

Uniwersytet Wrocławski, Instytut Informatyki  
Studia stacjonarne I stopnia na kierunku Informatyka  
Przedmiot obowiązkowy w semestrze zimowym pierwszego roku studiów  
30 godzin wykładu + 30 godzin repetytorium + 30 godzin ćwiczeń

# **Logika dla informatyków**

## **Materiały do zajęć**

Wrocław, 2014

Właściciel tej kopii notatek

Rok akad.

**Uwaga:** W niniejszej książeczce zebrano listy zadań, notatki do wykładów oraz inne materiały przygotowywane do zajęć z *Logiki dla informatyków* w latach 1997–2014. Mimo iż materiały te posiadają bardziej dopracowaną formę, niż przygotowywane do innych zajęć kserograficzne kopie oraz zostały oddane do druku i oprawy, jednak nie były poddane — jak to ma miejsce w przypadku podręczników — solidnej korekcie i zawierają sporo błędów. Nie zamieszczono w nich także szczegółowych wyjaśnień i komentarzy. Dlatego notatki te *nie są podręcznikiem do wykładu*. Mają jedynie służyć jako wykaz zagadnień obowiązujących do egzaminu i lista zadań przerabianych na ćwiczeniach. Przegląd zalecanych do zajęć podręczników jest zamieszczony na stronie [xi](#).

Podczas redagowania notatek wykorzystano:

- skrypt J. Tiuryna *Wstęp do teorii mnogości i logiki*
- listy zadań M. Zakrzewskiego
- materiały A. Kościelskiego i T. Wierzbickiego
- podręczniki wymienione w bibliografii na stronie [xi](#)

Manuskrypt: L. Pacholski i W. Charatonik

Redakcja i skład: T. Wierzbicki i W. Charatonik

Konsultacja merytoryczna: A. Kościelski

Wydanie dwunaste, poprawione

Niniejsze notatki mogą być drukowane, powielane oraz rozpowszechniane w wersji elektronicznej i papierowej, w części bądź w całości — bez konieczności uzyskania zgody autora — pod warunkiem nieosiągania bezpośrednich korzyści finansowych z ich rozpowszechniania i z zachowaniem praw autorskich. W szczególności dodatkowe egzemplarze mogą być sprzedawane przez osoby trzecie jedynie po cenie uzyskania kopii (druku, wydruku, kserografowania itp.)

Data utworzenia dokumentu: 16 września 2014

*Szanowni Państwo,*

*Program wykładu logiki dla informatyków nie jest trudny — w następnych semestrach będziecie Państwo słuchali dużo trudniejszych wykładów. Mimo to co roku znaczna część studentów nie zdaje egzaminu z logiki.*

*Jednym z powodów niepowodzenia na egzaminie jest to, że jest to dla Was pierwszy w życiu wykład akademicki, w którym pojawia się duża liczba nowych pojęć. Pojęcia te, na ogół dosyć abstrakcyjne, pojawiają się licznie na każdych zajęciach. Trzeba się ich wszystkich nauczyć. Nauczyć — to mało, gdyż matematyka nie polega na wykonywaniu mniej lub bardziej skomplikowanych rachunków, lecz na przeprowadzaniu rozumowań. Dlatego jest bardzo ważne, byście nie tylko je znali, ale i dobrze rozumieli. Wykład ma Wam w tym pomóc, ale wielu z Was nie zdoła na samym wykładzie opanować całego materiału. Na wykładzie nie nauczycie się też sprawnie posługiwać wprowadzonymi pojęciami. Dlatego musicie systematycznie pracować w domu. Jeśli przed zajęciami przypomnicie sobie wcześniej wprowadzone definicje, zwiększycie swoje szanse na zrozumienie nowego materiału. Jeśli natomiast nie będziecie znać wcześniej wprowadzonych pojęć, będziecie z dużym prawdopodobieństwem siedzieć na wykładzie, jak na tureckim kazaniu. Jeżeli przyswojenie nowych pojęć sprawia Wam trudność, radzę także przed wykładem przejrzeć podane w przygotowanych przez nas notatkach definicje, które dopiero zostaną na zajęciach wprowadzone. Być może czytając je po raz pierwszy przed wykładem nie potraficie ich w pełni zrozumieć, ale gdy je wcześniej przeczytacie, wyniesiecie z wykładu znacznie więcej. Poza tym będziecie przed zajęciami wiedzieć, czego nie rozumiecie i o co na wykładzie zapytać.*

*Od wielu lat wszystkim studentom zaczynającym studia powtarzamy to, co napisaliśmy w poprzednim paragrafie. Niestety z marnym skutkiem. Co roku w drugiej połowie semestru okazuje się, że znaczna część studentów nie rozumie wykładu, bo nie pamięta wcześniej wprowadzonych definicji i nie zna treści udowodnionych wcześniej twierdzeń. Co roku mniej niż połowa studentów zdaje egzamin z logiki. Bardzo nas to martwi. Chcielibyśmy, aby znaczna większość z Was mogła ukończyć studia. Dlatego aby Was zdyscyplinować i zmusić do systematycznej pracy wprowadzamy opisane w regulaminie zajęć rygory (punktowy system zaliczania ćwiczeń, kartkówki, egzamin półroczowy itd.). Ich celem nie jest uprzykrzenie Wam życia, ale zwiększenie szansy na to, że zdacie egzamin.*

*Wykładowcy*



# Spis treści

<b>A. Informacje ogólne</b>	<b>ix</b>
A.1. Program wykładu	ix
A.2. Zapisy na zajęcia	ix
A.3. Obsada zajęć i konsultacje	x
<b>B. Literatura</b>	<b>xi</b>
<b>C. Zasady prowadzenia i zaliczania ćwiczeń</b>	<b>xiii</b>
C.1. Wstęp	xiii
C.2. Szczegółowe zasady prowadzenia zajęć	xiv
C.3. Szczegółowe zasady zaliczania ćwiczeń	xvii
<b>D. Egzaminy</b>	<b>xix</b>
D.1. Egzamin końcowy	xx
D.2. Egzamin poprawkowy	xxi
<b>0. Zadania na dobry początek</b>	<b>1</b>
<b>1. Indukcja matematyczna</b>	<b>5</b>
<b>2. Rachunek zdań</b>	<b>13</b>
2.1. Składnia rachunku zdań	13
2.2. Wartości logiczne i znaczenie formuł zdaniowych	13
2.2.1. Metoda zero-jedynkowa	15
2.2.2. Skrócona metoda zero-jedynkowa	15
2.2.3. Równoważność formuł	19
2.2.4. Lemat o podstawianiu	22
2.3. Formalizacja rozumowań w języku rachunku zdań	23
2.4. Własności formuł zdaniowych	25
2.5. Postaci normalne formuł zdaniowych	29

2.5.1.	Usuwanie symbolu negacji . . . . .	29
2.5.2.	Dysjunkcyjna postać normalna . . . . .	30
2.5.3.	Koniunkcyjna postać normalna . . . . .	31
2.6.	Funkcje boolowskie i zupełne zbiory spójników . . . . .	34
2.7.	Rezolucja dla rachunku zdań . . . . .	35
2.8.	Funkcje boolowskie i układy elektroniczne . . . . .	37
2.9.	System dedukcji naturalnej dla rachunku zdań . . . . .	40
<b>3.</b>	<b>Rachunek kwantyfikatorów</b>	<b>45</b>
3.1.	Składnia rachunku kwantyfikatorów . . . . .	45
3.2.	Znaczenie formuł rachunku kwantyfikatorów . . . . .	47
3.3.	System dedukcji naturalnej dla rachunku kwantyfikatorów . . . . .	47
3.4.	Formalizacja wypowiedzi w języku rachunku kwantyfikatorów . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Zbiory</b>	<b>55</b>
4.1.	Działania na zbiorach . . . . .	56
4.2.	Operacje nieskończone na zbiorach . . . . .	60
<b>5.</b>	<b>Relacje</b>	<b>67</b>
5.1.	Para uporządkowana i iloczyn (produkt) kartezjański . . . . .	67
5.2.	Relacje . . . . .	68
5.3.	Krotki ( $n$ -tki) uporządkowane i relacje $n$ -argumentowe . . . . .	70
5.4.	Złożenie relacji. Relacja odwrotna . . . . .	70
5.5.	Relacyjny rachunek dziedzin . . . . .	72
<b>6.</b>	<b>Funkcje</b>	<b>75</b>
6.1.	Funkcje odwrotne i złożenie funkcji . . . . .	76
6.2.	Obraz i przeciwobraz zbioru . . . . .	77
<b>7.</b>	<b>Relacje równoważności</b>	<b>81</b>
<b>8.</b>	<b>Teoria mocy</b>	<b>87</b>
8.1.	Równoliczność zbiorów . . . . .	87
8.2.	Własności pojęcia równoliczności zbiorów . . . . .	89
8.3.	Zbiory skończone . . . . .	90
8.3.1.	Wzór włączeń i wyłączeń . . . . .	93
8.4.	Moce zbiorów nieskończonych . . . . .	94
8.5.	Wyznaczanie mocy zbiorów . . . . .	97
8.6.	Zbiory przeliczalne . . . . .	99

<b>9. Relacje porządku</b>	<b>105</b>
9.1. Przykłady porządków	106
9.2. Elementy wyróżnione	109
9.3. Izomorfizm porządkowy	110
9.4. Zawieranie zbiorów jako relacja porządku	113
9.5. Liczba relacji porządku	114
<b>10. Kresy zbiorów</b>	<b>115</b>
10.1. Kraty	117
10.2. Porządki zupełne	118
10.3. Twierdzenia o punkcie stałym	120
10.4. Relacje w zbiorze formuł zdaniowych	121
<b>11. Dobre porządki i indukcja</b>	<b>125</b>
11.1. Porządki regularne	125
11.2. Indukcja	128
<b>12. Algebra termów</b>	<b>133</b>
12.1. Inna definicja zbioru termów. Drzewa	133
12.2. Podstawienia	134
12.3. Problem unifikacji	135
<b>13. Elementy logiki formalnej</b>	<b>139</b>
13.1. Składnia języka pierwszego rzędu	139
13.2. Semantyka języka pierwszego rzędu	140
13.3. Podstawienia	141
13.4. Rezolucja dla rachunku I rzędu	142







# Informacje ogólne

## A.1. Program wykładu

Ponieważ przedmiot *Logika dla Informatyków* jest obowiązkowy, jego program jest ustalony w *Programie Studiów Informatycznych na Uniwersytecie Wrocławskim*, dostępnym w wersji elektronicznej na stronach internetowych Instytutu Informatyki:

<http://www.ii.uni.wroc.pl/>

## A.2. Zapisy na zajęcia

Na zajęcia należy się zapisać w internetowym systemie *Zapisy*, dostępnym pod adresem [zapisy.ii.uni.wroc.pl](http://zapisy.ii.uni.wroc.pl). Zadeklarowanie przedmiotu w systemie *Zapisy* jest formą umowy pomiędzy studentem i uczelnią. Student zobowiązuje się uczęszczać na zajęcia, uczelnia zaś zobowiązuje się je prowadzić i ocenić studenta po ich zakończeniu. Dlatego do egzaminu będą mogły przystąpić jedynie osoby zapisane na wykład, a zaliczenie ćwiczeń będą mogły uzyskać jedynie osoby zapisane na ćwiczenia.

Mimo że w systemie *Zapisy* prowadzący są dla porządku przypisani do poszczególnych grup ćwiczeniowych, jednak w kolejnych tygodniach mogą mieć zajęcia z różnymi grupami. Dlatego przy wyborze grupy nie należy się kierować nazwiskiem prowadzącego.

Jedna z grup ćwiczeniowych jest oznaczona jako *grupa zaawansowana*. Do tej grupy powinni się zapisać studenci o większych zdolnościach i aspiracjach matematycznych. Rozwiązuje się w niej nieco trudniejsze (ale i ciekawsze) zadania i wymaga od studentów nieco większej samodzielności. Przytoczone na następnych stronach *Zasady prowadzenia i zaliczania ćwiczeń* dotyczą jedynie grup podstawowych. Sposób zaliczania ćwiczeń w grupie zaawansowanej (oraz w innych grupach specjalnych, jeśli takie istnieją) jest ogłaszany przez prowadzącego te ćwiczenia i nie jest opisany w niniejszych notatkach. Rotacja prowadzących nie obejmuje grup specjalnych.

Oprócz zapisania się na zajęcia w systemie *Zapisy* należy utworzyć konto w serwisie kształcenia na odległość, dostępnym pod adresem [kno.ii.uni.wroc.pl](http://kno.ii.uni.wroc.pl) i zadbać o to, aby adres poczty elektronicznej (e-mail) podany w obu systemach był identyczny. Mniej więcej w drugim tygodniu zajęć dane osób, które będą poprawnie zapisane na zajęcia w systemie zapisów i będą miały poprawnie wypełnione adresy e-mail w obu systemach, zostaną automatycznie przeniesione z systemu zapisów do kno. Od tego czasu informacje dotyczące przedmiotu (w tym informacje o sprawdzianach, egzaminach, konsultacjach itp) będą ogłaszane niemal wyłącznie w systemie kno.

### A.3. Obsada zajęć i konsultacje

Obsada zajęć dydaktycznych w danym roku akademickim jest dostępna w Systemie Zapisy.

Każdy student ma niepodważalne prawo do bezpośredniej rozmowy z prowadzącymi na temat zajęć, w których uczestniczy. Uważamy, że z takich spotkań, tj. *konsultacji*, studenci korzystają nawet zbyt mało. Serdecznie zapraszając na konsultacje mamy jednak prośbę, by przestrzegać ustalonych przez prowadzących zasad. Każdy pracownik dydaktyczny wyznacza dwie godziny w tygodniu, w czasie których jest do dyspozycji studentów. Poszczególni prowadzący ustalają także inne sposoby konsultacji. Pracownicy spędzają w Instytucie znacznie więcej czasu, niż podane dwie godziny, ale poza dydaktyką wykonują też wiele innych prac. Dlatego prosimy traktować ze zrozumieniem ogłoszenia typu „proszę studentów o nieprzychodzenie poza godzinami konsultacji”. Prośba o respektowanie podanych terminów dotyczy szczególnie spraw technicznych, takich jak reklamacje dotyczące rankingu, czy wpisy ocen do indeksów. Studentów zapisanych na przedmiot jest ponad stu, a prowadzący — jeden. Nie chcemy, żeby studenci odnieśli wrażenie, że prowadzący starają się od nich izolować. Chodzi tylko o to, by nasze kontakty z dużą liczbą studentów przebiegały sprawnie i nie dezorganizowały naszej pracy w Instytucie.

Godziny konsultacji można znaleźć m. in. na stronach domowych prowadzących oraz w Systemie Zapisy.

Po każdym zajęciach prowadzący będą uzupełniać w którymś z systemów wspomagających dydaktykę w instytucie (*kno* lub *usosweb*, szczegóły zostaną podane później) ranking ćwiczeń służący do wyliczenia ocen końcowych. Problemy techniczne dotyczące punktacji za zadania, sprawdziany i kartkówki należy wyjaśniać z osobą, która danego dnia prowadziła ćwiczenia, osobiście w czasie jej konsultacji lub za pośrednictwem poczty elektronicznej, nie później niż trzy tygodnie po ćwiczeniach.

# B

## Literatura

Spośród licznych podręczników dostępnych w bibliotekach i księgarniach warto wymienić (wszystkie wymienione książki są dostępne w bibliotece wydziałowej):

1. Jerzy Tiurnyn, *Wstęp do teorii mnogości i logiki*. Skrypt można wypożyczyć w bibliotece wydziałowej. Wersja elektroniczna jest dostępna na stronie wykładu.
2. Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski, *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości oraz Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, PWN, Warszawa, 2005.
3. Kazimierz Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa, 1982. Krótkie wprowadzenie do teorii mnogości.
4. Kazimierz Kuratowski, Andrzej Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, 1978. Obszerny wykład teorii mnogości.
5. Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa, 2000. Obszerny zbiór prostych, typowych zadań.
6. Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa, 1999. Klasyczny podręcznik podstaw logiki i teorii mnogości.
7. Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa, 1986. Wbrew tytułowi książka zawiera sporo elementarnie wyłożonego materiału z logiki i teorii mnogości. Oryginał angielski: (*Discrete Mathematics*, Prentice Hall, 1988).
8. Jerzy Słupecki, Ludwik Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa, 1963.
9. Michael Huth, Mark Ryan, *Logic in computer science*, Cambridge University Press, 2004.

10. Susanna S. Epp, *Discrete mathematics with applications*, Brooks/Cole, 2011.

# C

## Zasady prowadzenia i zaliczania ćwiczeń

Poniższy regulamin dotyczy jedynie zajęć w grupach podstawowych i nie obejmuje grup specjalnych, w szczególności grupy zaawansowanej.

### C.1. Wstęp

Zasadniczym celem ćwiczeń z przedmiotu *Logika dla informatyków* jest ułatwienie studentom samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału w czasie *całego semestru*. Ocena z ćwiczeń jest oceną jakości i intensywności pracy studenta w trakcie semestru, w odróżnieniu od egzaminu z przedmiotu *Logika dla informatyków*, który ocenia stan wiedzy studenta w chwili zakończenia semestru.

Wykładowca ogłasza z odpowiednim wyprzedzeniem numery zadań z niniejszego zbioru. Studenci rozwiązują podane zadania *samodzielnie w domu*. Jeżeli student ma wątpliwości i chciałby je skonsultować z prowadzącym, powinien to uczynić w czasie godzin konsultacji prowadzącego. Zakłada się przy tym, że studenci będą dążyć do pewnej samodzielności w pracy nad opanowaniem przedmiotu. Mimo że zachęcamy studentów do wspólnej nauki, stanowczo odradzamy metodę polegającą na słuchaniu rozwiązań prezentowanych przez innych (np. starszych kolegów) lub szukaniu ich w internecie i uczeniu się ich na pamięć. Metoda taka nie może dać dobrych rezultatów, podobnie jak nie można nauczyć się grać na fortepianie tylko słuchając koncertów.

*Podstawą do wystawienia oceny jest liczba zadań, które student rozwiązał w trakcie całego semestru* i, pomijając wyjątkowe przypadki, ocena zależy w sposób liniowy od tej liczby. Prowadzący spotyka się ze studentami regularnie na ćwiczeniach, aby ustalić faktyczną liczbę zadań rozwiązanych przez każdego studenta. Dlatego pomimo iż na zajęciach powinna panować swobodna atmosfera, nie należy zapominać, że każde ćwiczenie są w istocie *sprawdzianem* wiedzy studentów. Prezentowanie rozwiązań na tablicy całej grupie studentów ma także walor dydak-

tyczny, pozwala bowiem osobom które nie poradziły sobie z zadaniem na poznanie jego wzorcowego rozwiązania (z określonych niżej zasad szczegółowych wynika, że rozwiązanie powinni prezentować jedynie studenci dobrze przygotowani). Ocena studenta jest bezwzględna, tj. niezależna od osiągnięć innych uczestników zajęć.

Numery zadań obowiązujących na następny tydzień są ogłaszane na stronie wykładu. W pierwszych dwóch tygodniach zajęć strona ta znajduje się pod adresem [www.ii.uni.wroc.pl/~wch/Dydaktyka/Logika](http://www.ii.uni.wroc.pl/~wch/Dydaktyka/Logika), później zostaje przeniesiona do serwisu *kno*. Podczas całego semestru w systemie *usosweb* jest prowadzony ranking ćwiczeń zawierający zestawienie aktualnie zdobytej liczby punktów przez każdego studenta i prognozę oceny końcowej. Po zakończeniu semestru ranking zawiera ostateczne wyniki ćwiczeń. We wszelkich sprawach dotyczących liczby zdobytych punktów studenci winni zgłaszać się do osoby prowadzącej zajęcia w danym dniu.

Na każdą z około 25 godzin zajęć zadaje się przeciętnie 3 zadania, zatem w ciągu całego semestru będzie ich około 75. Niniejsze notatki zawierają o kilkaset zadań więcej, a więc spory nadmiar. Bardzo zachęcamy studentów do rozwiązywania także pozostałych zadań.

Pierwsze ćwiczenia w semestrze nie są punktowane. Na zajęciach są rozwiązywane zadania z rozdziału 0 niniejszych notatek.

## C.2. Szczegółowe zasady prowadzenia zajęć

1. Co najmniej na trzy dni (zwykle na tydzień) przed zajęciami na stronie WWW wykładu jest ogłaszana lista numerów zadań z niniejszego zbioru. Część zadań jest oznaczona jako zadania trudniejsze. Na ćwiczeniach są rozwiązywane wybrane zadania z tej listy. Prowadzącemu pozostawia się decyzję odnośnie wyboru zadań do rozwiązania.
2. Przed rozpoczęciem zajęć student wypełnia kupon wpisując numery zadań z listy, które potrafi rozwiązać.<sup>1</sup> Karta powinna być wypełniona czytelnie, zawierać datę, jednoznacznie wpisane numery zadań<sup>2</sup>, sumę punktów oraz imię i nazwisko studenta. Bezpośrednio po wejściu do sali ćwiczeniowej prowadzący zajęcia zbiera kupony. *Gdy prowadzący przychodzi do sali ćwiczeniowej, kupony powinny być już wypełnione przez studentów tak, by mogły być natychmiast zebrane i by prowadzący nie musiał opóźniać rozpoczęcia zajęć oczekując na wypełnienie kuponów.*
3. Po rozpoczęciu zajęć dokonywanie jakichkolwiek zmian w treści złożonych deklaracji<sup>3</sup> jest niemożliwe.

<sup>1</sup> Gotowe kupony można wyciąć z ostatnich stron niniejszej książeczki.

<sup>2</sup> Niedopuszczalne są sformułowania typu „pierwsza część zadania 7” itp. Zadanie jest niepodzielna całością a deklaracja studenta powinna być jednoznaczna: tak lub nie.

<sup>3</sup> Np. próby o wycofanie lub dopisanie jakiegoś zadania.

4. Na każdych zajęciach student zdobywa liczbę punktów równą sumie wartości zadań, które zgłosił do rozwiązania z listy przewidzianej na dane zajęcia, z wyjątkiem przypadków opisanych w punktach 10–12.
5. Student nieobecny na zajęciach nie otrzymuje punktów. Poza przypadkami długotrwałej (trwającej co najmniej trzy tygodnie) choroby poświadczonej zwolnieniem lekarskim nie można odzyskać utraconych w ten sposób punktów.
6. Rozwiązanie danego zadania na tablicy przedstawia jedna z osób, wybrana przez prowadzącego, która zgłosiła gotowość rozwiązania tego zadania.<sup>4</sup> Prowadzący ma prawo przerwać osobie referującej w dowolnym momencie i poprosić inne osoby, które zgłosiły gotowość rozwiązania danego zadania, o kontynuowanie.<sup>5</sup>
7. Osoba przedstawiająca rozwiązanie musi znać i rozumieć definicje wszystkich pojęć, których używa w rozwiązaniu; nieznanostwo lub niezrozumienie definicji jakiegokolwiek używanego pojęcia są traktowane jak błąd w rozwiązaniu. Osoba ta musi być także przygotowana na niewielkie zmiany w treści zadania.<sup>6</sup>
8. W ciągu semestru odbędą się trzy kolokwia punktowane od 0 do 25 punktów. Każdy student otrzyma punkty za dwa najlepiej napisane z tych trzech kolokwii. Nie będzie kolokwii poprawkowych. Również w przypadku usprawiedliwionej nieobecności na którymś z kolokwii nie będzie możliwości poprawienia wyniku.
9. Student powinien znać definicje wprowadzanych na wykładzie pojęć i sformułowania podstawowych twierdzeń. Oczekujemy, że przed każdym wykładem i każdymi ćwiczeniami studenci będą przypominać sobie wcześniej poznany materiał. Aby ułatwić studentom systematyczne powtarzanie wcześniej poznanego materiału, ćwiczenia mogą rozpoczynać się od krótkiej kartkówki sprawdzającej znajomość pojęć wprowadzanych na wykładzie oraz podstawowych faktów (według niniejszych notatek do wykładu) lub rozwiązywanych wcześniej zadań. Za poprawną odpowiedź na wszystkie pytania zadane w kart-

---

<sup>4</sup>Niniejsze regulacje nie ustalają sposobu wyboru tej osoby. Może on być dokonany losowo. Prowadzący może też np. częściej wybierać osoby, które w przeszłości nie poradziły sobie, mimo zadeklarowanej chęci, z rozwiązaniem zadania na tablicy. Może również przedstawić rozwiązanie tego zadania samodzielnie albo pozostawić to rozwiązanie ochotnikowi.

<sup>5</sup>Niniejsze regulacje nie precyzują postępowania w sytuacji, gdy następna osoba stwierdzi, że jej sposób rozumowania jest zupełnie inny. Może wówczas rozpocząć referowanie rozwiązania od początku. Decyzja należy do prowadzącego.

<sup>6</sup>Ma to na celu zapobieganie dość powszechnym wśród studentów praktykom uczenia się na pamięć rozwiązań bez ich zrozumienia. W świetle tej regulacji np. zadania 36 i 37 są tym samym zadaniem i wobec studenta, który zgłasza jedno z nich a nie umie rozwiązać drugiego, mogą być zastosowane sankcje z punktów 10 lub 12.

kówce student otrzymuje 5 punktów. W semestrze odbędzie się około pięciu kartkówek.

10. Jeżeli podczas przedstawiania rozwiązania na tablicy okaże się, że student popełnił błąd (np. przeoczył trudność lub źle zrozumiał treść zadania) i nie jest w stanie rozwiązać poprawnie tego zadania, nie otrzymuje punktów za to zadanie i dodatkowo traci dwa razy tyle punktów, ile można było zdobyć za jego poprawne rozwiązanie.
11. Student, który bez zbędnych dygresji przedstawia na tablicy eleganckie i zrozumiałe dla słuchaczy rozwiązanie zadania, może otrzymać za to zadanie dodatkowo jeden punkt. O przyznaniu tego punktu decyduje prowadzący zajęcia.
12. Jeżeli okaże się, że student oświadczył nieprawdę i nie umie w ogóle rozwiązać zadania lub nawet nie rozumie jego treści, traci wszystkie punkty zdobyte danego dnia oraz dodatkowo 5 punktów.<sup>7</sup>
13. W ciągu semestru do rozwiązania zostaną przedstawione zadania o łącznej liczbie punktów nie mniejszej niż 75. Ponadto będzie można uzyskać 75 punktów za prace pisemne: 50 za kolokwia i 25 za kartkówki. Oznacza to, że łącznie można uzyskać co najmniej 150 punktów oraz kilka do kilkunastu punktów za rozwiązywanie zadań przy tablicy.
14. Ocena końcowa z ćwiczeń jest wystawiana na podstawie uzyskanych punktów, według zasad opisanych w następnym rozdziale i podsumowanych w tabeli C.1.
15. Ocena końcowa nie podlega poprawianiu po zakończeniu semestru. Nie ma kolokwiiw poprawkowych.<sup>8</sup>
16. Studenci po zapisaniu się do grup ćwiczeniowych nie mogą ich zmieniać, nawet jeśli zajęcia odbywają się w tym samym czasie.
17. Podczas referowania zadań przy tablicy student nie może mieć przy sobie notatek.

---

<sup>7</sup> Z punktu widzenia interesów studenta okazuje się krytyczne rozróżnienie między tym punktem i poprzednim. Niestety, mimo jasnego sformułowania, chodzi tu o kwestię merytoryczną co do której podanie ścisłego algorytmu postępowania jest niemożliwe. Rozróżnienie to pozostaje do decyzji prowadzącego.

<sup>8</sup> Student powinien mieć świadomość, że zajęć można nie zaliczyć. W szczególności utrata punktów zgodnie z paragrafem 12 może jednoznacznie i nieodwołalnie skazać studenta na niezaliczenie zajęć i konieczność powtarzania przedmiotu w następnym roku lub skreślenie z listy studentów.



punkty	ocena
$\geq 60^*$	dst
$\geq 75^*$	dst+
$\geq 90^{*\dagger}$	db
$\geq 105^{*\dagger}$	db+
$\geq 120^{*\ddagger}$	bdb

\* w tym 10 punktów za *logikę* i 10 za *teorię mnogości*, 25 za prace pisemne, prezentacja

$\dagger$  w tym rozwiązanie przy tablicy co najmniej jednego trudnego zadania

$\ddagger$  w tym rozwiązanie przy tablicy co najmniej trzech trudnych zadań

**Tablica C.1.** Sposób przeliczania liczby punktów na ocenę z ćwiczeń.

### C.3. Szczegółowe zasady zaliczania ćwiczeń

Ocena z ćwiczeń wystawiana jest na podstawie sumy uzyskanych w ciągu semestru punktów według tabeli C.1. Aby zaliczyć ćwiczenia należy spełnić dodatkowe warunki:

1. Uzyskać co najmniej 10 punktów w dziale *logika* (rozdziały 1–3 i 11.2–13),
2. uzyskać co najmniej 10 punktów w dziale *teoria mnogości* (rozdziały 4–11.1),
3. uzyskać co najmniej 25 punktów za prace pisemne, oraz
4. samodzielnie zaprezentować rozumowanie, tzn.
  - rozwiązać przy tablicy co najmniej jedno zadanie typu „udowodnij”, lub
  - uzyskać co najmniej 5 punktów za zadania typu „udowodnij” na kółkach.

Dodatkowo, aby otrzymać ocenę dobrą lub dobrą plus należy rozwiązać przy tablicy co najmniej jedno zadanie oznaczone jako trudniejsze. Do otrzymania oceny bardzo dobrej konieczne jest rozwiązanie przy tablicy co najmniej trzech takich zadań.



# D

## Egzaminy

Oceną, jaką student otrzymuje z przedmiotu, jest wynik egzaminu zasadniczego. W razie otrzymania oceny niedostatecznej student ma prawo przystąpić do egzaminu poprawkowego. Każdy z tych egzaminów (końcowy i poprawkowy) składa się z dwóch części, zwanych umownie częścią licencjacką i magisterską.

W razie przyłapania na ściąganiu podczas którejkolwiek części egzaminu student otrzymuje ocenę niedostateczną. Ocena ta jest ostateczna i nie podlega poprawianiu, a sprawa tego studenta jest kierowana do Dziekana.

Na egzamin należy przynieść przybory do pisania (pióro, długopis) i dowolny dokument ze zdjęciem w celu potwierdzenia tożsamości (dowód osobisty, paszport, legitymacja studencka, indeks itp). W trakcie egzaminu indeksy nie będą zbierane. Używanie notatek i własnego papieru jest niedozwolone. Wnoszenie toreb, wierzchnich okryć i wszelkich innych ruchomości na salę egzaminacyjną jest niedopuszczalne. Studenci powinni pozostawić je np. w szafkach w szatni. Strój odświętny na egzaminie nie jest wymagany.

Zarówno za egzamin zasadniczy, jak i poprawkowy można otrzymać od  $-100$  do  $100$  punktów. Jeżeli punktacja za zadanie egzaminacyjne wynosi  $n$ , znaczy to, że za rozwiązanie tego zadania można otrzymać od  $-n$  do  $n$  punktów. Punkty ujemne będą przyznawane za rozpoczęcie rozwiązywania zadania<sup>1</sup> oraz za umieszczenie w rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywych. Za brak rozwiązania zadania otrzymuje się  $0$  punktów. Liczba punktów możliwych do zdobycia na egzaminie może zostać zwiększona poprzez dodanie zadań bonusowych.

Do wyników egzaminu zasadniczego i poprawkowego w części licencjackiej dolicza się punkty bonusowe za zaliczenie ćwiczeń. Liczba punktów bonusowych jest częścią całkowitą ilorazu:  $(C - 60)/10$ , gdzie  $C$  oznacza całkowitą liczbę punktów uzyskanych na zaliczenie ćwiczeń w semestrze bezpośrednio poprzedzającym egzamin. *Osobom, które zaliczyły ćwiczenia w poprzednich latach punktów bonusowych się nie dolicza. Studentom odbywającym ćwiczenia w grupie zaawansowanej punk-*

---

<sup>1</sup>Ma to na celu eliminowanie odpowiedzi, w których nie ma w ogóle poprawnych rozumowań. Student oddając rozwiązanie zadania powinien być przekonany, że jest ono na tyle poprawne, że pozwoli mu przekroczyć próg  $0$  punktów.

punkty	ocena
$[-100 \div 17)$	ndst
$[17 \div 20)$	???
$[20 \div 42)^*$	dst
$[42 \div 56)^*$	dst+
$[56 \div 70)^*$	db
$[70 \div 84)^*$	db+
$[84 \div +\infty)^*$	bdb

\*Co najmniej 20 punktów należy uzyskać z części licencjackiej.

**Tablica D.2.** Sposób przeliczania liczby punktów na ocenę z egzaminu.

tów bonusowych się nie dolicza. Punkty z egzaminu zasadniczego i poprawkowego przeliczają się na oceny zgodnie z tablicą D.2.

Terminy egzaminów, miejsca ich przeprowadzenia, przydział studentów do sal, terminy ogłoszenia wyników oraz miejsca i terminy konsultacji poegzaminacyjnych są podane na stronie wykładu. Wszelkie wątpliwości dotyczące sposobu oceniania egzaminu i otrzymanych ocen studenci powinni wyjaśniać w trakcie konsultacji poegzaminacyjnych. W czasie konsultacji po egzaminie końcowym i poprawkowym studenci winni zgłosić się z indeksami celem otrzymania wpisu oceny do indeksu. Wpisy do indeksów i konsultacje dotyczące wyników egzaminów w innych terminach nie będą dokonywane.

Treść zadań egzaminacyjnych oraz wyniki egzaminów są ogłaszane na stronie wykładu po zakończeniu egzaminu.

## D.1. Egzamin końcowy

Ocena z egzaminu końcowego jest wystawiana na podstawie sumy punktów uzyskanych na egzaminie i punktów bonusowych. Zakres materiału na egzaminie końcowym obejmuje cały semestr.

Do egzaminu końcowego mogą przystąpić jedynie osoby, które uzyskały zaliczenie ćwiczeń. Wszyscy studenci zapisani na przedmiot *Logika dla Informatyków*, którzy uzyskali zaliczenie ćwiczeń, mają obowiązek stawić się na ten egzamin.

Egzamin składa się z dwóch części zwanych umownie licencjacką i magisterską. Obie części odbywają się tego samego dnia i mogą być od siebie oddzielone krótką przerwą. Pierwsza część sprawdza podstawowe opanowanie materiału, natomiast druga sprawdza umiejętność twórczego posługiwania się nabytą wiedzą.

W razie nieobecności na egzaminie spowodowanej chorobą student ma obowiązek dostarczyć egzaminatorowi (osobiście, pocztą lub przez osoby trzecie) zwol-

nienie lekarskie w ciągu trzech dni licząc od dnia egzaminu. Nieusprawiedliwiona w ten sposób nieobecność studenta jest równoznaczna z uzyskaniem zerowej liczby punktów z egzaminu. W szczególnych przypadkach decyzję o usprawiedliwieniu nieobecności na egzaminie może podjąć Dziekan. W razie usprawiedliwionej nieobecności na egzaminie końcowym egzaminator ustali dla danej osoby inny termin egzaminu w sesji zimowej (zwykle jest to pierwszy dzień roboczy po ustaniu przyczyny nieobecności).

Na pierwszej części egzaminu (licencjackiej) można zdobyć do 40 punktów. Osoby, które zdobędą co najmniej 20 punktów, będą mogły otrzymać (bez względu na wynik drugiej części) ocenę dostateczną z egzaminu końcowego. Ponadto osoby te będą mogły na pełnych prawach wziąć udział w drugiej części. Studenci, którzy w pierwszej części uzyskają mniej niż 17 punktów, otrzymają ocenę niedostateczną a ich prace z drugiej części egzaminu końcowego nie będą sprawdzane. Studenci, którzy uzyskają co najmniej 17 i mniej niż 20 punktów, będą mogli przystąpić do egzaminu ustnego (tzw. „dopytki”) w czasie konsultacji poegzaminacyjnych.

## **D.2. Egzamin poprawkowy**

W razie otrzymania oceny niedostatecznej z egzaminu zasadniczego student przystępuje do egzaminu poprawkowego w sesji poprawkowej. Ocena z egzaminu poprawkowego nie podlega poprawianiu.

## Notacja matematyczna

Matematycy używają liter pochodzących z różnych krojów pisma i różnych alfabetów. Poniżej są zebrane alfabety użyte w niniejszych notatkach.

### Pismo łacińskie, gotyckie, blokowe i kaligraficzne

*a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z*  
*A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z*  
*α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω*  
*Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω*  
*A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z*  
*A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z*

### Alfabet grecki

Niektóre małe litery greckie mają dwa warianty pisowni. Przeważnie używa się pierwszego z podanych.

<i>A</i>	<i>α</i>	alfa	<i>I</i>	<i>ι</i>	jota	<i>P</i>	<i>ρ, ϱ</i>	ro
<i>B</i>	<i>β</i>	beta	<i>K</i>	<i>κ</i>	kappa	<i>Σ</i>	<i>σ, ς</i>	sigma
<i>Γ</i>	<i>γ</i>	gamma	<i>Λ</i>	<i>λ</i>	lambda	<i>T</i>	<i>τ</i>	tau
<i>Δ</i>	<i>δ</i>	delta	<i>M</i>	<i>μ</i>	mi	<i>Υ</i>	<i>υ</i>	ypsilon
<i>E</i>	<i>ε, ε</i>	epsilon	<i>N</i>	<i>ν</i>	ni	<i>Φ</i>	<i>φ, ϕ</i>	fi
<i>Z</i>	<i>ζ</i>	dzeta	<i>Ξ</i>	<i>ξ</i>	ksi	<i>X</i>	<i>χ</i>	chi
<i>H</i>	<i>η</i>	eta	<i>O</i>	<i>ο</i>	omikron	<i>Ψ</i>	<i>ψ</i>	psi
<i>Θ</i>	<i>θ, ϑ</i>	teta	<i>Π</i>	<i>π, ϖ</i>	pi	<i>Ω</i>	<i>ω</i>	omega

### Alfabet hebrajski

Z alfabetu hebrajskiego używamy pierwszej litery *א*, która nazywa się *alef*.

# 0

## Zadania na dobry początek

Zadania z bieżącego rozdziału są rozwiązywane na pierwszych ćwiczeniach w semestrze. Zadań tych nie deklaruje się i nie są one punktowane.

**Zadanie 1.** Pan Hilary zgubił swoje okulary i w ich poszukiwaniu stwierdza następujące fakty:

- Jeśli czytałem gazetę w kuchni to okulary są na stole kuchennym.
- Jeśli okulary są na stole kuchennym, to widziałem je podczas śniadania.
- Nie widziałem okularów podczas śniadania.
- Czytałem gazetę w kuchni lub w sypialni.
- Jeśli czytałem gazetę w sypialni to okulary są na łóżku.

Czy z tych faktów można wywnioskować gdzie są okulary?

**Zadanie 2.** Oto fragment raportu policji sporządzony przez młodego aspiranta:

*Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.*

Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu (poza oczywistym faktem, że należy zwolnić aspiranta)? Odpowiedz na pytania: *Czy świadek był zastraszony? Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy testament odnaleziono?*

**Zadanie 3.** Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite  $m$  i  $n$ , że  $m > 1$ ,  $n > 1$  oraz  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 4.** Udowodnij, że stwierdzenie dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  zachodzi równość  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$  jest fałszywe.

**Definicja 1.** Mówimy, że liczba całkowita  $d$  jest *dzielnikiem* liczby całkowitej  $n$  jeśli istnieje taka liczba całkowita  $k$ , że  $n = dk$ . Mówimy, że liczba naturalna  $n$  jest *pierwsza* jeśli  $n > 1$  oraz  $n$  nie ma innych niż 1 i  $n$  dzielników naturalnych; w przeciwnym przypadku, gdy  $n$  ma inne niż 1 i  $n$  dzielniki naturalne, mówimy że jest to liczba *złożona*.

**Zadanie 5.** Udowodnij, że dla wszystkich większych od 1 liczb całkowitych  $n$  liczba  $n^2 + 2n$  jest złożona.

**Zadanie 6.** Udowodnij, że stwierdzenie *istnieje taka dodatnia liczba naturalna  $n$ , że  $n^2 + 3n + 2$  jest liczbą pierwszą* jest fałszywe.

**Zadanie 7.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c, d$  równość

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = d$  lub  $b = c$ .

**Zadanie 8.** Wskaż błąd w następujących „dowodach” twierdzenia, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych  $k$  liczba  $k^2 + 2k + 1$  jest złożona.

**„Dowód” 1** Weźmy  $k = 2$ . Wtedy  $k^2 + 2k + 1 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$ , ale liczba 9 dzieli się przez 3, więc 9 jest liczbą złożoną. Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

**„Dowód” 2** Weźmy dowolną dodatnią liczbę naturalną  $k$ . Jeśli  $k^2 + 2k + 1$  jest liczbą złożoną to  $k^2 + 2k + 1 = pq$  dla pewnych dodatnich liczb naturalnych  $p$  i  $q$  takich, że

$$1 < p < k^2 + 2k + 1$$

oraz

$$1 < q < k^2 + 2k + 1.$$

Skoro  $k^2 + 2k + 1 = pq$  i obie liczby  $p$  i  $q$  są ściśle pomiędzy 1 i  $k^2 + 2k + 1$  to znaczy że  $p$  i  $q$  są innymi niż 1 i  $k^2 + 2k + 1$  dzielnikami liczby  $k^2 + 2k + 1$ , a zatem liczba  $k^2 + 2k + 1$  jest złożona.

**Definicja 2.** Mówimy, że liczba całkowita  $n$  jest *parzysta* jeśli istnieje taka liczba całkowita  $k$ , że  $n = 2k$ . Mówimy, że  $n$  jest *nieparzysta* jeśli istnieje taka liczba całkowita  $k$ , że  $n = 2k + 1$ .

**Zadanie 9.** Wskaż błąd w następującym „dowodzie” twierdzenia, że różnica pomiędzy dowolną liczbą parzystą a dowolną nieparzystą jest nieparzysta.

**„Dowód”** Weźmy dowolną liczbę parzystą  $m$  i dowolną liczbę nieparzystą  $n$ . Z definicji parzystości wiemy, że  $m = 2k$  dla pewnego  $k$  oraz  $n = 2k + 1$  dla pewnego  $k$ . Wtedy  $n - m = (2k + 1) - 2k = 1$ . Skoro 1 jest liczbą nieparzystą, pokazaliśmy że różnica pomiędzy dowolną liczbą parzystą a dowolną nieparzystą jest nieparzysta.



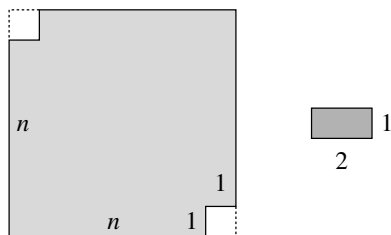
**Zadanie 10.** Wskaż błąd w następującym „dowodzie” twierdzenia, że iloczyn liczby parzystej przez nieparzystą jest parzysty.

**„Dowód”** Weźmy dowolną liczbę parzystą  $m$  i dowolną liczbę nieparzystą  $n$ . Jeśli  $mn$  jest parzysta, to z definicji parzystości istnieje taka liczba  $r$ , że  $mn = 2r$ . Z parzystości  $m$  wiemy, że istnieje taka liczba  $p$ , że  $m = 2p$ , a z nieparzystości  $n$  wiemy, że istnieje taka liczba  $q$ , że  $n = 2q + 1$ . Wtedy

$$mn = (2p)(2q + 1) = 2r.$$

Z definicji parzystości otrzymujemy, że  $mn$  jest parzysta, co kończy dowód.

