

1. (1 pkt.) Rozważmy relację $R(A, B, C)$. Napisz wyrażenie algebry relacji, które zwróci pusty wynik wtedy i tylko wtedy gdy atrybut A jest kluczem w obecnym stanie relacji R .
2. (1 pkt.) Rozważmy relacje $R(A, B, C)$ oraz $S(X, Z)$. Napisz zapytanie rrk lub rrd, które zwróci pusty wynik wtedy i tylko wtedy jeśli w obecnym stanie relacji R i S atrybut Z relacji S spełnia własność klucza obcego wskazującego na atrybut A relacji R .
3. (2 pkt.) Rozważmy skierowany graf acykliczny (DAG) potomków *Bolesława Chrobrego* reprezentowany przez relację $E(X, Y)$. Relacja E zawiera takie pary (a, b) , że a jest dzieckiem b . Dostępna jest stała 'Chrobry' oznaczająca wierzchołek reprezentujący Bolesława Chrobrego, który jako jedyny w grafie nie posiada rodzica oraz jest przodkiem wszystkich.

Napisz następujące zapytania w datalogu:

- a) (0.5 pkt.) $\text{sibling}(X, Y) \text{ — } X \text{ i } Y \text{ mają wspólnego rodzica.}$
- b) (0.5 pkt.) $\text{cousin}(X, Y) \text{ — } X \text{ i } Y \text{ są kuzynami (tzn. ich rodzice są rodzeństwem).}$
- c) (0.5 pkt.) $\text{same-generation}(X, Y) \text{ — istnieje ścieżka z } X \text{ do 'Chrobry' o tej samej długości co pewna ścieżka z } Y \text{ do 'Chrobry'}$.
- d) (0.5 pkt.) $\text{anc2}(X, Y) \text{ — } X \text{ jest takim przodkiem } Y, \text{ że w bazie istnieją ścieżki z } X \text{ do } Y \text{ o różnych długościach.}$

Definicja. Graf jest k -kolorowalny jeśli każdemu wierzchołkowi tego grafu możemy przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory.

4. (1 pkt.) Wiadomo, że graf jest 2-kolorowalny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości. Napisz zapytanie datalogowe $Q()$ spełnione w grafach, które nie są 2-kolorowalne.
5. (1 pkt.) Dla danego grafu G skonstruuj takie zapytanie koniunkcyjne $Q()$ oraz bazę danych D , że $Q()$ jest prawdziwe w bazie D wtw gdy istnieje 3-kolorowanie grafu G .

Wiadomo, że problem istnienia 3-kolorowania grafu jest trudny obliczeniowo. Dlaczego więc silniki bazodanowe nie mają większego problemu z ewaluacją zapytań koniunkcyjnych, jak również zapytań rrd/rrk? *Wskazówka: Jaka jest złożoność naiwnego algorytmu ewaluacji dla logiki pierwszego rzędu?*

6. (3 pkt., zadanie dla chętnych) Rozważmy graf reprezentowany przez relację binarną $E(\text{src}, \text{dest})$. Dowiedz się co to są gry Ehrenfeuchta-Fraïssé i pokaż z ich pomocą, że w logice pierwszego rzędu nie da się wyrazić zapytania $\text{path}_*(X, Y)$ spełnionego gdy istnieje jakakolwiek ścieżka z X do Y .