 + \mu^2} + \frac{3\text{sen} 3x}{3^2 + \mu^2} - \dots \right)$$

$$f(x) = \cosh \mu x \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow \frac{2\mu \text{senh } \mu \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2 + \mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2 + \mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2 + \mu^2} + \dots \right)$$

$$f(x) = \ln \left| \text{sen } \frac{1}{2} x \right| \quad ; \quad 0 < x < \pi \Rightarrow - \left(\ln 2 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots \right)$$

$$f(x) = \ln \left| \cos \frac{1}{2} x \right| \quad ; \quad -\pi < x < \pi \Rightarrow - \left(\ln 2 - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \dots \right)$$