**Zadanie 11.** Rozważmy kwadrat o boku  $n$ , gdzie  $n \geq 3$ , z którego usunięto dwa naprzeciwległe narożniki o wymiarach  $1 \times 1$ , jak na poniższym rysunku:



Dla jakich  $n$  można tak otrzymaną figurę pokryć prostokątami o wymiarach  $1 \times 2$ ? (Prostokąty można obracać.)



# Indukcja matematyczna

**Twierdzenie 3 (zasada indukcji).** Niech  $X$  będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ , że

1.  $0 \in X$ , oraz
2. dla wszystkich liczb naturalnych  $n$  spełniona jest implikacja: jeśli  $n \in X$  to  $n + 1 \in X$ .

Wtedy  $X = \mathbb{N}$ .

Dowolny zbiór spełniający warunki 1 i 2 powyższego twierdzenia nazywamy *induktywnym*. Innymi słowami, zbiór induktywny to zbiór zawierający 0 i zamknięty na dodawanie jedynki. Zasada indukcji w tej postaci mówi po prostu, że każdy zbiór induktywny zawiera zbiór liczb naturalnych. Zasada ta wynika wprost z definicji zbioru liczb naturalnych (formalnie jest to najmniejszy zbiór induktywny), ale głębsze rozważania na ten temat wybiegają poza ramy tego wykładu. Jeśli oprzemy się na wiedzy wyniesionej ze szkoły średniej, możemy do uzasadnienia zasady indukcji użyć zasady minimum mówiącej, że każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.

**Dowód (twierdzenia 3, oparty na zasadzie minimum).** Przeprowadzimy dowód nie wprost. Gdyby  $X \neq \mathbb{N}$  to zbiór  $\mathbb{N} - X$  byłby niepusty, więc z zasady minimum miałby element najmniejszy. Niech  $k$  będzie najmniejszą liczbą naturalną w zbiorze  $\mathbb{N} - X$ . Oczywiście  $k \neq 0$ , bo  $0 \in X$ . Z faktu, że  $k$  jest najmniejszą liczbą naturalną nienależącą do  $X$  wnioskujemy, że  $k - 1 \in X$ . Wtedy z drugiego warunku otrzymujemy  $k \in X$ , co przeczy założeniu, że  $k \notin X$ . ■

**Przykład 4.** Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zdefiniowaną rekurencyjnie wzorami  $f(0) = 0$  oraz  $f(n + 1) = f(n) + 2$ . Pokażemy indukcyjnie, że  $f(n) = 2n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

Niech  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 2n\}$ . Z wzoru  $f(0) = 0$  wynika, że  $0 \in X$ . Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną  $n$  i założmy, że  $n \in X$ . Wtedy z tego założenia wynika, że  $f(n) = 2n$  a z wzoru  $f(n + 1) = f(n) + 2$  otrzymujemy  $f(n + 1) = 2n + 2$ ,

czyli  $f(n+1) = 2(n+1)$ , a stąd  $n+1 \in X$ . Na mocy zasady indukcji otrzymujemy, że  $X = \mathbb{N}$ , czyli warunek  $f(n) = 2n$  zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. ■

Typowy dowód indukcyjny składa się z dwóch części: dowodu, że  $0 \in X$  (warunek ten oraz jego dowód są nazywane *podstawą indukcji*) oraz dowodu implikacji  $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$  (zarówno ta implikacja jak i jej dowód są nazywane *krokiem indukcyjnym*). Warunek  $n \in X$  w kroku indukcyjnym nazywamy *założeniem indukcyjnym* a warunek  $(n+1) \in X$  *tezą indukcyjną*.

W literaturze spotyka się wiele różnych wersji zasady indukcji. Chyba najczęściej spotykaną jest wersja następująca.

**Twierdzenie 5.** Niech  $\phi$  będzie własnością liczb naturalnych spełniającą następujące dwa warunki.

- $\phi(0)$  jest prawdą, oraz
- dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ , jeśli  $\phi(n)$  jest prawdą to także  $\phi(n+1)$  jest prawdą.

Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność  $\phi$ .

Twierdzenia 3 i 5 są w istocie rzeczy tym samym twierdzeniem (zasadą indukcji), różnią się tylko sformułowaniem. Formalnie oba twierdzenia wynikają z siebie nawzajem. Żeby uzasadnić, że twierdzenie 5 wynika z twierdzenia 3 wystarczy użyć zbioru  $\{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$  i zauważyć jego induktywność. Żeby zobaczyć, że twierdzenie 3 wynika z twierdzenia 5 wystarczy zdefiniować własność  $\phi$  jako  $n \in X$ .

Czasem chcemy wykazać prawdziwość pewnej własności dla wszystkich liczb naturalnych większych od zadanej liczby początkowej. Można w tym celu skorzystać z następującej wersji zasady indukcji.

**Twierdzenie 6 (zasada indukcji, wersja 3).** Niech  $a \in \mathbb{N}$  i niech  $\phi$  będzie własnością liczb naturalnych spełniającą następujące dwa warunki.

- $\phi(a)$  jest prawdą, oraz
- dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq a$ , jeśli  $\phi(n)$  jest prawdą to  $\phi(n+1)$  też jest prawdą.

Wtedy dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq a$  zachodzi  $\phi(n)$ .

Prawdziwość tej wersji zasady indukcji można uzasadnić korzystając z twierdzenia 3 i zauważając, że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{jeśli } n \geq a \text{ to } \phi(n)\}$$

jest induktywny.

**Przykład 7.** Pokażemy indukcyjnie, że  $2^n \leq n!$  dla każdego  $n \geq 4$ . Skorzystamy z twierdzenia 6 dla własności  $\phi(n)$  zdefiniowanej jako  $2^n \leq n!$  oraz dla  $a = 4$ .

W tym przypadku podstawa indukcji to warunek  $\phi(4)$ . Warunek ten jest prawdziwy, bo  $2^4 = 16$ ,  $4! = 24$  oraz  $16 < 24$ .

Dla uzasadnienia kroku indukcyjnego weźmy dowolne  $n \geq 4$  i założmy, że  $2^n < n!$ . Pokażemy, że  $2^{n+1} < (n+1)!$ . Wiemy, że  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ , zatem z założenia indukcyjnego wynika, że  $2^{n+1} < 2 \cdot n!$ . Ponieważ  $n \geq 4$ , więc  $2 < (n+1)$  a zatem  $2^{n+1} < (n+1) \cdot n!$ . Czyli  $2^{n+1} < (n+1)!$ , co należało pokazać.

Z zasady indukcji wnioskujemy, że  $2^n \leq n!$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq 4$ . ■

Często w dowodach indukcyjnych zamiast założenia indukcyjnego, że liczba  $n$  ma własność  $\phi$  potrzebujemy silniejszego założenia, że wszystkie liczby naturalne od  $a$  do  $n$  mają własność  $\phi$ . Używając bardziej zwartej notacji matematycznej, odpowiednią zasadę indukcji możemy zapisać następująco.

**Twierdzenie 8 (zasada indukcji, wersja 4).** Niech  $a \in \mathbb{N}$  i niech  $X$  będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ , że

- $a \in X$ ,
- dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq a$  spełniona jest implikacja

$$(\forall a \leq i \leq n \ i \in X) \Rightarrow (n+1) \in X.$$

Wtedy dla wszystkich  $n \geq a$  zachodzi  $n \in X$ .

Prawdziwość takiej zasady indukcji dowodzi się wykazując że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{jeśli } n \geq a \text{ to } \forall a \leq i \leq n \ i \in X\}$$

jest induktywny.

W szczególnym przypadku, gdy  $a = 0$ , powyższe warunki się upraszczają i całe twierdzenie można zapisać w następującej postaci.

**Twierdzenie 9 (zasada indukcji, wersja 5).** Jeśli  $X \subseteq \mathbb{N}$  spełnia warunek

$$\forall n ((\forall i < n \ i \in X) \Rightarrow n \in X)$$

to  $X = \mathbb{N}$ .

W tej wersji podstawa indukcji jest szczególnym przypadkiem kroku indukcyjnego: dla  $n = 0$  wszystkie liczby mniejsze od  $n$  są już w zbiorze  $X$  (bo takich liczb wcale nie ma), więc warunek z twierdzenia wymusza  $0 \in X$ .

**Przykład 10.** Rozważmy układankę puzzle złożoną z  $n$  kawałków obrazka. Ułożenie obrazka zaczyna się od połączenia ze sobą dwóch pasujących do siebie kawałków, a w kolejnych ruchach łączy się ze sobą dwa pasujące do siebie fragmenty obrazka (złożone z jednego lub więcej kawałków). Pokażemy indukcyjnie, że dla każdego obrazka złożonego z  $n$  kawałków każde jego ułożenie wymaga wykonania dokładnie  $n - 1$  ruchów. Skorzystamy w tym celu z twierdzenia 8 dla  $a = 1$ .

Niech  $X$  będzie zbiorem takich liczb naturalnych  $n \geq 1$ , że dla każdego obrazka złożonego z  $n$  kawałków każde jego ułożenie wymaga wykonania dokładnie  $n - 1$  ruchów.

*Podstawa indukcji:* Oczywiście liczba 1 należy do zbioru  $X$ , bo ułożenie dowolnego obrazka złożonego z 1 kawałka wymaga dokładnie 0 ruchów.

*Krok indukcyjny:* Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną  $n \geq 1$  i założmy, że dla wszystkich takich liczb naturalnych  $i$ , że  $i \geq 1$  i  $i \leq n$  zachodzi  $i \in X$ . Pokażemy, że  $n + 1 \in X$ . W tym celu weźmy dowolny obrazek złożony z  $n + 1$  kawałków i rozważmy dowolny sposób jego ułożenia, nazwijmy ten sposób  $s$ . W ostatnim ruchu ułożenia  $s$  połączono ze sobą dwa fragmenty obrazka. Niech  $i$  będzie liczbą kawałków pierwszego fragmentu. Wtedy drugi fragment składa się z  $(n + 1) - i$  kawałków. Obie liczby  $i$  oraz  $(n + 1) - i$  są nie mniejsze niż 1 i nie większe niż  $n$ , zatem z założenia indukcyjnego obie należą do zbioru  $X$ . Oba fragmenty naszego obrazka są obrazkami złożonymi odpowiednio z  $i$  oraz  $(n + 1) - i$  kawałków, zatem każde ich ułożenie wymagało odpowiednio dokładnie  $i - 1$  oraz  $(n + 1) - i - 1$  ruchów. Ułożenie  $s$  składało się zatem z  $(i - 1) + (n + 1) - i - 1 + 1 = n$  ruchów: ułożenia pierwszego i drugiego fragmentu oraz połączenia tych fragmentów. Z dowolności wyboru obrazka i sposobu jego ułożenia wnioskujemy, że ułożenie dowolnego obrazka złożonego z  $n + 1$  kawałków wymaga dokładnie  $n$  ruchów. Zatem  $n + 1 \in X$ .

Na mocy zasady indukcji wnioskujemy, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  ułożenie dowolnego obrazka puzzle złożonego z  $n$  kawałków wymaga wykonania dokładnie  $n - 1$  ruchów. ■

**Zadanie 12.** Udowodnij, że dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq 1$  liczba  $6^n$  w zapisie dziesiętnym kończy się cyfrą 6.

**Zadanie 13.** Firma cateringowa pakuje kanapki wyłącznie w pudełka po 3 lub 5 sztuk. Udowodnij, że każdą liczącą co najmniej 8 sztuk liczbę kanapek da się zapakować w takie pudełka tak, aby wszystkie pudełka były pełne.

**Definicja 11.** Liczby Fibonacciego  $F_0, F_1, F_2, \dots$  definiuje się równaniami

- $F_0 = 0, F_1 = 1,$
- $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$  dla  $n \geq 2$ .

**Zadanie 14.** Udowodnij indukcyjnie, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $F_n \leq F_{n+1}$ ,

**Zadanie 15.** Udowodnij, że jeśli  $n > 3$ , to  $F_{n+1} < 2F_n$ .

**Zadanie 16.** Udowodnij, że dla wszystkich  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$F_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i.$$

**Zadanie 17.** Udowodnij, że dla wszystkich  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$F_n^2 = (-1)^{n+1} + F_{n-1}F_{n+1}.$$

**Zadanie 18.** Udowodnij, że dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

**Zadanie 19.** Udowodnij, że jeśli dla wszystkich  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$  liczby  $F_n$  i  $F_{n+1}$  są względnie pierwsze.

**Zadanie 20.** Oto przykłady trzech wnioskowań przez indukcję:

1. Pokażę, że wszystkie liczby naturalne są parzyste. Oczywiście 0 jest liczbą parzystą. Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną i założmy, że dla wszystkich  $k < n$ ,  $k$  jest parzyste. Niech  $n_1$  i  $n_2$  będzie dowolnym rozbiem liczby  $n$  na sumę liczb mniejszych (tzn.  $n = n_1 + n_2$ ). Ponieważ  $n_1$  oraz  $n_2$  są mniejsze od  $n$ ,  $n_1$  i  $n_2$  są parzyste, a więc  $n$  jest parzyste jako suma dwóch liczb parzystych.

2. Pokażę, że wszystkie dodatnie liczby naturalne są nieparzyste. Oczywiście 1 jest liczbą nieparzystą. Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną i założmy, że dla wszystkich  $k < n$ ,  $k$  jest nieparzyste. Niech  $1$ ,  $n_1$  i  $n_2$  będzie dowolnym rozbiem liczby  $n$  na sumę trzech liczb mniejszych (tzn.  $n = n_1 + n_2 + 1$ ). Ponieważ  $n_1$  oraz  $n_2$  są mniejsze od  $n$ ,  $n_1$  i  $n_2$  są nieparzyste, a więc  $n$  jest nieparzyste jako suma dwóch liczb nieparzystych i liczby 1.

3. Pokażę, że wszystkie proste na płaszczyźnie są równoległe. Rozważmy jednoelementowy zbiór prostych na płaszczyźnie. Oczywiście wszystkie proste należące do tego zbioru są do siebie równoległe. Założmy, że w każdym  $n$ -elementowym zbiorze prostych wszystkie proste są do siebie równoległe. Rozważmy teraz  $n + 1$ -elementowy zbiór prostych. Ustalmy w nim jedną prostą  $p$ . Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe  $n$  prostych jest do siebie równoległe. Ustalmy teraz inną prostą  $q$ . Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe  $n$  prostych jest również do siebie równoległe. Ponieważ relacja równoległości prostych jest przechodnia, wszystkie  $n + 1$  prostych jest równoległe. Na mocy zasady indukcji matematycznej każdy zbiór prostych na płaszczyźnie zawiera wyłącznie proste równoległe. W szczególności dotyczy to zbioru wszystkich prostych na płaszczyźnie.

Które z tych rozumowań jest poprawne? Wskaż błędy popełnione w błędnych rozumowaniach.

**Zadanie 21.** W klasie jest  $2n$  dzieci i  $n$  dwuosobowych ławek. Wykaż przez indukcję, że dzieci można podzielić w pary na  $\frac{(2n)!}{2^n n!}$  sposobów i rozsadzić w ławkach na  $\frac{(2n)!}{2^n}$  sposobów.

**Zadanie 22.** Udowodnij, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 3$  i  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  dla  $n \geq 1$ , to  $a_n = 2^n + 1$ .

**Zadanie 23.** Znajdź błąd w następującym rozumowaniu. Pokażę, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $r$  i wszystkich liczb naturalnych  $n$  zachodzi równość  $r^n = 1$ . Oczywiście dla  $n = 0$  mamy  $r^n = 1$ . Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną i założmy, że dla wszystkich  $k \leq n$  zachodzi równość  $r^k = 1$ . Wtedy  $r^{n+1} = r^{n+n-(n-1)} = \frac{r^n \cdot r^n}{r^{n-1}}$ . Ponieważ liczby  $n$  oraz  $n - 1$  są nie większe niż  $n$ , więc z założenia indukcyjnego mamy  $r^n = r^{n-1} = 1$ . Zatem  $r^{n+1} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$ , co kończy dowód.

**Zadanie 24.** Udowodnij, że obszary wyznaczone przez dowolną skończoną liczbę prostych na płaszczyźnie można pokolorować dwoma kolorami tak, by żadne dwa obszary o tym samym kolorze nie miały wspólnego boku.

**Zadanie 25.** Wykaż indukcyjnie, że  $2^n \geq n^2$  dla każdego  $n \geq 5$ .

**Zadanie 26.** Niech  $X \subseteq \mathbb{N}$  będzie takim zbiorem, że spełniona jest koniunkcja warunków

1.  $0, 1 \in X$
2.  $\forall n (n \in X \Rightarrow 2n \in X)$
3.  $\forall n (n + 1 \in X \Rightarrow n \in X)$

Udowodnij, że  $X = \mathbb{N}$ .

**Zadanie 27.** Dany jest zbiór  $X \subseteq \mathbb{N}$  spełniający warunki:

1.  $0, 1 \in X$ ,
2. jeśli  $x \in X$  oraz  $x + 1 \in X$  to  $x + 2 \in X$ , dla każdej liczby naturalnej  $x$ .

Wykaż, że  $X = \mathbb{N}$ . Czy to twierdzenie pozostanie słuszne, jeśli warunek 1. zastąpimy przez słabszy warunek  $0 \in X$ ?



**Zadanie 28.** Rozważmy grę, w której ruchy wykonują na zmianę gracze  $A$  i  $B$ . Gracz  $A$  dostaje  $n$  cukierków i rozpoczyna grę. W każdym kroku gracz, który ma cukierki, zjada jeden lub dwa cukierki i przekazuje resztę cukierków przeciwnikowi. Wygrywa ten gracz, który zje ostatniego cukierka. Wykaż, że jeśli  $n$  dzieli się przez 3, to gracz  $B$  potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza  $A$ , natomiast jeśli  $n$  nie dzieli się przez 3, to gracz  $A$  potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza  $B$ .

**Zadanie 29.** Wykaż, że  $n$  prostych przecina się na płaszczyźnie w co najwyżej  $\frac{n(n-1)}{2}$  punktach.

**Zadanie 30.** Wykaż indukcyjnie, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x > -1$  oraz wszystkich liczb naturalnych  $n$  zachodzi nierówność  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Zadanie 31.** Na stole znajdują się trzy szklanki, każda wypełniona dokładnie w połowie. W pierwszej z nich znajduje się martini, w dwóch pozostałych woda sodowa. Nie mamy żadnej miarki do odmierzania płynów; jedyną operacją, jaką możemy wykonać, jest przelanie zawartości z jednej szklanki do drugiej aż do wypełnienia tej drugiej (lub opróżnienia pierwszej) szklanki. Zakładamy przy tym, że podczas przelewania nic się nie rozlewa oraz że po przelaniu płyn zostaje dokładnie wymieszany. Czy można w skończonej liczbie kroków dokładnie wymieszać martini z wodą sodową tak, aby otrzymać roztwór, którego  $1/3$  objętości stanowi martini?

**Zadanie 32.** Iloczyn liczb  $x_1, x_2$  i  $x_3$  można obliczyć mnożąc najpierw  $x_1$  przez  $x_2$  a potem mnożąc wynik przez  $x_3$ , ale można też najpierw wymnożyć  $x_1$  przez  $x_3$  i potem wynik wymnożyć przez  $x_2$ . Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  obliczenie iloczynu  $n$  liczb wymaga zawsze, bez względu na kolejność tych liczb i roztawienie nawiasów, wykonania  $n-1$  mnożeń.

**Zadanie 33.** Wiadomo, że Chiny powstały około roku 1700 p.n.e. Przyjmijmy dla uproszczenia, że w roku 1700 p.n.e. o każdym żyjącym wtedy człowieku na ziemi można było jednoznacznie powiedzieć, czy jest Chińczykiem. Osoby, które były wtedy Chińczykami nazwiemy 1-Chińczykami, wszystkie pozostałe żyjące wtedy osoby nazwiemy 0-Chińczykami. Osobę, której ojciec jest  $c_1$ -Chińczykiem a matka  $c_2$ -Chińczykiem, nazwiemy  $\frac{c_1+c_2}{2}$ -Chińczykiem. Udowodnij, że nikt z żyjących obecnie na świecie ludzi nie jest  $\frac{1}{3}$ -Chińczykiem.

*Wskazówka:* udowodnij indukcyjnie, że każda żyjąca po roku 1700 p.n.e. osoba jest  $\frac{k}{2^l}$ -Chińczykiem dla pewnych liczb naturalnych  $k$  i  $l$ .



# 2

## Rachunek zdań

### 2.1. Składnia rachunku zdań

**Definicja 12.** *Formuły rachunku zdań* budujemy ze *zmiennych zdaniowych* i *spójników logicznych* (funktorów zdaniotwórczych): fałszu  $\perp$ , prawdy  $\top$ , negacji  $\neg$ , koniunkcji  $\wedge$ , alternatywy  $\vee$ , implikacji  $\Rightarrow$  i równoważności  $\Leftrightarrow$  w następujący sposób:

1. Symbole  $\perp$  i  $\top$  są formułami rachunku zdań.
2. Każda zmienna zdaniowa jest formułą rachunku zdań.
3. Jeżeli  $\phi, \phi_1$  i  $\phi_2$  są formułami rachunku zdań, to są nimi także:  $(\neg\phi)$ ,  $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \vee \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$  i  $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$ .
4. Wszystkie formuły rachunku zdań można zbudować przy pomocy reguł opisanych w punktach 1–3.

Zmienne zdaniowe będziemy oznaczać literami:  $p, q, r, s$  itd., często z indeksami:  $p_1, p_2$  itd. Formuły zdaniowe będziemy oznaczać literami:  $\phi, \psi, \rho$  itd., często również z indeksami:  $\phi_1, \phi_2$  itd. Dla większej czytelności będziemy w formułach opuszczać nawiasy, zakładając następującą kolejność wiązania (od najsilniejszego do najsłabszego):  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  i przyjmując, że  $\wedge, \vee$  i  $\Leftrightarrow$  łączą w lewo, tj. np.  $p \vee r \vee s$  znaczy  $(p \vee r) \vee s$ , zaś  $\Rightarrow$  — w prawo, tj. np.  $p \Rightarrow r \Rightarrow s$  znaczy  $p \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ . Zatem np.  $p \vee q \vee r \wedge s$  oznacza  $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$ .

### 2.2. Wartości logiczne i znaczenie formuł zdaniowych

**Definicja 13.** Zbiór *wartości logicznych*  $\mathcal{B} = \{\top, \text{F}\}$  zawiera dwa elementy:  $\top$  (prawda) i  $\text{F}$  (fałsz).<sup>1</sup> Niech  $V$  oznacza zbiór zmiennych zdaniowych. *Wartościowanie zmiennych*, to odwzorowanie  $\sigma : V \rightarrow \mathcal{B}$ . Nadaje ono wartości logiczne zmiennym zdaniowym.

---

<sup>1</sup>Oznaczenia pochodzą od angielskich słów *true* i *false*.

$\frac{\perp}{F}$	$\frac{T}{T}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\neg\phi}{T}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \wedge \psi}{F}$
		$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\neg\phi}{F}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \wedge \psi}{F}$
			$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \wedge \psi}{F}$
			$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \wedge \psi}{T}$

$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \vee \psi}{F}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \Rightarrow \psi}{T}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{T}$
$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \vee \psi}{T}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \Rightarrow \psi}{T}$	$\frac{\phi}{F} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{F}$
$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \vee \psi}{T}$	$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \Rightarrow \psi}{F}$	$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{F} \mid \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{F}$
$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \vee \psi}{T}$	$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \Rightarrow \psi}{T}$	$\frac{\phi}{T} \mid \frac{\psi}{T} \mid \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{T}$

**Rysunek 1.** Znaczenie spójników logicznych

Wartość logiczna dowolnej formuły zdaniowej zależy jedynie od wartościowania występujących w niej zmiennych i można ją wyznaczyć korzystając z tabel z rysunku 1. Dlatego mówimy, że wartościowanie zmiennych nadaje wartość logiczną formułom. Formalnie, wartościowanie zmiennych  $\sigma$  wyznacza *wartościowanie formuł*  $\hat{\sigma}$ , które przypisuje wartości logiczne dowolnym formułom w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}(\perp) &= F \\
 \hat{\sigma}(T) &= T \\
 \hat{\sigma}(p) &= \sigma(p) \\
 \hat{\sigma}(\neg\phi) &= \begin{cases} T, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi) = F \\ F, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi) = T \end{cases} \\
 \hat{\sigma}(\phi_1 \wedge \phi_2) &= \begin{cases} T, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = T \text{ i } \hat{\sigma}(\phi_2) = T \\ F, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
 \hat{\sigma}(\phi_1 \vee \phi_2) &= \begin{cases} T, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = T \text{ lub } \hat{\sigma}(\phi_2) = T \\ F, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
 \hat{\sigma}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) &= \begin{cases} F, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = T \text{ i } \hat{\sigma}(\phi_2) = F \\ T, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
 \hat{\sigma}(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2) &= \begin{cases} T, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = \hat{\sigma}(\phi_2) \\ F, & \text{w p.p.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Wartość logiczną  $\hat{\sigma}(\phi) \in \mathcal{B}$  nazywamy *wartością logiczną formuły  $\phi$  przy wartościowaniu  $\sigma$* . Ponieważ dla danego wartościowania zmiennych wartościowanie formuł jest określone jednoznacznie, znak  $\hat{\sigma}$  będziemy opuszczać i zarówno wartościowa-

wanie zmiennych, jak i wartościowanie formuł będziemy oznaczać tym samym symbolem i nazywać po prostu *wartościowaniem*.

**Definicja 14.** Formuła jest:

- *spełniona* przy danym wartościowaniu zmiennych, jeżeli przy tym wartościowaniu ma ona wartość T;
- *spełnialna*, jeżeli istnieje wartościowanie zmiennych, dla którego ta formuła jest spełniona;
- *prawdziwa* (jest *tautologią*), jeśli jest spełniona dla każdego wartościowania zmiennych;
- *sprzeczna*, jeśli nie jest spełniona (ma wartość F) dla żadnego wartościowania zmiennych.

O formule spełnionej przy danym wartościowaniu zmiennych będziemy niekiedy mówić, że jest *prawdziwa* przy tym wartościowaniu. W analogicznej sytuacji, gdy formuła nie jest spełniona, będziemy ją nazywać *fałszywą* przy tym wartościowaniu.

Obecnie zajmiemy się sposobami sprawdzania, czy dana formuła jest tautologią.

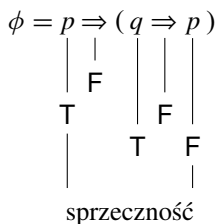
### 2.2.1. Metoda zero-jedynkowa

Przykładami tautologii są formuły  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$  oraz  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  zwane *prawami de Morgana*. Aby się o tym przekonać rysujemy tabelkę (rysunek 2) umieszczając w kolumnach 1 i 2 wartości zmiennych zdaniowych  $p$  i  $q$ . W kolumnie 3 umieszczamy wartości formuły  $p \vee q$  wyliczone z użyciem tabelki dla alternatywy. W kolumnie 4 obliczamy, w oparciu o tabelkę negacji, wartości formuły  $\neg(p \vee q)$ . Kolumny 5 i 6 wyznaczamy również w oparciu o tabelkę negacji. Aby wyznaczyć wartości formuły  $(\neg p) \wedge (\neg q)$  korzystamy z wartości zapisanych w kolumnach 5 i 6 i z tabelki koniunkcji. Ostatnią, ósmą kolumnę wyznaczamy przy użyciu tabelki dla równoważności z wartości logicznych zapisanych w kolumnach 4 i 7. Po skonstruowaniu tabelki zauważamy, że dla każdego z czterech możliwych wartościowań zmiennych  $p$  i  $q$  formuła  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$  ma wartość logiczną T, jest więc tautologią.

### 2.2.2. Skrócona metoda zero-jedynkowa

Sprawdzenie czy formuła jest tautologią można znacznie przyspieszyć, jeśli zamiast bezmyślnie sprawdzać wartość formuły dla wszystkich możliwych wartościowań zmiennych, będziemy świadomie poszukiwać wartościowania, dla którego formuła nie jest spełniona. Ustalenie takiego wartościowania przekona nas, że formuła nie jest tautologią, dojście do sprzeczności zaś — że nią jest. Rozważmy dla ustalenia uwagi formułę  $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ . Formuła ta nie jest spełniona,





**Rysunek 4.** Ilustracja dowodu nie wprost, iż formuła  $\phi$  jest tautologią

3. (prawo kompozycji)  $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$
4. (prawo kompozycji)  $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow q \Rightarrow r$
5. (prawo symplifikacji)  $p \wedge q \Rightarrow p$
6. (prawo symplifikacji)  $q \Rightarrow p \vee q$
7. (prawo symplifikacji)  $p \Rightarrow q \Rightarrow p$
8. (prawo Dunsza Szkota)  $\neg p \Rightarrow p \Rightarrow q$
9. (prawo dylematu konstrukcyjnego)  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow r$
10. (prawo eksportacji)  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow r$
11. (prawo importacji)  $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r$
12. (prawo redukcji do absurdu)  $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
13. (prawo sprzeczności)  $\neg(p \wedge \neg p)$
14. (prawo wyłączonego środka)  $p \vee \neg p$
15. (prawo sylogizmu hipotetycznego)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$
16. (prawo Pierce'a)  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
17. (Prawo Claviusa)  $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
18. (prawo tożsamości)  $p \Leftrightarrow p$

Powyższe tautologie były od dawna badane przez logików, gdyż opisują typowe schematy przeprowadzania rozumowań. Ich zwyczajowe nazwy podano w nawiasach.

**Zadanie 35.** Sprawdź, które z podanych formuł są (a) tautologiami, (b) formułami spełnialnymi, (c) formułami sprzecznymi.

1.  $p \vee q \vee r \Rightarrow \neg p \Rightarrow (q \vee r) \wedge \neg p$
2.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow p)$
3.  $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

4.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \wedge s \Rightarrow q \vee r$
5.  $p \vee q \vee r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q)$
6.  $((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \vee r$
7.  $(p \vee q \Leftrightarrow r \vee s) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s))$
8.  $(p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s) \Rightarrow (p \vee q \Leftrightarrow r \vee s)$
9.  $(p \wedge q \Leftrightarrow r \wedge s) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow s))$
10.  $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
11.  $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
12.  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \Rightarrow q$
13.  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q \vee r$
14.  $p \Rightarrow \neg p \vee q$
15.  $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Rightarrow p$
16.  $\neg(p \wedge (\neg p \wedge q))$
17.  $p \Rightarrow \neg q \wedge q \Rightarrow r$
18.  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q$
19.  $(p \vee q \Rightarrow p \vee \neg q) \Rightarrow \neg p \vee q$
20.  $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q$
21.  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
22.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \vee r \Rightarrow q \vee s$
23.  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
24.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$
25.  $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow p \wedge q \wedge r$
26.  $\neg(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p \wedge \neg q$
27.  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p$
28.  $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow s) \Rightarrow p \Rightarrow q \vee r \vee s$
29.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \wedge s \Rightarrow q$
30.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \wedge \neg s \Rightarrow q$
31.  $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
32.  $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow p \Rightarrow r$
33.  $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \wedge ((q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p))$
34.  $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u) \Rightarrow p \wedge r \wedge t \Rightarrow q \wedge s \wedge u$



$$35. (p \Leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

$$36. (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

**Zadanie 36.** Niech symbole  $\phi$  i  $\psi$  oznaczają formuły zdaniowe. Udowodnij poniższe stwierdzenia lub podaj przykłady świadczące o ich fałszywości:

1. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią i  $\phi$  jest tautologią, to  $\psi$  jest tautologią.
2. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna i  $\phi$  jest spełnialna, to  $\psi$  jest spełnialna.
3. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią i  $\phi$  jest spełnialna, to  $\psi$  jest spełnialna.
4. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna i  $\phi$  jest tautologią, to  $\psi$  jest spełnialna.

**Zadanie 37.** Które z poniższych zdań są prawdziwe dla dowolnych formuł zdaniowych  $\phi$  i  $\psi$ ?

1. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  oraz  $\neg\phi \Rightarrow \psi$  są tautologiami, to  $\psi$  jest tautologią.
2. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  oraz  $\neg\phi \Rightarrow \psi$  są spełnialne, to  $\psi$  jest spełnialna.
3. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią oraz  $\neg\phi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna, to  $\psi$  jest spełnialna.
4. Jeśli  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią oraz  $\neg\phi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna, to  $\phi$  jest tautologią.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

### 2.2.3. Równoważność formuł

**Definicja 16.** Mówimy, że formuły  $\phi$  i  $\psi$  są *równoważne*, jeśli dla każdego wartościowania przyjmują tę samą wartość logiczną (tj. gdy formuła  $\phi \Leftrightarrow \psi$  jest tautologią).

Będziemy używać notacji  $\phi \equiv \psi$  do oznaczenia, że formuły  $\phi$  i  $\psi$  są równoważne.<sup>2</sup>

*Przykład 17.* Formuły  $\neg(p \vee q)$  i  $\neg p \wedge \neg q$  są równoważne.

**Zadanie 38.** Udowodnij, że a) dowolne dwie tautologie, b) dowolne dwie formuły sprzeczne są równoważne. Czy dowolne dwie formuły spełnialne są równoważne?

**Zadanie 39.** Udowodnij, że podane formuły są równoważne.

1. (**prawo transpozycji prostej**)  $p \Rightarrow q$  oraz  $\neg q \Rightarrow \neg p$

<sup>2</sup>Warto tu zauważyć, że  $\phi \equiv \psi$  jest zdaniem *metajęzyka* (czyli języka, w którym mówimy o formułach) dotyczącym *dwoch* formuł, natomiast  $\phi \Leftrightarrow \psi$  jest *jedną* formułą rachunku zdań.

2. (**prawo transpozycji złożonej**)  $p \wedge q \Rightarrow r$  oraz  $p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$
3. (**prawo pochłaniania**)  $p$  oraz  $p \vee (p \wedge q)$
4. (**prawo pochłaniania**)  $p$  oraz  $p \wedge (p \vee q)$
5. (**prawo podwójnego przeczenia**)  $\neg\neg p$  oraz  $p$
6. (**prawo negowania fałszu**)  $\neg\perp$  oraz  $\top$
7. (**prawo negowania prawdy**)  $\neg\top$  oraz  $\perp$
8. (**prawo de Morgana**)  $\neg(p \wedge q)$  oraz  $\neg p \vee \neg q$
9. (**prawo de Morgana**)  $\neg(p \vee q)$  oraz  $\neg p \wedge \neg q$
10. (**prawo negowania implikacji**)  $\neg(p \Rightarrow q)$  oraz  $p \wedge \neg q$
11. (**prawo negowania równoważności**)  $\neg(p \Leftrightarrow q)$  oraz  $\neg p \Leftrightarrow q$
12. (**prawo negowania równoważności**)  $\neg(p \Leftrightarrow q)$  oraz  $p \Leftrightarrow \neg q$
13.  $p \Rightarrow q$  oraz  $\neg p \vee q$
14.  $p \Leftrightarrow q$  oraz  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
15.  $p \Leftrightarrow q$  oraz  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Równoważność przedstawionych powyżej formuł jest od dawna znana logikom, wykorzystuje się ją bowiem przeprowadzając rozumowania. W nawiasach wymieniono zwyczajowe nazwy podanych praw.

**Zadanie 40.** Sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

1.  $p \vee q \Rightarrow r$  oraz  $p \Rightarrow q \Rightarrow r$
2.  $p \wedge q \Rightarrow r$  oraz  $p \Rightarrow q \Rightarrow r$
3.  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$  oraz  $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

**Zadanie 41.** Sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

1.  $p \vee q$  oraz  $q \vee p$
2.  $p \wedge q$  oraz  $q \wedge p$
3.  $p \Rightarrow q$  oraz  $q \Rightarrow p$
4.  $p \Leftrightarrow q$  oraz  $q \Leftrightarrow p$

Spójnik logiczny  $\oplus$  jest *przemienny*, jeżeli formuły  $p \oplus q$  i  $q \oplus p$  są równoważne. W powyższym zadaniu sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są przemienne.

**Zadanie 42.** Sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

1.  $p \vee (q \vee r)$  oraz  $(p \vee q) \vee r$
2.  $p \wedge (q \wedge r)$  oraz  $(p \wedge q) \wedge r$
3.  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  oraz  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
4.  $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

Spójnik logiczny  $\oplus$  jest *łączny*, jeżeli formuły  $p \oplus (q \oplus r)$  i  $(p \oplus q) \oplus r$  są równoważne. W powyższym zadaniu sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są łączne.

**Zadanie 43.** Sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

1.  $p \vee (q \vee r)$  oraz  $q \vee (p \vee r)$
2.  $p \wedge (q \wedge r)$  oraz  $q \wedge (p \wedge r)$
3.  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  oraz  $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
4.  $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

**Zadanie 44.** Sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

1.  $p \wedge (q \vee r)$  oraz  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2.  $p \wedge (q \wedge r)$  oraz  $(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
3.  $p \wedge (q \Rightarrow r)$  oraz  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$
4.  $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$
5.  $p \vee (q \vee r)$  oraz  $(p \vee q) \vee (p \vee r)$
6.  $p \vee (q \wedge r)$  oraz  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7.  $p \vee (q \Rightarrow r)$  oraz  $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$
8.  $p \vee (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$
9.  $p \Rightarrow (q \vee r)$  oraz  $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
10.  $p \Rightarrow (q \wedge r)$  oraz  $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
11.  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  oraz  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
12.  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
13.  $p \Leftrightarrow (q \vee r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$
14.  $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)$
15.  $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
16.  $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$  oraz  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Spójnik logiczny  $\oplus$  jest *lewostronnie rozdzielny* względem spójnika  $\otimes$ , jeżeli formuły  $p \oplus (q \otimes r)$  i  $(p \oplus q) \otimes (p \oplus r)$  są równoważne. W powyższym zadaniu sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są rozdzielne względem których.

**Zadanie 45.** Spójnik logiczny  $\oplus$  jest *prawostronnie rozdzielny* względem spójnika  $\otimes$ , jeżeli formuły  $(p \otimes q) \oplus r$  i  $(p \oplus r) \otimes (q \oplus r)$  są równoważne. Które spośród spójników logicznych  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$  są prawostronnie rozdzielne względem których?

#### 2.2.4. Lemat o podstawianiu

**Definicja 18.** *Podstawieniem* formuły  $\psi$  w miejsce zmiennej zdaniowej  $p$  nazywamy przekształcenie, które formule  $\phi$  przyporządkowuje formułę powstałą przez wstawienie formuły  $\psi$  w miejsce każdego wystąpienia zmiennej  $p$  w formule  $\phi$ . Formalnie:

$$\begin{aligned} p[p/\psi] &= \psi \\ q[p/\psi] &= q, \quad \text{dla } q \neq p \\ (\neg\phi)[p/\psi] &= \neg(\phi[p/\psi]) \\ (\phi_1 \vee \phi_2)[p/\psi] &= (\phi_1[p/\psi]) \vee (\phi_2[p/\psi]) \\ (\phi_1 \wedge \phi_2)[p/\psi] &= (\phi_1[p/\psi]) \wedge (\phi_2[p/\psi]) \\ (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)[p/\psi] &= (\phi_1[p/\psi]) \Rightarrow (\phi_2[p/\psi]) \\ (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)[p/\psi] &= (\phi_1[p/\psi]) \Leftrightarrow (\phi_2[p/\psi]) \end{aligned}$$

*Przykład 19.*  $(p \Rightarrow p \vee q)[p/q \Rightarrow p] = (q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \vee q$ .

W podobny sposób definiujemy jednoczesne podstawienie formuł w miejsce kilku zmiennych zdaniowych  $[p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n]$ . Jest to odwzorowanie, które formule  $\phi$  przyporządkowuje formułę powstałą przez wstawienie formuły  $\psi_i$  w miejsce każdego wystąpienia zmiennej  $p_i$  w formule  $\phi$ , dla każdego  $i = 1, \dots, n$ .

**Lemat 20 (o podstawianiu).** Niech  $\phi$  i  $\psi$  będą formułami, niech  $p$  będzie zmienną zdaniową i niech  $\sigma$  będzie wartościowaniem. Niech  $\sigma'$  będzie wartościowaniem zdefiniowanym wzorem

$$\sigma'(q) = \begin{cases} \sigma(q), & \text{gdy } p \neq q, \\ \hat{\sigma}(\psi), & \text{gdy } p = q. \end{cases}$$

Wtedy  $\hat{\sigma}(\phi[p/\psi]) = \hat{\sigma}'(\phi)$ .

**Wniosek.** Jeżeli formuła  $\phi$  jest tautologią, to dla dowolnej zmiennej  $p$  i dowolnej formuły  $\psi$  formuła  $\phi[p/\psi]$  jest tautologią.

Wniosek ten pozwala dowodzić, że skomplikowane formuły są tautologiami. Dla przykładu formuła  $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \vee q$  z przykładu 19 jest tautologią, gdyż jest wynikiem podstawienia formuły  $q \Rightarrow p$  w miejsce zmiennej  $p$  w tautologii  $p \Rightarrow p \vee q$ .

**Wniosek.** Jeżeli formuły  $\psi$  i  $\psi'$  są równoważne, to dla dowolnej zmiennej  $p$  i dowolnej formuły  $\phi$  formuły  $\phi[p/\psi]$  i  $\phi[p/\psi']$  są równoważne.

Powyższy wniosek ma bardzo duże znaczenie praktyczne, pozwala bowiem w dowolnie skomplikowanych formułach zamieniać dowolne podformuły na formuły im równoważne, co w szczególności umożliwia upraszczanie formuł. Dla przykładu formuły  $\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$  i  $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$  są równoważne, co wynika z równoważności formuł  $\neg(p \Rightarrow q)$  i  $(p \wedge \neg q)$  po podstawieniu ich w miejsce zmiennej  $r$  w formule  $r \vee (p \wedge q)$ .

W zadaniach 46–49 zbadaj, czy podane formuły są tautologiami.

**Zadanie 46.**  $(s \wedge u \wedge t \wedge (p \vee q \vee r)) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge \neg z) \Leftrightarrow ((p \vee q \vee r) \Rightarrow (s \wedge u \wedge t) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge \neg z))$

**Zadanie 47.**  $((p \Rightarrow q \wedge (r \vee s \Leftrightarrow \neg p)) \wedge \neg((p \Rightarrow q \wedge (r \vee s \Leftrightarrow \neg p))))$

**Zadanie 48.**  $(p \wedge \neg q) \wedge ((r \Rightarrow s) \vee (p \Rightarrow q \Rightarrow r \vee \neg s)) \Rightarrow \neg(q \vee \neg p)$

**Zadanie 49.**  $((p \Rightarrow q \vee r) \vee s \vee t) \wedge \neg(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow s \vee t$

**Zadanie 50.** Wskaż podstawienie  $[p/\phi_1, q/\phi_2, r/\phi_3]$ , dla którego formuła

$$(p \vee (q \wedge r)) [p/\phi_1, q/\phi_2, r/\phi_3]$$

jest a) tautologią, b) formułą spełnialną, c) formułą sprzeczną.

## 2.3. Formalizacja rozumowań w języku rachunku zdań

**Zadanie 51.** Sformalizuj zadanie 2, tj. pokaż, jak znaleźć odpowiedzi na postawione w nim pytania korzystając z rachunku zdań.

**Zadanie 52.** Podczas pewnej kampanii wyborczej Olek, Józek i Kazik wygłosili następujące oświadczenia:

Olek: *Józek zawsze kłamie.*

Józek: *Kazik zawsze kłamie.*

Kazik: *Olek zawsze kłamie.*

Pokaż, że co najmniej dwóch spośród nich nie miało racji.

