Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 10

- 1. Załóżmy, że grafy G_1 i G_2 są określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V=\{1,2,\ldots,n\}$. Podaj algorytm o złożoności O(n+m) sprawdzający, czy G_1 i G_2 wczytane jako listy krawędzi grafów są identyczne.
- 2. Podaj przykłady (o ile istnieja):
 - (a) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,2,2,3,3;
 - (b) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,1,1,3,4;
 - (c) grafu prostego dwudzielnego o ciągu stopni wierzchołków 2,2,2,2,2.
- 3. Średnicą d(G) grafu G nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, to znaczy $d(G) = \max\{d(x,y)|x,y\in V(G)\}$. Udowodnij, że jeżeli d(G)>3, to $d(\bar{G})<3$.
- 4. Udowodnij, że jeżeli d(G) = 2 i $\max\{\deg(v)|v \in V(G)\} = n-2$, to $m \ge 2n-4$.
- 5. Dla każdego wierzchołka v grafu G = (V, E) definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u)|u \in V(G)\}$. Wierzchołek x_0 , dla którego $r(x_0) = \min\{r(v)|v \in V(G)\}$ nazywamy wierzchołkiem centralnym, a liczbę $r(G) = r(x_0)$ promieniem grafu G.
 - (a) Udowodnij, że $r(G) \le d(G) \le 2 \cdot r(G)$,
 - (b) (Jordan). Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo dwóch sąsiednich.
 - (c) Podaj algorytm wyznaczania wierzchołka centralnego w drzewie oraz określ jego złożoność.
- 6. W drzewie mamy dane wierzchołki a,b,c,d. Pokaż, że jeśli drogi łączące a z b i c z d nie mają wspólnego wierzchołka, to mają wspólny wierzchołek drogi łączące a z c i b z d
- 7. Dany jest digraf G zadany za pomocą macierzy sąsiedztwa. Pokaż, że w najmniej korzystnym przypadku
 - (a) Algorytm stwierdzający istnienie cyklu skierowanego przegląda co najmniej n(n-1)/2 elementów macierzy.
 - (b) Algorytm stwierdzający istnienie drogi z v do u przegląda co najmniej $\lfloor n^2/4 \rfloor$ elementów macierzy.
- 8. $Grafem\ krawędziowym\ L(G)$ grafu G nazywamy graf, którego wierzchołkami są krawędzie G i miedzy $e_1, e_2 \in E(G)$ jest krawędź gdy e_1 i e_2 mają wspólny wierzchołek w G. Niech B będzie macierzą incydencji G, C macierzą sąsiedztwa L(G), a I macierzą identycznościową. Pokaż, że $C = B^T B 2I$.
- 9. Udowodnij, że w grafie G, w którym maksymalny stopień wierzchołka wynosi p, promień grafu spełnia nierówność:

$$r(G) \ge \frac{\log(np - n + 1)}{\log(p)} - 1.$$

- 10. Ile jest n-wierzchołkowych drzew poetykietowanych, w których każdy wierzchołek i ma dany stopień d_i ? Najpierw określ jaki warunek musi spełniać ciąg d_i .
- 11. Losujemy drzewo o wierzchołkach $\{1,2,\ldots,n\}$ (każde drzewo jest tak samo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem? Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy $n \to \infty$?
- 12. Pokaż, że dla n>2 istnieją n^{n-3} rozróżnialne drzewa n wierzchołkowe z krawdziami ponumerowanymi od 1 do n-1.
- 13. Pokaż, że każdy graf nie zawierający trójkątów (cykli długości 3) ma nie więcej, niż $\lfloor n^2/4 \rfloor$ krawędzi. Wsk.: Rozważ osobno n parzyste i nieparzyste
- 14. Niech G będzie grafem prostym o minimalnym stopniu wierzchołka d > 1. Pokaż, że G zawiera cykl o długości równej co najmniej d + 1.
- 15. Graf jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy gdy jest spójny i nie zawiera wierzchołka rozcinającego. Pokaż, że następujące dwa warunki są równoważne 2-spójności grafu o co najmniej trzech wierzchołkach
 - (a) każde dwa wierzchołki leżą na cyklu,
 - (b) każde dwie krawędzie leżą na cyklu.