

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danego ciągu liczbowego oblicza, ile zawiera on podciągów rosnących o maksymalnej długości. Jaka jest złożoność pamięciowa i czasowa Twojego algorytmu? Przyjmij, że operacje arytmetyczne na dowolnie długich liczbach wykonują się w czasie jednostkowym.
2. (2pkt) Podaj nierekurencyjną wersję procedury *Quicksort*, która
 - poza tablicą z danymi ($A[1..n]$ of integer) używa tylko stałej (niezależnej od n) liczby komórek typu integer (zakładamy, że $\max(n, \max\{A[i] \mid i = 1, \dots, n\})$ jest największą liczbą jaką może pomieścić taka komórka),
 - czas jej działania jest co najwyżej o stały czynnik gorszy od czasu działania wersji rekurencyjnej.
3. (Z 2pkt) Niech $h(v)$ oznacza odległość wierzchołka v do najbliższego pustego wskaźnika w poddrzewie o korzeniu v . Rozważ możliwość wykorzystania drzew binarnych, równoważonych poprzez utrzymywanie następującego warunku:

$$h(\text{lewy syn } v) \geq h(\text{prawy syn } v) \text{ dla każdego wierzchołka } v,$$

do implementacji złączalnych kolejek priorytetowych.

4. (1pkt) Czy można tak zmodyfikować drzewa AVL, by operacje *insert*, *delete*, *search*, *minimum*, *maksimum* nadal wykonywały się w czasie $O(\log n)$, a operacje *następnik(v)* i *poprzednik(v)*, gdzie v jest adresem węzła, wykonywane były w czasie $O(1)$?
5. (2pkt) Napisz procedurę *Split(T, k)* rozdzielającą drzewo AVL T na dwa drzewa AVL. Jedno zawierające klucze mniejsze od k i drugie zawierające pozostałe klucze. Jaka jest złożoność Twojej procedury?
6. (2pkt) Bolesną dolegliwością związaną z drzewami AVL jest konieczność poświęcenia dwóch bitów w każdym węźle na pamiętanie współczynnika zrównoważenia. Zastanów się, czy aby na pewno mamy do czynienia z "koniecznością".

ZADANIA DODATKOWE - DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZYWANIA

1. (0pkt) Pokaż, że *Quicksort* działa w czasie $\Theta(n \log n)$, gdy wszystkie elementy tablicy A mają tę samą wartość.
2. (0pkt) Pokaż, że *Quicksort* działa w czasie $\Theta(n^2)$, gdy tablica A jest uporządkowana niemalejąco.
3. (0pkt) Załóżmy, że na każdym poziomie rekursji procedury *Quicksort* procedura *partition* dzieli daną tablicę na dwie podtablice w proporcji $1 - \alpha$ do α , gdzie $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ jest stałą. Pokaż, że minimalna głębokość liścia w drzewie rekursji wynosi około $-\frac{\log n}{\log \alpha}$ a maksymalna głębokość liścia wynosi około $-\frac{\log n}{\log(1-\alpha)}$.
4. (1pkt) Opracuj wersję algorytmu *Quicksort*, która będzie efektywnie działać na ciągach zawierających wielokrotne powtórzenia kluczy.
5. (2pkt) Opracuj wersję algorytmu *Mergesort*, która działa w miejscu.

6. (2pkt) Pokaż w jaki sposób można zaimplementować kolejkę priorytetową tak, by operacje na niej wykonywane były w czasie $O(\log \log m)$, gdzie m jest mocą uniwersum, z którego pochodzą klucze.
7. (2pkt) Niech $A = a_1, a_2, \dots, a_n$ będzie ciągiem elementów oraz niech p i q będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Rozważmy p -podciągi ciągu A , tj. podciągi utworzone przez wybranie co p -tego elementu. Posortujmy osobno każdy z tych podciągów. Powtórzmy to postępowanie dla wszystkich q -podciągów. Udowodnij, że po tym wszystkie p -podciągi pozostaną posortowane.
8. (1pkt) Napisz procedury obsługujące kopiec Minimaksowy.
9. (2pkt) n -elementowym ciągiem o jednym zaburzeniu nazywamy dowolny ciąg, który może być otrzymany z ciągu $\{1, 2, \dots, n\}$ poprzez wykonanie jednej transpozycji. Załóżmy, że algorytm *InsertSort* będzie uruchamiany jedynie na ciągach o jednym zaburzeniu. Zbadaj średnią złożoność algorytmu przy założeniu, że dla każdego n , wszystkie takie ciągi n -elementowe są jednakowo prawdopodobne.
10. (1pkt) (Poprawność procedury *Partition*). Rozważ następującą procedurę:
11. (1pkt) Rozważmy modyfikację podanego na wykładzie algorytmu sprawdzającego izomorfizm drzew, który porządkując wektory przypisane wierzchołkom stosuje sortowanie leksykograficzne ciągów jednakowej długości (po uprzednim wyrównaniu długości wektorów - przez dopisanie symbolu spoza alfabetu). Podaj przykład "złośliwych" danych dla takiego algorytmu. Oszacuj czas działania algorytmu na tych danych.

```

Partition( $A, p, r$ )
 $x \leftarrow A[p]$ 
 $i \leftarrow p - 1$ 
 $j \leftarrow r + 1$ 
while true do
  repeat  $j - -$ 
    until  $A[j] \leq x$ 
  repeat  $i + +$ 
    until  $A[i] \geq x$ 
  if  $i < j$ 
    then zamień  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
  else return  $j$ 

```

Udowodnij co następuje

- (a) Indeksy i oraz j nigdy nie wskazują na element A poza przedziałem $[p..r]$.
- (b) Po zakończeniu *Partition* indeks j nie jest równy r (tak więc podział jest nietrywialny).
- (c) Po zakończeniu *Partition* każdy element $A[p..j]$ jest mniejszy lub równy od dowolnego elementu $A[j + 1, r]$.
12. (1pkt) Ułóż algorytm sortujący w miejscu ciąg rekordów o kluczach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$.
13. (1pkt) Ułóż algorytm sortujący ciąg n liczb całkowitych w czasie $O(n)$ i pamięci $O(n)$. Przyjmij, że liczby są z zakresu **long long**.
14. (2pkt) *Serią* w ciągu nazwiemy dowolny niemalejący podciąg kolejnych jego elementów. Seria jest *maksymalna*, jeśli nie można jej rozszerzyć o kolejne elementy. Załóżmy, że algorytm *InsertSort* uruchamiany będzie jedynie na permutacjach zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które można rozbić na co najwyżej dwie serie maksymalne. Zbadaj średnią złożoność algorytmu przy założeniu, że dla każdego n , wszystkie takie permutacje n -elementowe są jednakowo prawdopodobne.
15. (2pkt) Rozważmy permutacje liczb $\{1, 2, \dots, n\}$, których wszystkie 2-podciągi i 3-podciągi są uporządkowane.

- (a) Ile jest takich permutacji?
- (b) Jaka jest maksymalna liczba inwersji w takiej permutacji?
- (c) Jaka jest łączna liczba inwersji w takich permutacjach?