**Zadanie 53.** Podczas tej samej kampanii wyborczej Basia, Hania, Kasia i Ola stwierdziły, że:

Basia: *Hania zawsze kłamie.*

Hania: *Kasia czasem mówi prawdę.*

Kasia: *Ola czasem kłamie.*

Ola: *Basia zawsze mówi prawdę.*

Ile pań powiedziało prawdę?

**Zadanie 54.** Zbadaj zasadność poniższych rozumowań:

1. Jeśli stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to wzrosną wydatki rządowe lub pojawi się bezrobocie. Jeśli wydatki rządowe nie wzrosną, to podatki zostaną obniżone. Jeśli podatki zostaną obniżone i stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to bezrobocie się nie pojawi. Zatem wydatki rządowe wzrosną.
2. Jeśli ceny wzrosną, to spadnie popyt. Jeśli popyt spadnie, to spadną ceny. Zatem jeśli ceny wzrosną, to spadną. Zatem ceny spadną!

**Zadanie 55.** Rozważmy następujący fragment kodu

```

while (( $i < n$ )  $\wedge$   $\neg found$ )  $\vee$   $\neg interrupted$  do
  A
  if  $found$ 
    then
      B
      if  $interrupted$ 
        then C
        else D
      else E
  F
G

```

Mamy w nim siedem interesujących nas miejsc (od A do G), przy czym sam kod w tych miejscach nie jest dla nas interesujący i został pominięty. Zakładamy tylko, że zmienne  $i$ ,  $n$ ,  $found$  i  $interrupted$  mogą być zmieniane wyłącznie w miejscu F. Dla każdego z tych miejsc podaj

- warunek na dojście sterowania programu do tego miejsca, oraz
- przykład początkowych wartości zmiennych, dla których sterowanie dochodzi do tego miejsca.

Warunek powinien być napisany w postaci formuły rachunku zdań nad zbiorem zmiennych  $\{(i < n), \text{found}, \text{interrupted}\}$ . Np dla punktu A szukany warunek to  $(i < n) \wedge \neg \text{found} \vee \neg \text{interrupted}$  a wartości początkowe to np.  $i = 5, n = 7, \text{found} = \text{false}, \text{interrupted} = \text{false}$ .

Czy można na tej podstawie wskazać oczywiste błędy w tym fragmencie kodu?

## 2.4. Własności formuł zdaniowych

**Definicja 21.** Napis  $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i$  oznacza  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ , zaś  $\bigvee_{i=1}^n \phi_i$  oznacza  $\phi_1 \vee \dots \vee \phi_n$ .

Przyjmujemy przy tym, że  $\bigwedge_{i=1}^0 \phi_i$  oznacza  $\top$ , zaś  $\bigvee_{i=1}^0 \phi_i$  oznacza  $\perp$ .

**Definicja 22.** Niech  $V$  będzie zbiorem zmiennych zdaniowych.  $V$ -literałem nazywamy formułę postaci  $p$  lub  $\neg p$ , gdzie  $p \in V$ . Jeżeli zbiór zmiennych zdaniowych jest ustalony, to formułę takiej postaci nazywamy po prostu *literałem*. Niekiedy do zbioru literałów zaliczamy też stałe logiczne  $\top$  i  $\perp$ .

**Zadanie 56.** Dane są formuły  $\phi_1, \phi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$ . Wykaż, że dla każdego  $n$  poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\left( \bigwedge_{i=1}^n (\phi_i \Rightarrow \psi_i) \right) \Rightarrow \left( \left( \bigvee_{i=1}^n \phi_i \right) \Rightarrow \left( \bigvee_{i=1}^n \psi_i \right) \right).$$

**Zadanie 57.** Dane są formuły  $\phi_1, \phi_2, \dots, \psi$ . Wykaż, że dla każdego  $n$  poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\left( \bigvee_{i=1}^n (\phi_i \Rightarrow \psi) \right) \Rightarrow \left( \left( \bigwedge_{i=1}^n \phi_i \right) \Rightarrow \psi \right).$$

**Zadanie 58.** Czy istnieje taki nieskończony ciąg formuł  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  rachunku zdań, że wszystkie formuły  $\phi_{i+1} \Rightarrow \phi_i$  są tautologiami rachunku zdań, zaś żadna z formuł  $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$  nie jest tautologią?

**Zadanie 59.** Czy istnieje taki nieskończony ciąg formuł  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  rachunku zdań, że wszystkie formuły  $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$  są tautologiami rachunku zdań, zaś żadna z formuł  $\phi_{i+1} \Rightarrow \phi_i$  nie jest tautologią?

**Zadanie 60.** Udowodnij, że formuła rachunku zdań zbudowana wyłącznie ze zmiennych i spójnika równoważności „ $\Leftrightarrow$ ” (oczywiście do jej zapisania można też używać nawiasów) jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda zmienna występuje w niej parzystą liczbę razy.

**Zadanie 61.** Udowodnij, że jeśli  $p$  jest zmienną zdaniową, a  $\phi$  taką formułą rachunku zdań, że  $p \Rightarrow \phi$  i  $\neg\phi \Rightarrow p$  są tautologiami, to  $\phi$  jest tautologią.

**Zadanie 62.** Niech  $\phi_1, \dots, \phi_n$  będą formułami zdaniowymi, w których nie występują zmienne zdaniowe  $p_1, \dots, p_{n+1}$ . Udowodnij, że formuła

$$\bigwedge_{i=1}^n \phi_i$$

jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest formuła

$$\neg p_1 \vee \bigvee_{i=1}^n (\phi_i \wedge p_i \wedge \neg p_{i+1}) \vee p_{n+1}.$$

**Zadanie 63.** Udowodnij, że jeżeli formuła  $\phi$  jest tautologią, to dla dowolnych formuł  $\psi_1, \dots, \psi_n$  formuła

$$\psi_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \psi_n \Rightarrow \phi$$

jest tautologią.

**Zadanie 64.** Udowodnij, że jeżeli  $\phi$  jest formułą sprzeczną, to dla dowolnych formuł  $\psi_1, \dots, \psi_n$  formuła

$$\phi \Rightarrow \psi_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \psi_n$$

jest tautologią.

**Zadanie 65.** Dla jakich  $n \geq 1$  formuła

$$(\dots((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p,$$

w której zmienna  $p$  występuje  $n$  razy jest tautologią?

**Zadanie 66.** Niech  $p^0$  oznacza  $\neg p$  oraz niech  $p^1$  oznacza  $p$ . Dla jakich ciągów  $(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n$  formuła

$$(\dots((p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p^{i_n}$$

jest tautologią?

**Zadanie 67.** Niech  $p_1, \dots, p_n$  będą wszystkimi zmiennymi zdaniowymi występującymi w formule  $\phi$ . Udowodnij, że formuła  $\phi$  jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podstawienie  $[p_1/\phi_1, \dots, p_n/\phi_n]$  takie, że formuła  $\phi[p_1/\phi_1, \dots, p_n/\phi_n]$  jest tautologią. Udowodnij, że formuła  $\phi$  nie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podstawienie  $[p_1/\phi_1, \dots, p_n/\phi_n]$  takie, że formuła  $\phi[p_1/\phi_1, \dots, p_n/\phi_n]$  jest sprzeczna.



**Zadanie 68.** Dane są formuły  $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ . Czy formuły

$$(\dots((\psi \Rightarrow \phi_1) \Rightarrow \phi_2) \Rightarrow \dots) \Rightarrow \phi_n$$

oraz

$$\psi \Rightarrow (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n)$$

są równoważne?

**Zadanie 69.** Dane są formuły  $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ . Czy formuły

$$\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (\phi_n \Rightarrow \psi) \dots))$$

oraz

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n) \Rightarrow \psi$$

są równoważne?

**Zadanie 70.** Pokaż przez indukcję, że każda formuła  $\phi$  zbudowana ze zmiennych  $p$  i  $q$  oraz spójnika  $\Rightarrow$  jest równoważna dokładnie jednej z formuł z poniższego zbioru:

$$\{\top, p, q, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow p), (p \vee q)\}.$$

W poniższych zadaniach przyjmujemy następujące oznaczenia. Niech  $\phi$  będzie formułą rachunku zdań zbudowaną wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee$  oraz  $\wedge$  (oczywiście można używać nawiasów). Niech  $\phi^d$  oznacza formułę powstałą z  $\phi$  przez zastąpienie każdego wystąpienia spójnika  $\vee$  spójnikiem  $\wedge$ , zaś każdego wystąpienia spójnika  $\wedge$  spójnikiem  $\vee$ . Niech  $\phi^n$  oznacza formułę powstałą przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej zdaniowej negacją tej zmiennej.

**Zadanie 71.** Udowodnij, że jeżeli formuły  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są równoważne, to równoważne są także formuły  $\phi_1^d$  i  $\phi_2^d$ .

**Zadanie 72.** Udowodnij, że jeżeli formuły  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są równoważne, to równoważne są także formuły  $\phi_1^n$  i  $\phi_2^n$ .

**Zadanie 73.** Udowodnij, że dla dowolnej formuły  $\phi$  formuły  $\neg\phi^d$  oraz  $\phi^n$  są równoważne.

**Zadanie 74.** Wykaż, że dla każdej formuły spełnialnej  $\phi$  ze zmiennymi ze zbioru  $V = \{p, q, r\}$  istnieje formuła  $\psi$  postaci  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$  taka, że każde  $\phi_i$  jest  $V$ -lite-  
ralem,  $\phi_i$  są parami różne oraz  $\psi \Rightarrow \phi$  jest tautologią.

**Zadanie 75 (lemat interpolacyjny Craiga dla rachunku zdań).** Niech  $V(\phi)$  oznacza zbiór zmiennych zdaniowych występujących w formule  $\phi$ . Przypuśćmy, że  $\phi$  i  $\psi$  są takimi formułami rachunku zdań, że  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią. Udowodnij, że istnieje taka formuła  $\rho$ , że  $\phi \Rightarrow \rho$  oraz  $\rho \Rightarrow \psi$  są tautologiami i  $V(\rho) \subseteq V(\phi) \cap V(\psi)$ .

**Zadanie 76 (o zamkniętym układzie twierdzeń).** Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Przypuśćmy, że dla pewnego wartościowania są spełnione formuły:

$$\begin{aligned} p_1 \vee \dots \vee p_n, \\ p_i \Rightarrow q_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \\ \neg(q_i \wedge q_j), \quad \text{dla } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Udowodnij, że wartościowanie to spełnia także formuły

$$q_i \Rightarrow p_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Przez *wartościowanie formuły  $\phi$*  będziemy w poniższych zadaniach rozumieć odwzorowanie przyporządkowujące zmiennym występującym w tej formule wartości logiczne T i F. Formuła zawierająca  $n$  różnych zmiennych ma więc  $2^n$  wartościowań.

**Zadanie 77.** Wykaż, że formuła  $(\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots \Rightarrow p_{n-1}) \Rightarrow p_n$  jest fałszywa dla dokładnie

$$\frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

wartościowań tej formuły. Dla ilu wartościowań jest fałszywa formuła

$$p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (p_{n-2} \Rightarrow \dots \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1) \dots) ?$$

**Zadanie 78.** Niech  $\phi$  oraz  $\psi$  będą formułami rachunku zdań zbudowanymi wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee$  oraz  $\wedge$  (oczywiście można używać nawiasów). Pokaż, że formuła  $\phi \Leftrightarrow \psi$  jest spełniona przez co najmniej dwa wartościowania. Podaj przykład formuł  $\phi$  i  $\psi$  takich, że formuła  $\phi \Leftrightarrow \psi$  jest spełniona przez dokładnie dwa wartościowania.

**Zadanie 79.** Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą naturalną i niech  $V_n = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. Przyjmijmy, że dla formuły  $\phi$  nie zawierającej zmiennych spoza zbioru  $V_n$  napis  $nv_n(\phi)$  oznacza liczbę wartościowań  $\sigma : V_n \rightarrow \{T, F\}$  spełniających tę formułę. Pokaż, że dla dowolnych formuł zdaniowych  $\phi$  oraz  $\psi$ , które nie zawierają zmiennych spoza zbioru  $V_n$ , równość

$$nv_n(\phi \vee \psi) = nv_n(\phi) + nv_n(\psi)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi \wedge \psi$  jest formułą sprzeczną.

**Zadanie 80.** Niech  $V$  będzie niepustym i skończonym zbiorem zmiennych zdaniowych. Znajdź zbiór wszystkich wartościowań spełniających formułę

$$\neg \bigwedge_{p,q \in V} (p \Rightarrow q).$$

## 2.5. Postaci normalne formuł zdaniowych

### 2.5.1. Usuwanie symbolu negacji

Formuły w których symbol negacji występuje przed formułą złożoną są często trudne do zrozumienia (wyrażenie „nieprawda, że liczba  $n$  dzieli się przez 2 lub przez 3” jest bardziej skomplikowane, niż równoważne mu wyrażenie „liczba  $n$  nie dzieli się przez 2 i nie dzieli się przez 3”). *Prawa negowania formuł zdaniowych* (punkty 5–12 z zadania 39) pozwalają znaleźć dla danej formuły formułę jej równoważną, w której negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi. Istotnie, dla dowolnej formuły  $\phi$  na mocy lematu o podstawianiu i prawa podwójnego przeczenia formuły  $\neg\neg\phi$  oraz  $\phi$  są równoważne. Na mocy lematu o podstawianiu i prawa de Morgana dla dowolnych formuł  $\phi_1$  i  $\phi_2$  formuły  $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$  oraz  $\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$  są równoważne. Podobnie postępujemy dla formuł dowolnej innej postaci. Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie  $\mathcal{T}$  przyporządkowujące dowolnym formułom formuły, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(p) &= p, & \text{dla } p \in V \\ \mathcal{T}(\perp) &= \perp \\ \mathcal{T}(\top) &= \top \\ \mathcal{T}(\phi_1 \vee \phi_2) &= \mathcal{T}(\phi_1) \vee \mathcal{T}(\phi_2) \\ \mathcal{T}(\phi_1 \wedge \phi_2) &= \mathcal{T}(\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\phi_2) \\ \mathcal{T}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) &= \mathcal{T}(\phi_1) \Rightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\ \mathcal{T}(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2) &= \mathcal{T}(\phi_1) \Leftrightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\ \mathcal{T}(\neg p) &= \neg p, & \text{dla } p \in V \\ \mathcal{T}(\neg \perp) &= \top \\ \mathcal{T}(\neg \top) &= \perp \\ \mathcal{T}(\neg(\phi_1 \vee \phi_2)) &= \mathcal{T}(\neg\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\ \mathcal{T}(\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)) &= \mathcal{T}(\neg\phi_1) \vee \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\ \mathcal{T}(\neg(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)) &= \mathcal{T}(\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\ \mathcal{T}(\neg(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)) &= \mathcal{T}(\neg\phi_1) \Leftrightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\ \mathcal{T}(\neg\neg\phi) &= \mathcal{T}(\phi) \end{aligned}$$

**Fakt 23.** Dla dowolnej formuły  $\phi$ , formuły  $\phi$  oraz  $\mathcal{T}(\phi)$  są równoważne i w formule  $\mathcal{T}(\phi)$  negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

**Zadanie 81.** Zaneguj formuły z zadania 34 i — korzystając z praw negowania formuł logicznych — znajdź formuły im równoważne, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

**Zadanie 82.** Zaneguj formuły z zadania 35 i — korzystając z praw negowania formuł logicznych — znajdź formuły im równoważne, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

Formuły, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi możemy określić jako formuły zbudowane z literałów przy pomocy spójników logicznych alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności. Zauważmy, że na mocy lematu o podstawianiu i punktów 13–15 zadania 39 każda formuła jest równoważna pewnej formule nie zawierającej spójników implikacji i równoważności. Możemy więc rozpatrywać formuły zbudowane z literałów jedynie przy pomocy spójników alternatywy i koniunkcji. Jeszcze węższe klasy formuł rozważamy w następnych paragrafach.

### 2.5.2. Dysjunkcyjna postać normalna

**Definicja 24.** Formuła ma *dysjunkcyjną postać normalną* (DNF, ang. *Disjunctive Normal Form*), jeśli ma postać

$$\bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right),$$

gdzie  $l_{ij}$  są literałami, dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $j = 1, \dots, m_i$ . Mówiąc skrótowo, dysjunkcyjna postać normalna, to alternatywa koniunkcji literałów.

**Zadanie 83.** Udowodnij, że dla każdej formuły zdaniowej  $\phi$  istnieje formuła  $\psi$  równoważna z  $\phi$  i mająca dysjunkcyjną postać normalną.

**Zadanie 84.** Znajdź formuły zdaniowe  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  mające dysjunkcyjną postać normalną, zawierające zmienne  $p, q$  i  $r$  i spełnione dla podanych niżej wartościowań:

$p$	$q$	$r$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F

**Zadanie 85.** Znajdź formuły mające dysjunkcyjną postać normalną równoważne formułom z zadania 44.

**Definicja 25.** Formuła ma postać  $k$ -DNF, gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać

$$\bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^k l_{ij} \right),$$

gdzie  $l_{ij}$  są literałami, dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $j = 1, \dots, k$ , tj. gdy jest alternatywą koniunkcji zawierających po  $k$  literałów.

**Zadanie 86.** Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci 1-DNF.

**Zadanie 87.** Dla każdego  $k \geq 1$  wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $k$ -DNF.

**Definicja 26.** Formuła ma postać  $\text{DNF}_j$ , gdzie  $j$  jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać DNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej  $j$  razy.

**Zadanie 88.** Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $\text{DNF}_1$ .

**Zadanie 89.** Dla każdego  $k \geq 1$  wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $\text{DNF}_k$ .

### 2.5.3. Koniunkcyjna postać normalna

**Definicja 27.** *Klauzulą* nazywamy formułę postaci

$$\bigvee_{j=1}^m l_j,$$

gdzie  $l_j$  są literałami, dla  $j = 1, \dots, m$ . Innymi słowy klauzula to alternatywa literałów.

**Definicja 28.** Formuła ma *koniunkcyjną postać normalną* (CNF, ang. *Conjunctive Normal Form*), jeśli ma postać

$$\bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right),$$

gdzie  $l_{ij}$  są literałami, dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $j = 1, \dots, m_i$ , tj. gdy jest koniunkcją klauzul.

**Zadanie 90.** Udowodnij, że dla każdej formuły zdaniowej  $\phi$  istnieje formuła  $\psi$  równoważna z  $\phi$  i mająca koniunkcyjną postać normalną.

**Zadanie 91.** Znajdź formuły mające koniunkcyjną postać normalną równoważne formułom z zadania 84.

**Zadanie 92.** Znajdź formuły mające koniunkcyjną postać normalną równoważne formułom z zadania 35.

**Definicja 29.** Formuła ma postać  $k$ -CNF, gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać

$$\bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^k l_{ij} \right),$$

gdzie  $l_{ij}$  są literałami, dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $j = 1, \dots, k$ , tj. gdy jest koniunkcją klauzul zawierających po  $k$  literałów.

**Zadanie 93.** Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci 1-CNF.

**Zadanie 94.** Dla każdego  $k \geq 1$  wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $k$ -CNF.

**Definicja 30.** Formuła ma postać  $\text{CNF}_j$ , gdzie  $j$  jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać CNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej  $j$  razy. Formuła ma postać  $k\text{-CNF}_j$ , gdzie  $k$  i  $j$  są liczbami naturalnymi, jeżeli ma postać  $k$ -CNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej  $j$  razy.

**Zadanie 95.** Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $\text{CNF}_1$ .

**Zadanie 96.** Dla każdego  $k \geq 1$  wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci  $\text{CNF}_k$ .

**Definicja 31.** Literał  $l$  jest *pozytywny*, jeżeli  $l = p$  dla pewnej zmiennej  $p \in V$ . Literał  $l$  jest *negatywny*, jeżeli  $l = \neg p$  dla pewnej zmiennej  $p \in V$ .

**Definicja 32.** Operację negowania literału definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{p}} &= \neg p, \\ \overline{\neg p} &= p,\end{aligned}$$

dla dowolnego  $p \in V$ .

**Zadanie 97.** Niech  $C = \bigvee_{j=1}^m l_j$  będzie dowolną klauzulą i niech

$$\begin{aligned}P &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \text{literał } l_j \text{ jest pozytywny}\}, \\ N &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \text{literał } l_j \text{ jest negatywny}\}\end{aligned}$$

oraz

$$C' = \bigwedge_{j \in N} \overline{l_j} \Rightarrow \bigvee_{j \in P} l_j.$$

Udowodnij, że formuły  $C$  oraz  $C'$  są równoważne.

Na mocy powyższego zadania klauzule można zapisywać w postaci

$$\bigwedge_{j=1}^m p_j \Rightarrow \bigvee_{j=1}^n q_j,$$

gdzie  $p_j$  i  $q_j$  są zmiennymi zdaniowymi.

**Definicja 33.** Klauzula  $\bigvee_{j=1}^m l_j$  jest *klauzulą hornowską*, jeżeli co najwyżej jeden spośród literałów  $l_1, \dots, l_m$  jest pozytywny. Formuła ma *postać hornowską*, jeżeli jest koniunkcją klauzul hornowskich.

Klauzule hornowskie można więc zapisać w postaci

$$\bigwedge_{j=1}^m p_j \Rightarrow q \quad \text{lub} \quad \bigwedge_{j=1}^m p_j \Rightarrow \perp,$$

gdzie  $p_j$  oraz  $q$  są zmiennymi zdaniowymi.

**Zadanie 98.** Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą w postaci hornowskiej.

**Zadanie 99.** Które spośród formuł z zadania 34 można przedstawić w postaci hornowskiej? Tam, gdzie to możliwe, podaj tę postać.

**Zadanie 100.** Które spośród formuł z zadania 35 można przedstawić w postaci hornowskiej? Tam, gdzie to możliwe, podaj tę postać.

## 2.6. Funkcje boolowskie i zupełne zbiory spójników

**Definicja 34.** Funkcje  $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ , gdzie  $\mathcal{B} = \{\top, \text{F}\}$  i  $n \geq 0$ , nazywamy  $n$ -argumentowymi *funkcjami boolowskimi* lub *funkcjami logicznymi*.

Do tej pory zbiór spójników logicznych był ustalony ( $\perp$ ,  $\top$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ). Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, by rozważać różne zestawy spójników i wprowadzać nowe spójniki. Z każdym spójnikiem wiążemy jego *znaczenie* — funkcję boolowską określającą prawdziwość formuł zbudowanych przy użyciu tego spójnika. Tabelki funkcji boolowskich określających prawdziwość spójników  $\perp$ ,  $\top$ ,  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\Rightarrow$  i  $\Leftrightarrow$  zostały przedstawione na rysunku 1.

**Definicja 35.** Formuła  $\phi$  zbudowana ze zmiennych  $p_1, \dots, p_n$  opisuje  $n$ -argumentową funkcję boolowską  $f$ , jeżeli dla każdego wartościowania  $\sigma$  zmiennych  $p_1, \dots, p_n$  zachodzi:

$$f(\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n)) = \sigma(\phi).$$

Jeżeli formuła  $\phi$  zbudowana ze zmiennych  $p_1, \dots, p_n$  opisuje funkcję  $f$ , to piszemy

$$f(p_1, \dots, p_n) \equiv \phi.$$

**Definicja 36.** Zbiór spójników logicznych jest *zupełny*, jeżeli dowolną funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne. Zbiór spójników jest *k-zupełny*, jeżeli każdą *co najwyżej k-argumentową* funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne.

Innymi słowy zbiór spójników jest zupełny (*k-zupełny*), jeśli każdą funkcję boolowską (każdą funkcję boolowską co najwyżej  $k$ -argumentową) można przedstawić jako złożenie funkcji boolowskich określających znaczenie spójników z podanego zbioru.

**Zadanie 101.** Ile jest funkcji boolowskich  $n$ -argumentowych?

**Zadanie 102.** Pokaż, że  $\{\vee, \wedge\}$  nie jest zupełny.

**Zadanie 103.** Pokaż, że  $\{\vee, \wedge, \Leftrightarrow, \Rightarrow\}$  nie jest zupełny.

**Zadanie 104.** Pokaż, że  $\{\Leftrightarrow, \perp\}$  nie jest zupełny oraz że jest 1-zupełny.

**Zadanie 105.** Pokaż, że  $\{\wedge, \vee, \neg\}$  jest zupełny.

**Zadanie 106.** Pokaż, że  $\{\wedge, \neg\}$  jest zupełny.



**Zadanie 107.** Pokaż, że  $\{\vee, \neg\}$  jest zupełny.

**Zadanie 108.** Pokaż, że  $\{\Rightarrow, \perp\}$  jest zupełny.

**Zadanie 109.** Pokaż, że  $\{\Rightarrow, \neg\}$  jest zupełny.

**Zadanie 110.** Pokaż, że  $\{\vee, \Leftrightarrow, \perp\}$  jest zupełny.

**Zadanie 111.** Udowodnij, że każdy 2-zupełny zbiór spójników jest zupełny.

**Zadanie 112.** Udowodnij, że zbiór  $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg\}$  jest 2-zupełny.

**Zadanie 113.** Rozważmy unarną funkcję boolowską  $f_1$  opisaną formułą  $\neg p_1$  i binarną funkcję  $f_2$  opisaną formułą  $p_1 \wedge p_2$ . Udowodnij, że jeśli funkcje  $f_1$  i  $f_2$  można opisać za pomocą formuł zawierających jedynie spójniki ze zbioru  $S$  i zmienne, to zbiór  $S$  jest zupełny.

**Zadanie 114.** Czy system spójników  $\{\oplus, \top\}$  jest zupełny, gdzie  $p \oplus q$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \wedge \neg q$  jest prawdą, zaś  $\top$  oznacza prawdę?

**Zadanie 115.** Pokaż, że istnieje taki dwuargumentowy spójnik  $\uparrow$ , że  $\{\uparrow\}$  jest zupełny.

**Zadanie 116.** Ile jest takich dwuargumentowych spójników logicznych  $\oplus$ , że  $\{\oplus\}$  jest zupełny?

**Zadanie 117.** Niech  $s$  będzie takim spójnikiem logicznym, że  $s(\top, \top) = \text{F}$ . Udowodnij, że zbiór  $\{s, \Rightarrow\}$  jest zupełny.

## 2.7. Rezolucja dla rachunku zdań

**Definicja 37.** *Litera* w rachunku zdań to zmienna zdaniowa lub negacja zmiennej zdaniowej. *Klauzulą* nazywamy alternatywę skończenie wielu literałów. Alternatywę zera literałów nazywamy klauzulą pustą i oznaczamy  $\perp$ .

W tym rozdziale przyjmujemy konwencję utożsamiającą klauzulę ze zbiorem jej literałów. W szczególności klauzule  $p \vee q$  i  $q \vee p$ , podobnie jak  $p \vee p$  i  $p$  będziemy uważać za identyczne.

**Definicja 38.** Mówimy, że zbiór formuł  $\mathcal{F}$  jest spełnialny jeśli istnieje takie wartościowanie  $\sigma$ , że  $\hat{\sigma}(\phi) = \top$  dla wszystkich  $\phi \in \mathcal{F}$ ; w przeciwnym przypadku mówimy że  $\mathcal{F}$  jest *sprzeczny*. Formułę  $\phi$  nazywamy *logiczną konsekwencją* zbioru formuł  $\mathcal{F}$  jeśli dla każdego wartościowania  $\sigma$  spełniającego  $\mathcal{F}$  zachodzi  $\hat{\sigma}(\phi) = \top$ .

**Definicja 39.** Jeśli  $C$  i  $D$  są klauzulami a  $p$  jest zmienną zdaniową to klauzulę  $C \vee D$  nazywamy *rezolwentą* klauzul  $C \vee p$  i  $D \vee \neg p$ . Rezolucyjnym dowodem sprzeczności zbioru  $\mathcal{F}$  nazywamy ciąg klauzul  $C_0, \dots, C_n$  spełniający warunki

- dla wszystkich  $i \in \{0, \dots, n\}$  zachodzi  $C_i \in \mathcal{F}$  lub istnieją takie  $j, k < i$ , że  $C_i$  jest rezolwentą  $C_j$  i  $C_k$ .
- $C_n = \perp$ .

W różnych systemach formalnych reguły dowodzenia często zapisywane są w następującej postaci:

$$\frac{\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n}{\beta}$$

Formuły  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  nad poziomą kreską nazywamy *przesłankami*, a formułę  $\beta$  pod kreską nazywamy *konkluzją*. Wtedy dowód formuły  $\phi$  można sobie wyobrazić jako skończone drzewo etykietowane formułami, którego korzeń ma etykietę  $\phi$ , liście są etykietowane aksjomatami (w naszym przypadku elementami zbioru  $\mathcal{F}$ ) oraz dla każdego wierzchołka, który nie jest liściem, jego etykieta jest konkluzją reguły wnioskowania, której przesłankami są etykiety następników tego wierzchołka.

Regułę rezolucji możemy zapisać w takiej postaci jako

$$\frac{C \vee p \quad D \vee \neg p}{C \vee D}$$

a rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru formuł  $\{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$  można narysować tak:

$$\frac{\frac{p \vee q \quad \neg p \vee q}{q} \quad \frac{p \vee \neg q \quad \neg p \vee \neg q}{\neg q}}{\perp}$$

W systemie rezolucji dość łatwo dowodzi się twierdzenie o poprawności (*jeśli istnieje rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru  $\mathcal{F}$ , to zbiór  $\mathcal{F}$  jest sprzeczny*). Natomiast dowód twierdzenia o zupełności (*jeśli zbiór  $\mathcal{F}$  jest sprzeczny, to istnieje rezolucyjny dowód jego sprzeczności*) jest trudniejszy i wybiega poza ramy tego wykładu.

**Zadanie 118.** Udowodnij, że formuła  $\phi$  jest logiczną konsekwencją zbioru formuł  $\mathcal{F}$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $\mathcal{F} \cup \{\neg\phi\}$  jest sprzeczny.

**Zadanie 119.** Udowodnij, że dla dowolnych klauzul  $C$  i  $D$  oraz dowolnej zmiennej zdaniowej  $p$  rezolwenta  $C \vee D$  jest logiczną konsekwencją zbioru  $\{C \vee p, D \vee \neg p\}$ .

**Zadanie 120.** Udowodnij, że jeśli istnieje rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru  $\mathcal{F}$ , to zbiór  $\mathcal{F}$  jest sprzeczny.

**Zadanie 121.** Podaj rezolucyjny dowód sprzeczności dla zbioru klauzul  $\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r \vee s, \neg q \vee r, p, \neg s\}$ .

**Zadanie 122.** Podaj rezolucyjny dowód sprzeczności dla zbioru klauzul

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \vee r, & \neg r \vee \neg s, \\ q \vee s, & q \vee r, \\ \neg p \vee \neg q, & s \vee p \end{array} \right\}.$$

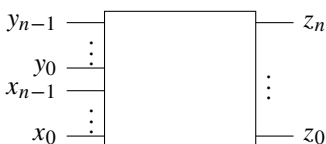
**Zadanie 123.** Sprawdź, czy zbiór klauzul

$$\{p \vee q \vee r, \neg r \vee \neg q \vee \neg p, \neg q \vee r, \neg r \vee p\}$$

jest sprzeczny. Jeśli jest sprzeczny, podaj dla niego rezolucyjny dowód sprzeczności. Jeśli nie jest, podaj wartościowanie spełniające ten zbiór.

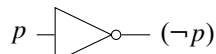
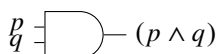
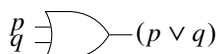
## 2.8. Funkcje boolowskie i układy elektroniczne

Na przykładzie sumatora  $n$ -bitowego pokażemy jak funkcje boolowskie są wykorzystywane w konstrukcji układów elektronicznych. Sumator  $n$ -bitowy jest prostym układem elektronicznym o  $2n$  wejściach i  $n + 1$  wyjściach, który dla podanych na wejściu dwóch ciągów  $n$ -bitowych  $\vec{x} = \langle x_{n-1}, \dots, x_0 \rangle$  oraz  $\vec{y} = \langle y_{n-1}, \dots, y_0 \rangle$  podaje na wyjściu ciąg  $\vec{z} = \langle z_n, \dots, z_0 \rangle$  będący binarną reprezentacją sumy liczb reprezentowanych przez  $\vec{x}$  i  $\vec{y}$ . Np 4-bitowy sumator dla danych na wejściu ciągów  $\langle 1, 1, 0, 1 \rangle$  (liczba 13 w systemie dwójkowym) oraz  $\langle 1, 1, 0, 0 \rangle$  (liczba 12 w systemie dwójkowym) powinien wyliczyć na wyjściu ciąg  $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$  (liczba 25 w systemie dwójkowym).



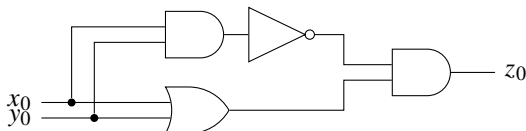
**Rysunek 5.** Sumator  $n$ -bitowy

Takie układy elektroniczne można budować z tzw *bramek logicznych*, czyli jeszcze prostszych układów elektronicznych implementujących najprostsze spójniki logiczne, np. bramek or, and i not



$x_0$	$y_0$	$z_1$	$z_0$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

**Rysunek 6.** Tabelka zero-jedynkowa dla sumatora 1-bitowego



**Rysunek 7.** Fragment sumatora 1-bitowego obliczający bit  $z_0$

Oczywiście sumator 1-bitowy powinien realizować tabelkę zero-jedynkową z rysunku 6. Łatwo zauważyć, że wyjście  $z_0$  sumatora można opisać formułą  $(x_0 \vee y_0) \wedge \neg(x_0 \wedge y_0)$ , odpowiedni fragment układu mamy na rysunku 7.

**Zadanie 124.** Jeden ze studentów zaproponował realizację wyjścia  $z_1$  sumatora 1-bitowego za pomocą formuły  $x_0 \wedge y_0 \wedge \neg((x_0 \wedge \neg y_0) \vee (\neg x_0 \wedge y_0))$ .

1. Sprawdź czy jest to poprawna definicja. Formalnie, sprawdź, czy formuła  $\phi = x_0 \wedge y_0 \wedge \neg((x_0 \wedge \neg y_0) \vee (\neg x_0 \wedge y_0))$  ma następującą tabelkę zero-jedynkową.

$x_0$	$y_0$	$\phi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

2. Przed przystąpieniem do masowej produkcji sumatorów chcielibyśmy ograniczyć niepotrzebne koszty i tu pojawia się pytanie czy da się zbudować moduł obliczający  $z_1$  z mniejszej liczby bramek logicznych. Formalnie, sprawdź czy istnieje formuła o takiej tabelce zero-jedynkowej jak w poprzednim punkcie, w której występuje mniej niż 8 spójników logicznych.

Najprostszy schemat sumatora otrzymuje się z prostszych modułów odpowiedzialnych za obliczanie kolejnych bitów wyniku, tak jak w algorytmie dodawania pisemnego: do obliczenia bitu  $z_k$  trzeba zsumować bity  $x_k$ ,  $y_k$  oraz bit przeniesienia  $p_k$  wynikający z sumowania poprzednich bitów (por. rysunek 8). W naszym przykładzie sumowania liczb 12 i 13 bity przeniesienia to  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 1$  i

$$\begin{array}{rcccc}
 p : & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\
 x : & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 y : & + & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 z : & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Rysunek 8: Dodawanie pisemne liczb 12 i 13 w systemie dwójkowym. W pierwszym wierszu bity przeniesienia.

$p_4 = 1$ . W następnym zadaniu mamy zaprojektować właśnie taki moduł sumujący trzy bity.

**Zadanie 125.** zaprojektuj z bramek logicznych or, and i not układ elektroniczny sumujący trzy bity. Formalnie, używając tylko zmiennych zdaniowych  $x$ ,  $y$  i  $p$  oraz spójników  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$  i nawiasów napisz formuły  $\phi_1, \phi_2$  o następujących tabelkach zero-jedynkowych.

$p$	$x$	$y$	$\phi_1$	$\phi_2$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	F	T	T	F
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

**Zadanie 126.** Udowodnij, że mając do dyspozycji tylko jeden milion bramek and oraz cztery miliony bramek or nie da się zbudować układu elektronicznego obliczającego bit  $z_{17}$  sumatora 1024-bitowego.

*Wskazówka:* najprostsze (i chyba jedyne rozsądne) rozwiązanie tego zadania opiera się na indukcji.

**Zadanie 127.** W konstrukcji układów elektronicznych często korzysta się z bramek nand realizujących negację koniunkcji

$$\frac{p}{q} \vdash \boxed{\text{NAND}} \neg (p \wedge q)$$

Udowodnij, że układ elektroniczny obliczający bit  $z_{17}$  sumatora 1024-bitowego da się zbudować korzystając wyłącznie z bramek nand.

*Wskazówka:* najprostsze rozwiązanie tego zadania opiera się na indukcji — wystarczy pokazać, że dowolną funkcję boolowską można obliczać układem zbudowanym wyłącznie z bramek nand.

## 2.9. System dedukcji naturalnej dla rachunku zdań

System rezolucji pozwalał na dowodzenie sprzeczności dla zbiorów klauzul. Równoważnie można powiedzieć, że służy on do dowodzenia, że dana formuła w dysjunkcyjnej postaci normalnej jest tautologią. Poniżej prezentujemy system, którego można użyć dla wszystkich formuł (a nie tylko tych w określonej postaci normalnej).

System dedukcji naturalnej jest formalnym systemem dowodzenia, którego intencją jest zachowanie jak największej zgodności struktury dowodów z naturalnym sposobem rozumowania w matematyce. Reguły dowodzenia podzielone są na dwie grupy: reguły wprowadzania spójników logicznych, mówiące jak dowodzi się zdań z użyciem danego spójnika, oraz reguły eliminacji spójników logicznych mówiące jakie wnioski można wyciągnąć ze zdań używających danego spójnika. Poniżej, przy każdej regule na wysokości kreski wpisujemy nazwę spójnika oraz literę i dla reguł wprowadzania (od angielskiego słowa *introduction*) lub literę e dla reguł eliminacji (od angielskiego słowa *elimination*).

### Reguły dowodzenia systemu dedukcji naturalnej

Reguły wprowadzania:

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge i) \quad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee i_1) \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee i_2) \quad \frac{}{\top} (\top i)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow i) \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg \alpha} (\neg i)$$

Pierwsze trzy reguły to reguły wprowadzania koniunkcji i alternatywy. Intuicyjnie są one oczywiste: aby udowodnić prawdziwość koniunkcji  $\alpha \wedge \beta$  należy udowodnić prawdziwość obu formuł  $\alpha$  oraz  $\beta$ , natomiast do udowodnienia prawdziwości alternatywy  $\alpha \vee \beta$  wystarczy udowodnienie prawdziwości jednej z tych formuł. Reguła wprowadzania prawdy jest trywialna: formuła  $\top$  jest prawdziwa i jej dowód nie wymaga żadnych przesłanek. Nie ma reguły wprowadzania fałszu.

Więcej wyjaśnień wymagają reguły wprowadzania implikacji i negacji. W tych regułach przesłanki zamknięte w prostokątach (zwyczajowo zwanych oknami) nie są formułami tylko dowodami, a pierwsza formuła w oknie (czyli  $\alpha$ ) jest *założeniem*. Reguła wprowadzania implikacji mówi, że aby udowodnić implikację  $\alpha \Rightarrow \beta$  należy założyć prawdziwość  $\alpha$  i korzystając z tego założenia udowodnić prawdziwość  $\beta$ . Podobnie, aby udowodnić prawdziwość  $\neg \alpha$  należy założyć prawdziwość  $\alpha$  i korzystając z tego założenia dojść do sprzeczności. Bardzo ważna przy tym jest zasada, że założeń można używać tylko wewnątrz odpowiednich okien (założenia

są lokalne, podobnie jak zmienne w programach; podobnie jak zmiennych lokalnych, nie wolno ich używać poza zasięgiem ich deklaracji). W dowolnym miejscu dowodu wolno przyjąć nowe założenie i utworzyć nowe okno; w dowolnym miejscu wewnątrz tego okna można użyć tego założenia jak aksjomatu, ale każde założenie musi być zamknięte przez zamknięcie odpowiedniego okna.

Reguły eliminacji:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge e_1) & \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge e_2) & \frac{\alpha \vee \beta \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}}{\gamma} (\vee e) \\
 \frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta} (\Rightarrow e) & \frac{\alpha \quad \neg \alpha}{\perp} (\neg e) & \frac{}{\perp} (\perp e)
 \end{array}$$

Reguły eliminacji koniunkcji i implikacji są dość intuicyjne. Reguła eliminacji alternatywy odpowiada dowodom przez rozpatrywanie przypadków: jeśli wiemy, że zachodzi któryś z przypadków  $\alpha$  lub  $\beta$  i w każdym z tych przypadków umiemy udowodnić  $\gamma$ , to mamy dowód prawdziwości  $\gamma$ . Regułę eliminacji negacji można także potraktować jako regułę wprowadzania sprzeczności: aby otrzymać sprzeczność należy udowodnić prawdziwość jednocześnie jakiejś formuły i jej negacji. Reguła eliminacji sprzeczności mówi, że z fałszu można wszystko wywnioskować — intuicyjnie odpowiada to faktowi, że dla dowolnej formuły  $\alpha$  formuła  $\perp \Rightarrow \alpha$  jest tautologią. Nie ma reguły eliminacji prawdy.

Ostatnia reguła to reguła eliminacji podwójnej negacji

$$\frac{\neg \neg \alpha}{\alpha} (\neg \neg e)$$

Jest ona konieczna np. do udowodnienia prawa wyłączonego środka mówiącego, że dla dowolnej formuły  $\alpha$  zachodzi  $\alpha \vee \neg \alpha$ . Osoby zainteresowane funkcyjnymi językami programowania dowiedzą się na dalszych latach studiów, że reguła ta jest pomijana w logice intuicjonistycznej.

Można udowodnić, że system dedukcji naturalnej dla rachunku zdań jest poprawny (jeśli formuła ma dowód w systemie naturalnej dedukcji to jest tautologią rachunku zdań) i zupełny (czyli każda tautologia ma dowód w tym systemie).

*Przykład 40.* Pokażemy w systemie naturalnej dedukcji dowód jednej implikacji z praw de Morgana:  $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ .

$$\begin{array}{c}
 \neg(p \vee q) \text{ założenie} \\
 \boxed{
 \begin{array}{c}
 p \text{ założenie} \\
 \frac{p}{p \vee q} (\vee i_1) \quad \neg(p \vee q) \quad (\neg e) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg p \quad (\neg i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 q \text{ założenie} \\
 \frac{q}{p \vee q} (\vee i_2) \quad \neg(p \vee q) \quad (\neg e) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg q \quad (\neg i)
 \end{array}
 } \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q \quad (\wedge i) \\
 \hline
 \neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q \quad (\Rightarrow i)
 \end{array}$$

Powyższy dowód formalny dość łatwo tłumaczy się na dowód w języku naturalnym: Załóżmy, że formuła  $\neg(p \vee q)$  jest prawdziwa. Gdyby  $p$  było prawdą, to oczywiście  $p \vee q$  także byłoby prawdą, co przeczy założeniu  $\neg(p \vee q)$ . Zatem  $\neg p$  jest prawdą. Podobnie gdyby  $q$  było prawdą, to oczywiście  $p \vee q$  także byłoby prawdą, co przeczy założeniu  $\neg(p \vee q)$ . Zatem  $\neg q$  jest prawdą. Czyli  $\neg p \wedge \neg q$  jest prawdą, co kończy dowód implikacji  $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ .

