# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 1. 27 lutego i 2 marca 2017

## Zadania

1. Niech $\Sigma$ będzie $\sigma$-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\Omega \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Opisać $\sigma$-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji $X, Y$ takich, że $X$ jest zmienną losową, a $Y$ nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 3\}$. Wyznaczyć najmniejsze $\sigma$-ciało zbiorów zawierające $S$.
4. Dystrybuanta $F$ zmiennej losowej $X$ określona jest następująco:

| $x$ | $(-\infty; -2]$ | $(-2; 3]$ | $(3; 5]$ | $(5; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0 | 0.2 | 0.7 | 1 |

   Znaleźć gęstość $f(x)$ i wartość oczekiwaną EX tej zmiennej.
5. Zmienna $X$ ma rozkład Bernoulliego z parametrami $n, p$ ($X \sim B(n, p)$). Sprawdzić, że:
   $\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1, \quad \mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$
6. Zmienna $X$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda$. Sprawdzić, że
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1, \quad \mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$
7. Niech $X$ będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
8. Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.
9. Sprawdzić, że
   (a) $B(p, q+1) = B(p, q)\,\dfrac{q}{p+q}$,
   (b) $B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q)$.
10. (2p.) Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}_+$.

<u>Def. 1.</u> Niepusty zbiór $\Omega$ nazywamy **przestrzenią zdarzeń**.

<u>Def. 2.</u> Rodzinę podzbiorów $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ nazywamy **$\sigma$-ciałem zbiorów** wtedy i tylko wtedy gdy
1. $\bar{\bar{\Sigma}} > 0$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^C \in \Sigma$.
3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

<u>Def. 3.</u> Funkcję $P : \Sigma \to [0, 1]$ nazywamy **prawdopodobieństwem** wtedy i tylko wtedy gdy
1. $P(\Omega) = 1$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k)$.

<u>Def. 4.</u> Układ $(\Omega, \Sigma, P)$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

<u>Def. 5.</u> Niech $(\Omega, \Sigma, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową** wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Def. 6. **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt, \;\; p>0,\; q>0.$$

Def. 7. **Funkcją gamma Eulera** nazywamy wartość całki

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt, \;\; p>0.$$

Witold Karczewski