

## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 6

1. Rozważając liczbę sposobów wybrania spośród  $n$  osób delegacji z jej przewodniczącym zinterpretuj wzór

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Ile jest ciągów  $k$  jedynek i  $l$  zer, w których między każdymi dwoma kolejnymi jedynekami mamy przynajmniej jedno zero?
3. Oblicz, ile jest liczb naturalnych między 1 i  $n$  (włącznie z tymi liczbami), które są podzielne przez 2 lub 3 ale nie dzielą się ani przez 5 ani przez 7.
4. Ile jest takich permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , że żadna z liczb  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , ( $k < n$ ) nie znajdzie się na pozycji  $i$ ?
5. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech  $d_n$  oznacza liczbę nieporządków utworzonych z  $n$  kolejnych liczb naturalnych. Pokaż, że

$$d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

6. W pokoju stoi 5 komód – każda ma 4 szuflady. Na ile sposobów można w tych szufladach rozmieścić  $n$  przedmiotów tak, by żadna z komód nie była pusta.
7. Ile jest takich ciągów składających się z  $\alpha$  liter  $a$ ,  $\beta$  liter  $b$  i  $\gamma$  liter  $c$ , w których litery jednego rodzaju nie tworzą jednego bloku?
8. Pokaż, że

$$\begin{aligned} \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} &= a_1 + a_2 + \dots + a_n - \min\{a_1, a_2\} - \min\{a_1, a_3\} - \dots - \min\{a_{n-1}, a_n\} + \\ &\quad + \min\{a_1, a_2, a_3\} + \dots \pm \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \end{aligned}$$

9. Na ile sposobów można rozsadzić przy okrągłym stole  $n$  par wrogów tak, by żadna z tych par nie siedziała obok siebie.
10. Na ile sposobów można rozsadzić przy okrągłym stole  $n$  par małżeńskich tak by mężczyźni i kobiety siedzieli naprzemian i żadna para nie siedziała obok siebie?
11. Udowodnij, że liczba permutacji  $\pi \in S_n$  posiadających w rozbięciu na cykle odpowiednio  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  cykli długości 1, 2, 3, ... jest równa

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}.$$

12. Które z poniższych zbiorów tworzą podgrupy grupy  $S_5$ :

- (a)  $\{\text{id}, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$ .  
 (b)  $\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ .  
 (c)  $\{\text{id}, (12)(345), (135)(24), (15324), (12)(45), (134)(25), (143)(25)\}$ .

13. Niech grupa  $G$  działa na zbiorze  $X$  i  $|G| = 2^k$ , a  $|X|$ -nieparzyste. Pokaż, że w  $X$  istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z  $G$ .
14. Oblicz rząd grupy symetrii dwunastościanu foremnego.

15. Ośmiościenna kostka do gry to ośmiościan foremny z liczbami od 1 do 8 przyporządkowanymi ścianom. Ile jest różnych ośmiościennych kostek do gry? Ile z nich jest prawidłowych (tzn. suma oczek na każdych 2 przeciwległych ścianach wynosi 9)?

Wsk.: Policz rząd grupy obrotów ośmiościanu foremnego

16. Dane są karty 3 pola na 3. W każdym z pól możemy zrobić dziurkę. Karty są na tyle symetryczne, że możemy je obracać wokół środka i odwracać na drugą stronę nie wiedząc potem w jakiej pozycji były one na początku. Używając lematu Burnside'a pokaż, że istnieje 8 rozróżnialnych kart  $3 \times 3$  z dwoma dziurkami. Narysuj te karty.
17. Oblicz ile jest rozróżnialnych naszyjników złożonych z  $p$  kamieni ( $p$ -liczba pierwsza). Możemy kamienie te wybrać dysponując nieograniczoną liczbą nierozróżnialnych kamieni białych i czarnych.
18. Dwa rozłożenia nieatakujących się wież na szachownicy uważamy za równoważne, jeśli jedno z drugiego można otrzymać przez symetrię lub obrót (lub gdy są identyczne). Oblicz liczbę nierównoważnych rozłożeń ośmiu wzajemnie nieatakujących się wież.