**Przykład 41.** Pokażemy w systemie naturalnej dedukcji dowód prawa wyłączonego środka.

$$\begin{array}{c}
 \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \text{ założenie} \\
 \boxed{
 \begin{array}{c}
 \alpha \text{ założenie} \\
 \frac{\alpha}{\alpha \vee \neg\alpha} (\vee i_1) \quad \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \quad (\neg e) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg\alpha \quad (\neg i)
 \end{array}
 } \\
 \hline
 \neg\alpha \quad (\neg i) \\
 \frac{\neg\alpha}{\alpha \vee \neg\alpha} (\vee i_2) \quad (\neg e) \\
 \hline
 \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \quad (\neg i) \\
 \hline
 \alpha \vee \neg\alpha \quad (\neg\neg e)
 \end{array}$$

**Zadanie 128.** Podaj w systemie dedukcji naturalnej dowody wszystkich tautologii z zadania 34. *Wskazówka:* prawo Pierce’a wymaga użycia reguły eliminacji podwójnej negacji.

**Zadanie 129.** Pan Hilary zgubił swoje okulary i w ich poszukiwaniu stwierdza następujące fakty:



- Jeśli czytałem gazetę w kuchni ( $\alpha$ ) to okulary są na stole kuchennym ( $\beta$ ).
- Jeśli okulary są na stole kuchennym ( $\beta$ ), to widziałem je podczas śniadania ( $\gamma$ ).
- Nie widziałem okularów podczas śniadania ( $\neg\gamma$ ).
- Czytałem gazetę w kuchni ( $\alpha$ ) lub w sypialni ( $\delta$ ).
- Jeśli czytałem gazetę w sypialni ( $\delta$ ) to okulary są na łóżku ( $\epsilon$ ).

Pomóż panu Hilaremu i udowodnij w systemie naturalnej dedukcji, że okulary są na łóżku, czyli że

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \wedge \neg\gamma \wedge (\alpha \vee \delta) \wedge (\delta \Rightarrow \epsilon) \Rightarrow \epsilon$$

jest tautologią.

**Zadanie 130.** Podaj w systemie dedukcji naturalnej dowód rozdzielności alternatywy względem koniunkcji, czyli dwóch implikacji

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

oraz

$$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \Rightarrow \alpha \vee (\beta \wedge \gamma).$$

**Zadanie 131.** Rozważmy fragment systemu dedukcji naturalnej zawierający wyłącznie reguły wprowadzania i eliminacji implikacji. Udowodnij, że każda formuła dowodliwa w tym fragmencie jest tautologią.<sup>3</sup>

*Wskazówka.* Powiemy, że założenie jest aktywne w pewnym węźle drzewa dowodu jeśli ten węzeł znajduje się wewnątrz prostokąta, w którym założenie zostało przyjęte. Rozważmy drzewo  $T$  dowodu pewnej formuły. Udowodnij przez indukcję względem wielkości (pod)drzewa dowodu, że dla każdego poddrzewa drzewa  $T$  o korzeniu etykietowanym formułą  $\alpha$  i dla każdego wartościowania  $\sigma$  spełniającego wszystkie założenia aktywne w korzeniu tego poddrzewa zachodzi  $\hat{\sigma}(\alpha) = \text{T}$ .

<sup>3</sup>Właściwie w tym miejscu spodziewalibyśmy się zadania polegającego na udowodnieniu twierdzenia, że każda formuła dowodliwa w systemie dedukcji naturalnej jest tautologią. Wydaje się jednak, że takie zadanie nie byłoby ani ciekawsze ani trudniejsze, a tylko bardziej nużące.



# Rachunek kwantyfikatorów

## 3.1. Składnia rachunku kwantyfikatorów

**Definicja 42.** W rachunku kwantyfikatorów używamy tzw. *zmiennych indywiduowych* pochodzących z nieskończonego zbioru  $X = \{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ , *symboli funkcyjnych*  $f, g, f_1, f_2, \dots$  i *symboli relacyjnych*  $p, q, p_1, p_2, \dots$ . Z każdym symbolem funkcyjnym i z każdym symbolem relacyjnym związujemy liczbę naturalną, która określa liczbę jego argumentów (*arność*). Symbole funkcyjne 0-argumentowe nazywamy *symbolami statych*. Symbole relacyjne można uważać za uogólnienie zmiennych zdaniowych z rachunku zdań (zmienne zdaniowe, to 0-argumentowe symbole relacyjne).

Termy są napisami postaci  $x, f(x), g(f_1(x), f_2(x))$  itp. Formalnie:

1. Każda zmienna indywiduowa jest termem.
2. Każdy symbol stałej jest termem.
3. Jeśli  $t_1, \dots, t_n$  są termami, a  $f$  jest  $n$ -argumentowym ( $n > 0$ ) symbolem funkcyjnym, to  $f(t_1, \dots, t_n)$  jest termem.
4. Każdy term można zbudować przy pomocy reguł 1–3.

Formuły atomowe są napisami postaci  $p(t_1), q(t_1, t_2)$  itp., gdzie  $t_1$  i  $t_2$  są termami. Formalnie:

1. Symbole  $\perp$  i  $\top$  są formułami atomowymi.
2. Każdy 0-argumentowy symbol relacyjny jest formułą atomową.
3. Jeśli  $t_1, \dots, t_n$  są termami, a  $p$  jest  $n$ -argumentowym ( $n > 0$ ) symbolem relacyjnym, to  $p(t_1, \dots, t_n)$  jest formułą atomową.
4. Każdą formułę atomową można otrzymać przy pomocy reguł 1–3.

Formuły rachunku kwantyfikatorów (które będziemy oznaczać  $\phi, \psi, \dots$ ) budujemy z *formuł atomowych* za pomocą *spójników logicznych* w sposób podobny, jak w rachunku zdań. Ponadto możemy używać kwantyfikatorów  $\forall$  i  $\exists$ . Formalnie:

1. Każda formuła atomowa jest formułą rachunku kwantyfikatorów.
2. Jeżeli  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są formułami rachunku kwantyfikatorów, to są nimi także:  $(\neg\phi_1)$ ,  $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \vee \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$  i  $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$ .
3. Jeżeli  $x$  jest zmienną indywiduową, a  $\phi$  — formułą rachunku kwantyfikatorów, to formułami rachunku kwantyfikatorów są też  $(\forall x \phi)$  i  $(\exists x \phi)$ .
4. Każdą formułę rachunku kwantyfikatorów można otrzymać przy pomocy reguł 1–3.

Dla zwiększenia czytelności opuszczamy niektóre nawiasy w podobny sposób, jak w rachunku zdań. Niektóre symbole funkcyjne lub relacyjne piszemy infiksowo.

**Definicja 43.** Mówimy, że w formule  $\forall x \phi$  (lub  $\exists x \phi$ ) kwantyfikator  $\forall$  (lub  $\exists$ ) wiąże wystąpienia zmiennej  $x$  w formule  $\phi$ , oraz że wystąpienia zmiennej  $x$  w formule  $\phi$  są związane przez ten kwantyfikator. Wystąpienia zmiennych, które nie są związane w danej formule, są w niej wolne. Formalnie zbiór  $FV(\phi)$  zmiennych, które występują jako wolne w formule  $\phi$  definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}
 FV(x) &= \{x\} \\
 FV(f(t_1, \dots, t_n)) &= FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n) \\
 FV(\perp) &= \emptyset \\
 FV(\top) &= \emptyset \\
 FV(p(t_1, \dots, t_n)) &= FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n) \\
 FV(\neg\phi) &= FV(\phi) \\
 FV(\phi \circ \psi) &= FV(\phi) \cup FV(\psi), \quad \text{gdzie } \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\
 FV(Qx \phi) &= FV(\phi) \setminus \{x\}, \quad \text{gdzie } Q \in \{\forall, \exists\}
 \end{aligned}$$

Podobnie definiujemy zbiór zmiennych występujących w formule jako związane.

Przyjmujemy konwencję, że  $(\forall\phi(x))\psi$  oznacza  $\forall x(\phi(x) \Rightarrow \psi)$  oraz  $(\exists\phi(x))\psi$  oznacza  $\exists x(\phi(x) \wedge \psi)$ .

**Definicja 44.** Dla dowolnej formuły  $\alpha$  napis  $\alpha[x/t]$  oznacza wynik podstawienia termu  $t$  w każde wolne wystąpienie  $x$  w  $\alpha$ . Podstawienie  $[x/t]$  jest dopuszczalne w  $\alpha$ , jeśli w wyniku tego podstawienia żadna zmienna  $z$  nie staje się związana, tj. każde wystąpienie  $x$  w  $\alpha$  nie znajduje się w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną występującą w  $t$ .

Dla przykładu, podstawienie  $[x/y]$  jest niedopuszczalne w formule  $\exists y \ x < y$ . Formuła ta jest prawdziwa w zbiorze liczb rzeczywistych dla dowolnego ustalonego  $x$ , natomiast wynikiem podstawienia w niej  $y$  w miejsce  $x$  byłaby fałszywa formuła  $\exists y \ y < y$ .

### 3.2. Znaczenie formuł rachunku kwantyfikatorów

Formalna definicja *tautologii* (formuły prawdziwej, prawa rachunku kwantyfikatorów) jest nieco bardziej skomplikowana, niż w przypadku rachunku zdań. Z tego powodu podamy ją dopiero w rozdziale 13. Tutaj powiemy jedynie, że formuła  $\phi$  jest tautologią, jeżeli jest spełniona w każdym niepustym zbiorze przy każdej interpretacji symboli funkcyjnych i relacyjnych. Przy danej interpretacji symboli funkcyjnych i relacyjnych formuła  $\forall x \phi$  jest spełniona, gdy jest spełniona formuła  $\phi$  dla każdej wartości zmiennej  $x$ , zaś formuła  $\exists x \phi$  jest spełniona, gdy istnieje pewna wartość zmiennej  $x$ , dla której formuła  $\phi$  jest spełniona.

**Przykład 45.** Prawami rachunku kwantyfikatorów są np. *prawa negowania kwantyfikatorów*:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \phi) &\Leftrightarrow \exists x \neg\phi \\ \neg(\exists x \phi) &\Leftrightarrow \forall x \neg\phi\end{aligned}$$

Ich intuicyjny sens jest jasny: „nieprawda, że dla każdego  $x$  formuła  $\phi$  jest prawdziwa” oznacza, że „istnieje  $x$ , dla którego formuła  $\phi$  nie jest prawdziwa.” Podobnie „nieprawda, że istnieje  $x$ , dla którego formuła  $\phi$  jest prawdziwa” oznacza, że „dla każdego  $x$  formuła  $\phi$  nie jest prawdziwa.”

**Przykład 46.** Niech  $\phi$  i  $\psi$  oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej  $x$ . Wtedy

$$\begin{aligned}\forall x (\phi \wedge \psi) &\Leftrightarrow \forall x \phi \wedge \forall x \psi \\ \exists x (\phi \vee \psi) &\Leftrightarrow \exists x \phi \vee \exists x \psi\end{aligned}$$

są prawami rachunku kwantyfikatorów.

**Przykład 47.** Niech  $\phi$  i  $\psi$  oznaczają takie formuły rachunku kwantyfikatorów, że zmienna  $x$  nie ma wolnych wystąpień w formule  $\phi$  (lecz może mieć w  $\psi$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\forall x (\phi \vee \psi) &\Leftrightarrow \phi \vee (\forall x \psi) \\ \forall x (\phi \wedge \psi) &\Leftrightarrow \phi \wedge (\forall x \psi) \\ \exists x (\phi \vee \psi) &\Leftrightarrow \phi \vee (\exists x \psi) \\ \exists x (\phi \wedge \psi) &\Leftrightarrow \phi \wedge (\exists x \psi)\end{aligned}$$

są prawami rachunku kwantyfikatorów.

### 3.3. System dedukcji naturalnej dla rachunku kwantyfikatorów

System dedukcji naturalnej, który poznaliśmy w poprzednim rozdziale, daje się rozszerzyć na rachunek kwantyfikatorów. Nowe reguły dowodzenia to reguły

wprowadzania i eliminacji dla obu kwantyfikatorów. Napis  $\alpha[x/t]$  oznacza formułę, w której wszystkie wolne wystąpienia zmiennej  $x$  zostały zastąpione przez wystąpienia termu  $t$ .

Reguły wprowadzania:

$$\frac{\alpha[x/t]}{\exists x \alpha} (\exists i) \qquad \frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \alpha[x/x_0] \end{array}}{\forall x \alpha} (\forall i)$$

Reguła wprowadzania kwantyfikatora egzystencjalnego jest intuicyjna: aby udowodnić prawdziwość  $\exists x \alpha$  wystarczy wskazać takie  $t$ , dla którego  $\alpha$  zachodzi;  $t$  może być tutaj dowolnym termem. W regule wprowadzania kwantyfikatora ogólnego potrzebujemy dodatkowego założenia, że  $x_0$  jest świeżą zmienną — zmienną lokalną, widoczną tylko wewnątrz okna, w którym została zadeklarowana. Reguła ta odpowiada następującej technice dowodzenia: *Weźmy dowolne  $x_0$  i pokażmy, że  $\alpha$  zachodzi dla tego  $x_0$ . Z dowolności wyboru  $x_0$  wnioskujemy, że  $\alpha$  zachodzi dla wszystkich  $x$ .*

Reguły eliminacji:

$$\frac{\exists x \alpha \quad \begin{array}{c} x_0 \quad \alpha[x/x_0] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta} (\exists e) \qquad \frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/t]} (\forall e)$$

W regule eliminacji kwantyfikatora egzystencjalnego znowu mamy założenie, że  $x_0$  jest świeżą zmienną. Odpowiada to takiemu argumentowi: *Skoro wiemy, że zachodzi  $\exists x \alpha$ , to niech  $x_0$  będzie takim elementem, dla którego zachodzi  $\alpha$ .* Reguła eliminacji kwantyfikatora ogólnego mówi natomiast, że *skoro  $\alpha$  zachodzi dla wszystkich  $x$ , to w szczególności zachodzi dla  $t$ .* Trzeba przy tym podkreślić, że zmienna  $x_0$  może występować tylko wewnątrz okna, w którym została zadeklarowana (nie może występować np. wcześniej w dowodzie), natomiast  $t$  może być dowolnym termem (pod warunkiem, że podstawienie  $[x/t]$  jest dopuszczalne, tzn.  $t$  nie zawiera zmiennych związanych w  $\alpha$ ) i zwykle występuje w innych miejscach dowodu.

*Przykład 48.* Poniżej prezentujemy dowód implikacji  $\forall x (\phi \wedge \psi) \Rightarrow (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$

w systemie naturalnej dedukcji.

$$\begin{array}{c}
 \forall x (\phi \wedge \psi) \text{ założenie} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 x_0 \text{ świeża zmienna} \\
 \frac{\forall x (\phi \wedge \psi)}{\phi[x/x_0] \wedge \psi[x/x_0]} (\forall e) \\
 \phi[x/x_0] (\wedge e_1)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 x_1 \text{ świeża zmienna} \\
 \frac{\forall x (\phi \wedge \psi)}{\phi[x/x_1] \wedge \psi[x/x_1]} (\forall e) \\
 \psi[x/x_1] (\wedge e_2)
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{\forall x \phi}{\forall x \phi} (\forall i) \quad \frac{\forall x \psi}{\forall x \psi} (\forall i) \\
 \hline
 (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \\
 \hline
 \overline{\forall x (\phi \wedge \psi) \Rightarrow (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)} (\Rightarrow i)
 \end{array}$$

Kolejny przykład to dowód jednej implikacji z praw de Morgana:  $\neg \exists x \phi \Rightarrow \forall x \neg \phi$ .

$$\begin{array}{c}
 \neg \exists x \phi \text{ założenie} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 x_0 \text{ świeża zmienna} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 \phi[x/x_0] \text{ założenie} \\
 \frac{\phi[x/x_0]}{\exists x \phi} (\exists i) \\
 \frac{\exists x \phi}{\neg \exists x \phi} (\neg e) \\
 \perp
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{}{\neg \phi[x/x_0]} (\neg i)
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{}{\forall x \neg \phi} (\forall i) \\
 \hline
 \overline{\neg \exists x \phi \Rightarrow \forall x \neg \phi} (\Rightarrow i)
 \end{array}$$

W języku naturalnym ten dowód można przeczytać tak: Załóżmy, że  $\neg \exists x \phi$  jest prawdą i weźmy dowolne  $x_0$ . Gdyby  $\phi(x_0)$  było prawdą, to istniałby taki  $x$ , dla którego  $\phi(x)$  zachodzi, co przeczy prawdziwości  $\neg \exists x \phi$ . Zatem  $\neg \phi(x_0)$  jest prawdą. Z dowolności wyboru  $x_0$  wnioskujemy, że  $\forall x \neg \phi$  jest prawdą, co kończy dowód.

**Zadanie 132.** Podaj w systemie dedukcji naturalnej dowód drugiej implikacji powyższego prawa de Morgana, czyli implikacji  $\forall x \neg \phi \Rightarrow \neg \exists x \phi$ .

**Zadanie 133.** Podaj w systemie dedukcji naturalnej dowód implikacji  $\exists x \neg \phi \Rightarrow \neg \forall x \phi$ .

**Zadanie 134.** Podaj w systemie dedukcji naturalnej dowód implikacji  $\neg \forall x \phi \Rightarrow \exists x \neg \phi$ .

*Wskazówka:* Tego się nie da zrobić w sposób konstruktywny. Załóż nie wprost, że zachodzi  $\neg\exists x \neg\phi$  i wyprowadź  $\forall x \phi$ .

Niech  $\phi$  i  $\psi$  oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej  $x$ . W poniższych zadaniach sprawdź, które z podanych formuł są prawami rachunku kwantyfikatorów.

**Zadanie 135.**  $(\forall x (\phi \vee \psi)) \Rightarrow (\forall x \phi) \vee (\forall x \psi)$

**Zadanie 136.**  $(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi) \Rightarrow (\forall x (\phi \vee \psi))$

**Zadanie 137.**  $(\forall x (\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$

**Zadanie 138.**  $((\forall x \phi) \Rightarrow (\forall x \psi)) \Rightarrow (\forall x (\phi \Rightarrow \psi))$

**Zadanie 139.**  $(\forall x (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\exists x \phi) \Rightarrow (\forall x \psi)$

**Zadanie 140.**  $((\exists x \phi) \Rightarrow (\forall x \psi)) \Rightarrow (\forall x (\phi \Rightarrow \psi))$

**Zadanie 141.**  $(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi) \Rightarrow (\exists x (\phi \wedge \psi))$

**Zadanie 142.**  $(\exists x (\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$

**Zadanie 143.**  $((\exists x \phi) \Rightarrow (\exists x \psi)) \Rightarrow (\exists x (\phi \Rightarrow \psi))$

**Zadanie 144.**  $(\exists x (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\exists x \phi) \Rightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 145.**  $(\forall x \phi) \Rightarrow ((\exists x \psi) \Rightarrow (\exists x (\phi \Rightarrow \psi)))$

**Zadanie 146.**  $(\exists x (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\forall x \phi) \Rightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 147.**  $((\forall x \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall x \psi)) \Rightarrow \exists x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)$

**Zadanie 148.**  $\exists x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi) \Rightarrow ((\forall x \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall x \psi))$

**Zadanie 149.**  $\forall x \phi \Rightarrow \exists x \phi$

**Zadanie 150.**  $\exists x \phi \Rightarrow \forall x \phi$

Niech  $\phi$  oznacza formułę rachunku kwantyfikatorów zawierającą być może wolne wystąpienia zmiennych  $x$  i  $y$ . W poniższych zadaniach sprawdź, które z podanych formuł są prawami rachunku kwantyfikatorów.

**Zadanie 151.**  $(\forall x \exists y \phi) \Rightarrow (\exists y \forall x \phi)$

**Zadanie 152.**  $(\exists y \forall x \phi) \Rightarrow (\forall x \exists y \phi)$



Niech  $\phi$  i  $\psi$  oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, przy czym zmienna  $x$  nie ma wolnych wystąpień w formule  $\phi$  (lecz może mieć w  $\psi$ ). W poniższych zadaniach sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

**Zadanie 153.**  $\forall x (\phi \Rightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Rightarrow (\forall x \psi)$

**Zadanie 154.**  $\forall x (\phi \Rightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Rightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 155.**  $\forall x (\psi \Rightarrow \phi)$  oraz  $(\forall x \psi) \Rightarrow \phi$

**Zadanie 156.**  $\forall x (\psi \Rightarrow \phi)$  oraz  $(\exists x \psi) \Rightarrow \phi$

**Zadanie 157.**  $\forall x (\phi \Leftrightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Leftrightarrow (\forall x \psi)$

**Zadanie 158.**  $\forall x (\phi \Leftrightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Leftrightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 159.**  $\exists x (\phi \Rightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Rightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 160.**  $\exists x (\phi \Rightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Rightarrow (\forall x \psi)$

**Zadanie 161.**  $\exists x (\psi \Rightarrow \phi)$  oraz  $(\exists x \psi) \Rightarrow \phi$

**Zadanie 162.**  $\exists x (\psi \Rightarrow \phi)$  oraz  $(\forall x \psi) \Rightarrow \phi$

**Zadanie 163.**  $\exists x (\phi \Leftrightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Leftrightarrow (\exists x \psi)$

**Zadanie 164.**  $\exists x (\phi \Leftrightarrow \psi)$  oraz  $\phi \Leftrightarrow (\forall x \psi)$

### 3.4. Formalizacja wypowiedzi w języku rachunku kwantyfikatorów

**Zadanie 165.** Następująca formuła mówi, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest *ciągła*.

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „funkcja  $f$  nie jest ciągła.”

**Zadanie 166.** Następująca formuła mówi, że liczba  $g \in \mathbb{R}$  jest *granicą* (w sensie Cauchy’ego) funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $x_0$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „liczba  $g$  nie jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ .”

Formuła  $\phi$  jest w *postaci normalnej*, jeśli jest postaci  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$ , gdzie  $x_i$  są pewnymi zmiennymi,  $Q_i$  są kwantyfikatorami ( $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  dla  $i = 1, \dots, n$ ), a formuła  $\psi$  nie zawiera kwantyfikatorów i symbol negacji występuje w niej jedynie przed formułami atomowymi. Przykładem formuły w postaci normalnej jest  $\forall x \exists y (x \neq y \vee \neg x \leq y)$ . Formuła  $\forall x \exists y \exists z \neg(z = y \vee y = z)$  nie jest w postaci normalnej.

**Zadanie 167.** Dla każdej z formuł poniżej podaj równoważną formułę w postaci normalnej

$$1. \forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

$$2. \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon)$$

**Zadanie 168.** Funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *ślabo rosnąca*, jeśli prawdziwa jest formuła

$$\forall x \forall y (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *ślabo malejąca*, jeśli prawdziwa jest formuła

$$\forall x \forall y (x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)).$$

Zapisz poniższe zdania jako formuły w postaci normalnej:

1. funkcja  $f$  jest ślabo rosnąca i ślabo malejąca,
2. funkcja  $f$  nie jest ślabo rosnąca i nie jest ślabo malejąca.

**Zadanie 169.** Przy pomocy symboli  $=, \leq, +, \times$ , spójników logicznych i kwantyfikatorów zapisz następujące formuły dotyczące liczb naturalnych:

1. liczba  $x$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością  $y$  i  $z$ ,
2. każda liczba nieparzysta większa od 3 jest sumą dwóch liczb pierwszych,
3. nie istnieje największa liczba pierwsza,
4. liczby  $x$  i  $y$  mają takie same dzielniki pierwsze.

*Przykład:* formułę „ $x$  jest sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych” zapiszemy jako  $\exists y \exists z (x = y \times y + z \times z)$ .

**Zadanie 170.** Niech funkcja  $g$  będzie dla  $n \in \mathbb{N}$  określona następująco:

$$g(n) = \begin{cases} n/2, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 3n + 1, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Używając symboli z zadania 169 oraz dodatkowo symbolu potęgowania  $\uparrow$ , zapisz zdanie równoważne zdaniu „dla każdej liczby naturalnej  $m$  istnieje taka liczba  $n$ , że  $g^n(m) = 1$ ”, gdzie  $g^n$  oznacza funkcję  $g$  złożoną ze sobą  $n$  razy, na przykład  $g^2(3) = 5$ . *Wskazówka:* ciąg skończony liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_m$  możemy zakodować jako jedną liczbę  $2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_m^{a_m}$ , gdzie  $p_i$  jest  $i$ -tą liczbą pierwszą.

**Zadanie 171.** Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli  $\in, \mathbb{N}, +, \times, =, i \leq$  napisz formułę mówiącą, że wśród każdych trzech liczb naturalnych zawsze znajdują się dwie, których różnica jest nieujemna i parzysta. Czy taką formułę można zapisać używając wyłącznie kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli  $\in, \mathbb{N}, +, i =$ ?

Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli  $\in, \mathbb{N}, +, \times, =, <$  i symbolu  $f$  napisz formułę mówiącą, że jeśli funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest silnie rosnąca (dla większych argumentów ma większe wartości), to jej wartości są nieograniczone.

**Zadanie 172.** Liczbę naturalną  $q$  nazywamy *liczbą bliźniaczą*, jeżeli liczby  $q$  oraz  $q+2$  są pierwsze. Używając symboli  $+, \times, 0, 1, 2$  oraz nawiasów, zmiennych, kwantyfikatorów i spójników logicznych zapisz formalnie zdanie: „Istnieje największa liczba bliźniacza taka, że pomiędzy nią a poprzednią liczbą bliźniaczą jest co najwyżej jedna liczba pierwsza.”

**Zadanie 173.** Niech na pewnym skończonym zbiorze  $X$  będzie określona binarna relacja  $R$ . Mówimy, że zbiór  $X$  z relacją  $R$  jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje taki ciąg elementów zbioru  $X$ , że każdy element zbioru  $X$  występuje w tym ciągu dokładnie raz, każde dwa kolejne elementy ciągu są ze sobą w relacji  $R$ , oraz ostatni element ciągu jest w relacji z pierwszym elementem ciągu. Używając jedynie poniższych słów i zwrotów (z odpowiednią odmianą) wyraż słownie, co to znaczy, że zbiór  $X$  wraz z relacją  $R$  nie jest hamiltonowski:

$R$	istnieje	pierwszy
$X$	każdy	raz
ciąg	kolejny	taki, że
dla	który	ten
dokładnie	lub	truskawka
dwa	moc	w
element	nie jest w relacji	występować
i	ostatni	zbiór

**Zadanie 174.** Po egzaminie z logiki studenci wybrali się na dyskotekę, w której bawi się pewna liczba pań i dżentelmenów. Niech

- $\phi_1$  oznacza, że każdy dżentelmen zna co najwyżej dwie panie,
- $\phi_2$  oznacza, że każda pani zna co najwyżej dwóch dżentelmenów,
- $\phi_3$  oznacza, że każdy dżentelmen zna co najmniej dwie panie,
- $\phi_4$  oznacza, że żadne dwie panie nie znają dokładnie tych samych dżentelmenów.

Zapisz zdania  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  i  $\phi_4$  używając symboli zbiorów  $P$  i  $D$  oraz symbolu relacji  $Z \subseteq (P \cup D)^2$ , takich, że

$x \in P$	oznacza, że $x$ jest panią,
$x \in D$	oznacza, że $x$ jest dżentelmenem,
$Z(x, y)$	oznacza, że $x$ zna $y$ ,

oraz równości  $=$  i spójników logicznych oraz kwantyfikatorów.

# 4

## Zbiory

W teorii mnogości *zbiór* i *relację*  $\in$  należenia do zbioru przyjmujemy za pojęcia pierwotne. Własności zbiorów i relacji  $\in$  są zadane przez *aksjomaty*, tj. zdania, które przyjmujemy za prawdziwe bez dowodu.

**Aksjomat 49 (zasada ekstensjonalności).** Dwa zbiory są *równe*, jeżeli zawierają dokładnie te same elementy, tj.  $A = B$  wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest formuła

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

**Definicja 50.** *Zbiór pusty*  $\emptyset$  jest zbiorem nie zawierającym żadnego elementu. Prawdziwa jest formuła

$$\forall x (x \notin \emptyset).$$

**Aksjomat 51 (zbioru pustego).** Zbiór pusty istnieje.

Zauważmy, że na mocy zasady ekstensjonalności istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

Nie będziemy tu wymieniać wszystkich aksjomatów teorii mnogości. Aksjomaty gwarantują między innymi istnienie zbioru potęgowego (Definicja 55), sumy zbiorów (Definicje 56 i 59) czy zbioru liczb naturalnych, ale nie będziemy wchodzić w szczegółowe rozważania na ten temat. Zainteresowanych czytelników odsyłamy do podręczników do teorii mnogości wymienionych w rozdziale B.

**Definicja 52.** Zbiór  $A$  jest *podzbiorem* zbioru  $B$ , co będziemy zapisywać  $A \subseteq B$ , jeżeli  $B$  zawiera wszystkie elementy zbioru  $A$ , tj. zachodzi

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Zauważmy, że na mocy zasady ekstensjonalności dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są nawzajem swoimi podzbiarami, tj.  $A = B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \subseteq B$  oraz  $B \subseteq A$ .

**Definicja 53.** Napisy  $\{x \mid \phi\}$  i  $\{x : \phi\}$  oznaczają zbiór tych elementów  $x$ , które spełniają formułę  $\phi$ . Będziemy również pisać  $x \in A \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \phi$  zamiast  $A = \{x \mid \phi\}$  oraz  $\{f(x) \mid \phi\}$  zamiast  $\{y \mid \exists x \phi \wedge (y = f(x))\}$ .

W ogólnym przypadku zbiór  $\{x \mid \phi\}$  wcale nie musi istnieć, jednak w niniejszej książeczce nie spotkamy się z taką sytuacją i nie będziemy wchodzić w szczegółowe rozważania na ten temat. Zainteresowanych czytelników zachęcamy do zapoznania się z antynomią Russella i jej konsekwencjami.

*Przykład 54.* Napis  $\{n \mid \exists m \in \mathbb{N} (n = 3m)\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. Ten sam zbiór możemy krócej zapisać jako  $\{3m \mid m \in \mathbb{N}\}$ .

**Definicja 55.** Zbiór, którego elementy są zbiorami, nazywamy *rodziną zbiorów*. Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $A$  nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru  $A$  i oznaczamy  $\mathcal{P}(A)$ . Możemy napisać:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

## 4.1. Działania na zbiorach

**Definicja 56.** Na zbiorach wprowadzamy operacje *sumy*  $\cup$ , *przekroju*  $\cap$  i *różnicy*  $\setminus$ :

$$\begin{aligned} x \in A \cup B & \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x \in A \vee x \in B \\ x \in A \cap B & \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \\ x \in A \setminus B & \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \end{aligned}$$

Powyższe operacje mają wiele ciekawych własności. Dla przykładu:

**Fakt 57 (prawa rozdzielności).**

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

**Dowód.** Udowodnimy pierwsze z nich. Na mocy prawa ekstensjonalności wystarczy pokazać, że dla każdego  $x$  zachodzi

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Równoważność tę pokażemy rozpoczynając od formuły  $x \in A \setminus (B \cup C)$ , przechodząc przez szereg formuł równoważnych i kończąc na  $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ . Z definicji różnicy zbiorów wiemy, że formuła

$$x \in A \setminus (B \cup C)$$

jest równoważna formule

$$x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C).$$

Następnie korzystając z definicji sumy zbiorów otrzymujemy równoważną formułę

$$x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C).$$

Korzystając z prawa de Morgana  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$  otrzymujemy

$$x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C).$$

Na mocy tautologii  $p \Leftrightarrow (p \wedge p)$  możemy do formuły dopisać jeszcze jedno wystąpienie  $x \in A$ .

$$x \in A \wedge x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C).$$

Ponadto koniunkcja jest łączna i przemienna, możemy zatem dowolnie pogrupować jej czynniki:

$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C).$$

Korzystając dwukrotnie z definicji różnicy zbiorów dostajemy

$$(x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C).$$

Na mocy definicji przekroju zbiorów mamy ostatecznie

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Twierdzenie jest zatem udowodnione. ■

**Zadanie 175.** Pokaż, że dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  zachodzą podane równości.

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \setminus C \\ (A \cap B) \setminus C &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

**Zadanie 176.** Pokaż, że dla dowolnych zbiorów  $A, B, C$  i  $D$  zachodzą podane równości.

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cup C &= (A \cup C) \setminus (B \setminus C) \\
 (A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus B \\
 A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \\
 A \cup (B \setminus C) &= ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C) \\
 A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) &= (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D) \\
 (A \setminus B) \cap (C \setminus D) &= (A \cap C) \setminus (B \cup D) \\
 \emptyset \cap A &= \emptyset \\
 \emptyset \cup A &= A \\
 \emptyset \setminus A &= \emptyset \\
 A \setminus \emptyset &= A
 \end{aligned}$$

**Zadanie 177.** Czy dla dowolnych zbiorów  $A, B$  i  $C$  zachodzą podane równości?

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \setminus B &= A \\
 A \cup (A \cap B) &= A \\
 A \cap (A \cup B) &= A \\
 (A \setminus B) \setminus (B \setminus A) &= A \\
 A \setminus (B \cap A) &= A \\
 A \setminus (B \setminus A) &= A \\
 A \cup (B \setminus C) &= (A \cup B) \setminus C \\
 A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus C \\
 A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \setminus C \\
 A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

**Zadanie 178.** Pokaż, że dla dowolnych takich zbiorów  $A, B, C$  i  $D$ , że  $A \subseteq B$  i  $C \subseteq D$  zachodzą podane inkluzje.

$$\begin{aligned}
 A \cup C &\subseteq B \cup D \\
 A \cap C &\subseteq B \cap D \\
 A \setminus D &\subseteq B \setminus C
 \end{aligned}$$

**Zadanie 179.** Wykaż, że dla dowolnych zbiorów  $A, B, C$  i  $D$  zachodzi:

$$A \cap B \cap C \cap D \subseteq ((A \cap B) \cup C) \cap D.$$



**Zadanie 180.** Czy dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  zachodzą poniższe inkluzje?

$$A \cap (B \cup C) \subseteq B \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \setminus C) \subseteq B \cap (A \setminus C)$$

W poniższych zadaniach przyjmij, że zbiory  $A$ ,  $B$  i  $C$  spełniają podaną równość. Wymień wszystkie inkluzje między zbiorami  $A$ ,  $B$  i  $C$ , które wynikają z podanej zależności (oprócz oczywistych inkluzji postaci  $X \subseteq X$ ), i udowodnij, że wymieniałeś wszystkie takie inkluzje.

**Zadanie 181.**  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$

**Zadanie 182.**  $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$

**Zadanie 183.**  $((A \cap B) \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C$

**Zadanie 184.**  $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$

**Zadanie 185.**  $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$

**Zadanie 186.**  $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$

**Zadanie 187.** Pokaż, że jeżeli dla pewnych zbiorów  $A$  i  $B$  jest  $A \setminus B = B \setminus A$ , to  $A = B$ .

**Zadanie 188.** Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  następujące formuły są równoważne

$$A \subseteq B, \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A, \quad A \setminus B = \emptyset.$$

**Zadanie 189.** Niech  $A$ ,  $B$  i  $C$  będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że  $A \subseteq A \cup B$  i  $B \subseteq A \cup B$ . Udowodnij, że jeśli  $A \subseteq C$  oraz  $B \subseteq C$ , to  $A \cup B \subseteq C$ . Innymi słowy suma zbiorów  $A$  i  $B$  jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym zbiory  $A$  i  $B$ .

**Zadanie 190.** Niech  $A$ ,  $B$  i  $C$  będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że  $A \cap B \subseteq A$  i  $A \cap B \subseteq B$ . Udowodnij, że jeśli  $C \subseteq A$  oraz  $C \subseteq B$ , to  $C \subseteq A \cap B$ . Innymi słowy przekrój zbiorów  $A$  i  $B$  jest największym (w sensie inkluzji) zbiorem zawartym w zbiorach  $A$  i  $B$ .

**Zadanie 191.** Niech  $A$ ,  $B$  i  $C$  będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że  $A \setminus B \subseteq A$  i  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ . Udowodnij, że jeśli  $C \subseteq A$  oraz  $C \cap B = \emptyset$ , to  $C \subseteq A \setminus B$ . Innymi słowy różnica zbiorów  $A$  i  $B$  jest największym (w sensie inkluzji) zbiorem zawartym w  $A$  i rozłącznym z  $B$ .

**Definicja 58.** *Różnicę symetryczną*  $\dot{-}$  zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy następująco:

$$x \in A \dot{-} B \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x \in A \Leftrightarrow x \notin B.$$

**Zadanie 192.** Pokaż, że różnica symetryczna jest operacją *łączną* i *przemenną*, tj. że

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C) \quad \text{oraz} \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Pokaż także następujące tożsamości:

$$A \dot{-} \emptyset = A, \quad A \dot{-} A = \emptyset \quad \text{oraz} \quad A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C).$$

**Zadanie 193.** Udowodnij, że

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Zadanie 194.** Wśród poniższych zdań wskaż zdania prawdziwe i udowodnij je. Dla pozostałych zdań podaj kontrprzykłady dowodzące, że zdania te nie są prawdziwe.

1. Równość  $A \cap B = A \cap C$  implikuje równość  $B = C$ .
2. Równości  $A \cap B = A \cap C$  oraz  $A \cup B = A \cup C$  implikują równość  $B = C$ .
3. Inkluzja  $A \cup B \subseteq A \cap B$  implikuje równość  $A = B$ .
4. Równość  $A \dot{-} B = A \dot{-} C$  implikuje równość  $B = C$ .
5. Równość  $A \dot{-} B = \emptyset$  implikuje równość  $A = B$ .

**Zadanie 195.** Czy istnieją niepuste zbiory  $A$  i  $B$  takie, że

$$A \subseteq A \dot{-} B \subseteq A \setminus B?$$

**Zadanie 196.** Czy dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  zachodzą równości:

$$\begin{aligned} A \cup (B \dot{-} C) &= (A \cup B) \dot{-} (A \cup C), \\ A \cup B &= (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)? \end{aligned}$$

## 4.2. Operacje nieskończone na zbiorach

Dwuargumentowe operacje sumy i przekroju zbiorów można rozszerzyć na dowolne rodziny zbiorów.

**Definicja 59.** Suma wszystkich zbiorów z rodziny  $\mathcal{A}$  jest zbiorem zawierającym elementy występujące w którymkolwiek ze zbiorów rodziny  $\mathcal{A}$ . Podobnie przekrój tej rodziny jest zbiorem zawierającym elementy występujące w każdym zbiorze rodziny  $\mathcal{A}$ . Formalnie:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{A} &= \{x \mid \exists X \in \mathcal{A} (x \in X)\}, \\ \bigcap \mathcal{A} &= \{x \mid \forall X \in \mathcal{A} (x \in X)\}. \end{aligned}$$

Czasem chcielibyśmy nazwać zbiory należące do rodziny zbiorów tak, aby móc wykonywać na nich pewne operacje. Służą do tego *indeksowane rodziny zbiorów*.

**Definicja 60.** Rodziną zbiorów indeksowaną elementami zbioru  $S$  nazywamy odwzorowanie, które każdemu elementowi  $s \in S$  przyporządkowuje pewien zbiór  $A_s$ . Taką rodzinę oznaczamy  $\{A_s\}_{s \in S}$  lub  $\{A_s \mid s \in S\}$ . Rodziną zbiorów  $\{A_{s,t}\}_{s \in S, t \in T}$  indeksowaną elementami dwóch zbiorów  $S$  i  $T$  nazywamy odwzorowanie, które każdej parze  $\langle s, t \rangle$ , gdzie  $s \in S$  oraz  $t \in T$  przyporządkowuje pewien zbiór  $A_{s,t}$ . Jeżeli  $S = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq n\}$ , to zamiast  $\{A_i\}_{i \in S}$  piszemy też  $\{A_i\}_{i=n}^{\infty}$ . Jeżeli  $S = \{n, \dots, m\}$ , to zamiast  $\{A_i\}_{i \in S}$  piszemy też  $\{A_i\}_{i=n}^m$ .

Operacje sumy i przekroju w oczywisty sposób uogólniają się na indeksowane rodziny zbiorów. Suma wszystkich zbiorów z rodziny  $\{A_s\}_{s \in S}$  jest zbiorem zawierającym elementy występujące w którymkolwiek ze zbiorów  $A_s$ . Podobnie przekrój tej rodziny jest zbiorem zawierającym elementy występujące w każdym ze zbiorów  $A_s$ . Formalnie:

$$x \in \bigcup_{s \in S} A_s \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists s \in S (x \in A_s),$$

$$x \in \bigcap_{s \in S} A_s \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall s \in S (x \in A_s).$$

**Zadanie 197.** Rozważmy zbiór  $A_{s,t} = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x \wedge x \leq t\}$ , gdzie  $s, t \in \mathbb{R}$  są dowolnymi liczbami. Dla każdego ze zbiorów poniżej wylicz jego wartość.

1.  $\bigcup_{t \geq 2} A_{0,t}$
2.  $\bigcap_{t \geq 2} A_{1,t}$
3.  $\bigcup_{t \geq 2} A_{s,t}$
4.  $\bigcap_{t \geq 2} A_{s,t}$
5.  $\bigcup_{s < 0} \bigcap_{t \geq 2} A_{s,t}$
6.  $\bigcap_{s < 0} \bigcup_{t \geq 2} A_{s,t}$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$ ,  $\{B_t\}_{t \in T}$ , gdzie  $T$  jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane relacje. W których przypadkach zachodzi inkluzja odwrotna?

**Zadanie 198.**  $\bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$

$$\text{Zadanie 199. } \bigcap_{t \in T} (A_t \cap B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \cap \bigcap_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 200. } \bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 201. } \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t)$$

$$\text{Zadanie 202. } \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t)$$

$$\text{Zadanie 203. } \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 204. } \bigcap_{t, s \in T} (A_t \cup B_s) \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t)$$

$$\text{Zadanie 205. } \bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t, s \in T} (A_t \cap B_s)$$

$$\text{Zadanie 206. } \bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcap_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 207. } \bigcap_{t \in T} (A_t \setminus B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} B_t$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnego zbioru  $A$  i dowolnej rodziny zbiorów  $\{B_t\}_{t \in T}$ , gdzie  $T$  jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane równości.

$$\text{Zadanie 208. } \bigcup_{t \in T} (A \cup B_t) = A \cup \bigcup_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 209. } \bigcap_{t \in T} (A \cup B_t) = A \cup \bigcap_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 210. } \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t) = A \cap \bigcup_{t \in T} B_t$$

$$\text{Zadanie 211. } \bigcap_{t \in T} (A \cap B_t) = A \cap \bigcap_{t \in T} B_t$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów  $\{A_{t,s}\}_{\substack{t \in T \\ s \in S}}$ , gdzie  $T$  i  $S$  są niepustymi zbiorami indeksów, zachodzą podane relacje. Czy zachodzą inkluzje odwrotne?

$$\text{Zadanie 212. } \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$$

$$\text{Zadanie 213. } \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} = \bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{t,s}$$

$$\text{Zadanie 214. } \bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów  $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ , gdzie  $T$  jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane relacje. Czy zachodzą inkluzje odwrotne?

$$\text{Zadanie 215. } \bigcup_{t \in T} A_{t,t} \subseteq \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in T} A_{t,s}$$

$$\text{Zadanie 216. } \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in T} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{t \in T} A_{t,t}$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$ ,  $\{B_s\}_{s \in S}$ , gdzie  $T$  i  $S$  są niepustymi zbiorami indeksów, zachodzą podane równości.

$$\text{Zadanie 217. } \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{s \in S} B_s = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} (A_t \cup B_s)$$

$$\text{Zadanie 218. } \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{s \in S} B_s = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} (A_t \cap B_s)$$

$$\text{Zadanie 219. } \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{s \in S} B_s = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} (A_t \cup B_s)$$

$$\text{Zadanie 220. } \bigcap_{t \in T} A_t \cap \bigcap_{s \in S} B_s = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} (A_t \cap B_s)$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  zachodzą podane relacje. W których przypadkach zachodzi inkluzja odwrotna?

$$\text{Zadanie 221. } \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\text{Zadanie 222. } \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\text{Zadanie 223. } \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\text{Zadanie 224. } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^n A_m)$$

$$\text{Zadanie 225. } \bigcup_{n=0}^m A_n = \left( \bigcup_{n=0}^{m-1} (A_n \setminus A_{n+1}) \right) \cup (A_m \setminus A_0) \cup \bigcap_{n=0}^m A_n$$

$$\textbf{Zadanie 226.} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \left( \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \setminus A_0 \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}) \right) \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

**Definicja 61.** Rodzina zbiorów  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest *zstępująca*, jeżeli  $A_{n+1} \subseteq A_n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i *wstępująca*, jeżeli  $A_n \subseteq A_{n+1}$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 227.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są zstępującymi rodzinami zbiorów, to

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) = \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right).$$

Wskaż przykład rodzin  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dla których równość powyższa nie zachodzi. Czy równość powyższa zachodzi dla rodzin wstępujących?

**Zadanie 228.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są wstępującymi rodzinami zbiorów, to

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B_i) = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right).$$

Wskaż przykład rodzin  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dla których równość powyższa nie zachodzi. Czy równość powyższa zachodzi dla rodzin zstępujących?

**Zadanie 229.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}).$$

**Zadanie 230.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^n A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^n A_i.$$

**Zadanie 231.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^n A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^n A_i.$$

**Zadanie 232.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

**Zadanie 233.** Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

**Zadanie 234.** Niech  $\{A_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$  będzie rodziną zbiorów indeksowaną parami liczb naturalnych. Pokaż, że jeśli

$$A_{n,m} \subseteq A_{n+1,m} \cap A_{n,m+1}$$

dla wszelkich  $n$  i  $m$ , to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,n}.$$

**Zadanie 235.** Dane są rodziny zbiorów  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  i  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Wiadomo, że dla każdego  $i$  istnieje  $k$  takie, że  $A_i \subseteq \bigcup_{j=0}^k B_j$ . Udowodnij, że:

1. dla każdego  $i$  istnieje takie  $k$ , że  $\bigcup_{j=0}^i A_j \subseteq \bigcup_{j=0}^k B_j$ ,
2.  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ .

**Zadanie 236.** Rozważmy dowolną rodzinę zbiorów  $\mathcal{A}$ .

1. Udowodnij, że  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$ .
2. Udowodnij, że  $\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór  $B$ , że  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(B)$ .

**Zadanie 237.** Zbiór  $W$  na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy  $\overline{ab} \subseteq W$  dla dowolnych punktów  $a, b \in W$ . Niech  $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$  będzie wstępującą rodziną zbiorów wypukłych. Pokaż, że zbiór  $W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$  jest wypukły.





# 5

## Relacje

### 5.1. Para uporządkowana i iloczyn (produkt) kartezjański

*Parę uporządkowaną* (w skrócie *parę*) elementów  $a$  i  $b$  będziemy zapisywać w postaci  $\langle a, b \rangle$ . Para będzie dla nas pojęciem pierwotnym. Przyjmujemy, że spełnia ona następujący aksjomat.

**Aksjomat 62.**  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = c$  oraz  $b = d$ .

Aby określić parę uporządkowaną wystarczy podać dwuelementowy zbiór jej elementów i wskazać, który z nich jest pierwszy. Specjaliści od podstaw matematyki pragną za pojęcia pierwotne uważać jedynie zbiór i relację należenia do zbioru i dlatego wolą *zdefiniować* parę następująco:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

**Zadanie 238.** Udowodnij, że zdefiniowana wyżej para  $\langle a, b \rangle$  spełnia aksjomat 62.

**Definicja 63.** *Iloczynem kartezjańskim* dwóch zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych złożonych z elementów tych zbiorów:

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

**Zadanie 239.** Uzupełnij i udowodnij podane wzory.

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = ?$$

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = ?$$

**Zadanie 240.** Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  równość  $A \times B = B \times A$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A = \emptyset \text{ lub } B = \emptyset \text{ lub } A = B.$$

**Zadanie 241.** Udowodnij, że jeżeli  $A \times B = C \times D$ , to

$$(A = C \text{ i } B = D) \text{ lub } ((A = \emptyset \text{ lub } B = \emptyset) \text{ i } (C = \emptyset \text{ lub } D = \emptyset)).$$

**Zadanie 242.** Załóżmy, że  $B \subseteq Y$ . Czy dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $X$  zachodzi równość

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times B)?$$

## 5.2. Relacje

**Definicja 64.** Dowolny podzbiór  $R \subseteq A \times B$  produktu kartezjańskiego zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy *relacją dwuargumentową (binarną)*. Jeśli  $\langle a, b \rangle \in R$ , to mówimy, że elementy  $a \in A$  i  $b \in B$  są ze sobą w relacji  $R$ . Zamiast pisać  $\langle a, b \rangle \in R$ , piszemy też niekiedy  $aRb$  lub  $R(a, b)$ . Podzbiory  $A \times A$  są *binarnymi relacjami na zbiorze  $A$* .

*Przykład 65.* Relacjami binarnymi są:

- identyczność (równość, przekątna) na zbiorze  $\mathbb{N}$ :  $\{\langle x, x \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ ,
- relacja mniejszości  $\leq$  na zbiorze  $\mathbb{N}$ :  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$ ,
- taka  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , że  $xRy$  gdy  $y = x^2$ .

*Przykład 66.* W teorii grafów relację binarną na zbiorze  $A$  nazywa się *grafem skierowanym* o wierzchołkach w zbiorze  $A$ .

**Zadanie 243.** Podaj intuicyjny sens poniższych relacji dwuargumentowych na zbiorze  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

a)	$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
	1	1	0	0	1	0	0
	2	1	0	0	1	0	0
	3	1	0	0	1	0	0
	4	1	0	0	1	0	0
	5	1	0	0	1	0	0
	6	1	0	0	1	0	0

b)	$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
	1	0	0	1	0	0	1
	2	0	1	0	0	1	0
	3	1	0	0	1	0	0
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	1	0	0	1	0
	6	1	0	0	1	0	0

c)

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

(Liczba 1 w tabelce oznacza, że dana para elementów należy do relacji, 0 zaś, że nie.)

**Definicja 67.** Relacja  $R \subseteq A \times A$  jest

- *zwrotna*, jeśli dla wszystkich  $a \in A$  zachodzi  $aRa$ ,
- *symetryczna*, jeśli dla wszystkich  $a, b \in A$  zachodzi implikacja  $aRb \Rightarrow bRa$ ,
- *przechodnia*, jeśli dla wszystkich  $a, b, c \in A$  zachodzi  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ .
- *antyzwrotna*, jeśli dla wszystkich  $a \in A$  zachodzi  $\neg aRa$ ,
- *antysymetryczna*, jeśli dla wszystkich  $a, b \in A$  zachodzi implikacja  $aRb \Rightarrow \neg bRa$ ,
- *słabo antisymetryczna*, jeśli dla wszystkich  $a, b \in A$  zachodzi implikacja  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ ,

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy *relacją równoważności*. Relację zwrotną, przechodnią i słabo antisymetryczną nazywamy *relacją częściowego porządku*.

**Zadanie 244.** Niech dla relacji  $R$

- $Z(R)$  oznacza, że  $R$  jest zwrotna,
- $S(R)$  oznacza, że  $R$  jest symetryczna,
- $P(R)$  oznacza, że  $R$  jest przechodnia,
- $A(R)$  oznacza, że  $R$  jest słabo antisymetryczna.

Podaj przykłady relacji  $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$  takich, że zachodzi

1.  $Z(R_1) \wedge S(R_1) \wedge P(R_1)$ ,
2.  $Z(R_2) \wedge P(R_2) \wedge \neg S(R_2)$ ,
3.  $Z(R_3) \wedge S(R_3) \wedge P(R_3) \wedge A(R_3)$ ,
4.  $\neg Z(R_4) \wedge \neg A(R_4) \wedge P(R_4)$ .

### 5.3. Krotki ( $n$ -tki) uporządkowane i relacje $n$ -argumentowe

Pojęcie pary łatwo uogólnić na ciągi uporządkowane dowolnej, skończonej długości, które będziemy nazywać *krotkami* ( $n$ -tkami). Zakładamy, że  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  jest pojęciem pierwotnym i przyjmujemy:

**Aksjomat 68.**  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$ .

Krotki można również *zdefiniować* za pomocą pojęcia pary: krotka dwuelementowa jest parą, krotka  $n + 1$ -elementowa jest parą złożoną z pierwszego elementu i krotki  $n$ -elementowej:

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_0, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$$

**Definicja 69.** W oczywisty sposób uogólniamy pojęcie *produktu* na  $n$  zbiorów:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}.$$

Dla  $n \geq 2$  zamiast

$$\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ razy}}$$

piszemy w skrócie  $A^n$ . Przyjmujemy dodatkowo, że  $A^1 = A$ .

**Definicja 70.** *Relacją  $n$ -argumentową* nazywamy dowolny podzbiór produktu  $n$  zbiorów.

Dla przykładu

$$\{ \langle a, b, c \rangle \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b = c \} \quad \text{oraz} \quad \{ \langle a, b, c \rangle \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b < c \}$$

są relacjami trójargumentowymi na zbiorze  $\mathbb{N}$ .

**Zadanie 245.** Ile jest relacji  $n$ -argumentowych na zbiorze 5-elementowym?

### 5.4. Złożenie relacji. Relacja odwrotna

**Definicja 71.** Dane są relacje  $P \subseteq A \times B$  i  $Q \subseteq B \times C$ . Relacja

$$QP = \{ \langle a, c \rangle \mid \exists b (aPb \wedge bQc) \} \subseteq A \times C$$

nazywa się *złożeniem* relacji  $P$  i  $Q$ . Relacja

$$P^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in P \} \subseteq B \times A$$

nazywa się *relacją odwrotną* do  $P$ .

**Zadanie 246.** Niech  $A$  będzie ustalonym niepustym zbiorem. Czy prawdą jest, że dla dowolnej relacji  $R \subseteq A^2$  zachodzi

$$\phi(R) \Rightarrow \phi(RR),$$

gdzie  $RR$  oznacza złożenie relacji  $R$  ze sobą, a  $\phi(R)$  oznacza, że relacja  $R$  jest

1. zwrotna na zbiorze  $A$ ,
2. symetryczna na zbiorze  $A$ ,
3. przechodnia na zbiorze  $A$ ,
4. antysymetryczna na zbiorze  $A$ .

**Zadanie 247.** Niech  $R$  będzie relacją binarną. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

1.  $RR \subseteq R$ ,
2.  $RR = R$ ,
3.  $RR \supseteq R$ ,

jeżeli relacja  $R$  jest

1. zwrotna?
2. symetryczna?
3. przechodnia?

**Twierdzenie 72.** Dla dowolnych relacji  $R \subseteq A \times B$ ,  $S \subseteq B \times C$  i  $T \subseteq C \times D$ :

$$\begin{aligned}(TS)R &= T(SR) \\ (SR)^{-1} &= R^{-1}S^{-1}\end{aligned}$$

Dla relacji  $R \subseteq A^2$  definiujemy  $R^1 = R$  oraz  $R^{n+1} = R^n R$  dla  $n \geq 1$ .

**Zadanie 248.** Oblicz  $R^2 = RR$ ,  $R^3$  i  $R^4$  dla relacji z zadania 243.

**Zadanie 249.** Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{aligned}(TS)R &= T(SR) \\ (SR)^{-1} &= R^{-1}S^{-1} \\ (R \cup S)^{-1} &= R^{-1} \cup S^{-1} \\ (R \cap S)^{-1} &= R^{-1} \cap S^{-1} \\ (R^{-1})^{-1} &= R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(R \cup S) &= TR \cup TS \\
T(R \cap S) &\subseteq TR \cap TS \\
(T(R \cup S))^{-1} &= R^{-1}T^{-1} \cup S^{-1}T^{-1} \\
(A \times B)^{-1} &= B \times A \\
(A \times B)(C \times D) &= ?
\end{aligned}$$

**Zadanie 250.** Wykaż, że jeśli  $R$  jest relacją zwrotną i przechodnią, to  $R^n = R$  dla każdego  $n \geq 1$ .

**Zadanie 251.** Niech  $R \subseteq A^2$  będzie dowolną relacją i niech  $R^0$  będzie relacją równości na  $A$  (to znaczy  $\langle x, y \rangle \in R^0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ ). Wykaż, że  $R \cup R^0 \cup R^{-1}$  jest relacją zwrotną i symetryczną.

**Zadanie 252.** Niech  $R \subseteq A^2$  będzie pewną relacją binarną na zbiorze  $A$  oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{S \subseteq A^2 \mid S \text{ jest przechodnia} \wedge R \subseteq S\}, \\
R^+ &= \bigcap \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Pokaż, że

1.  $R \subseteq R^+$ ,
2. jeśli  $S$  jest relacją przechodnią taką, że  $R \subseteq S$ , to  $R^+ \subseteq S$ ,
3.  $R^+$  jest relacją przechodnią.

Relacja  $R^+$  jest zatem najmniejszą (w sensie zawierania zbiorów) relacją przechodnią zawierającą relację  $R$ .

**Definicja 73.** Relację  $R^+$  nazywamy *przechodnim (tranzytywnym) domknięciem*  $R$ .

**Zadanie 253.** Niech  $Q \subseteq A^2$  będzie dowolną relacją. Kładziemy  $\bar{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$ . Wykaż, że  $\bar{Q}$  jest relacją przechodnią.

**Zadanie 254.** Wykaż, że relacja  $\bar{Q}$  z poprzedniego zadania jest przechodnim domknięciem relacji  $Q$ .

## 5.5. Relacyjny rachunek dziedzin

*Relacyjny rachunek dziedzin* to jeden z języków zapytań używanych w teorii relacyjnych baz danych. Zapytania w tym języku są wyrażeniami postaci

$$\{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \phi\}$$

gdzie  $\phi$  jest formułą logiki I rzędu.

W zadaniach poniżej rozważmy skończone zbiory osób  $O$ , barów  $B$  i soków  $S$  oraz relacje  $Bywa \subseteq O \times B$ ,  $Lubi \subseteq O \times S$  i  $Podają \subseteq B \times S$  informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. Wtedy np. zapytanie

$$\{x \mid Lubi(x, \text{malinowy}) \wedge \exists b \text{ Podają}(b, \text{malinowy}) \wedge Bywa(x, b)\}$$

oznacza wykaz osób, które lubią sok malinowy i bywają w jakimś barze, w którym jest on podawany.

**Zadanie 255.** Wyraż w relacyjnym rachunku dziedzin następujące zapytania:

- wykaz osób, które lubią wszystkie soki podawane we wszystkich barach, w których bywają;
- wykaz osób, które bywają tylko w takich barach, w których podawane są wszystkie soki lubiane przez te osoby;
- wykaz osób, które bywają tylko w takich barach, w których mogą się czegoś napić.<sup>1</sup>

**Zadanie 256.** Wyraż w relacyjnym rachunku dziedzin następujące zapytania:

- wykaz soków podawanych w barze *Jagódka*, których nie lubi żadna osoba bywająca w tym barze.
- wykaz soków lubianych tylko przez osoby bywające w barze *Jagódka*.
- wykaz soków lubianych przez wszystkie osoby bywające w barze *Jagódka*.
- wykaz soków lubianych przez osoby bywające we wszystkich barach, w których podaje się jakiegokolwiek sok.

---

<sup>1</sup>bardziej formalnie, przez *osoba o może się czegoś napić w barze b* rozumiemy, że w barze  $b$  jest podawany jakiś sok lubiany przez osobę  $o$ .





# 6

## Funkcje

**Definicja 74.** Relację  $f \subseteq A \times B$  nazywamy *funkcją o dziedzinie  $A$  i zbiorze wartości (przeciwdziedzinie)  $B$* , jeżeli spełnia ona dwa warunki

1. dla każdego  $a \in A$  istnieje taki  $b \in B$ , że  $\langle a, b \rangle \in f$ ,
2. dla dowolnych  $a \in A$  oraz  $b_1, b_2 \in B$ , jeśli  $\langle a, b_1 \rangle \in f$  oraz  $\langle a, b_2 \rangle \in f$ , to  $b_1 = b_2$ .

Zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie  $A$  i przeciwdziedzinie  $B$  oznaczamy  $B^A$ .

Relację spełniającą jedynie warunek 2 nazywamy *funkcją częściową*. Dziedziną funkcji częściowej  $f$  nazywamy zbiór

$$\text{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists b \in B \langle a, b \rangle \in f\}.$$

Zamiast  $f \in B^A$  piszemy zwykle  $f : A \rightarrow B$ . Napis  $f(a)$  oznacza taki element  $b$ , że  $\langle a, b \rangle \in f$  (jeśli relacja  $f$  jest funkcją, to dla każdego  $a$  taki element  $b$  istnieje i jest dokładnie jeden, oznaczenie  $f(a)$  jest więc jednoznaczne).

*Pytanie 75.* Ile jest funkcji  $f : A \rightarrow B$ ? Ile jest funkcji  $f : \emptyset \rightarrow B$ , a ile  $f : A \rightarrow \emptyset$ ?

Z pomocą pojęcia funkcji możemy jeszcze inaczej zdefiniować  $n$ -tki uporządkowane:  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  jest funkcją  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ . Wówczas  $f(i)$  jest  $i$ -tym elementem krotki.

**Definicja 76.** Funkcja  $f : A \rightarrow B$  jest *różnowartościowa* (jest *iniekcją*), jeżeli

$$\text{dla dowolnych } a_1, a_2 \in A, \text{ jeśli } a_1 \neq a_2, \text{ to } f(a_1) \neq f(a_2).$$

Funkcja  $f : A \rightarrow B$  jest „na” (jest *surjekcją*), jeżeli

$$\text{dla dowolnego } b \in B \text{ istnieje taki } a \in A, \text{ że } f(a) = b.$$

Funkcja  $f$  jest *odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym* (*bijekcją*), jeśli jest różnowartościowa i „na”.

**Zadanie 257.** Które spośród relacji z zadania 243 są funkcjami?

W poniższych zadaniach skonstruuj bijekcje  $f$ ,  $g$  oraz  $h$  o podanych dziedzinach i przeciwdziedzinach. Nie zapomnij uzasadnić, że skonstruowane funkcje są bijekcjami.

**Zadanie 258.**

1.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
2.  $g : ((0, 1) \times (2, 3)) \rightarrow (0, 2) \times (5, 6)$
3.  $h : (\mathbb{Z} \times [0, 1)) \rightarrow \mathbb{R}$

**Zadanie 259.**

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ ,
2.  $g : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ ,
3.  $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{3, 4\}^{\mathbb{P}}$ .

Tutaj  $\mathbb{P}$  oznacza zbiór liczb parzystych, czyli  $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ n = 2k\}$ .

## 6.1. Funkcje odwrotne i złożenie funkcji

**Twierdzenie 77.** Niech dane będą funkcje  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow C$ . Wówczas relacja  $gf \subseteq A \times C$  jest funkcją z  $A$  w  $C$  oraz  $(gf)(a) = g(f(a))$  dla każdego  $a \in A$ . Jeżeli ponadto obie funkcje  $f$  i  $g$  są różnowartościowe, to  $gf$  też jest różnowartościowa. Jeżeli obie funkcje  $f$  i  $g$  są „na”, to  $gf$  też jest „na”.

**Definicja 78.** Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie funkcją. Wtedy funkcja  $g : B \rightarrow A$  jest *funkcją odwrotną* do  $f$ , jeśli  $gf = I_A$  oraz  $fg = I_B$  (gdzie  $I_A, I_B$  oznaczają funkcje identycznościowe odpowiednio na zbiorach  $A$  i  $B$ ).

**Twierdzenie 79.** Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.  $f$  ma funkcję odwrotną,
2.  $f$  jest bijekcją,
3. relacja odwrotna  $f^{-1}$  jest funkcją określoną na zbiorze  $B$ .

Funkcję odwrotną do  $f$  oznaczamy  $f^{-1}$ .

**Zadanie 260.** Niech  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow C$ . Które z poniższych implikacji są prawdziwe?

1. Jeżeli  $gf$  jest „na”, to  $f$  jest „na”.
2. Jeżeli  $gf$  jest „na”, to  $g$  jest „na”.
3. Jeżeli  $gf$  jest różnowartościowa, to  $f$  jest różnowartościowa.
4. Jeżeli  $gf$  jest różnowartościowa, to  $g$  jest różnowartościowa.

## 6.2. Obraz i przeciwobraz zbioru

**Definicja 80.** Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie funkcją i niech  $X \subseteq A$ . *Obrazem zbioru  $X$  w odwzorowaniu  $f$*  nazywamy zbiór

$$f[X] = \{b \in B \mid \exists a \in X \ f(a) = b\}.$$

*Przeciwobrazem zbioru  $Y \subseteq B$  w odwzorowaniu  $f$*  nazywamy zbiór

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

W literaturze często można spotkać inne oznaczenia obrazu i przeciwobrazu zbioru, np.  $f(X)$ ,  $f^{-1}(Y)$  i  $\vec{f}(X)$ ,  $\vec{f}^{-1}(Y)$ .

**Twierdzenie 81.** Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie funkcją,  $\mathcal{X}$  rodziną podzbiorów zbioru  $A$ , zaś  $\mathcal{Y}$  rodziną podzbiorów zbioru  $B$ . Wtedy

$$f\left[\bigcup \mathcal{X}\right] = \bigcup \{f[X] \mid X \in \mathcal{X}\} \quad (1)$$

$$\text{Jeśli } \mathcal{X} \neq \emptyset, \text{ to } f\left[\bigcap \mathcal{X}\right] \subseteq \bigcap \{f[X] \mid X \in \mathcal{X}\} \quad (2)$$

$$f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{Y}\right] = \bigcup \{f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{Y}\} \quad (3)$$

$$\text{Jeśli } \mathcal{Y} \neq \emptyset, \text{ to } f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{Y}\right] = \bigcap \{f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{Y}\} \quad (4)$$

*Pytanie 82.* Czy symbol „ $\subseteq$ ” we wzorze (2) można zastąpić symbolem „ $=$ ”? Czy założenia o niepustości rodzin  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{Y}$  we wzorach (2) i (4) są potrzebne?

**Zadanie 261.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $A, B \subseteq X$ . Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$$

$$f[A \cap B] \quad ? \quad f[A] \cap f[B]$$

$$f^{-1}[f[A]] \quad ? \quad A$$

**Zadanie 262.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $C, D \subseteq Y$ . Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$$

$$f^{-1}[C \cup D] = ?$$

$$f[f^{-1}[C]] \quad ? \quad C$$

$$f[f^{-1}[C]] = ?$$

**Zadanie 263.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie bijekcją, a  $g : Y \rightarrow X$  funkcją odwrotną do  $f$ . Udowodnij, że  $f^{-1}[C] = g[C]$  dla dowolnego  $C \subseteq Y$ .

**Zadanie 264.** Rozważmy funkcję  $f : A \rightarrow B$  i zdefiniujmy funkcję  $g : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  wzorem

$$g(Y) = f^{-1}[Y].$$

Udowodnij, że  $g$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest „na”.

**Zadanie 265.** Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna monotoniczna bijekcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Zadanie 266.** Udowodnij, że jeśli  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow A$  są takimi funkcjami, że  $gf = I_A$  to  $f$  jest różnowartościowa a  $g$  jest „na”.

**Zadanie 267.** Udowodnij, że  $f : A \rightarrow B$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{-1}[f[X]] = X$  dla wszystkich zbiorów  $X \subseteq A$ .

**Zadanie 268.** Udowodnij, że  $f : A \rightarrow B$  jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy  $f[f^{-1}[Y]] = Y$  dla wszystkich zbiorów  $Y \subseteq B$ .

**Zadanie 269.** Rozważmy dowolną funkcję  $f : A \rightarrow B$ . Udowodnij, że  $f$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich podzbiorów  $X, Y$  zbioru  $A$  zachodzi równość

$$f[X] \cap f[Y] = f[X \cap Y].$$

**Zadanie 270.** Rozważmy dowolną funkcję  $f : A \rightarrow B$ . Udowodnij, że  $f$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich podzbiorów  $X, Y$  zbioru  $A$  zachodzi równość

$$f[X] \setminus f[Y] = f[X \setminus Y].$$

**Zadanie 271.** Podaj przykład takiej różnowartościowej funkcji  $f : A \rightarrow B$  oraz zbioru  $Y \subseteq B$ , że  $f[f^{-1}[Y]] \neq Y$ . Podaj przykład takiej funkcji „na”  $f : A \rightarrow B$  oraz zbioru  $X \subseteq A$ , że  $f^{-1}[f[X]] \neq X$ .

**Zadanie 272.** Czy dla wszystkich funkcji  $f : A \rightarrow B$  oraz zbiorów  $X \subseteq A$  i  $Y \subseteq B$  zachodzi równość  $f^{-1}[f[X] \setminus Y] = X \setminus f^{-1}[Y]$ ? Czy zachodzi inkluzja w którąś stronę? Czy odpowiedź zmienia się, jeśli założymy, że  $f$  jest różnowartościowa lub „na”?

**Zadanie 273.** Dla liczb naturalnych  $k$  niech  $k$  oznacza zbiór  $\{n \in \mathbb{N} \mid n < k\}$ . Rozważmy funkcje  $F : \underline{2013}^{\underline{2013}} \times \mathbb{N} \rightarrow \underline{2013}^{\underline{2013}}$  i  $G : \underline{2013}^{\underline{2013}} \times \mathbb{N} \rightarrow \underline{2013}^{\underline{2013}}$

zadane wzorami

$$\begin{aligned}F(f, 0) &= id_{\underline{2013}} \\F(f, n + 1) &= f \cdot F(f, n) \\G(f, 0) &= id_{\underline{2013}} \\G(f, n + 1) &= G(f, n) \cdot f\end{aligned}$$

gdzie  $id_{\underline{2013}} : \underline{2013} \rightarrow \underline{2013}$  jest funkcją identycznościową zbioru  $\underline{2013}$  a  $\cdot$  oznacza złożenie funkcji. Udowodnij, że  $F = G$ .



# Relacje równoważności

**Definicja 83.** *Klasą abstrakcji* elementu  $a \in A$  względem relacji równoważności  $\sim \subseteq A \times A$  nazywamy zbiór

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Rodzinę zbiorów  $A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$  nazywamy zbiorem ilorazowym relacji  $\sim$ .

**Definicja 84.** Mówimy, że rodzina zbiorów  $\{X_i\}_{i \in I}$  jest *podziałem* zbioru  $A$ , jeśli

1. zbiory  $X_i$  są niepuste:

$$X_i \neq \emptyset \text{ dla każdego } i \in I,$$

2. zbiory  $X_i$  pokrywają zbiór  $A$ :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = A, \quad \text{oraz}$$

3. zbiory  $X_i$  są parami rozłączne:

$$X_i \cap X_j = \emptyset,$$

dla wszelkich takich  $i, j \in I$ , że  $X_i \neq X_j$ .

**Lemat 85.** Dla dowolnej relacji równoważności  $\sim \subseteq A \times A$  i elementów  $a, b \in A$

$$a \sim b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad [a]_{\sim} = [b]_{\sim}.$$

**Twierdzenie 86 (Zasada Abstrakcji).**

1. Klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważności na zbiorze  $A$  tworzą podział zbioru  $A$ .
2. Dla każdego podziału zbioru  $A$  istnieje dokładnie jedna relacja równoważności, której klasy abstrakcji tworzą ten podział.

**Przykład 87.** Definiujemy relację  $\sim \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))^2$  wzorem

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} a \cdot d = b \cdot c.$$

Relacja  $\sim$  jest relacją równoważności na  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ . Dowód polega na sprawdzeniu wprost z definicji, że  $\sim$  jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

**Zadanie 274.** Używając kwantyfikatorów, spójników logicznych  $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , oraz wyrażeń postaci  $x \in A, x \notin A, R(x, y)$  i  $\neg R(x, y)$  zapisz, że relacja  $R$  nie jest relacją równoważności na zbiorze  $A$ .

**Definicja 88.** Niech dane będą dwa podziały  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$  zbioru  $A$ . Mówimy, że podział  $\mathcal{P}_1$  jest *drobniejszy* od podziału  $\mathcal{P}_2$ , jeśli dla każdego  $X \in \mathcal{P}_1$  istnieje taki  $Y \in \mathcal{P}_2$ , że  $X \subseteq Y$ .

**Zadanie 275.** Napisz bez używania znaku negacji formuły mówiące, że

1. Rodzina  $\{X_i\}_{i \in I}$  nie jest podziałem zbioru  $A$ . Wolno używać symbolu  $\neq$ .
2. Podział  $\mathcal{P}_1$  nie jest drobniejszy od podziału  $\mathcal{P}_2$ . Wolno używać symbolu  $\not\subseteq$ .

**Zadanie 276.** Wykaż, że jeśli podział  $\mathcal{P}_1$  jest drobniejszy od podziału  $\mathcal{P}_2$ , to dla każdego  $X \in \mathcal{P}_2$  istnieje rodzina  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_1$ , taka, że  $X = \bigcup \mathcal{R}$ .

**Zadanie 277.** Relacje  $R$  i  $S$  są relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Czy  $R \cup S, R \cap S, R \setminus S, R \div S$  też są relacjami równoważności?

**Zadanie 278.** Czy dla dowolnych relacji równoważności  $R$  i  $S$  na tym samym zbiorze, relacja  $SR$  też jest relacją równoważności?

**Zadanie 279.** Niech  $R$  i  $S$  będą relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Udowodnij, że  $R \cup S$  jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy  $R \cup S = RS$ .

**Zadanie 280.** Niech  $R$  i  $S$  będą dowolnymi relacjami równoważności na zbiorze  $A$ . Udowodnij, że  $R \cup S$  jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $a \in A$  zachodzi alternatywa  $[a]_R \subseteq [a]_S$  lub  $[a]_S \subseteq [a]_R$ .

**Zadanie 281.** Niech  $\mathcal{R}$  będzie pewną rodziną relacji równoważności określonych na pewnym zbiorze  $X$ . Czy  $\bigcup \mathcal{R}$  i  $\bigcap \mathcal{R}$  są relacjami równoważności na  $X$ ?

**Zadanie 282.** Niech  $R \subseteq A^2$  będzie pewną relacją binarną na zbiorze  $A$  oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{S \subseteq A^2 \mid S \text{ jest zwrotna i przechodnia} \wedge R \subseteq S\}, \\ R^* &= \bigcap \mathcal{T}. \end{aligned}$$



Pokaż, że

1.  $R \subseteq R^*$ ,
2. jeśli  $S$  jest relacją zwrotną i przechodnią taką, że  $R \subseteq S$ , to  $R^* \subseteq S$ ,
3.  $R^*$  jest relacją zwrotną i przechodnią.

Relacja  $R^*$  jest zatem najmniejszą (w sensie zawierania zbiorów) relacją zwrotną i przechodnią zawierającą relację  $R$ .

**Definicja 89.** Relację  $R^*$  nazywamy *zwrotnym i przechodnim domknięciem*  $R$ .

**Zadanie 283.** Niech  $Q \subseteq A^2$  będzie dowolną relacją,  $Q^0 = I$ , gdzie  $I$  jest relacją równości na  $A$  i niech  $Q^{n+1} = Q^n Q$  dla  $n \geq 0$ . Kładziemy  $\hat{Q} = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q^n$ . Wykaż, że  $\hat{Q}$  jest relacją zwrotną i przechodnią.

**Zadanie 284.** Wykaż, że relacja  $\hat{Q}$  z poprzedniego zadania jest zwrotnym i przechodnim domknięciem relacji  $Q$ .

**Zadanie 285.** Korzystając z zadań poprzednich wykaż, że jeśli  $R$  jest dowolną relacją oraz  $Q = R \cup R^{-1}$ , to  $Q^*$  jest relacją równoważności.

**Zadanie 286.** Udowodnij, że jeśli  $R$  jest dowolną relacją oraz  $Q = R \cup R^{-1}$ , to  $Q^*$  jest najmniejszą (w sensie relacji inkluzji) relacją równoważności zawierającą relację  $R$ .

**Zadanie 287.** Udowodnij, że jeżeli  $R$  jest relacją taką, że  $R^*$  zawiera  $R^{-1}$ , to  $R^*$  jest relacją równoważności.

**Zadanie 288.** Dane jest przekształcenie  $f : A \rightarrow B$ . W zbiorze  $A$  definiujemy relację  $\sim$  wzorem

$$x \sim y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y).$$

Udowodnij, że  $\sim$  jest relacją równoważności. Jakie są klasy abstrakcji tej relacji? Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, by  $\sim$  była identycznością na  $A$ .

**Zadanie 289.** Dane jest przekształcenie  $f : A \rightarrow B$  oraz relacja równoważności  $R$  na  $B$ . W zbiorze  $A$  definiujemy relację  $\sim$  wzorem

$$x \sim y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \langle f(x), f(y) \rangle \in R.$$

Udowodnij, że  $\sim$  jest relacją równoważności.

**Zadanie 290.** Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze czteroelementowym? Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze sześćelementowym?

**Zadanie 291.** W zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  definiujemy relacje  $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$  w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} f R_1 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } f(57) = g(57), \\ f R_2 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } f(57) - g(57) \text{ jest podzielne przez } 57, \\ f R_3 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } f(n) = g(n) \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}, \\ f R_4 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } f(n) \neq g(n) \text{ dla skończenie wielu } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Która z relacji  $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$  jest relacją równoważności?

**Zadanie 292.** Sprawdź, dla jakich dodatnich liczb naturalnych  $k$  podane relacje na zbiorze  $\mathbb{N}$  są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji. Napisz  $k \mid m$  oznacza, że  $m$  jest podzielne przez  $k$ .

1.  $x R_1 y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} k \mid (x + y)$
2.  $x R_2 y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} k \mid (x - y)$
3.  $x R_3 y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x - y = k$

**Zadanie 293.** Czy relacja  $R$  określona na zbiorze wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach naturalnych wzorem

$$p R q \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \text{wielomian } p - q \text{ ma wszystkie współczynniki parzyste}$$

jest relacją równoważności?

**Zadanie 294.** Dany jest zbiór  $X$  i jego podzbiór  $C \subseteq X$ . Czy relacja  $R$  określona na  $\mathcal{P}(X)$  wzorem

$$A R B \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} A \div B \subseteq C$$

jest relacją równoważności? Jeśli tak, opisz jej klasy abstrakcji.

**Zadanie 295.** W zbiorze wszystkich zbieżnych ciągów nieskończonych o wyrazach wymiernych wprowadzamy relację

$$\bar{a} R \bar{b} \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

Pokaż, że  $R$  jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

W poniższych zadaniach udowodnij, że podane relacje  $R \subseteq X \times X$  są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji.

**Zadanie 296.**  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,

$$ARB \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} A \dot{-} B \text{ jest zbiorem skończonym.}$$

**Zadanie 297.**  $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

**Zadanie 298.**  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

**Zadanie 299.**  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} |x_1| + |y_1| = |x_2| + |y_2|.$$

**Zadanie 300.**  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,

$$R = \{ \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A = B \vee 0 \notin A \cup B \}.$$

**Zadanie 301.** Na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  określamy relację równoważności  $\sim$  wzorem

$$X \sim Y \quad \text{wtw} \quad X \dot{-} Y \text{ jest zbiorem skończonym}$$

(patrz zadanie 296). W zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$  definiujemy działania

$$[X]_{\sim} \sqcup [Y]_{\sim} = [X \cup Y]_{\sim}$$

$$[X]_{\sim} \cap [Y]_{\sim} = [X \cap Y]_{\sim}$$

$$[X]_{\sim} - [Y]_{\sim} = [X \setminus Y]_{\sim}$$

Czy powyższe definicje są poprawne?

**Zadanie 302.** W zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  wprowadzamy taką relację  $\sim$ , że  $x \sim y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ . Udowodnij, że  $\sim$  jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

**Zadanie 303.** W zbiorze  $\mathbb{R}/\sim$ , gdzie  $\sim$  jest relacją z zadania 302, definiujemy działania arytmetyczne:  $[x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x + y]_{\sim}$  oraz  $[x]_{\sim} \cdot [y]_{\sim} = [x \cdot y]_{\sim}$ . Czy powyższe definicje są poprawne?

**Zadanie 304.** W zbiorze  $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ , gdzie  $\sim$  jest relacją z Przykładu 87, definiujemy działania arytmetyczne:  $[\langle a, b \rangle]_{\sim} + [\langle c, d \rangle]_{\sim} = [\langle a + c, b + d \rangle]_{\sim}$  oraz  $[\langle a, b \rangle]_{\sim} \cdot [\langle c, d \rangle]_{\sim} = [\langle a \cdot c, b \cdot d \rangle]_{\sim}$ . Czy powyższe definicje są poprawne?

**Zadanie 305.** Czy w zbiorze  $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ , gdzie  $\sim$  jest relacją z Przykładu 87, można tak zdefiniować działanie arytmetyczne  $\oplus$ , aby dla dowolnych trzech liczb wymiernych w postaci ułamków  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \in \mathbb{Q}$  spełniających warunek  $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$  zachodziła równość  $[\langle p_1, q_1 \rangle]_{\sim} \oplus [\langle p_2, q_2 \rangle]_{\sim} = [\langle p_3, q_3 \rangle]_{\sim}$ ?

**Zadanie 306.** W zbiorze  $\mathbb{N}/R_2$ , gdzie  $R_2$  jest relacją zdefiniowaną w zadaniu 292 definiujemy działania  $+_k$  i  $\cdot_k$  wzorami

$$\begin{aligned} [x]_{R_2} +_k [y]_{R_2} &= [x + y]_{R_2} \\ [x]_{R_2} \cdot_k [y]_{R_2} &= [xy]_{R_2} \end{aligned}$$

Sprawdź, dla jakich liczb  $k$  te definicje są poprawne.

# 8

## Teoria mocy

### 8.1. Równoliczność zbiorów

**Definicja 90.** Zbiory  $A$  i  $B$  są równoliczne, jeżeli istnieje bijekcja  $f : A \rightarrow B$ . Piszemy wówczas  $A \sim B$ .

*Przykład 91.* Następujące zbiory są równoliczne:

- zbiór par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ;
- zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych parzystych:  $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$ ;
- dowolny niepusty przedział  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  i odcinek  $(0, 1)$ :  $(a, b) \sim (0, 1)$ .

Niech  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{R}$  oznaczają zbiory, odpowiednio, liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych,  $m \perp n$  oznacza, że  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze oraz

$(a, b)$	oznacza zbiór	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ,
$[a, b)$	oznacza zbiór	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ,
$(a, b]$	oznacza zbiór	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ,
$[a, b]$	oznacza zbiór	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ,
$(a, \infty)$	oznacza zbiór	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ ,
$O((a, b), r)$	oznacza zbiór	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ ,
$\mathbb{N}^+$	oznacza zbiór	$\{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ ,
$\mathbb{Q}^+$	oznacza zbiór	$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ .

Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnij, że zbiory podane w poniższych zadaniach są równoliczne.

**Zadanie 307.**  $[0, 1)$  oraz  $O((0, 0), 1)$

**Zadanie 308.**  $(0, 1)$  oraz  $\mathbb{R}$

**Zadanie 309.**  $[0, 1)$  oraz  $[0, \infty)$

**Zadanie 310.**  $(0, 1)$  oraz  $[0, 1)$

**Zadanie 311.**  $[0, 1)$  oraz  $\mathbb{R}$

**Zadanie 312.**  $[0, 1)$  oraz  $(0, \infty)$

**Zadanie 313.**  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

**Zadanie 314.**  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{Q}^+$

**Zadanie 315.**  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$

**Zadanie 316.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{Z}$

**Zadanie 317.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{N}^2$

**Zadanie 318.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{N}^3$

**Zadanie 319.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid m \perp n\}$

**Zadanie 320.**  $\{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid m \perp n\}$  oraz  $\mathbb{Q}^+$

**Zadanie 321.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{Q}$

**Zadanie 322.**  $\mathbb{Z} \times ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$  oraz  $\mathbb{Q}$

**Zadanie 323.**  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

**Zadanie 324.**  $(0, 1] \times \mathbb{Z}$  oraz  $\mathbb{R}$

**Zadanie 325.**  $(0, 1) \times (0, 1)$  oraz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

**Zadanie 326.**  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  oraz  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

**Zadanie 327.**  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  oraz  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

**Zadanie 328.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ jest nierosnąca}\}$

**Zadanie 329.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \mid f \text{ jest niemalejąca}\}$

**Zadanie 330.**  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$  oraz  $\mathbb{Z}$

**Zadanie 331.**  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

**Zadanie 332.**  $(0, 1)$  oraz  $(0, 1) \times (0, 1)$

**Zadanie 333.**  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

**Zadanie 334.**  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

**Zadanie 335.**  $[0, 1] \times \mathcal{P}([2, 3])$  oraz  $\mathcal{P}([0, 1]) \times [2, 3]$

**Zadanie 336.** Niech  $R_1$  i  $R_2$  będą takimi relacjami równoważności na  $A$ , że  $R_1 \cap R_2 = I_A$  oraz  $R_1 R_2 = A \times A$  (tutaj  $I_A$  jest relacją identyczności na zbiorze  $A$ ). Dla  $i \in \{1, 2\}$  niech  $A/R_i$  będzie rodziną klas abstrakcji relacji  $R_i$ , tzn.  $A/R_i = \{[a]_{R_i} \mid a \in A\}$ . Udowodnij, że zbiór  $A$  jest równoliczny z produktem kartezjańskim  $A/R_1 \times A/R_2$ .

## 8.2. Własności pojęcia równoliczności zbiorów

**Twierdzenie 92.** Dla dowolnych zbiorów  $A, B, C$

1.  $A \sim A$ ,
2. Jeśli  $A \sim B$  to  $B \sim A$ ,
3. Jeśli  $A \sim B$  oraz  $B \sim C$  to  $A \sim C$ .

**Zadanie 337.** Wykaż, że jeśli  $A_1 \sim A_2$ , to

$$\mathcal{P}(A_1) \sim \mathcal{P}(A_2), \quad (1)$$

$$B^{A_1} \sim B^{A_2}, \quad (2)$$

$$A_1^B \sim A_2^B, \quad (3)$$

$$A_1 \times B \sim A_2 \times B. \quad (4)$$

**Zadanie 338.** Wykaż, że

$$(A^B)^C \sim A^{(B \times C)}, \quad (1)$$

$$(A \times B)^C \sim A^C \times B^C, \quad (2)$$

$$A \times \{a\} \sim A, \quad (3)$$

$$A^{\{a\}} \sim A, \quad (4)$$

dla dowolnych zbiorów  $A, B, C$  i jednoelementowego zbioru  $\{a\}$ .

**Zadanie 339.** Wykaż, że jeśli  $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$  oraz  $A_1 \sim A_2$  i  $B_1 \sim B_2$ , to

$$A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2, \quad (1)$$

$$C^{A_1 \cup B_1} \sim C^{A_2} \times C^{B_2}. \quad (2)$$

Powyższe własności uwalniają nas od konieczności żmudnego konstruowania odpowiednich bijekcji, pozwalając w łatwy sposób wyprowadzać nowe fakty na temat równoliczności zbiorów z już poznanych. Dla przykładu skoro  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$  (zadanie 321), to na mocy własności (2) z zadania 337 wnioskujemy, że  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ .

**Zadanie 340.** Przyjmując za wiadome, że  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  udowodnij, że  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ .

**Zadanie 341.** Dla jakich zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

1.  $A^B \sim B^A$ ?
2.  $A^{B \cup C} \sim A^B \cup A^C$ ?

**Zadanie 342.** Czy istnieją takie zbiory  $A, B, C, D$ , że  $A \not\sim B$  oraz  $C \not\sim D$ , ale  $A^C \sim B^D$ ?

### 8.3. Zbiory skończone

**Definicja 93.** Napis  $\underline{n}$  oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od  $n$ , tj. zbiór  $= \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Definicja 94.** Zbiór  $A$  jest *zbiorem skończonym*, jeśli istnieje taka liczba naturalna  $n \in \mathbb{N}$ , że  $A \sim \underline{n}$ . Zbiór, który nie jest skończony nazywamy *nieskończonym*.

**Twierdzenie 95.**

1. Dla żadnego  $n \in \mathbb{N}$  nie istnieje funkcja różnowartościowa z  $\underline{n+1}$  w  $\underline{n}$ .
2. Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa z  $\underline{m}$  w  $\underline{n}$ , to  $\underline{m} \subseteq \underline{n}$ .
3. Jeżeli  $\underline{m} \sim \underline{n}$ , to  $m = n$ .
4. Dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  zachodzi  $\underline{m} \not\sim \mathbb{N}$ .

Jeśli więc zbiór  $A$  jest skończony, to istnieje dokładnie jedna taka liczba naturalna  $n$ , że  $A \sim \underline{n}$ .

**Definicja 96.** Niech  $A$  będzie zbiorem skończonym. Liczbę  $n$  taką, że  $A \sim \underline{n}$  nazywamy *liczbą elementów* zbioru  $A$  i oznaczamy  $|A|$ . Liczbę elementów zbioru  $|A|$  nazywamy też *mocą* zbioru  $A$  zwłaszcza gdy jednocześnie zajmujemy się zbiorami skończonymi i nieskończonymi.

Zbiór pusty ma zatem 0 elementów. Zbiór ma  $n$  elementów, jeżeli jego elementy można ponumerować bez powtórzeń liczbami  $0, \dots, n-1$ .

**Zadanie 343.** Udowodnij, że podzbiór zbioru skończonego jest skończony



**Zadanie 344.** Udowodnij, że suma dwóch skończonych zbiorów jest zbiorem skończonym.

**Zadanie 345.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych  $m, n \in \mathbb{N}$  jest

$$(\underline{m} \times \{0\}) \cup (\underline{n} \times \{1\}) \sim \underline{m+n}.$$

Wyprowadź stąd wniosek, że dla dowolnych skończonych rozłącznych zbiorów  $A$  i  $B$  zachodzi równość  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

**Zadanie 346.** Wykaż, że jeśli zbiory  $A$  i  $B$  są skończone, to  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

**Zadanie 347.** Wykaż, że jeśli zbiory  $A$  i  $B$  są skończone, to  $|A^B| = |A|^{|B|}$ .

**Zadanie 348.** Niech  $A^1 = A$  oraz  $A^{n+1} = A^n \times A$ . Wykaż, że  $A^n \sim A^n$ .

**Zadanie 349.** Niech  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  będzie rodziną podzbiorów zbioru  $X$ . Niech (1) oznacza, że  $A_0$  jest zbiorem skończonym, oraz (2) oznacza, że dla każdego  $n$  zachodzi  $\bigcap_{i=0}^n A_i \neq \emptyset$ . Pokaż, że: a) jeśli zachodzi (1) i (2), to  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ , b) istnieje taka rodzina zbiorów  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  spełniająca warunek (2), że  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$ .

**Zadanie 350.** Niech  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  będzie rodziną skończonych podzbiorów zbioru  $X$ , taką, że  $A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_k} \neq \emptyset$  dla dowolnych  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ . Pokaż, że  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ .

**Zadanie 351.** Dane są dwie funkcje  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow A$ , obie typu „na”.

1. Czy z powyższych założeń wynika, że  $f$  i  $g$  są bijekcjami?
2. Jeśli dodatkowo  $A$  i  $B$  są zbiorami skończonymi, to czy wówczas  $f$  i  $g$  są bijekcjami?

**Zadanie 352.** Dane są zbiory  $A_1, \dots, A_n$ . Przypuśćmy, że  $\mathcal{R}$  jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że  $A_i \in \mathcal{R}$  dla  $i = 1, \dots, n$  oraz jeśli  $X, Y \in \mathcal{R}$ , to  $X \cup Y \in \mathcal{R}$ . Wyznacz maksymalną moc rodziny  $\mathcal{R}$ .

**Zadanie 353.** Dane są zbiory  $A_1, \dots, A_n$ . Przypuśćmy, że  $\mathcal{R}$  jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że  $A_i \in \mathcal{R}$  dla  $i = 1, \dots, n$  oraz jeśli  $X, Y \in \mathcal{R}$ , to  $X \cup Y \in \mathcal{R}$  i  $X \cap Y \in \mathcal{R}$ . Wyznacz maksymalną moc rodziny  $\mathcal{R}$ . Dla jakich zbiorów  $A_1, \dots, A_n$  wartość  $|\mathcal{R}|$  jest największa?

**Zadanie 354.** Dane są zbiory  $A_1, \dots, A_n$ . Przypuśćmy, że  $\mathcal{R}$  jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że  $A_i \in \mathcal{R}$  dla  $i = 1, \dots, n$  oraz jeśli  $X, Y \in \mathcal{R}$ , to  $X \cup Y \in \mathcal{R}$  i  $X \setminus Y \in \mathcal{R}$ . Wyznacz maksymalną moc rodziny  $\mathcal{R}$ . Dla jakich zbiorów  $A_1, \dots, A_n$  wartość  $|\mathcal{R}|$  jest największa?

**Definicja 97.** Przyjmujemy następujące oznaczenia: dla dowolnego zbioru  $X \subseteq A$  napis  $X^1$  oznacza zbiór  $X$ , zaś napis  $X^0$  oznacza dopełnienie zbioru  $X$  do zbioru  $A$ , tj. zbiór  $A \setminus X$ .

**Zadanie 355.** Dany jest zbiór  $A$  i dodatnia liczba naturalna  $k$  oraz takie zbiory  $X_i \subseteq A$  dla  $i = 1, \dots, k$ , że dla każdej funkcji  $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{0, 1\}$  zbiór  $\bigcap_{i=1}^k X_i^{f(i)}$  ma co najwyżej 1 element. Wyznacz maksymalną moc zbioru  $A$ .

**Definicja 98.** Mówimy, że funkcja dwuargumentowa  $f : A \times B \rightarrow C$  *istotnie zależy od każdego z argumentów*, jeśli istnieją takie elementy  $a \in A$  i  $b_1, b_2 \in B$ , że  $f(a, b_1) \neq f(a, b_2)$  oraz istnieją takie elementy  $a_1, a_2 \in A$  i  $b \in B$ , że  $f(a_1, b) \neq f(a_2, b)$ .

**Zadanie 356.** Ile jest dwuargumentowych funkcji logicznych istotnie zależnych od każdego z argumentów? Ile jest funkcji  $f : A \times B \rightarrow C$  istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów  $A, B, C$  ma 3 elementy?

**Zadanie 357.** Ile jest funkcji  $f : A \times B \rightarrow C$  istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów  $A, B$  ma 4 elementy, a  $C$  ma  $n$  elementów?

**Zadanie 358.** a) Na prywatce u Jurka jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z sześciu języków: polski, angielski, francuski, niemiecki, rosyjski i hiszpański. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Jurka zna co najmniej dwa języki. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Jurka.

b) Na prywatce u Agaty jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z  $n$  języków. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Agaty zna co najmniej jeden język. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Agaty.

**Zadanie 359.** Funkcję  $f$  określoną w pewnej dziedzinie  $\text{dom}(f) \subseteq \mathcal{P}(A)$  i przyjmującą wartości ze zbioru  $\{0, 1\}$  nazywamy *funkcją parzystości w zbiorze  $\mathcal{P}(A)$* , jeżeli

1. dla dowolnych  $X \in \text{dom}(f)$  i  $x \in A$  także  $X \cup \{x\} \in \text{dom}(f)$  oraz  $X \setminus \{x\} \in \text{dom}(f)$ ,
2.  $\emptyset \in \text{dom}(f)$  oraz  $f(\emptyset) = 0$ ,
3. dla dowolnego  $X \in \text{dom}(f)$  i dowolnego  $x \in A \setminus X$  zachodzi równość

$$f(X \cup \{x\}) = 1 - f(X).$$

Wykaż, że na zbiorze  $\mathcal{P}(A)$  istnieje dokładnie jedna funkcja parzystości wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest zbiorem skończonym.

**Zadanie 360.** Pokaż, że zbiór wartości dowolnej nierosnącej funkcji

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \left\{ n + \frac{m}{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

jest skończony.

### 8.3.1. Wzór włączeń i wyłączeń

**Zadanie 361.** Pośród członków pewnego klubu lingwistycznego każdy uczy się francuskiego, niemieckiego lub hiszpańskiego. Wiadomo, że 20 uczy się francuskiego, 12 francuskiego i hiszpańskiego, 16 niemieckiego, 16 hiszpańskiego, 4 francuskiego i niemieckiego, 7 niemieckiego i hiszpańskiego, 3 wszystkich trzech języków. Ilu członków liczy klub? Ilu z nich uczy się dokładnie dwóch języków?

**Zadanie 362.** Korzystając z tego, iż jeżeli zbiory skończone  $A$  i  $B$  są rozłączne, to  $|A \cup B| = |A| + |B|$  udowodnij, że dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  (niekoniecznie rozłącznych):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Zadanie 363.** Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych  $\{A_i\}_{i=1}^n$  jest prawdziwy tzw. *wzór włączeń i wyłączeń*:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=j}} (-1)^{j+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

**Zadanie 364.** Rodzina  $\{A_i\}_{i=1}^n$  jest rodziną zbiorów  $k$ -rozłącznych, jeśli dla każdego rosnącego ciągu liczb naturalnych  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  takiego, że  $i_k \leq n$ , mamy

$$\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = \emptyset.$$

Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych  $k$ -rozłącznych  $\{A_i\}_{i=1}^n$  jest prawdziwy wzór:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=j}} (-1)^{j+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

## 8.4. Moce zbiorów nieskończonych

Symbol  $|A|$  zdefiniowaliśmy jedynie dla zbiorów skończonych. W teorii mocy definiuje się obiekty oznaczające „liczbę elementów” zbiorów nieskończonych, zwane *liczbami kardynalnymi*. Pozwala to rozszerzyć odwzorowanie  $|\cdot|$  na zbiory nieskończone. Robimy to w ten sposób, że dwóm zbiorom przypisujemy tę samą liczbę kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te są równoliczne. Wartość  $|A|$  nazywamy wówczas *mocą* zbioru  $A$ . Moc zbioru liczb naturalnych (a więc i dowolnego zbioru równolicznego ze zbiorem liczb naturalnych) oznaczamy  $\aleph_0$  (czytamy „alef zero”). Poniżej pokazujemy, że  $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ . Moc zbioru liczb rzeczywistych nazywamy continuum i oznaczamy przez  $\mathfrak{c}$ . Mamy zatem  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ,  $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$  oraz  $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$ .

**Definicja 99.** Zbiór jest *przeliczalny*, jeśli jest skończony lub jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

**Definicja 100.** Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy *zbiorem mocy continuum*.

Nierównolicznych zbiorów nieskończonych jest nieskończenie wiele. Jest więc nieskończenie wiele różnych nieskończonych liczb kardynalnych. Można na nich określić operacje dodawania, mnożenia i potęgowania oraz relację porządku mające podobne własności, jak odpowiadające im operacje na liczbach naturalnych. Teoria takich liczb nazywa się *arytmetyką liczb kardynalnych*. Tak subtelne teorie mają jednak niewiele zastosowań w informatyce, dlatego nam wystarczą jedynie pojęcia równoliczności, przeliczalności i mocy continuum. Tam, gdzie nie jest to niezbędne, nie należy więc używać pojęcia mocy  $|A|$  zbioru  $A$  (formalnie nie zdefiniowaliśmy przecież tego obiektu!). W szczególności zamiast pisać  $|A| = |B|$  lepiej napisać  $A \sim B$ . Oba wyrażenia oznaczają bowiem, że zbiory  $A$  i  $B$  są równoliczne, drugie jednak nie odwołuje się do (dosyć skomplikowanego) pojęcia liczby kardynalnej.

**Definicja 101.** Mówimy, że moc zbioru  $A$  jest nie większa niż moc zbioru  $B$  i piszemy  $|A| \leq |B|$ , jeśli istnieje funkcja różnowartościowa  $f : A \rightarrow B$ .

**Definicja 102.** Mówimy, że moc zbioru  $A$  jest mniejsza niż moc zbioru  $B$  i piszemy  $|A| < |B|$ , jeśli  $|A| \leq |B|$  oraz  $A \not\sim B$ .

Uwagi na temat oznaczenia mocy  $|A|$  zbioru  $A$  dotyczą też porównywania mocy zbiorów. Symbolu  $\leq$  nie traktujemy jako binarnej relacji zachodzącej pomiędzy takimi obiektami  $|A|$  i  $|B|$ , same napisy  $|A|$  i  $|B|$  nie oznaczają niczego, zaś napis  $|A| \leq |B|$  oznacza jedynie, że zachodzi określona wyżej binarna relacja między zbiorami  $A$  i  $B$  (tj. że istnieje funkcja różnowartościowa  $f : A \rightarrow B$ ). Tak dziwny sposób zapisu tej relacji wynika z konwencji przyjętych w teorii mocy, w której napisy  $|A|$  i  $|B|$  faktycznie oznaczają pewne obiekty, zaś  $\leq$  oznacza obiekt „podobny” do relacji binarnej. Teorii tej nie będziemy tu jednak rozwijać.

**Twierdzenie 103.**

1. Dla dowolnego zbioru  $A$  zachodzi  $|A| \leq |A|$ .
2. Jeśli  $|A| \leq |B|$  i  $|B| \leq |C|$ , to  $|A| \leq |C|$ .
3. Jeśli  $n < m$ , to  $|\underline{n}| < |\underline{m}|$ .
4. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi  $|\underline{n}| < |\mathbb{N}|$ .

**Twierdzenie 104 (Cantor-Bernstein).** Jeśli  $|A| \leq |B|$  oraz  $|B| \leq |A|$ , to  $|A| = |B|$ .

**Twierdzenie 105.** Zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Zatem zbiór  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  ma moc continuum.

**Definicja 106.** Jeśli  $X \subseteq A$ , to  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$  jest *funkcją charakterystyczną* zbioru  $X$ , jeśli

$$f(a) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a \notin X, \\ 1, & \text{gdy } a \in X, \end{cases}$$

dla dowolnego  $a \in A$ .

**Fakt 107.** Dla dowolnego zbioru  $A$  zachodzi  $\underline{2}^A \sim \mathcal{P}(A)$ .

**Twierdzenie 108.** Niech  $A$  i  $B$  będą zbiorami, przy czym  $|B| \geq 2$ . Wtedy

$$|\mathcal{P}(A)| \leq |B^A|.$$

**Twierdzenie 109 (Cantor).** Dla żadnego zbioru  $A$  nie istnieje funkcja z  $A$  na zbiór potęgowy  $\mathcal{P}(A)$ .

**Dowód.** Przypuśćmy przeciwnie, że pewna funkcja  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  przekształca  $A$  na  $\mathcal{P}(A)$ . Niech

$$A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Ponieważ  $A_0 \subseteq A$  i  $f$  odwzorowuje  $A$  na  $\mathcal{P}(A)$ , więc istnieje takie  $a_0 \in A$ , że  $f(a_0) = A_0$ . Mamy wtedy

$$a_0 \in A_0 \Leftrightarrow a_0 \in f(a_0) \Leftrightarrow a_0 \notin A_0.$$

Założenie istnienia funkcji  $f$  doprowadziło do sprzeczności. ■

**Dowód (twierdzenia Cantora dla przypadku  $A = \mathbb{N}$ ).** Przypuśćmy przeciwnie, że pewna funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \underline{2}^{\mathbb{N}}$  przekształca  $\mathbb{N}$  na  $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ . Tworzymy nieskończoną tablicę

$(f(0))(0)$	$(f(0))(1)$	$(f(0))(2)$	$(f(0))(3)$	$(f(0))(4)$	$\dots$
$(f(1))(0)$	$(f(1))(1)$	$(f(1))(2)$	$(f(1))(3)$	$(f(1))(4)$	$\dots$
$(f(2))(0)$	$(f(2))(1)$	$(f(2))(2)$	$(f(2))(3)$	$(f(2))(4)$	$\dots$
$(f(3))(0)$	$(f(3))(1)$	$(f(3))(2)$	$(f(3))(3)$	$(f(3))(4)$	$\dots$
$(f(4))(0)$	$(f(4))(1)$	$(f(4))(2)$	$(f(4))(3)$	$(f(4))(4)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tworzymy nową funkcję charakterystyczną

$$g(i) = 1 - (f(i))(i)$$

dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $g \neq f(i)$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , gdyż  $g(i) = 1 - (f(i))(i) \neq (f(i))(i)$ . Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że  $f$  jest na. ■

**Twierdzenie 110.** Dla każdego  $A$  jest  $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ . Jeśli  $|B| \geq 2$ , to  $|B^A| > |A|$ .

**Zadanie 365.** Udowodnij, że  $1 \leq |A| \leq |B|$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja  $f : B \rightarrow A$ , która jest „na”. (Zadanie wymaga pewnika wyboru.)

**Zadanie 366.** Udowodnij, że jeżeli  $A \subseteq B$ , to  $|A| \leq |B|$ .

**Zadanie 367.** Czy  $A_1 \sim A_2$ ,  $B_1 \sim B_2$  i  $|A_1| \leq |B_1|$ , implikuje, że  $|A_2| \leq |B_2|$ ?

**Zadanie 368.** Udowodnij, że  $A$  jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podzbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, tj. gdy istnieje taki zbiór  $B \subseteq A$ , że  $B \sim \mathbb{N}$ . (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

**Zadanie 369.** Udowodnij, że  $A$  jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem, tj. gdy istnieje taki zbiór  $B \subseteq A$ , że  $B \neq A$  i  $A \sim B$ . (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

**Zadanie 370.** Udowodnij, że  $A$  jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory  $B$  i  $C$  takie, że  $B \cap C = \emptyset$ ,  $B \cup C = A$  i  $A \sim B \sim C$ . (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

**Zadanie 371.** Wykaż, że istnieje nieskończona rodzina zbiorów nieskończonych o tej własności, że żadne dwa spośród jej elementów nie są równoliczne.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina pozwala ustalać równoliczność zbiorów  $A$  i  $B$  za pomocą konstrukcji dwóch funkcji różnowartościowych  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow A$ . Zbudowanie takich funkcji jest często znacznie łatwiejsze niż skonstruowanie bijekcji przekształcającej zbiór  $A$  na  $B$ .

W poniższych zadaniach konstruując dwie funkcje różnowartościowe udowodnij równoliczność podanych zbiorów.

**Zadanie 372.**  $(0, 1]$  oraz  $(0, 1]^2$

**Zadanie 373.**  $(0, 1]$  oraz  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

**Zadanie 374.**  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

**Zadanie 375.**  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$  oraz  $\mathbb{Q}$

**Zadanie 376.**  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  oraz  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

**Zadanie 377.**  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

## 8.5. Wyznaczanie mocy zbiorów

**Zadanie 378.** Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej  $n$  zbiór  $\mathbb{R}^n$ , gdzie  $\mathbb{R}$  jest zbiorem liczb rzeczywistych, ma moc continuum.

**Zadanie 379.** Niech  $R_I(x, y)$  oznacza relację zdefiniowaną formułą

$$\exists p \in I ((\phi(p, x) \wedge \neg \phi(p, y)) \vee (\phi(p, y) \wedge \neg \phi(p, x)))$$

na  $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ , gdzie  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $I$  jest skończonym niepustym zbiorem liczb pierwszych, a  $\phi(x, y)$  jest formułą  $\exists z (x \cdot z = y)$ . Niech  $Q_I = (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \setminus R_I$ .

- Czy  $R_I$  jest relacją równoważności? Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji  $R_I$ .
- Czy  $Q_I$  jest relacją równoważności? Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji  $Q_I$ .

**Zadanie 380.** Dla danej funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiujemy zbiór

$$A_f = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 1\}.$$

Niech  $\mathcal{A} = \{A_f \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ . Znajdź moc zbiorów  $\mathcal{A}$  oraz  $\bigcup_{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_f$ .

**Zadanie 381.** Dla ciągu nieskończonego  $a = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$  o wyrazach naturalnych określamy relację  $R_a$  w taki sposób, że dla dwóch ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych  $b = \langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$  i  $c = \langle c_1, c_2, c_3, \dots \rangle$  zachodzi  $b R_a c$ , wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n \in \mathbb{N} (a_n = 0 \Rightarrow b_n = c_n).$$

1. Pokaż, że niezależnie od wyboru ciągu  $a$  relacja  $R_a$  jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc zbioru takich ciągów  $a$ , dla których wszystkie klasy abstrakcji  $R_a$  są przeliczalne?
3. Jaka jest moc zbioru takich ciągów  $a$ , dla których relacja  $R_a$  ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji?
4. Jaka jest moc zbioru takich ciągów  $a$ , dla których relacja  $R_a$  ma continuum klas abstrakcji i każda z tych klas jest mocy continuum?
5. Jaka jest moc zbioru takich ciągów  $a$ , dla których relacja  $R_a$  ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji i każda z tych klas jest przeliczalna?
6. Jaka jest moc zbioru takich ciągów  $a$ , dla których relacja  $R_a$  ma zarówno przeliczalne, jak i nieprzeliczalne klasy abstrakcji?

**Zadanie 382.** Niech  $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  oznacza relację taką, że

$$P(x, y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} (x = y + q),$$

gdzie  $\mathbb{Q}$  jest zbiorem liczb wymiernych.

- a) Czy  $P$  jest relacją równoważności?
- b) Jakie są moce klas równoważności  $[r]_P$  dla liczb  $r \in \mathbb{R}$ ? Jaka jest moc klasy równoważności  $[\pi]_P$ ? Jak jest moc klasy równoważności  $[\frac{23}{7}]_P$ ? Czy wszystkie klasy równoważności mają tę samą moc?
- c) Czy rodzina klas równoważności relacji  $P$  jest przeliczalna?

**Zadanie 383.** Czy istnieje nieprzeliczalna rodzina  $\mathcal{R}$  podzbiorów  $\mathbb{N}$  taka, że dla dowolnych różnych  $X, Y \in \mathcal{R}$  przekrój  $X \cap Y$  jest skończony?

**Zadanie 384.** Niech  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie dowolną rodziną podzbiorów zbioru  $\mathbb{N}$ .

1. Czy istnieje taki nieskończony ciąg zerowyjowy  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , że

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n^{i_n} \neq \emptyset?$$



2. Jaka jest maksymalna moc zbioru wszystkich ciągów  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spełniających powyższy wzór?

**Zadanie 385.** Rozważamy relację  $\sim$  określoną na funkcjach ze zbioru  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  w następujący sposób:

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists c > 0 \exists k > 0 \forall n > k (f(n) \leq cg(n) \wedge g(n) \leq cf(n)).$$

1. Pokaż, że  $\sim$  jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji  $f$  takiej, że  $f(n) = 0$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ?
3. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji  $g$  takiej, że  $g(n) = 1$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ?

**Zadanie 386.** Dla każdej spośród relacji opisanych w zadaniu 291, która jest relacją równoważności wyznacz moc zbioru jej klas abstrakcji oraz moc każdej z jej klas.

**Zadanie 387.** W zbiorze  $\underline{n}$  wprowadzamy relację równoważności  $k \simeq l \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} 2|k - l$ .

1. Ile klas abstrakcji ma relacja  $\simeq$ ?
2. Ile elementów mają klasy abstrakcji  $[0]_{\simeq}$  i  $[1]_{\simeq}$ ?
3. Na klasach abstrakcji definiujemy działanie  $[k]_{\simeq} + [l]_{\simeq} = [(k + l) \bmod n]_{\simeq}$ . Dla jakich  $n$  to działanie jest poprawne?

## 8.6. Zbiory przeliczalne

**Twierdzenie 111.** Zbiór  $A$  jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \emptyset$  lub istnieje funkcja z  $\mathbb{N}$  na  $A$ .

**Definicja 112.** Ciągami elementów zbioru  $A$  nazywamy funkcję  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Fakt 113.** Zbiór niepusty jest przeliczalny, gdy wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg.

**Twierdzenie 114.**

1. Podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.
2. Jeśli  $f : A \rightarrow B$  oraz  $X \subseteq A$  jest zbiorem przeliczalnym, to  $f(X)$  też jest zbiorem przeliczalnym.
3. Jeśli  $A$  i  $B$  są przeliczalne, to  $A \times B$  jest przeliczalny.
4. Jeśli  $\{A_i\}_{i \in I}$  jest przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych (tzn.  $I$  jest przeliczalny i każdy ze zbiorów  $A_i$  jest przeliczalny), to  $\bigcup_{i \in I} A_i$  jest zbiorem przeliczalnym.

**Zadanie 388.** Niech  $\mathcal{A}$  będzie przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych. Pokaż, że  $\bigcup \mathcal{A}$  i  $\bigcap \mathcal{A}$  są zbiorami przeliczalnymi.

**Zadanie 389.** Niech  $A \subseteq \mathbb{N}$  będzie zbiorem nieskończonym. Zdefiniuj bijekcje  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  i  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Zadanie 390.** Niech  $A$  będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech  $f : A \rightarrow B$  będzie surjekcją (odwzorowaniem “na”). Zbuduj injekcję (funkcję różnowartościową)  $g : B \rightarrow A$ .

**Zadanie 391.** Udowodnij, że jeśli  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest monotoniczna, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

**Zadanie 392.** Czy istnieje taki zbiór  $A$ , że  $\mathcal{P}(A) \sim \mathbb{N}$ ?

**Zadanie 393.** Niech  $A_1 \sim B_1$  i  $A_2 \sim B_2$ . Czy:

1.  $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$ ,
2.  $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2$ ,
3.  $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$ ?

W punkcie 3. możesz założyć, że zbiory  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$  są przeliczalne (zadanie bez tego założenia jest trudne i wymaga użycia pewnika wyboru). Czy odpowiedzi na powyższe pytania ulegną zmianie, jeśli założymy, że jeden ze zbiorów  $A_1$  lub  $A_2$  jest nieskończony? Czy ulegną one zmianie jeśli założymy, że oba zbiory są nieskończone?

**Zadanie 394.** Zbiory  $A$  i  $B$  są przeliczalne oraz zbiór  $A \times B$  jest nieskończony. Co można powiedzieć o mocach zbiorów  $A$  i  $B$ ?

**Zadanie 395.** Udowodnij, że zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach ze skończonego zbioru  $A$  jest przeliczalny.

**Zadanie 396.** Udowodnij, że zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach ze przeliczalnego zbioru  $A$  jest przeliczalny.

**Zadanie 397.** Udowodnij, że zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

**Zadanie 398.** Wykaż, że zbiór słabo rosnących funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest nieprzeliczalny (funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *słabo rosnąca*, jeśli implikacja  $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$  zachodzi dla wszelkich  $x, y \in \mathbb{N}$ ).

**Zadanie 399.** Jaka jest moc zbioru nieskończonych ciągów o wyrazach wymiernych?

**Zadanie 400.** Jaka jest moc zbioru nieskończonych ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca?

**Zadanie 401.** Ile jest ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

**Zadanie 402.** Ile jest rosnących ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

**Zadanie 403.** Czy zbiór nieskończonych nierosnących ciągów o wyrazach naturalnych jest przeliczalny? (Ciąg  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  jest nierosnący, jeśli  $a_i \geq a_{i+1}$  dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ ).

**Zadanie 404.** Wykaż, że zbiór słabo malejących funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest przeliczalny (funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *słabo malejąca*, jeśli  $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  dla wszelkich  $x, y \in \mathbb{N}$ ).

**Zadanie 405.** Liczba  $a$  jest punktem skupienia ciągu  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  liczb rzeczywistych, jeśli istnieje podciąg  $(x_{j_i})$  ciągu  $(x_i)$  zbieżny do  $a$ . Ile ciąg może mieć punktów skupienia?

**Zadanie 406.** Ile jest bijekcji  $f : A \rightarrow A$ , gdy zbiór  $A$  jest przeliczalny?

**Zadanie 407.** Liczba rzeczywista  $x$  jest *algebraiczna*, jeśli istnieje taki wielomian jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych, że  $x$  jest jego pierwiastkiem. Udowodnij, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

**Zadanie 408.** Jaka jest moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach naturalnych? Jaka jest, dla danego  $n$ , moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach ze zbioru  $\{0, \dots, n-1\}$ ?

**Zadanie 409.** Wykaż, że jeśli  $\sim$  jest relacją równoważności w zbiorze przeliczalnym  $A$ , to zbiór klas równoważności  $A/\sim = \{[a]_{\sim} : a \in A\}$  jest przeliczalny.

**Zadanie 410.** Wiadomo, że  $\sim$  jest relacją równoważności na zbiorze  $A$ , zbiór klas równoważności  $A/\sim$  jest przeliczalny oraz dla każdego  $a \in A$ , klasa równoważności  $[a]_{\sim}$  elementu  $a$  jest przeliczalna. Wykaż, że zbiór  $A$  jest przeliczalny.

**Zadanie 411.** Czy zbiór relacji równoważności na zbiorze przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym?

**Zadanie 412.** Dany jest nieskończony przeliczalny zbiór  $A$  i liczba  $n \in \mathbb{N}$ . Ile jest takich relacji równoważności  $\sim$  na zbiorze  $A$ , że dla każdego  $a \in A$  klasa abstrakcji  $[a]_{\sim}$  ma dokładnie  $n$  elementów?

**Zadanie 413.** Ile jest relacji równoważności na przeliczalnym zbiorze  $A$  takich, że wszystkie ich klasy abstrakcji są skończone?

**Zadanie 414.** Niech zbiory  $A \cup B$  i  $C \cup D$  będą przeliczalne nieskończone. Która z poniższych formuł wynika z tego założenia? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

$$\begin{aligned} A &\sim C \vee B \sim D \\ A &\sim C \vee A \sim D \vee B \sim C \vee B \sim D \\ (A &\sim C \wedge B \sim D) \vee (A \sim D \wedge B \sim C) \\ A &\sim C \vee A \sim D \end{aligned}$$

**Zadanie 415.** Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *rośnie szybciej* niż ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Pokaż, że dla każdego ciągu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  istnieje ciąg rosnący od niego szybciej. Niech  $\mathfrak{S}$  będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  istnieje w zbiorze  $\mathfrak{S}$  ciąg  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$  rosnący od niego szybciej. Wykorzystując metodę przekątniową udowodnij, że  $\mathfrak{S}$  nie jest zbiorem przeliczalnym.

**Zadanie 416.** Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych odcinków na prostej jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych odcinków na płaszczyźnie.

**Zadanie 417.** Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych kół na płaszczyźnie jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych okręgów na płaszczyźnie. Koło to zbiór punktów  $\langle x, y \rangle$  spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

dla pewnego punktu  $\langle x_0, y_0 \rangle$  i dodatniej liczby rzeczywistej  $r$ , a okrąg to zbiór punktów  $\langle x, y \rangle$  spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

**Zadanie 418.** Ósemka, to dwa zewnętrznie styczne okręgi. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych ósemek na płaszczyźnie jest przeliczalny. Czy można ułożyć na płaszczyźnie więcej niż przeliczalnie wiele rozłącznych okręgów?

**Zadanie 419.** T-kształt, to figura na płaszczyźnie, złożona z pary prostopadłych odcinków o niezerowej długości, z których jeden końcem styka się z drugim w miejscu różnym od końca tego drugiego (dlatego ta figura przypomina literę T). Krzyż, to figura złożona z pary nierównoległych, przecinających się odcinków niezerowej długości, które nie mają wspólnych końców. Jak wiele rozłącznych T-kształtów można ułożyć na płaszczyźnie? Jak wiele krzyży można ułożyć na płaszczyźnie?

**Zadanie 420.** Parasol, to bryła złożona z koła o niezerowej średnicy i prostopadłego do niego odcinka o niezerowej długości, który styka się swym końcem ze środkiem koła. Pokaż, że każdy zbiór rozłącznych parasoli w przestrzeni trójwymiarowej jest co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 421.** Ile jest wszystkich funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ? A ile jest funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  których wartość możemy obliczać przy pomocy komputera (tj. takich, dla których istnieje program komputerowy, który wczytuje liczbę naturalną  $n$  i wypisuje liczbę  $f(n)$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ )?



# 9

## Relacje porządku

**Definicja 115.** *Częściowym porządkiem w zbiorze  $A$  nazywamy relację  $\leq$  (będącą podzbiorem  $A^2$ ), która jest zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia, tzn. prawdziwe są formuły*

- $\forall a \in A (a \leq a)$ ,
- $\forall a, b \in A (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$ ,
- $\forall a, b, c \in A (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$ .

**Definicja 116.** Jeśli  $\leq$  jest częściowym porządkiem na  $A$ , to  $a < b$  oznacza

$$a \leq b \wedge a \neq b.$$

**Definicja 117.** *Zbiór częściowo uporządkowany, to zbiór  $A$  z relacją częściowego porządku  $\leq$ . Zbiór częściowo uporządkowany oznaczamy  $\langle A, \leq \rangle$ .*

*Przykład 118.* Oto przykłady zbiorów uporządkowanych:

1.  $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$  (rodzina podzbiorów zbioru  $A$  z relacją inkluzji);
2.  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  (zbiór liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem);
3.  $\langle \mathcal{B}, \subseteq \rangle$ , gdzie  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ;
4.  $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ , gdzie  $a|b \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists x (ax = b)$ .

**Definicja 119.** Porządek częściowy  $\leq$  w zbiorze  $A$  jest *liniowy*, jeśli

$$\text{dla dowolnych } a, b \in A \text{ zachodzi } a \leq b \text{ lub } b \leq a.$$

*Przykład 120.* Porządkiem liniowym jest relacja  $\leq$  na zbiorze liczb rzeczywistych. Relacja inkluzji  $\subseteq$  na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  nie jest porządkiem liniowym.

**Definicja 121.** Łańcuchem w zbiorze uporządkowanym  $\langle A, \leq \rangle$  nazywamy taki podzbiór  $L$  zbioru  $A$ , że dla wszystkich  $a, b \in L$  zachodzi  $a \leq b$  lub  $b \leq a$ . Antylańcuchem w  $\langle A, \leq \rangle$  nazywamy taki podzbiór  $L$  zbioru  $A$ , że dla wszystkich  $a, b \in L$  jeśli zachodzi  $a \leq b$  lub  $b \leq a$ , to  $a = b$ .

Innymi słowy, łańcuch to dowolny liniowo uporządkowany podzbiór  $A$ , natomiast antylańcuch to dowolny podzbiór składający się z elementów wzajemnie nieporównywalnych.

## 9.1. Przykłady porządków

**Zadanie 422.** Niech  $A$  będzie zbiorem niepustym oraz niech  $\langle B, \leq_B \rangle$  będzie porządkiem częściowym. Na zbiorze funkcji  $B^A$  określamy relację  $\leq$  przyjmując, że dla  $f, g \in B^A$  jest  $f \leq g$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(a) \leq_B g(a)$  dla każdego  $a \in A$ . Wykaż, że  $\langle B^A, \leq \rangle$  jest porządkiem częściowym.

**Zadanie 423.** Podaj przykład przeliczalnego zbioru uporządkowanego, zawierającego zarówno nieskończony łańcuch jak i nieskończony antylańcuch.

**Zadanie 424.** Pokaż, że na zbiorze liczb zespolonych  $\mathbb{C}$  nie można wprowadzić takiego porządku  $\leq$ , że jednocześnie:

- zero jest porównywalne z każdą liczbą zespoloną, tj.  $z = 0$  lub  $z > 0$  lub  $z < 0$  dla każdej liczby  $z \in \mathbb{C}$ ;
- porządek  $\leq$  jest zgodny z działaniami arytmetycznymi, dokładniej  $-z < 0$  i  $wz > 0$  dla dowolnych  $w, z > 0$  oraz  $-z > 0$  dla dowolnego  $z < 0$ .

**Zadanie 425.** Czy dla danego zbioru  $X \neq \emptyset$  można tak określić relację  $R$ , by równocześnie:

1. zbiór  $\langle X, R \rangle$  był zbiorem częściowo uporządkowanym,
2.  $R$  była relacją równoważności w  $X$ ?

**Zadanie 426.** Czy dla danego takiego zbioru  $X$ , że  $|X| \geq 2$  można określić taką relację  $R$ , by równocześnie:

1. zbiór  $\langle X, R \rangle$  był zbiorem liniowo uporządkowanym,
2.  $R$  była relacją równoważności w  $X$ ?

**Zadanie 427.** Podaj przykład porządku liniowego na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .

**Zadanie 428.** Podaj przykład porządku liniowego na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Zadanie 429.** Podaj przykład siedmiu różnych porządków liniowych na zbiorze  $\mathbb{N}$ .



**Zadanie 430.** Na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  określamy relacje:

1.  $f R_1 g$  jeśli  $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < \infty$ ,
2.  $f R_2 g$  jeśli  $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < 5$ ,
3.  $f R_3 g$  jeśli  $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < \infty$ ,
4.  $f R_4 g$  jeśli  $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < 5$ ,
5.  $f R_5 g$  jeśli  $f(n) \leq g(n)$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

Które z nich są relacjami a) równoważności, b) częściowego porządku, c) liniowego porządku?

**Definicja 122.** Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem. Będziemy nazywać go *alfabetem*. Słowem nad alfabetem  $A$  nazywamy dowolny skończony ciąg elementów zbioru  $A$ . Słowo puste (ciąg długości zero) oznaczamy  $\epsilon$ . Przez  $A^*$  oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem  $A$ . Jeżeli  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  i  $w = w_1 w_2 \dots w_m$ , to  $uw$  oznacza *złożenie (konkatenację)* słów  $u$  i  $w$ , tj. słowo  $u_1 u_2 \dots u_n w_1 w_2 \dots w_m$ . Słowo  $u$  jest *przedrostkiem (prefiksem)* słowa  $w$ , jeśli istnieje takie słowo  $v$ , że  $uv = w$ . Podobnie, słowo  $u$  jest *przyrostkiem (sufiksem)* słowa  $w$ , jeśli istnieje takie słowo  $v$ , że  $vu = w$ .

**Fakt 123.** Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem i niech  $u \leq w$  oznacza, że  $u$  jest przedrostkiem  $w$ . Wtedy  $\langle A, \leq \rangle$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

**Definicja 124.** Niech  $\langle A, \leq \rangle$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Na zbiorze  $A^*$  skończonych ciągów elementów zbioru  $A$  określamy relację  $\leq_{lex}$  przyjmując, że dla dowolnych  $u, w \in A^*$  zachodzi  $u \leq_{lex} w$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $u$  jest przedrostkiem  $w$  lub istnieje  $i \leq \min(|u|, |w|)$  takie, że dla  $j < i$  zachodzi  $u(j) = w(j)$  oraz  $u(i) < w(i)$ . Relację  $\leq_{lex}$  nazywamy *porządkiem leksykograficznym* na  $A^*$  generowanym przez porządek  $\leq$ .

**Zadanie 431.** Wykaż, że relacja  $\leq_{lex}$  jest porządkiem częściowym.

**Zadanie 432.** Wykaż, że jeśli  $\langle A, \leq \rangle$  jest porządkiem liniowym, to  $\langle A^*, \leq_{lex} \rangle$  też jest porządkiem liniowym (udowodnij tylko liniowość). Czy zachodzi implikacja w drugą stronę?

**Zadanie 433.** Rozważmy system komputerowy dla hotelu umożliwiający rezerwację pokoi (lub jakikolwiek inny system umożliwiający rezerwację czegośkolwiek — np sali, rzutnika czy samochodu w wypożyczalni). System taki musi umieć sprawdzać, czy dwie rezerwacje tego samego obiektu ze sobą kolidują. Napisz w języku ANSI C (lub podobnym języku programowania) warunek boolowski<sup>1</sup> sprawdzający,

<sup>1</sup>warunek boolowski, czyli coś, co zadziała po wstawieniu w miejsce kropek w instrukcji `if (...)` `printf("mamy problem")`. W szczególności nie wolno w tym miejscu deklarować nowych zmiennych ani funkcji.

czy rezerwacja od dnia  $d_1$  miesiąca  $m_1$  do dnia  $d_2$  miesiąca  $m_2$  koliduje z rezerwacją od dnia  $d_3$  miesiąca  $m_3$  do dnia  $d_4$  miesiąca  $m_4$ . Zakładamy przy tym, że wszystkie daty są w tym samym roku.

**Zadanie 434.** Odcinkiem domkniętym od  $a$  do  $b$  w zbiorze liniowo uporządkowanym  $\langle P, \sqsubseteq \rangle$  nazywamy zbiór  $O[a, b] = \{x \in P \mid a \sqsubseteq x \wedge x \sqsubseteq b\}$ .

- a) Używając jedynie symboli  $a, b, c, d, \leq, <, \geq, >$ , spójników logicznych i nawiasów napisz formułę logiki pierwszego rzędu, która interpretowana w zbiorze liniowo uporządkowanym  $\langle P, \sqsubseteq \rangle$  mówi, że odcinki domknięte  $O[a, b]$  i  $O[c, d]$  nie są rozłączne.
- b) Używając jedynie symboli  $d_1, m_1, d_2, m_2, d_3, m_3, d_4, m_4, \leq, <, \geq, >, =$  oraz spójników logicznych i nawiasów napisz formułę logiki pierwszego rzędu, która interpretowana w zbiorze liczb rzeczywistych z naturalnym porządkiem mówi, że w zbiorze  $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq_{lex} \rangle$  odcinki domknięte  $O[\langle m_1, d_1 \rangle, \langle m_2, d_2 \rangle]$  oraz  $O[\langle m_3, d_3 \rangle, \langle m_4, d_4 \rangle]$  nie są rozłączne. Oczywiście  $\leq_{lex}$  jest tutaj leksykograficznym rozszerzeniem naturalnego porządku w zbiorze liczb rzeczywistych.

**Zadanie 435.** Napisz w języku ANSI C (lub podobnym języku programowania) funkcję boolowską wykrywającą kolizje w rezerwacjach od godziny  $g_1$  dnia  $d_1$  miesiąca  $m_1$  roku  $r_1$  do godziny  $g_2$  dnia  $d_2$  miesiąca  $m_2$  roku  $r_2$  i od godziny  $g_3$  dnia  $d_3$  miesiąca  $m_3$  roku  $r_3$  do godziny  $g_4$  dnia  $d_4$  miesiąca  $m_4$  roku  $r_4$ .

**Zadanie 436.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą porządkami liniowymi. Relację  $\leq$  na  $A \times B$  określamy wzorem

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \stackrel{\text{df}}{\iff} a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2$$

Wykaż, że: a)  $\leq$  jest porządkiem częściowym na  $A \times B$ , b)  $\leq$  jest porządkiem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A$  lub zbiór  $B$  jest co najwyżej jednoelementowy.

**Zadanie 437.** Kandydaci do objęcia pewnego stanowiska oceniani są w  $k \in \mathbb{N}$  różnych kategoriach. W każdej z tych kategorii otrzymują ocenę będącą liczbą naturalną nie mniejszą niż 1 i nie większą niż 6. Kandydat  $k_1$  uważany jest za lepszego niż  $k_2$  (co zapisujemy jako  $k_1 L k_2$ ) jeśli  $k_1$  ma wyższe oceny niż  $k_2$  we wszystkich kategoriach oprócz co najwyżej dwóch. Niech  $R$  będzie najmniejszą zwrotną relacją taką, że  $RR \subseteq R$  i  $L \subseteq R$ . Czy  $R$  jest częściowym porządkiem, jeśli:

- a)  $k = 12$ ,
- b)  $k = 13$ ?

**Zadanie 438.** Niech  $R$  będzie relacją zwrotną i przechodnią. Łańcuchem względem  $R$  nazywamy ciąg  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  taki, że  $\langle a_i, a_{i+1} \rangle \in R$  dla  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  oraz  $a_i \neq a_j$  dla  $i \neq j$ . Łańcuch  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  jest cyklem względem  $R$ , jeśli  $n > 1$  i  $\langle a_n, a_1 \rangle \in R$ . Udowodnij, że jeśli nie istnieje cykl względem  $R$ , to  $R$  jest porządkiem częściowym.

**Definicja 125.** Porządek  $\leq$  na zbiorze  $A$  jest gęsty, gdy dla dowolnych takich  $a, b \in A$ , że  $a < b$ , istnieje taki  $c \in A$ , że  $a < c < b$ .

**Zadanie 439.** Niech symbol  $\leq$  oznacza liniowy porządek w niepustym, skończonym zbiorze  $A$ . Udowodnij, że porządek  $\leq$  jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A$  jest jednoelementowy.

**Zadanie 440.** Wielomianem jednej zmiennej nad zbiorem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  nazywamy funkcję daną wzorem

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

gdzie  $a_i \in \mathbb{R}$  dla  $i = 0, \dots, n$ . Niech  $\mathbb{R}[x]$  oznacza zbiór wielomianów jednej zmiennej nad  $\mathbb{R}$ . a) Wyznacz moc zbioru  $\mathbb{R}[x]$ . Na zbiorze  $\mathbb{R}[x]$  definiujemy relację  $\preceq$  w następujący sposób:

$$P \preceq Q \stackrel{\text{df}}{\iff} \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x \leq y \Rightarrow P(y) \leq Q(y)),$$

dla  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ . Udowodnij, że relacja  $\preceq$  jest porządkiem na  $\mathbb{R}[x]$ . Czy jest to porządek a) liniowy, b) gęsty?

## 9.2. Elementy wyróżnione

**Definicja 126.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie porządkiem częściowym i niech  $X \subseteq P$ . Element  $x \in X$  jest *elementem największym* (odpowiednio *najmniejszym*) w  $X$ , jeśli dla każdego  $y \in X$  zachodzi  $y \leq x$  (odpowiednio  $x \leq y$ ). Element najmniejszy zbioru  $P$  oznacza się  $\perp$ , zaś największy  $\top$ .

**Definicja 127.** Element  $x \in X$  jest elementem *maksymalnym* (odpowiednio *minimalnym*) w  $X$ , jeśli dla każdego  $y \in X$  z warunku  $x \leq y$  (odpowiednio  $y \leq x$ ) wynika  $x = y$ .

Elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze i największe w zbiorze uporządkowanym, podobnie jak zdefiniowane w rozdziale 10 kresy, nazywamy *elementami wyróżnionymi*.

**Definicja 128.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Porządek  $\langle P, \leq^{-1} \rangle$  nazywamy porządkiem *dualnym* do  $\langle P, \leq \rangle$ . Jeśli dane jest pojęcie  $Q$  dotyczące porządków, to pojęcie  $Q^{-1}$  dualne do niego otrzymujemy przez zastąpienie w definicji  $Q$  symbolu  $\leq$  przez symbol  $\leq^{-1}$ . Zauważmy, że pojęcia minimalny i maksymalny oraz najmniejszy i największy są dualne.

**Twierdzenie 129.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie częściowym porządkiem i niech  $X \subseteq P$ . Wtedy element największy w  $X$  jest elementem maksymalnym w  $X$ .

**Twierdzenie 130.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie zbiorem uporządkowanym. Dla dowolnego zbioru  $X \subseteq P$  istnieje co najwyżej jeden element największy tego zbioru.

Zatem każdy zbiór posiada też co najwyżej jeden element najmniejszy. Elementów maksymalnych i minimalnych może być natomiast wiele.

*Przykład 131.* Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym i niech  $P = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Wtedy w zbiorze uporządkowanym  $\langle P, \subseteq \rangle$  jest  $|X|$  elementów minimalnych.

**Zadanie 441.** Rozważmy relację  $|$  na zbiorze  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

1. Znajdź zbiór elementów minimalnych w zbiorze  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ .
2. Udowodnij, że w zbiorze  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$  nie ma elementów maksymalnych.

**Zadanie 442.**

1. Znajdź ogólną postać łańcucha w zbiorze  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ ,
2. Udowodnij, że relacja inkluzji w zbiorze łańcuchów zbioru  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$  jest częściowym porządkiem. Znajdź postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych względem relacji inkluzji.

**Zadanie 443.** Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle X, R \rangle$  takiego, że w zbiorze  $\langle X, R \rangle$  jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego. Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle X, R \rangle$ , takiego, że w zbiorze  $\langle X, R \rangle$  jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

**Zadanie 444.** Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w zbiorze  $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R \rangle$  z zadania 452.

### 9.3. Izomorfizm porządkowy

**Definicja 132.** Zbiory uporządkowane  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  są *izomorficzne*, jeżeli istnieje bijekcja  $\phi : A \rightarrow B$  zachowująca porządek, tzn. taka, że  $\phi(a_1) \leq_B \phi(a_2)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 \leq_A a_2$ , dla wszelkich  $a_1, a_2 \in A$ .

**Definicja 133.** Niech  $\langle P, \leq_P \rangle$  oraz  $\langle Q, \leq_Q \rangle$  będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Funkcja  $f : P \rightarrow Q$  jest *monotoniczna*, jeśli

$$\text{dla dowolnych } x, y \in P, \text{ jeśli } x \leq_P y, \text{ to } f(x) \leq_Q f(y).$$

**Fakt 134.** Funkcja  $\phi$  jest izomorfizmem porządkowym, jeśli jest bijekcją oraz  $\phi$  i  $\phi^{-1}$  są monotoniczne.

Twierdzenie poniżej mówi, że izomorfizmy porządkowe zachowują elementy wyróżnione (na razie jeszcze bez kresów, por. zadanie 474).

**Twierdzenie 135.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą zbiorami uporządkowanymi,  $\phi : A \rightarrow B$  izomorfizmem porządkowym i niech  $X \subseteq A$ . Wtedy  $a$  jest elementem najmniejszym (odpowiednio, minimalnym, największym, maksymalnym) w  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi(a)$  jest elementem najmniejszym (odpowiednio, minimalnym, największym, maksymalnym) w  $\phi(X)$ .

W poniższych zadaniach  $\mathbb{Q}$  oznacza zbiór liczb wymiernych,  $\mathbb{R}$  — zbiór liczb rzeczywistych,  $(a, b)$  — przedział otwarty o końcach  $a$  i  $b$ ,  $[a, b]$  zaś — przedział domknięty.

**Zadanie 445.** Udowodnij, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  (gdzie oba zbiory są uporządkowane zwykłą relacją porządku) dana wzorem  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  jest izomorfizmem porządkowym.

**Zadanie 446.** Udowodnij, że zbiory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$  i  $\mathbb{Q} \setminus [0, 1)$  uporządkowane zwykłą relacją porządku są izomorficzne.

**Zadanie 447.** Udowodnij, że zbiory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  i  $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$  uporządkowane zwykłą relacją porządku są izomorficzne.

**Definicja 136.** Porządek  $\leq$  na zbiorze  $A$  jest:

- *gęsty*, jeśli pomiędzy każdą parą elementów zbioru  $A$  znajduje się trzeci element, tj. gdy dla dowolnych takich  $a, b \in A$ , że  $a < b$ , istnieje taki  $c \in A$ , że  $a < c < b$ ;
- *bez końców*, jeśli dla dowolnego elementu zbioru  $A$  istnieje element od niego większy i element od niego mniejszy, tj. gdy dla każdego  $a \in A$  istnieją takie  $b, c \in A$ , że  $b < a < c$ .

Dla przykładu zwykły porządek na wszystkich pięciu zbiorach z zadań 446 i 447 jest gęsty i bez końców. Zbiory te są izomorficzne nie przez przypadek, o czym przekonasz się rozwiązując kolejne zadanie. Zauważ ponadto, że zwykły porządek na zbiorze  $\mathbb{Q} \setminus (0, 1)$  nie jest gęsty, a na zbiorze  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  nie jest bez końców.

**Zadanie 448.** Pokaż, że dowolne dwa zbiory przeliczalne uporządkowane liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców są izomorficzne.

**Zadanie 449.** Uzasadnij, że twierdzenie z poprzedniego zadania jest fałszywe dla zbiorów nieprzeliczalnych, tj. podaj przykład dwóch nieprzeliczalnych zbiorów tej samej mocy, uporządkowanych liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców, które nie są izomorficzne.

**Zadanie 450.** Pokaż, że zbiory: liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb naturalnych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach naturalnych *nie są* izomorficzne.

**Zadanie 451.** Pokaż, że zbiory: liczb rzeczywistych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb rzeczywistych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach rzeczywistych *nie są* izomorficzne.

**Zadanie 452.** W zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wprowadzamy relację  $R$  wzorem

$$\bar{a} R \bar{b} \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall n (a_n \leq b_n),$$

dla  $\bar{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  i  $\bar{b} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Udowodnij, że zbiór  $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R)$  jest częściowo uporządkowany. Czy  $R$  jest liniowym porządkiem? Czy jest gęstym porządkiem? Czy ten porządek jest izomorficzny z  $(\mathbb{R}, \leq)$ ?

**Zadanie 453.** W zbiorze  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych wprowadzamy porządek

$$x R y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \operatorname{Re} x < \operatorname{Re} y \vee (\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \wedge \operatorname{Im} x \leq \operatorname{Im} y).$$

Udowodnij, że  $R$  jest liniowym gęstym porządkiem bez końców. Czy  $(\mathbb{C}, R)$  jest izomorficzny z  $(\mathbb{R}, \leq)$ ?

**Definicja 137.** Niech  $(X, \leq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. *Następnikiem*  $x \in X$  nazywamy taki element  $y \in X$ , że  $x < y$  oraz w zbiorze  $X$  nie istnieje taki element  $z$ , że  $x < z$  i  $z < y$ . Podobnie *poprzednikiem*  $x \in X$  nazywamy taki element  $y \in X$ , że  $y < x$  oraz w zbiorze  $X$  nie istnieje taki element  $z$ , że  $y < z$  i  $z < x$ .

**Zadanie 454.** Udowodnij, że każdy taki niepusty zbiór liniowo uporządkowany  $(X, \preceq)$ , że każdy jego element posiada poprzednik i następnik, oraz że jeśli  $x \preceq y$ , to zbiór  $\{z \mid x \preceq z \wedge z \preceq y\}$  jest skończony, jest izomorficzny ze zbiorem  $(\mathbb{Z}, \leq)$  liczb całkowitych uporządkowanym standardową relacją mniejszości  $\leq$ .

**Zadanie 455.** Podaj przykład przeliczalnego liniowego porządku takiego, że każdy element posiada następnik, istnieje element najmniejszy, każdy element prócz najmniejszego posiada poprzednik, ale nie izomorficznego z  $(\mathbb{N}, \leq)$ .

**Zadanie 456.** W zbiorze  $\mathbb{R}/\sim$ , gdzie  $\sim$  jest relacją z zadania 302, definiujemy taką relację  $\preceq$ , że

$$[x]_{\sim} \preceq [y]_{\sim} \stackrel{\text{df}}{\iff} x \sim y \vee x < y,$$

gdzie  $\leq$  jest standardowym porządkiem na liczbach rzeczywistych. Uzasadnij, że definicja  $\preceq$  jest poprawna. Udowodnij, że  $\langle \mathbb{R}/\sim, \preceq \rangle$  jest zbiorem liniowo uporządkowanym. Pokaż, że  $\langle \mathbb{R}/\sim, \preceq \rangle$  i  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  są izomorficzne porządkowo, gdzie  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  jest zbiorem liczb całkowitych ze standardowym porządkiem.

**Zadanie 457.** Udowodnij, że zbiory uporządkowane  $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \leq_{lex} \rangle$  i  $\langle \mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$  nie są izomorficzne.

**Zadanie 458.** Udowodnij, że zbiory uporządkowane  $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$  i  $\langle \mathbb{Z} \times [0, 1), \leq_{lex} \rangle$  są izomorficzne.

**Zadanie 459.** Udowodnij, że zbiory uporządkowane  $\langle \mathbb{N} \times \{0, 1\}, \leq_{lex} \rangle$  i  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  są izomorficzne, oraz że  $\langle \mathbb{N} \times \{0, 1\}, \leq_{lex} \rangle$  i  $\langle \{0, 1\} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$  nie są izomorficzne.

## 9.4. Zawieranie zbiorów jako relacja porządku

**Zadanie 460.** Udowodnij, że częściowe porządki  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$  oraz  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \supseteq \rangle$  są izomorficzne.

**Definicja 138.** Rodzina zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$  jest *prawie rozłączna*, jeśli dla wszelkich różnych  $s, t \in T$  zbiór  $A_t \cap A_s$  jest skończony.

**Zadanie 461 (Sierpiński).** Pokaż, że w  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  istnieje rodzina mocy continuum zbiorów prawie rozłącznych.

**Zadanie 462.** Pokaż, że w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$  istnieje antyłańcuch mocy continuum.

**Zadanie 463.** Pokaż, że w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$  istnieje łańcuch mocy continuum.

**Definicja 139.** Dla danego zbioru  $X$ , filtrem w zbiorze  $\mathcal{P}(X)$  nazywamy taki zbiór  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ , że jeśli  $A \in \mathcal{F}$  i  $A \subseteq B \subseteq X$ , to również  $B \in \mathcal{F}$ , oraz jeśli  $A, B \in \mathcal{F}$ , to również  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

**Zadanie 464.** Udowodnij, że jeśli  $A \subseteq X$  to  $\{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$  jest filtrem. Nazywamy go *filtrem głównym wyznaczonym przez  $A$* .

**Zadanie 465.** Pokaż, że jeśli  $X$  jest zbiorem skończonym, to każdy filtr na  $\mathcal{P}(X)$  jest główny.

**Zadanie 466.** Pokaż, że jeśli  $X$  jest zbiorem nieskończonym, to istnieje filtr na  $\mathcal{P}(X)$ , który nie jest główny.

**Zadanie 467.** Niech  $\mathcal{F}$  będzie filtrem na  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Dla ciągów o wyrazach naturalnych określamy relację  $R$  jak następuje:  $\bar{a}R\bar{b}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{n \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$ . Udowodnij, że  $R$  jest relacją równoważności.

## 9.5. Liczba relacji porządku

**Zadanie 468.** Ile jest relacji częściowego porządku w zbiorze  $n$ -elementowym?

**Zadanie 469.** Ile jest relacji porządku liniowego w zbiorze  $n$  elementowym?

**Zadanie 470.** Niech  $\preceq$  oznacza porządek częściowy na liczbach naturalnych. Mówimy, że  $\preceq$  jest *zgodny* ze zwykłym porządkiem, gdy

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad (n_1 \preceq n_2 \Rightarrow n_1 \leq n_2).$$

Ile jest porządków częściowych  $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  zgodnych ze zwykłym porządkiem i takich, że

1. w każdym antyłańcuchu są co najwyżej dwa elementy?
2. co najwyżej skończona liczba elementów należy do jakiegoś łańcucha o liczbie elementów większej niż 1?
3. zbiór

$$\{x \mid \exists y (x \neq y \wedge (y \preceq x \vee x \preceq y))\}$$

jest skończony?

4. w zbiorze  $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$  istnieje element największy?
5. w każdym łańcuchu są co najwyżej dwa elementy?



# 10

## Kresy zbiorów

**Definicja 140.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie częściowym porządkiem i niech  $X \subseteq P$ . Element  $a \in P$  jest *ograniczeniem górnym* zbioru  $X$ , jeśli dla każdego  $x \in X$  zachodzi  $x \leq a$ . *Kresem górnym* zbioru  $X$  nazywamy najmniejszy element zbioru  $\{a \mid a \text{ jest ograniczeniem górnym } X\}$ . Kres górny zbioru  $X$  oznaczamy  $\bigvee X$  lub  $\sup X$ . Dualnie można zdefiniować pojęcia *ograniczenia dolnego* i *kresu dolnego* (kres dolny zbioru  $X$  oznaczamy  $\bigwedge X$  lub  $\inf X$ ).

**Zadanie 471.** Rodzinę  $\mathcal{P}(A)$  podzbiorów niepustego zbioru  $A$  porządkujemy relacją inkluzji  $\subseteq$ . Wykaż, że kres górny dowolnego podzbioru  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$  jest równy sumie teoriomnogościowej zbiorów do niego należących, a kres dolny — przekroju. Formalnie:  $\sup\{X_s\}_{s \in S} = \bigcup_{s \in S} X_s$  oraz  $\inf\{X_s\}_{s \in S} = \bigcap_{s \in S} X_s$  dla dowolnej rodziny  $\{X_s\}_{s \in S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ .

**Definicja 141.** Relacja podzielności liczb naturalnych  $\mid \subset \mathbb{N}^2$  jest określona następująco:

$$x \mid y \stackrel{\text{df}}{\iff} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y).$$

**Zadanie 472.** Pokaż, że relacja  $\mid$  jest porządkiem częściowym. Udowodnij, że każdy niepusty podzbiór  $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$  posiada kres dolny. Pokaż też, że  $\inf\{m, n\} = \gcd(m, n)$  i  $\sup\{m, n\} = \text{lcm}(m, n)$ , gdzie  $\gcd$  jest największym wspólnym dzielnikiem dwu liczb, a  $\text{lcm}$  — najmniejszą wspólną wielokrotnością.

**Zadanie 473.** Czy w  $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$  istnieje element a) najmniejszy, b) największy?

**Zadanie 474.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą zbiorami uporządkowanymi,  $\phi : A \rightarrow B$  izomorfizmem porządkowym i niech  $X \subseteq A$ . Udowodnij, że  $a$  jest kresem górnym (odpowiednio, dolnym) zbioru  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi(a)$  jest kresem górnym (odpowiednio, dolnym) zbioru  $\phi(X)$ .

**Definicja 142.** Funkcje  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  i  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  są równe prawie wszędzie, jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$$

jest skończony. Zapis  $f \approx g$  oznacza, że funkcje  $f$  i  $g$  są równe prawie wszędzie.

**Zadanie 475.** Pokaż, że  $\approx$  jest relacją równoważności.

**Zadanie 476.** Ile jest klas abstrakcji relacji  $\approx$ ? Jaka jest moc każdej z nich?

**Definicja 143.** Funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  *majoryzuje* funkcję  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}$$

jest skończony. Zapis  $g \preceq f$  oznacza, że funkcja  $f$  majoryzuje funkcję  $g$ .

Na zbiorze  $\mathcal{F} = \{[f]_{\approx} \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  klas abstrakcji relacji  $\approx$  wprowadzamy relację  $\preceq$  przyjmując, że

$$[f]_{\approx} \preceq [g]_{\approx} \stackrel{\text{df}}{\iff} f \preceq g.$$

**Zadanie 477.** Wykaż, że definicja relacji  $\preceq$  na zbiorze  $\mathcal{F}$  jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji) i że relacja  $\preceq$  jest częściowym porządkiem na  $\mathcal{F}$ .

**Zadanie 478.** Niech dana będzie funkcja  $e(n) = 2^n$  i rodzina funkcji  $f_k(n) = n^k$  dla  $k \in \mathbb{N}$ . Wykaż, że dla żadnego  $k$  funkcja  $f_k$  nie majoryzuje funkcji  $e$ .

**Zadanie 479.** Czy istnieje taki ciąg funkcji  $\langle f_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ , że  $f_i \preceq f_{i+1}$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , oraz dla każdej funkcji  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  istnieje  $i$  takie, że  $g \preceq f_i$ ?

**Zadanie 480.** Wykaż, że każdy przeliczalny podzbiór  $X \subseteq \mathcal{F}$  posiada w zbiorze  $\mathcal{F}$  ograniczenie górne.

**Zadanie 481.** Niech  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  będzie podziałem zbioru  $\mathbb{N}$  na zbiory nieskończone. Definiujemy ciąg funkcji  $\langle f_j : j \in \mathbb{N} \rangle$  kładąc

$$f_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \in \bigcup_{i=1}^j A_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykaż, że zbiór  $\{[f_j]_{\approx} \mid j \in \mathbb{N}\}$  nie ma kresu górnego w  $\langle \mathcal{F}, \preceq \rangle$ .

**Definicja 144.** *Nieskończonym łańcuchem wstępującym* w zbiorze uporządkowanym  $\langle A, \leq \rangle$  nazywamy ciąg  $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$  taki, że  $a_i < a_{i+1}$  dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ , gdzie  $a < b$  oznacza, że  $a \leq b$  i  $a \neq b$ . Podobnie ciąg  $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$  jest *łańcuchem zstępującym*, jeśli  $a_{i+1} < a_i$  dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 482.** Wykaż, że żaden przeliczalny nieskończony ściśle wstępujący łańcuch nie posiada w zbiorze  $\mathcal{F}$  kresu górnego.

**Zadanie 483.** Jak jest największa moc ściśle a) wstępującego, b) zstępującego łańcucha w zbiorze  $\mathcal{F}$ ?

**Zadanie 484.** Na zbiorze  $\{0, 1\}$  wprowadzamy porządek  $\leq$  kładąc  $0 \leq 1$ . Niech  $\preceq$  będzie porządkiem leksykograficznym na zbiorze  $\{0, 1\}^*$  wyznaczonym przez porządek  $\leq$ . Wykaż, że w zbiorze  $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$  istnieje nieskończony łańcuch wstępujący i nieskończony łańcuch zstępujący. Czy zbiór  $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$  posiada element najmniejszy lub największy?

## 10.1. Kraty

**Definicja 145.** Porządek  $\langle P, \leq \rangle$  jest *kratą zupełną*, jeśli każdy podzbiór zbioru  $P$  ma kres górny i kres dolny. Porządek  $\langle P, \leq \rangle$  jest *kratą*, jeśli posiada elementy najmniejszy i największy oraz gdy każdy *skończony* podzbiór zbioru  $P$  ma kres górny i kres dolny.

**Przykład 146.** Dla dowolnego zbioru  $A$  rodzina  $\mathcal{P}(A)$  uporządkowana relacją inkluzji  $\subseteq$  jest kratą zupełną.

**Twierdzenie 147.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie porządkiem. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.  $\langle P, \leq \rangle$  jest kratą zupełną.
2. Każdy podzbiór  $P$  ma kres górny w  $\langle P, \leq \rangle$ .
3. Każdy podzbiór  $P$  ma kres dolny w  $\langle P, \leq \rangle$ .

**Zadanie 485.** Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem niepustym. Czy  $\langle \mathcal{K}, \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną, jeżeli  $\mathcal{K}$  jest rodziną wszystkich

1. relacji binarnych,
2. relacji równoważności,
3. relacji częściowego porządku

na zbiorze  $A$ ?

**Zadanie 486.** Niech  $\mathcal{X}$  będzie przeliczalną rodziną podzbiorów  $\mathbb{N}$ . Udowodnij, że istnieje przeliczalna rodzina  $\mathcal{K}$ , taka, że  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$  i  $\langle \mathcal{K}, \subseteq \rangle$  jest kratą.

**Zadanie 487.** Czy porządek z zadania 440 jest a) kratą, b) kratą zupełną?

## 10.2. Porządkı zupełne

**Definicja 148.** Niech  $\langle P, \leq_P \rangle$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy zbiór  $\emptyset \neq X \subseteq P$  jest zbiorem *skierowanym*, jeśli każda para  $x, y \in X$  elementów zbioru  $X$  ma w  $X$  ograniczenie górne, tj. prawdziwa jest formuła

$$\forall x, y \in X \exists z \in X (x \leq z \wedge y \leq z).$$

Zbiór  $\langle P, \leq_P \rangle$  jest *porządkiem zupełnym*, jeśli  $P$  ma element najmniejszy oraz każdy skierowany podzbiór  $X$  zbioru  $P$  ma kres górny.

**Definicja 149.** Na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  określamy relację równoważności  $\sim$  wzorem

$$X \sim Y \quad \text{wtw} \quad |X \div Y| < \aleph_0$$

(patrz zadanie 296). W zbiorze klas abstrakcji  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$  wprowadzamy taką relację  $\leq$ , że

$$[X]_{\sim} \leq [Y]_{\sim} \quad \text{wtw} \quad |X \setminus Y| < \aleph_0.$$

**Zadanie 488.** Sprawdź, czy definicja  $\leq$  jest poprawna.

**Zadanie 489.** Sprawdź, czy  $\leq$  jest porządkiem częściowym.

**Zadanie 490.** Znajdź w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \leq \rangle$  nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany.

**Zadanie 491.** Znajdź w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \leq \rangle$  nieskończony antyłańcuch.

**Zadanie 492.** Wykaż, że  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \leq \rangle$  nie jest zupełny.

**Zadanie 493.** Niech  $Z$  oznacza zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Wykaż, że każdy ściśle malejący ciąg  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$  elementów  $\langle Z/\sim, \leq \rangle$  (gdzie  $x > y$  gdy  $y \leq x$  i  $y \neq x$ ) ma w  $Z/\sim$  ograniczenie dolne, tj. istnieje  $y \in Z/\sim$ , taki że  $y \leq x_i$  dla każdego  $i$ .

**Zadanie 494.** Czy  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \leq \rangle$  jest krata?

**Definicja 150.** W zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$  definiujemy porządek  $\preceq$  kładąc  $[X]_{\sim} \preceq [Y]_{\sim}$ , jeśli  $X \cup Y \in [Y]_{\sim}$ .

**Zadanie 495.** Sprawdź, czy powyższa definicja jest poprawna. Czy  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$  jest krata?

**Zadanie 496.** Czy zbiór  $\{[X_n]_{\sim} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , gdzie  $X_n = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  ma kres dolny w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$ ?

**Zadanie 497.** Czy w  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$  istnieje nieskończony antyłańcuch?

**Definicja 151.** Niech  $\langle P, \leq_P \rangle$  oraz  $\langle Q, \leq_Q \rangle$  będą porządkami zupełnymi. Funkcja  $f : P \rightarrow Q$  jest *ciągła*, jeśli zachowuje kresy górne, to znaczy, gdy dla dowolnego zbioru skierowanego  $X \subseteq P$  zbiór  $f(X)$  ma kres górny oraz  $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$ .

**Twierdzenie 152.**

1. Każda funkcja ciągła jest monotoniczna.
2. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

**Zadanie 498.** Udowodnij, że jeśli  $\langle P, \leq_P \rangle$  jest skończoną kratą to każda monotoniczna funkcja  $f : P \rightarrow P$  jest ciągła.

**Zadanie 499.** Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych nie jest porządkiem zupełnym.

**Zadanie 500.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą porządkami zupełnymi. W produkcie  $A \times B$  definiujemy relację  $\leq$  w następujący sposób:  $\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 \leq_A a_2$  oraz  $b_1 \leq_B b_2$ . Udowodnij, że  $\langle A \times B, \leq \rangle$  jest porządkiem zupełnym.

**Zadanie 501.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą porządkami zupełnymi. W produkcie  $A \times B$  definiujemy relację  $\leq$  jako rozszerzenie leksykograficzne obu porządków, czyli  $\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 <_A a_2$  lub gdy  $a_1 = a_2$  i  $b_1 \leq_B b_2$ . Udowodnij, że  $\langle A \times B, \leq \rangle$  jest porządkiem zupełnym.

**Zadanie 502.** Podaj przykład takiego porządku zupełnego  $\langle A, \leq \rangle$ , że porządek leksykograficzny na  $A^*$  generowany przez  $\leq$  nie jest zupełny.

**Zadanie 503.** Niech  $A$  będzie zbiorem niepustym oraz niech  $\langle B, \leq_B \rangle$  będzie porządkiem częściowym zupełnym. Wykaż, że  $\langle B^A, \leq \rangle$  jest porządkiem zupełnym, gdzie  $f \leq g$  dla  $f, g \in B^A$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(a) \leq_B g(a)$  dla każdego  $a \in A$ .

**Zadanie 504.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  oraz  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą porządkami częściowymi zupełnymi. Wykaż, że  $\langle [A, B], \leq \rangle$  jest porządkiem zupełnym, gdzie  $[A, B]$  oznacza zbiór funkcji ciągłych z  $A$  w  $B$  oraz  $f \leq g$ , dla  $f, g \in B^A$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(a) \leq_B g(a)$  dla każdego  $a \in A$ .

**Zadanie 505.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą porządkami zupełnymi. Pokaż, że funkcja  $\phi : [A, B] \times A \rightarrow B$ , gdzie  $[A, B]$  jest zbiorem funkcji ciągłych z  $A$  w  $B$ , zdefiniowana wzorem  $\phi(f, a) = f(a)$  jest ciągła.

**Zadanie 506.** Wykaż, że dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  relacja inkluzji na zbiorze  $B^{\subseteq A}$  funkcji częściowych z  $A$  w  $B$  jest porządkiem zupełnym. Czy  $\langle B^{\subseteq A}, \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną?

**Zadanie 507.** Zbiór  $W$  na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy  $\overline{ab} \subseteq W$  dla dowolnych punktów  $a, b \in W$ . Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie wypukłych podzbiorów płaszczyzny jest porządkiem zupełnym.

**Zadanie 508.** Czy porządek z zadania 440 jest zupełny?

### 10.3. Twierdzenia o punkcie stałym

**Twierdzenie 153 (Knaster, Tarski).** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie kratą zupełną i niech funkcja  $f : P \rightarrow P$  będzie monotoniczna. Wtedy istnieje  $a \in P$  taki, że

1.  $f(a) = a$
2. dla każdego  $b \in P$ , jeśli  $f(b) = b$ , to  $a \leq b$ .

Element  $a$  z twierdzenia Knastera-Tarskiego nazywamy *najmniejszym punktem stałym* funkcji  $f$ . Element spełniający tylko warunek 1 nazywamy *punktem stałym*.

**Twierdzenie 154 (Kleene).** Niech  $\langle P, \leq_P \rangle$  będzie porządkiem zupełnym oraz niech funkcja  $f : P \rightarrow P$  będzie ciągła. Wtedy element  $a = \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$  jest najmniejszym punktem stałym funkcji  $f$ .

**Zadanie 509.** Niech  $A \neq \emptyset$  i niech  $f : A \rightarrow A$ . Udowodnij, że dla dowolnego  $a \in A$  istnieje najmniejszy zbiór  $X \subseteq A$  taki, że  $a \in X$  oraz  $f^{-1}(X) \subseteq X$ .

**Zadanie 510.** Niech  $\mathcal{K} = \mathcal{P}(A^2)$  będzie zbiorem uporządkowanym relacją inkluzji  $\subseteq$ ,  $R \in \mathcal{K}$  i niech funkcja  $\phi_R : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  będzie zdefiniowana wzorem

$$\phi_R(X) = X \cup X^{-1} \cup XX \cup E_A \cup R,$$

gdzie  $E_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ . Wykaż, że dla każdej relacji  $R \subseteq A^2$  istnieje najmniejszy punkt stały funkcji  $\phi_R$ .

**Zadanie 511.** Niech  $R^+$  będzie najmniejszym punktem stałym funkcji  $\phi_R$ . Wykaż, że  $R^+$  jest najmniejszą (względem relacji inkluzji  $\subseteq$ ) relacją równoważności zawierającą relację  $R$ .

**Zadanie 512.** Na rodzinie  $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$  wszystkich języków nad alfabetem  $\{0, 1\}$  określamy funkcję

$$f(X) = X \cup \{w01 \mid w \in X\} \cup \{\epsilon\}.$$

Znajdź najmniejszy punkt stały funkcji  $f$  w zbiorze  $\mathcal{L}$  uporządkowanym relacją inkluzji. Czy istnieje największy punkt stały tej funkcji? Ile punktów stałych ma funkcja  $g(X) = \{w01 \mid w \in X\} \cup \{\epsilon\}$ ?

**Zadanie 513.** Grafem skierowanym o wierzchołkach  $V$  i krawędziach  $E$  nazywamy taką parę  $\langle V, E \rangle$ , że  $V$  jest skończonym zbiorem oraz  $E \subseteq V \times V$ . Ścieżką (długości  $n$ , o początku w  $v_0$  i końcu w  $v_n$ ) w grafie  $\langle V, E \rangle$  nazywamy taki ciąg wierzchołków  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ , że dla wszystkich  $0 \leq i \leq n-1$  zachodzi  $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in E$  (w szczególności dla dowolnego wierzchołka  $v$  ciąg  $\langle v \rangle$  jest ścieżką długości 0). Mówimy, że wierzchołek  $v$  jest osiągalny z wierzchołka  $v_0$  jeśli w grafie istnieje ścieżka o początku w  $v_0$  i końcu w  $v$ . Udowodnij, że zbiór wierzchołków osiągalnych z  $v_0$  w grafie  $\langle V, E \rangle$  jest najmniejszym punktem stałym funkcji  $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  zadanej wzorem

$$f(X) = \{v_0\} \cup \{v \in V \mid \exists x \in X \langle x, v \rangle \in E\}.$$

**Zadanie 514.** Niech  $R \subseteq A^2$  będzie relacją binarną na zbiorze  $A$ . Udowodnij, że przechodnie domknięcie relacji  $R$  jest najmniejszym punktem stałym funkcji  $f : \mathcal{P}(A^2) \rightarrow \mathcal{P}(A^2)$  danej wzorem  $f(X) = R \cup XX$ .

## 10.4. Relacje w zbiorze formuł zdaniowych

*Definicja 155.* Niech  $V$  będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. W zbiorze  $\mathcal{F}(V)$  formuł zdaniowych, zbudowanych ze zmiennych ze zbioru  $V$ , spójnika negacji  $\neg$  i spójników koniunkcji  $\wedge$ , alternatywy  $\vee$ , implikacji  $\Rightarrow$  i równoważności  $\Leftrightarrow$  wprowadzamy binarną relację  $\sim$  przyjmując, że:

$\alpha \sim \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy formuła  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$  jest tautologią.

**Zadanie 515.** Wykaż, że  $\sim$  jest relacją równoważności.

**Zadanie 516.** W zbiorze  $\mathcal{F}(V)$  wprowadzamy relacje  $\sim_1, \sim_2$  i  $\sim_3$  przyjmując, że

- $\alpha \sim_1 \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy formuła  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$  jest spełnialna;
- $\alpha \sim_2 \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy formuła  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$  jest sprzeczna;
- $\alpha \sim_3 \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy formuła  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$  jest prawdziwa dla dokładnie połowy wartościowań zmiennych występujących w formułach  $\alpha$  i  $\beta$ .

Które z tych relacji są relacjami równoważności?

*Definicja 156.* Niech  $\phi_a \in \mathcal{F}(V)$  będzie ustaloną formułą. W zbiorze formuł zdaniowych  $\mathcal{F}(V)$  wprowadzamy binarną relację  $\sim_{\phi_a}$ , przyjmując, że

$\phi_1 \sim_{\phi_a} \phi_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy formuła  $(\phi_a \Rightarrow (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2))$  jest tautologią.

**Zadanie 517.** Udowodnij, że  $\sim_{\phi_a}$  jest relacją równoważności. Opisz klasy równoważności formuł  $p \vee \neg p$  i  $p \wedge \neg p$ .

**Definicja 157.** W zbiorze klas abstrakcji  $\mathcal{F}(V)/\sim$  wyżej opisanej relacji  $\sim$  wprowadzamy relację  $\leq$  taką, że  $[\phi_1]_{\sim} \leq [\phi_2]_{\sim}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$  jest tautologią.

**Zadanie 518.** Sprawdź, że powyższa definicja relacji  $\leq$  jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji) i że definiuje porządek częściowy.

**Zadanie 519.** Czy  $\langle \mathcal{F}(V)/\sim, \leq \rangle$  jest kratą?

**Zadanie 520.** Czy  $\langle \mathcal{F}(V)/\sim, \leq \rangle$  jest kratą zupełną?

**Zadanie 521.** Przyjmijmy, że zbiór zmiennych  $V$  jest przeliczalny nieskończony. Znajdź w zbiorze  $\langle \mathcal{F}(V)/\sim, \leq \rangle$  nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany (łańcuch).

**Zadanie 522.** Przyjmijmy, że zbiór zmiennych  $V$  jest przeliczalny nieskończony. Czy można w zbiorze  $\langle \mathcal{F}(V)/\sim, \leq \rangle$  znaleźć nieskończony antyłańcuch?

**Zadanie 523.** Ile jest klas abstrakcji relacji  $\sim$  gdy a)  $|V| = 2$ , b)  $|V| = 3$ , c)  $|V| = 5$ , d)  $|V| = n \in \mathbb{N}$ , e)  $|V| = \aleph_0$ ?

**Zadanie 524.** Wypisz najkrótszych reprezentantów wszystkich klas abstrakcji relacji  $\sim$  gdy zbiór  $V$  ma dwa elementy. Narysuj diagram porządku  $\leq$  dla tego przypadku.

**Zadanie 525.** Wyznacz zbiór elementów minimalnych i kres dolny zbioru  $F_1 = \mathcal{F}(V)/\sim \setminus \{[\perp]_{\sim}\}$ , gdy zbiór zmiennych  $V$  jest (a) skończony i (b) nieskończony.

**Zadanie 526.** Niech  $V = \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  będzie zbiorem zmiennych. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbiorów  $F_2 = \{[\alpha_n]_{\sim}\}_{n=0}^{\infty}$  i  $F_3 = \{[\beta_n]_{\sim}\}_{n=0}^{\infty}$ , gdzie  $\alpha_n = \bigwedge_{i=1}^n p_i = p_1 \wedge \dots \wedge p_n$  i  $\beta_n = \bigvee_{i=1}^n p_i = p_1 \vee \dots \vee p_n$ .

**Zadanie 527.** Niech  $V = \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  będzie zbiorem zmiennych. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbioru  $F_4 = \{[\gamma_n]_{\sim}\}_{n=0}^{\infty}$ , gdzie  $\gamma_n = \bigvee_{i=0}^n (p_{2i} \vee \neg p_{2i+1})$ .

**Zadanie 528.** W zbiorze  $\mathcal{F}(V)$ , gdzie  $V = \{p_1, \dots, p_5\}$ , definiujemy relacje  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $R_3$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \phi R_1 \psi &\Leftrightarrow \phi \text{ i } \psi \text{ mają tyle samo wystąpień spójników logicznych} \\ \phi R_2 \psi &\Leftrightarrow (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest tautologią} \\ \phi R_3 \psi &\Leftrightarrow (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest formułą spełnialną} \end{aligned}$$

Która z relacji  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $R_3$  jest relacją równoważności? W każdym przypadku w razie pozytywnej odpowiedzi wyznacz moc zbioru klas abstrakcji danej relacji.



**Zadanie 529.** Niech  $\mathcal{F}$  będzie zbiorem formuł zadaniowych zbudowanych ze zmiennych ze zbioru  $V = \{p, q, r, \dots\}$  i spójników implikacji  $\Rightarrow$ , fałszu  $\perp$  i prawdy  $\top$ . Binarna relacja  $R$  na zbiorze  $\mathcal{F}$  jest *monotoniczna*, jeśli

1.  $\perp R \phi$ ,
2.  $\phi R \top$ ,
3. jeśli  $\phi_1 R \phi_2$  i  $\psi_1 R \psi_2$ , to  $(\phi_2 \Rightarrow \psi_1) R (\phi_1 \Rightarrow \psi_2)$ ,

dla wszelkich formuł  $\phi, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}$ .

1. Pokaż, że w zbiorze relacji monotonicznych na  $\mathcal{F}$  uporządkowanym relacją inkluzji istnieje element najmniejszy. Relację tę będziemy oznaczać  $\sqsubseteq$ .
2. Pokaż, że relacja  $\sqsubseteq$  jest częściowym porządkiem na  $\mathcal{F}$ . Pokaż, że nie jest to porządek liniowy.
3. Pokaż, że  $\langle \mathcal{F}, \sqsubseteq \rangle$  jest kratą.
4. Pokaż, że jeśli  $\phi \sqsubseteq \psi$ , to  $\phi \Rightarrow \psi$  jest tautologią. Pokaż, że implikacja odwrotna nie zachodzi.



# Dobre porządki i indukcja

## 11.1. Porządki regularne

**Definicja 158.** Porządek częściowy  $\langle P, \leq \rangle$  jest *regularny* (*dobrze ufundowany*), jeśli w każdym niepustym zbiorze  $X \subseteq P$  istnieje element minimalny. Mówimy, że porządek jest *dobry*, jeśli jest liniowy i regularny.

**Twierdzenie 159.**<sup>1</sup> Jeśli porządek  $\langle P, \leq \rangle$  jest regularny, to w zbiorze  $P$  nie istnieje nieskończony ciąg ściśle malejący, tj taki ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , że  $a_{i+1} < a_i$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 530.** Pokaż, że porządek  $\langle \mathbb{N}, | \rangle$  (por. Przykład 118) jest regularny.

**Zadanie 531.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą zbiorami uporządkowanymi, w których porządki  $\leq_A$  i  $\leq_B$  są regularne. Na zbiorze  $A \times B$  definiujemy relację  $\leq$  przyjmując, że  $\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 \leq_A x_2$  i  $y_1 \leq_B y_2$ , dla wszelkich  $x_1, x_2 \in A$  i  $y_1, y_2 \in B$ . Wykaż, że relacja  $\leq$  jest porządkiem regularnym na zbiorze  $A \times B$ .

**Zadanie 532.** Niech  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$  będą dobrymi porządkami. W produkcie  $A \times B$  definiujemy relację  $\leq$  jako rozszerzenie leksykograficzne obu porządków, czyli  $\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 <_A a_2$  lub gdy  $a_1 = a_2$  i  $b_1 \leq_B b_2$ . Udowodnij, że  $\langle A \times B, \leq \rangle$  jest dobrym porządkiem.

**Zadanie 533.** Podaj przykład takiego dobrego porządku  $\langle A, \leq \rangle$ , że porządek leksykograficzny na  $A^*$  generowany przez  $\leq$  nie jest dobry.

**Zadanie 534.** Załóżmy, że zbiór  $\langle X, R \rangle$  jest dobrze uporządkowany. Znajdź warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór  $\langle X, R^{-1} \rangle$  był także dobrze uporządkowany.

---

<sup>1</sup> Przy założeniu aksjomatu wyboru prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

**Zadanie 535.** Udowodnij, że jeśli  $f : A \rightarrow B$  jest monotoniczną bijekcją między dobrymi porządkami  $\langle A, \leq_A \rangle$  i  $\langle B, \leq_B \rangle$ , to funkcja odwrotna  $f^{-1}$  też jest monotoniczna. Czy założenie, że porządki  $\leq_A$  i  $\leq_B$  są dobre jest istotne?

**Zadanie 536.** W zbiorze  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  wprowadzamy relację  $R$  wzorem

$$xRy \Leftrightarrow (2|x \wedge 2|y \wedge y \leq x) \vee (2|x \wedge \neg(2|y)) \vee (\neg(2|x) \wedge \neg(2|y) \wedge x \leq y).$$

Udowodnij, że zbiór  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, R \rangle$  jest liniowo uporządkowany. Czy jest to dobry porządek?

**Zadanie 537.** Udowodnij, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

**Zadanie 538.** Dany jest zbiór

$$A = \left\{ n + \frac{m}{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Czy  $\langle A, \leq \rangle$  jest dobrym porządkiem ( $\leq$  jest zwykłą relacją porządku w zbiorze liczb rzeczywistych)?
2. Ile jest nierosnących funkcji z  $\mathbb{N}$  w  $A$ ?

**Zadanie 539.** W zbiorze  $\mathcal{F} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  funkcji z  $\mathbb{N}$  w  $\mathbb{N}$  wprowadzamy relację  $\leq_F$  kładąc

$$f \leq_F g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)).$$

Czy porządek częściowy  $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$  jest

1. krata,
2. krata zupełną,
3. porządkiem zupełnym,
4. porządkiem regularnym?

**Zadanie 540.** Niech  $\mathcal{F} = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\} \text{ jest skończony}\}$ . W zbiorze  $\mathcal{F}$  wprowadzamy relacje  $\leq_F$  i  $\leq_L$  kładąc

$$f \leq_F g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} (f(n) \leq g(n)) \quad \text{oraz}$$

$$f \leq_L g \Leftrightarrow f = g \vee \exists m \in \mathbb{N} (f(m) < g(m) \wedge \forall n \in \mathbb{N} (n < m \Rightarrow f(n) = g(n))).$$

1. Czy  $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$  jest porządkiem liniowym?
2. Czy  $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$  jest porządkiem liniowym?

3. Czy  $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$  jest porządkiem regularnym?
4. Czy  $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$  jest porządkiem regularnym?
5. Czy  $\langle \mathcal{F}, (\leq_F)^{-1} \rangle$  jest porządkiem regularnym?
6. Czy  $\langle \mathcal{F}, (\leq_L)^{-1} \rangle$  jest porządkiem regularnym?

**Zadanie 541.** Czy porządek zadany definicją 149 jest regularny?

**Zadanie 542.** Czy na zbiorze  $A$  o mocy większej niż 1 można zdefiniować porządek jednocześnie dobry i gęsty?

*Definicja 160.* Binarna relacja  $R$  na zbiorze  $X$  jest *słabo konfluentna*, jeśli dla każdych  $x_1, x_2, x_3 \in X$  istnieje taki  $x_4 \in X$ , że jeśli  $x_1 R x_2$  i  $x_1 R x_3$ , to  $x_2 \bar{R} x_4$  i  $x_3 \bar{R} x_4$ , gdzie  $\bar{R}$  jest przechodnim domknięciem relacji  $R$ . Relacja  $R$  jest *konfluentna*, jeśli dla każdych  $x_1, x_2, x_3 \in X$  istnieje taki  $x_4 \in X$ , że jeśli  $x_1 \bar{R} x_2$  i  $x_1 \bar{R} x_3$ , to również  $x_2 \bar{R} x_4$  i  $x_3 \bar{R} x_4$ , gdzie  $\bar{R}$  jest przechodnim domknięciem relacji  $R$ .

**Zadanie 543.** Pokaż, że istnieje relacja  $R$  słabo konfluentna, która nie jest konfluentna.

**Zadanie 544.** Pokaż, że istnieje relacja  $R$  słabo konfluentna, której graf jest acykliczny i która nie jest konfluentna.

*Definicja 161.* Binarna relacja  $R$  na zbiorze  $X$  jest *ufundowana* jeśli nie istnieje taki nieskończony ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , że  $a_i R a_{i+1}$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 545.** Pokaż, że jeśli relacja  $R$  jest ufundowana i słabo konfluentna, to jest konfluentna.

**Zadanie 546.** Niech  $\mathcal{K}$  będzie rodziną podzbiorów zbioru liczb naturalnych taką, że relacja zawierania na tej rodzinie jest porządkiem regularnym. Pokaż, że każdy łańcuch w tym porządku jest przeliczalny.

**Zadanie 547.** Dane są dwa niemalejące ciągi liczb naturalnych  $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  oraz  $\langle b_0, b_1, ab_2, \dots \rangle$ . Przypuśćmy, że te ciągi „podobnie rosną”, tzn. dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  spełnione są warunki:

1. jeżeli  $a_n < b_n$ , to  $a_n < a_{n+1}$  oraz  $b_n = b_{n+1}$ ,
2. jeżeli  $b_n < a_n$ , to  $b_n < b_{n+1}$  oraz  $a_n = a_{n+1}$ .

Udowodnij, że jeżeli liczba  $c$  jest wyrazem obu tych ciągów, to  $c$  jest wyrazem tych ciągów o tym samym numerze (tj. istnieje taka liczba  $i \in \mathbb{N}$ , że  $a_i = c = b_i$ ).

**Zadanie 548.** Czy porządek z zadania 440 jest regularny?

## 11.2. Indukcja

**Twierdzenie 162 (zasada indukcji).** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie regularnym porządkiem częściowym. Jeśli  $X \subseteq P$  spełnia warunek  $\forall x ((\forall y < x \ y \in X) \Rightarrow x \in X)$ , to  $X = P$ .

**Przykład 163.** *Grafem prostym* o wierzchołkach  $V$  i krawędziach  $E$  nazywamy taką parę  $\langle V, E \rangle$ , że  $V$  jest skończonym zbiorem oraz  $E \subseteq V \times V$  jest relacją antyzwrotną i symetryczną.<sup>2</sup> Pokażemy, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych  $n$  każdy  $n$ -wierzchołkowy graf prosty ma nie więcej niż  $\frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi. Skorzystamy w tym celu z zasady indukcji dla  $\langle \mathbb{N}^+, \leq \rangle$  (oczywiście jest to porządek regularny).

Niech

$$X = \{n \in \mathbb{N}^+ \mid \text{każdy } n\text{-wierzchołkowy graf prosty} \\ \text{ma nie więcej niż } \frac{n(n-1)}{2} \text{ krawędzi}\}.$$

Pokażemy, że spełniony jest warunek

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ ((\forall i < n \ i \in X) \Rightarrow n \in X) \quad (3)$$

Weźmy dowolną liczbę  $n \in \mathbb{N}^+$  i rozważmy następujące dwa przypadki.

*Przypadek 1:*  $n = 1$ . Rozważmy dowolny 1-wierzchołkowy graf  $G = \langle V, E \rangle$ . Ponieważ relacja  $E$  jest antyzwrotna, więc graf  $G$  nie ma wcale krawędzi (ich liczba jest ograniczona przez 0). Mamy  $0 = \frac{1 \cdot 0}{2}$ , co pokazuje, że w tym przypadku  $n \in X$  i implikacja

$$(\forall i < n \ i \in X) \Rightarrow n \in X \quad (4)$$

jest prawdziwa.

*Przypadek 2:*  $n > 1$ . Załóżmy, że prawdziwy jest warunek  $\forall i < n \ i \in X$ . Chcemy pokazać, że  $n \in X$ , czyli że każdy  $n$ -wierzchołkowy graf prosty ma nie więcej niż  $\frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi. Rozważmy zatem dowolny  $n$ -wierzchołkowy graf  $G = \langle V, E \rangle$ . Wybierzmy w zbiorze  $V$  dowolny wierzchołek  $v$  i usuńmy go z grafu otrzymując graf  $G' = \langle V', E' \rangle$ , gdzie  $V' = V - \{v\}$  oraz  $E' = E \cap (V' \times V')$ . Graf  $G'$  jest  $(n-1)$ -wierzchołkowy, więc z założenia indukcyjnego liczba krawędzi w  $E'$  jest ograniczona przez  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . W zbiorze  $E - E'$  jest co najwyżej  $n-1$  krawędzi, a zatem łączna liczba krawędzi w  $E$  nie przekracza  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ . Ponieważ graf  $G$  był wybrany dowolnie, więc każdy  $n$ -wierzchołkowy graf ma nie więcej niż  $\frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi, a zatem  $n \in X$  i również w tym przypadku implikacja (4) jest prawdziwa.

<sup>2</sup>W języku teorii grafów oznacza to, że nie ma pętli w wierzchołkach i krawędzie nie są skierowane.

Ponieważ liczba  $n$  była wybrana jako dowolna, dowiedliśmy prawdziwości warunku (3). Na mocy zasady indukcji otrzymujemy, że  $X = \mathbb{N}^+$ , czyli dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych  $n$  każdy  $n$ -wierzchołkowy graf prosty ma nie więcej niż  $\frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi. ■

Okazuje się, że samodzielne sformułowanie powyższego rozumowania sprawia ogromne kłopoty wielu studentom. Poniżej wymieniamy najczęściej spotykane błędy w tego typu rozumowaniach.

- Sprawdzenie podstawy indukcji dla  $n = 1$ ,  $n = 2$  i  $n = 3$ : Zwykle wystarcza rozważenie jednego przypadku bazowego. Sprawdzenie prawdziwości twierdzenia dla drugiej z kolei liczby jest konieczne tylko wtedy, gdy chcemy skorzystać z założenia, że  $n - 2 \in X$  (bo dla  $n = 2$  mamy  $n - 2 \notin \mathbb{N}^+$  i z takiego założenia nie da się skorzystać); tutaj natomiast nie ma takiej potrzeby.
- Użycie sformułowania „teza z zadania dla  $n = k$ ”: zwykle student używający takiego sformułowania nie wie, co ono oznacza. W szczególności nie wiadomo, czy oznacza ono zdanie „ $k \in X$ ” czy może „ $k \in X \Rightarrow (k + 1) \in X$ ”, czy też „ $\forall k \ k \in X \Rightarrow (k + 1) \in X$ ” czy „ $\forall k \ k \in X$ ”.
- Oparcie dowodu kroku indukcyjnego na schemacie „weźmy dowolny graf  $(n - 1)$ -wierzchołkowy i dodajmy do niego wierzchołek”: tu błąd polega na tym, że mamy coś dowieść dla *wszystkich* grafów  $n$ -wierzchołkowych, ale nie da się otrzymać dowolnego grafu  $n$ -wierzchołkowego dodając wierzchołek do dowolnego grafu  $(n - 1)$ -wierzchołkowego. W szczególności dla  $n = 4$  nie da się otrzymać trójramiennej gwiazdy dodając wierzchołek do trójkąta.
- Rozpoczęcie dowodu kroku indukcyjnego od sformułowania „niech  $k$  będzie liczbą krawędzi w grafie”: tu nie wiadomo o jaki graf chodzi, a nie każdy graf ma tyle samo krawędzi.

Zadania poniżej należy rozwiązywać korzystając z zasady indukcji podanej w Twierdzeniu 162. Z innej wersji zasady indukcji można skorzystać tylko pod warunkiem, że umie się tę inną wersję udowodnić.<sup>3</sup>

**Zadanie 549.** Skończony zbiór liniowo uporządkowany  $\langle A, \leq_A \rangle$  ma  $n$  elementów, a zbiór uporządkowany  $\langle B, \leq_B \rangle$  ma 2 elementy, przy czym  $A \cap B = \emptyset$ . Na ile sposobów można porządek liniowy na  $A$  rozszerzyć o elementy zbioru  $B$  (to znaczy znaleźć taki porządek liniowy  $\langle A \cup B, \leq \rangle$ , że  $(a_1 \leq_A a_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2)$ , dla  $a_1, a_2 \in$

<sup>3</sup>Dlaczego? Otóż w przyszłości będziecie często korzystać z indukcji strukturalnej (w której porządek zadany jest przez strukturę termów, grafów, dowodów itp.). Np. przy uzasadnianiu poprawności algorytmu wyprowadzania typu potrzebna będzie indukcja względem budowy dowodu osądu typowego. Teraz nie wiemy jeszcze co to jest osąd typowy, ale jak się dowiemy to nie będzie już czasu na zastanawianie się co to jest indukcja.

$A$  oraz  $(b_1 \leq_B b_2) \Leftrightarrow (b_1 \leq b_2)$ , dla  $b_1, b_2 \in B$ )? Odpowiedź uzasadnij przy pomocy dowodu przez indukcję.

**Zadanie 550.** Pokaż przez indukcję, że dla każdej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ , liczba wystąpień zmiennych jest o 1 większa od liczby wystąpień binarnych spójników zdaniowych.

**Zadanie 551.** Pokaż przez indukcję, że dla każda formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników  $\wedge, \vee$  jest spełnialna.

**Zadanie 552.** Pokaż przez indukcję, że dla każdego zbioru  $A$  mocy  $n \in \mathbb{N}$  istnieje  $n!$  bijekcji  $f : A \rightarrow A$ .

**Zadanie 553.** Udowodnij przez indukcję, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. *Wskazówka:* wybierz odpowiedni porządek.

**Zadanie 554.** Niech  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Udowodnij, że jeśli

- $0 \in X$ ,  $1 \in X$  oraz  $2 \in X$ ,
- dla dowolnego  $x \in \mathbb{N}$ , z tego, że  $x \in X$ ,  $x + 1 \in X$  oraz  $x + 2 \in X$  wynika, że  $x + 3 \in X$ ,

to  $X = \mathbb{N}$ .

**Zadanie 555.** Mówimy, że graf prosty  $G = \langle V, E \rangle$  jest *spójny*, jeśli zwrotne i przechodnie domknięcie relacji  $E$  jest równe  $V \times V$  (w języku teorii grafów oznacza to, że każde dwa wierzchołki są połączone ścieżką). Pokaż przez indukcję, że (dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych  $n$ ) każdy  $n$ -wierzchołkowy graf spójny ma co najmniej  $n - 1$  krawędzi.

**Zadanie 556.** Rozważmy funkcję Ackermanna zdefiniowaną wzorem

$$A(x, y) = \begin{cases} y + 1, & \text{dla } x = 0 \\ A(x - 1, 1) & \text{dla } x > 0 \text{ i } y = 0 \\ A(x - 1, A(x, y - 1)) & \text{wpp} \end{cases}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  obliczanie funkcji  $A(x, y)$  się nie zapętla.

**Zadanie 557.** Smok Strachota ma (skończenie) wiele głów, a każda jego głowa ma (skończenie) wiele paszcz. Kiedy rycerz odetnie Strachocie głowę, w miejsce odciętej odrasta smokowi tyle głów ile ten sobie zażyczy, ale każda z tych nowych głów ma mniej paszcz niż odcięta głowa.



*Stanem smoka* nazywamy taką funkcję  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , że  $g(i)$  oznacza liczbę głów o  $i$  paszczach. Powiemy, że stan smoka jest *bezpieczny* jeśli w skończenie wielu cięciach można pozbawić smoka wszystkich głów. Udowodnij indukcyjnie, że każdy stan smoka jest bezpieczny.

*Wskazówka:* Główna (i niemal jedyna) trudność tego zadania to zdefiniowanie odpowiedniego porządku na stanach smoka.

**Twierdzenie 164 (o definiowaniu przez indukcję).** Niech  $A$  i  $B$  będą dowolnymi zbiorami. Niech  $g : A \rightarrow B$  oraz  $h : B \times A \times \mathbb{N} \rightarrow B$  będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja  $f : A \times \mathbb{N} \rightarrow B$  spełniająca warunki:

1.  $\forall a \in A \ f(a, 0) = g(a)$ ,
2.  $\forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(a, n+1) = h(f(a, n), a, n)$ .

**Twierdzenie 165 (drugie twierdzenie o definiowaniu przez indukcję).**

Niech  $A$  i  $B$  będą dowolnymi zbiorami. Niech  $g : A \rightarrow B$  oraz  $h : B^* \times A \times \mathbb{N} \rightarrow B$  będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja  $f : A \times \mathbb{N} \rightarrow B$  spełniająca warunki:

1.  $\forall a \in A \ f(a, 0) = g(a)$ ,
2.  $\forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(a, n+1) = h((f(a, 0), \dots, f(a, n)), a, n)$ .

**Twierdzenie 166 (O definiowaniu funkcji przez indukcję noetherowską).**

Niech  $\langle A, \leq \rangle$  będzie zbiorem regularnym i niech  $B, C$  będą dowolnymi zbiorami. Niech  $B^{\subseteq A \times C}$  oznacza zbiór funkcji częściowych z  $A \times C$  w  $B$ . Dla dowolnej funkcji  $h : B^{\subseteq A \times C} \times A \times C \rightarrow B$  istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunek:

$$f(x, c) = h(f \cap (\{y \in A \mid y < x\} \times C \times B), x, c).$$

**Zadanie 558.** Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna funkcja  $\text{suma} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  i dokładnie jedna funkcja  $\text{iloczyn} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spełniające równania

$$\begin{aligned} \text{suma}(n, 0) &= n \\ \text{suma}(n, m+1) &= \text{suma}(n, m) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iloczyn}(n, 0) &= 0 \\ \text{iloczyn}(n, m+1) &= n + \text{iloczyn}(n, m). \end{aligned}$$

**Zadanie 559.** Czy istnieje dokładnie jedna funkcja  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  spełniająca równości  $f(\emptyset) = \emptyset$  i  $f(X \cup \{n\}) = f(X) \cup \{n\}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ?



# 12

## Algebra termów

**Definicja 167.** *Sygnaturą* nazywamy rodzinę  $\{\Sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  zbiorów parami rozłącznych. Elementy zbioru  $\Sigma_n$  nazywamy *symbolami  $n$ -argumentowymi*. Elementy  $\Sigma_0$  nazywamy *symbolami stałych* (lub po prostu *stałymi*). Kładziemy też  $\Sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$ .

**Definicja 168 (Algebra termów).** Niech  $\Sigma$  będzie sygnaturą i niech  $V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  będzie zbiorem zmiennych (zakładamy, że  $\Sigma \cap V = \emptyset$ ). Przez  $T(\Sigma, V)$  będziemy oznaczać zbiór termów nad  $\Sigma$ , czyli najmniejszy zbiór zawierający zmienne i symbole stałych (to znaczy  $V \subseteq T(\Sigma, V)$  i  $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma, V)$ ) i zamknięty względem  $\Sigma$  (to znaczy jeśli  $f \in \Sigma_n, t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma, V)$ , to  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma, V)$ ).

Przez  $T(\Sigma)$  będziemy oznaczać zbiór *termów stałych* nad  $\Sigma$ , czyli najmniejszy zbiór zawierający symbole stałych (to znaczy  $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma)$ ) i zamknięty względem  $\Sigma$  (to znaczy jeśli  $f \in \Sigma_n, t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma)$ , to  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma)$ ).

Zbiór termów stałych można też zdefiniować jako zbiór tych termów, w których nie występują zmienne.

**Definicja 169.** Niech  $t, t' \in T(\Sigma, V)$ . Mówimy, że  $t'$  jest *podtermem*  $t$ , jeśli  $t = t'$  lub  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  i  $t'$  jest podtermem  $t_i$  dla pewnego  $i \leq n$ . Jeśli  $t'$  jest podtermem  $t$  to piszemy  $t' \sqsubseteq t$ .

### 12.1. Inna definicja zbioru termów. Drzewa

**Definicja 170.** Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem. Zbiór  $T \subseteq A^*$  jest *drzewem* jeśli jest zamknięty na przedrostki (to znaczy, jeśli  $u \prec w$  ( $u$  jest przedrostkiem  $w$ ) oraz  $w \in T$ , to  $u \in T$ ).

Elementy drzewa nazywamy *wierzchołkami*. Każde drzewo zawiera słowo puste  $\epsilon$ . Słowo puste nazywamy *korzeniem drzewa*. Jeśli  $w \in T$  oraz  $wa \in T$  dla  $w \in A^*, a \in A$ , to mówimy, że  $wa$  jest *następnikiem* (synem)  $w$  w  $T$ ,  $w$  nazywamy *poprzednikiem* (ojcem)  $wa$ . Wierzchołek  $T$ , który nie ma następników nazywamy *liściem*. *Ścieżką* w drzewie  $T$  nazywamy dowolny podzbiór  $T$  liniowo uporządkowany relacją  $\prec$ . *Ścieżka* w drzewie  $T$  jest *gałęzią*, jeśli jest maksymalnym podzbiorem  $T$

liniowo uporządkowanym relacją  $\prec$ . Każda gałąź zawiera korzeń drzewa. Jeśli gałąź jest skończona, to zawiera dokładnie jeden liść. *Stopniem* wierzchołka  $w$  w drzewie  $T$  nazywamy liczbę następników  $w$ . *Długością ścieżki*  $\pi$  nazywamy moc zbioru  $\pi$ . *Wysokością drzewa*  $T$  nazywamy kres górny długości ścieżek w  $T$ . Jeśli drzewo  $T$  jest skończone, to jego wysokość jest równa długości najdłuższej gałęzi w  $T$ .

**Definicja 171.** Niech  $T$  będzie drzewem i niech  $w \in T$ . Kładziemy

$$T_w = \{u \in A^* \mid wu \in T\}.$$

Łatwo sprawdzić, że  $T_w$  jest drzewem.  $T_w$  nazywamy *poddrzewem drzewa  $T$  ukończonym w  $w$* . Drzewo  $U$  jest poddrzewem  $T$ , jeśli  $U = T_w$  dla pewnego  $w \in T$ .

**Definicja 172.** *Drzewem adresów* nazywamy drzewo  $T$  nad  $\mathbb{N}$  o tej własności, że dla każdego  $w \in T$  zbiór następników  $w$  jest odcinkiem początkowym  $\mathbb{N}$ , to znaczy jeśli  $wn \in T$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ , oraz  $m < n$ , to  $wm \in T$ .

**Definicja 173.** Niech  $\Sigma$  będzie sygnaturą. *Termem* nad  $\Sigma$  nazywamy dowolną parę  $t = \langle T, e \rangle$ , gdzie  $T$  jest drzewem adresów,  $e : T \rightarrow \Sigma$  zaś taką funkcją, że jeśli  $w \in T$ ,  $e(w) \in \Sigma_n$ , to  $w$  ma stopień  $n$ .

**Definicja 174.** Niech  $t = \langle T, e \rangle$  będzie termem i niech  $w \in T$ . *Podtermem*  $t$  w  $w$  nazywamy term  $t_w = \langle T_w, e_w \rangle$ , gdzie  $e_w(u) = e(wu)$ .  $t'$  jest podtermem  $t$ , jeśli  $t' = t_w$  dla pewnego  $w \in T$ .

## 12.2. Podstawienia

**Definicja 175.** Niech  $\Sigma$  będzie sygnaturą a  $V$  zbiorem zmiennych. *Podstawieniem* w zbiorze termów  $T(\Sigma, V)$  nazywamy funkcję przyporządkowującą zmiennym ze zbioru  $V$  elementy  $T(\Sigma, V)$ .

Podstawienie  $\sigma : V \rightarrow T(\Sigma, V)$  rozszerzamy do funkcji  $\sigma^* : T(\Sigma, V) \rightarrow T(\Sigma, V)$  kładąc  $\sigma^*(x) = \sigma(x)$  dla  $x \in V$  oraz  $\sigma^*(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma^*(t_1), \dots, \sigma^*(t_n))$ . Jeśli nie będzie prowadzić to do nieporozumień, będziemy pisali  $\sigma$  zamiast  $\sigma^*$ .

Term uzyskany z termu  $t$  przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej  $x$  w termie  $t$  przez term  $\sigma(x)$  nazywamy wartością termu  $t$  przy podstawieniu  $\sigma$  i oznaczamy  $\sigma(t)$  lub  $t\sigma$ .

W dalszych częściach będziemy często rozważać podstawienia, które zmieniają tylko skończenie wiele zmiennych. Tradycyjnie podstawienie, które zmienia tylko zmienne  $x_1, \dots, x_n$  i przyporządkowuje im odpowiednio termy  $t_1, \dots, t_n$  oznacza się przez  $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ . Dokładniej,  $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] : V \rightarrow T(\Sigma, V)$  jest funkcją zdefiniowaną wzorem

$$[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n](v) = \begin{cases} t_i & \text{jeśli } v = x_i \\ v & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W szczególności  $[] : V \rightarrow T(\Sigma, V)$  jest funkcją identycznościową zbioru  $V$ .

### 12.3. Problem unifikacji

**Definicja 176.** Niech  $\Sigma$  będzie sygnaturą. *Problemem unifikacji* nazywamy następujące zadanie: „mając dany zbiór  $\{(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)\}$ , znaleźć takie podstawienie  $\sigma$ , żeby dla każdego  $i \leq n$  zachodziło  $\sigma(t_i) = \sigma(s_i)$ .” To znaczy, należy znaleźć takie przyporządkowanie termów zmiennym występującym w termach  $t_1, s_1, \dots, t_n, s_n$ , żeby po podstawieniu tych termów za odpowiednie zmienne uzyskać termy równe. Podstawienie  $\sigma$  nazywamy *unifikatorem* zbioru  $\{(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)\}$ . Często ten zbiór (nazywany czasem *instancją problemu unifikacji*) zapisujemy jako

$$\{t_1 \stackrel{?}{=} s_1, \dots, t_n \stackrel{?}{=} s_n\}.$$

**Definicja 177.** Jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są unifikatorami zbioru  $\{(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)\}$ , to mówimy, że  $\sigma$  jest *ogólniejsze* od  $\tau$ , (co oznaczamy  $\tau \leq \sigma$ ) jeśli istnieje takie podstawienie  $\varrho$ , że  $\tau = \sigma \varrho$ . Podstawienie  $\sigma$  nazywamy *najogólniejszym unifikatorem* zbioru

$$\mathcal{S} = \{t_1 \stackrel{?}{=} s_1, \dots, t_n \stackrel{?}{=} s_n\},$$

jeśli  $\sigma$  jest unifikatorem  $\mathcal{S}$  oraz  $\sigma$  jest ogólniejsze od każdego innego unifikatora  $\mathcal{S}$ .

Algorytm podany na rysunku 9 dla zadanej instancji problemu unifikacji znajduje jego najogólniejszy unifikator lub odpowiada „nie ma unifikatora”.

**Zadanie 560.** Udowodnij, że algorytm z rysunku 9 zawsze się zatrzymuje.

**Zadanie 561.** Znajdź unifikator dla podanych instancji problemu unifikacji (lub uzasadnij, że taki nie istnieje) w algebrze termów o sygnaturze  $\Sigma = \{a, c, d, f, g, h, p\}$  i zbiorze zmiennych  $\mathcal{X} = \{u, v, w, x, y, z, \dots\}$ .

1.  $\{f(x, f(x, c, g(z))), f(g(g(z)), x, g(c))) \stackrel{?}{=} f(f(u, v, v), y, y)\}$
2.  $\{f(f(d, y), f(z, x)) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), f(x, c))\}$
3.  $\{f(f(x, y), f(z, u)) \stackrel{?}{=} f(f(f(f(u, u), f(u, u)), f(f(x, x), f(x, x))), f(f(f(y, y), f(y, y)), f(f(u, u), f(u, u))))\}$
4.  $\{f(x_1, x_1) \stackrel{?}{=} x_2, f(x_2, x_2) \stackrel{?}{=} x_3, \dots, f(x_{n-1}, x_{n-1}) \stackrel{?}{=} x_n\}$
5.  $\{p(f(y), w, g(z)) \stackrel{?}{=} p(v, u, v)\}$
6.  $\{p(a, x, f(g(y))) \stackrel{?}{=} p(z, h(w), f(w))\}$
7.  $\{p(z, h(w), g(z)) \stackrel{?}{=} p(v, u, v)\}$
8.  $\{p(a, h(w), f(g(y))) \stackrel{?}{=} p(z, x, f(w))\}$

**wejście:** zbiór równań  $\mathcal{S} = \{t_1 \stackrel{?}{=} s_1, \dots, t_n \stackrel{?}{=} s_n\}$

**wyjście:** najogólniejszy unifikator  $\sigma$  zbioru  $\mathcal{S}$  lub “nie ma unifikatora”

```

 $\sigma \leftarrow []$ 
while  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  do
  select  $t \stackrel{?}{=} s$  from  $\mathcal{S}$ 
  case  $t \stackrel{?}{=} s$  of
     $f(t'_1, \dots, t'_k) \stackrel{?}{=} f(s'_1, \dots, s'_k)$ :
       $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{t'_1 \stackrel{?}{=} s'_1, \dots, t'_k \stackrel{?}{=} s'_k\}$ 
     $f(t'_1, \dots, t'_k) \stackrel{?}{=} g(s'_1, \dots, s'_l)$  where  $f \neq g$ :
      return nie ma unifikatora
     $x \stackrel{?}{=} t$ , where  $x \in \mathcal{V}$ :
      if  $x \in \text{FV}(t)$  and  $x \neq t$  then
        return nie ma unifikatora
      else
         $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}[x/t]$ 
         $\sigma \leftarrow \sigma[x/t]$ 
     $t \stackrel{?}{=} x$ , where  $x \in \mathcal{V}$  and  $t \notin \mathcal{V}$ :
       $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$ 
return  $\sigma$ 

```

### Rysunek 9. Algorytm unifikacji

Następne zadania są jednymi z lematów służących do udowodnienia poprawności algorytmu unifikacji z rysunku 9. Nie wolno więc w ich rozwiązaniu korzystać z poprawności tego algorytmu.

**Zadanie 562.** Udowodnij, że jeśli  $\theta$  jest unifikatorem  $\{x \stackrel{?}{=} t\}$  to istnieje takie podstawienie  $\sigma$ , że  $\theta = \sigma[x/t]$ .

**Zadanie 563.** Udowodnij, że jeśli zmienna  $x$  występuje w termie  $t$  i  $t \neq x$  to nie istnieje unifikator  $\{x \stackrel{?}{=} t\}$ .

**Zadanie 564.** Udowodnij, że jeśli zmienna  $x$  nie występuje w termie  $t$  to  $[x/t]$  jest najbardziej ogólnym unifikatorem  $\{x \stackrel{?}{=} t\}$ .

**Zadanie 565.** W tym zadaniu będziemy rozważać zadania unifikacji składające się z nieskończonej liczby par termów. Udowodnij następujące twierdzenie o zwartości

dla problemu unifikacji: zadanie unifikacji  $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I}$ , w którym występuje jedynie skończenie wiele różnych zmiennych, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego skończone podzadanie  $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I_0}$ , dla  $I_0 \subseteq I, |I_0| < \infty$ , ma rozwiązanie. Pokaż, że twierdzenie jest fałszywe, jeśli zadanie zawiera nieskończenie wiele zmiennych.





## Elementy logiki formalnej

### 13.1. Składnia języka pierwszego rzędu

**Definicja 178.** *Sygnaturą* języka pierwszego rzędu nazywamy zbiór  $\Sigma = \Sigma^F \cup \Sigma^R$ , gdzie  $\Sigma^F$  jest zbiorem *symboli funkcyjnych* a  $\Sigma^R$  zbiorem *symboli relacyjnych*, przy czym  $\Sigma^F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^F$  i  $\Sigma^R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^R$ , gdzie  $\Sigma_i^F$  i  $\Sigma_i^R$  są odpowiednio zbiorami  $i$ -argumentowych ( $i \geq 0$ ) symboli funkcyjnych i relacyjnych.

**Definicja 179.** Zbiór termów  $\mathcal{T}(\Sigma, V) = \mathcal{T}(\Sigma^F, V)$  definiujemy jako najmniejszy zbiór zawierający zmienne ze zbioru  $V$  i zamknięty ze względu na tworzenie termów złożonych zawierających symbole funkcji z  $\Sigma^F$ , tj. jeśli  $t_1, \dots, t_n$  są termami, zaś  $f \in \Sigma_n^F$ , to  $f(t_1, \dots, t_n)$  też jest termem.

**Definicja 180.** Zbiór formuł atomowych jest zbiorem napisów postaci  $R(t_1, \dots, t_n)$ , gdzie  $R \in \Sigma_n^R$ , zaś  $t_1, \dots, t_n$  są termami.

**Definicja 181.** Zbiór *formuł języka pierwszego rzędu* jest najmniejszym zbiorem napisów zawierającym formuły atomowe, zamknięty ze względu na spójniki zdaniowe  $\vee, \wedge, \neg, \perp, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , oraz kwantyfikatory  $\forall$  i  $\exists$ , tzn. jeśli  $\alpha$  i  $\beta$  są formułami, zaś  $x$  jest zmienną (z  $V$ ), to formułami są także  $\perp, \neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta, \forall x \alpha, \exists x \alpha$ .

**Definicja 182.** Zbiór zmiennych *wolnych*  $FV(\alpha)$  formuły  $\alpha$  definiujemy indukcyjnie:

$$\begin{aligned} FV(\perp) &= \emptyset \\ FV(R(t_1, \dots, t_n)) &= FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n) \\ FV(\alpha \vee \beta) &= FV(\alpha \wedge \beta) = FV(\alpha \Rightarrow \beta) \\ &= FV(\alpha \Leftrightarrow \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta) \\ FV(\forall x \alpha) &= FV(\exists x \alpha) = FV(\alpha) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

gdzie dla termów  $FV(t_i)$  oznacza zbiór wszystkich zmiennych występujących w  $t_i$ .

**Definicja 183.** Wszystkie wolne wystąpienia zmiennej  $x$  w formule  $\alpha$  stają się *związane* w formule  $\forall x \alpha$  i  $\exists x \alpha$ . Mówimy że kwantyfikator *wiąże* te wystąpienia.

**Definicja 184.** Formuła bez zmiennych wolnych nazywa się *zdaniem*.

## 13.2. Semantyka języka pierwszego rzędu

**Definicja 185.** *Struktura*  $\mathfrak{A}$  sygnatury  $\Sigma$  to niepusty zbiór  $A$  zwany jej *uniwersum* i *interpretacja*, czyli funkcja  $\cdot^{\mathfrak{A}}$ , która każdemu symbolowi funkcji  $f \in \Sigma_n^F$ , gdzie  $n \geq 0$ , przyporządkowuje funkcję  $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ , każdemu symbolowi relacji  $R \in \Sigma_n^R$ , gdzie  $n > 0$ , przyporządkowuje relację  $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$  i każdemu symbolowi  $R \in \Sigma_0^R$  przyporządkowuje wartość logiczną ze zbioru  $\{T, F\}$ .

**Definicja 186.** *Wartościowaniem* w strukturze  $\mathfrak{A}$  nazywamy dowolną funkcję  $v : V \rightarrow A$ . Ponadto niech

$$(v_x^a)(y) = \begin{cases} v(y), & \text{gdy } x \neq y, \\ a, & \text{gdy } x = y, \end{cases}$$

dla dowolnego wartościowania  $v : V \rightarrow A$ , zmiennej  $x \in V$  i elementu  $a \in A$ .

**Definicja 187.** Dla dowolnego termu z  $\mathcal{T}(\Sigma^F, V)$  definiujemy indukcyjnie jego *interpretację*  $t^{\mathfrak{A}}[v]$  przy zadanym wartościowaniu zmiennych  $v : V \rightarrow A$ :

$$\begin{aligned} x^{\mathfrak{A}}[v] &= v(x) \\ (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathfrak{A}}[v] &= f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[v], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[v]) \end{aligned}$$

**Definicja 188.** Poniżej definiujemy indukcyjnie relację  $\models$ . Gdy ona zachodzi, co oznaczamy  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ , to mówimy że *struktura*  $\mathfrak{A}$  *spełnia formułę*  $\alpha$  *przy wartościowaniu*  $v$ .

1. Nigdy nie zachodzi  $\mathfrak{A} \models \perp[v]$ .
2.  $\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[v]$  wtw gdy  $(t_1^{\mathfrak{A}}[v], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[v]) \in R^{\mathfrak{A}}$ .
3.  $\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[v]$  wtw gdy  $t_1^{\mathfrak{A}}[v] = t_2^{\mathfrak{A}}[v]$ .
4.  $\mathfrak{A} \models (\neg \alpha)[v]$  wtw gdy nie zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$
5.  $\mathfrak{A} \models (\alpha \wedge \beta)[v]$  wtw gdy zachodzą jednocześnie  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$  i  $\mathfrak{A} \models \beta[v]$ .
6.  $\mathfrak{A} \models (\alpha \vee \beta)[v]$  wtw gdy  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$  lub  $\mathfrak{A} \models \beta[v]$ .
7.  $\mathfrak{A} \models (\alpha \Rightarrow \beta)[v]$  wtw gdy nie zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$  lub zachodzi  $\mathfrak{A} \models \beta[v]$ .
8.  $\mathfrak{A} \models (\alpha \Leftrightarrow \beta)[v]$  wtw gdy jednocześnie nie zachodzą  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$  i  $\mathfrak{A} \models \beta[v]$ , lub jednocześnie zachodzą  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$  i  $\mathfrak{A} \models \beta[v]$ .
9.  $\mathfrak{A} \models (\forall x. \alpha)[v]$  wtw gdy dla każdego elementu  $a \in A$  zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v_x^a]$ .

10.  $\mathfrak{A} \models (\exists x.\alpha)[v]$  wtw gdy istnieje element  $a \in A$  dla którego zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v_x^a]$ .

**Definicja 189.** Formuła  $\alpha$  jest *spełnialna* w  $\mathfrak{A}$ , jeśli istnieje wartościowanie  $v : V \rightarrow A$  dla którego zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ . Formuła  $\alpha$  jest *spełnialna*, jeśli istnieje struktura  $\mathfrak{A}$ , w której  $\alpha$  jest spełnialna. Formuła  $\alpha$  jest *prawdziwa* w  $\mathfrak{A}$  (struktura  $\mathfrak{A}$  jest *modelem dla  $\alpha$* ), jeśli dla każdego wartościowania  $v : V \rightarrow A$  zachodzi  $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ . Formuła  $\alpha$  jest *prawdziwa* (jest *tautologią*), jeśli dla każdej struktury  $\mathfrak{A}$ , formuła  $\alpha$  jest prawdziwa w  $\mathfrak{A}$ .

**Zadanie 566.** Korzystając wprost z definicji semantyki języka pierwszego rzędu pokaż, że formuła  $\forall x \exists y \ x < y$  jest prawdziwa w strukturze, której uniwersum jest zbiór liczb naturalnych a interpretacją symbolu  $<$  jest naturalny porządek na liczbach.

**Zadanie 567.** Niech  $\phi$  i  $\psi$  będą formułami logiki pierwszego rzędu. Korzystając wprost z definicji semantyki języka pierwszego rzędu udowodnij, że następujące formuły są tautologiami.

- $(\exists x \phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \forall x \phi \Rightarrow \exists x \psi$
- $(\forall x \phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \exists x \phi \Rightarrow \exists x \psi$

**Zadanie 568.** Udowodnij, że dla każdej formuły logiki pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła nie zawierająca kwantyfikatorów  $\forall$ .

**Zadanie 569.** Rozważmy dwa izomorficzne porządki  $\mathcal{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  i  $\mathcal{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ . Traktujemy te porządki jak struktury nad sygnaturą bez symboli funkcyjnych i z jednym symbolem relacyjnym  $\leq$ , w których relacje  $\leq_A$  i  $\leq_B$  są interpretacjami symbolu  $\leq$ .

1. Udowodnij, że formuła  $\forall x \exists y \ x \leq y$  jest prawdziwa w strukturze  $\mathcal{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w strukturze  $\mathcal{B}$ .
2. Udowodnij, że dla każdej formuły  $\phi$  logiki I rzędu, w której nie występują symbole funkcyjne i  $\leq$  jest jedynym symbolem relacyjnym zachodzi równoważność

$$\mathcal{A} \models \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{B} \models \phi.$$

### 13.3. Podstawienia

**Twierdzenie 190 (o podstawianiu).** Dla dowolnych termów  $s$  i  $t$  i zmiennej  $x$  zachodzi

$$(t[x/s])^{\mathfrak{A}}[v] = t^{\mathfrak{A}}[v_x^{s^{\mathfrak{A}}[v]}].$$

Dla dowolnej formuły  $\alpha$ , jeśli podstawienie  $[x/s]$  jest dopuszczalne w  $\alpha$ , to

$$\mathfrak{A} \models (\alpha[x/s])[v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[v_x^{s^{\mathfrak{A}}[v]}].$$

**Fakt 191.** Dla dowolnej formuły  $\alpha$ , zmiennej  $x$  i termu  $s$ , jeśli podstawienie  $[x/s]$  jest dopuszczalne w  $\alpha$ , to formuła  $(\forall x.\alpha) \Rightarrow (\alpha[x/s])$  jest tautologią.

### 13.4. Rezolucja dla rachunku I rzędu

**Definicja 192.** *Literał* w rachunku kwantyfikatorów to formuła atomowa lub negacja formuły atomowej. *Klauzulą* nazywamy alternatywę skończenie wielu literałów. Alternatywę zera literałów nazywamy klauzulą pustą i oznaczamy  $\perp$ .

**Definicja 193.** Jeśli  $C$  i  $D$  są klauzulami,  $A$  i  $B$  formułami atomowymi i  $\sigma$  najogólniejszym unifikatorem  $A$  i  $B$  to klauzulę  $\sigma(C \vee D)$  nazywamy *rezolwentą* klauzul  $C \vee A$  i  $D \vee \neg B$  a klauzulę  $\sigma(C \vee A)$  *faktorem* klauzuli  $C \vee A \vee B$ . Rezolucyjnym dowodem sprzeczności zbioru klauzul  $\mathcal{F}$  nazywamy ciąg klauzul  $C_0, \dots, C_n$  spełniający warunki

- $C_n = \perp$ , oraz
- dla wszystkich  $i \in \{0, \dots, n\}$  zachodzi
  - $C_i \in \mathcal{F}$ , lub
  - istnieją takie  $j, k < i$ , że  $C_i$  jest rezolwentą  $C_j$  i  $C_k$ , lub
  - istnieje takie  $j < i$ , że  $C_i$  jest faktorem  $C_j$ .

**Zadanie 570.** Mówimy, że formuła  $\varphi$  logiki I rzędu jest logiczną konsekwencją zbioru formuł  $\mathcal{F}$  jeśli w każdej strukturze, w której prawdziwe są wszystkie formuły ze zbioru  $\mathcal{F}$  prawdziwa jest również formuła  $\varphi$ .

Udowodnij, że jeśli  $C$  i  $D$  są klauzulami w logice I rzędu,  $A$  i  $B$  formułami atomowymi a  $\sigma$  najogólniejszym unifikatorem  $A$  i  $B$ , to rezolwenta  $\sigma(C \vee D)$  jest logiczną konsekwencją klauzul  $C \vee A$  i  $D \vee \neg B$ .

**Zadanie 571.** Podaj rezolucyjny dowód sprzeczności dla zbioru klauzul

$$\{\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y), \quad p(z), \quad \neg p(g(b, u)) \vee \neg q(b)\},$$

gdzie  $a, b, f, g$  są symbolami funkcyjnymi,  $p$  i  $q$  są symbolami relacyjnymi a  $u, x, y, z$  są zmiennymi.

## Zadania zgłoszone na ćwiczeniach

W poniższej tabeli proszę notować numery zadań przewidzianych na dane zajęcia, numery zgłoszonych zadań i liczbę otrzymanych punktów. Na następnych stronach są wydrukowane kupony zgłoszenia zadań, które należy wyciąć, wypełnić i przekazać prowadzącym na zajęciach. Pierwsze zajęcia nie są punktowane.

Zaj. 2	Data:													
Zadania:														
Punkty:														
													Suma:	
Zaj. 3	Data:													
Zadania:														
Punkty:														
													Suma:	
Zaj. 4	Data:													
Zadania:														
Punkty:														
													Suma:	
Zaj. 5	Data:													
Zadania:														
Punkty:														
													Suma:	

Zaj. 6	Data:																
Zadania:																	
Punkty:																	
																Suma:	
Zaj. 7	Data:																
Zadania:																	
Punkty:																	
																Suma:	
Zaj. 8	Data:																
Zadania:																	
Punkty:																	
																Suma:	
Zaj. 9	Data:																
Zadania:																	
Punkty:																	
																Suma:	
Zaj. 10	Data:																
Zadania:																	
Punkty:																	
																Suma:	

Zaj. 11	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
													Suma:		
Zaj. 12	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
													Suma:		
Zaj. 13	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
													Suma:		
Zaj. 14	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
													Suma:		
Zaj. 15	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
													Suma:		

**Kartkówki i inne zdarzenia**

Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	

Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:	

**Ocena końcowa**

Liczba punktów zdobytych w semestrze:	
Ocena wyliczona według tablicy C.1:	



Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami



Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami



Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami



Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami





Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami



Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:										Sala nr:		
Zadanie:													Data:	
Punkty:													Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

