Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 4

29 października 2015 r.

Zajęcia 4 listopada 2015 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L4.1. 1 punkt Niech $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \ldots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_n$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n] \quad (n = 0, 1, \ldots)$?

(c) Wykaż, że

$$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \qquad (n \ge 0). \tag{1}$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$?

L4.2. 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

L4.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Miejscem zerowym funkcji $f(x) = x\,e^{-x} - 0.06064$ jest $\alpha = 0.0646926359947960\ldots$. Dla $0 \le n \le 15$ porównać rzeczywiste wartości błędów e_n z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Czy wielkości $|e_n|$ maleją monotonicznie wraz ze wzrostem n?

L4.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^2 + 10\cos x$ z błędem nie większym niż 10^{-4}. *Wskazówka*: Naszkicować wykresy funkcji $g(x) = x^2$ i $h(x) = -10\cos x$.

L4.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Odwrotność liczby R można obliczać bez wykonywania dzieleń za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Uzasadnij ten fakt stosując metodę Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. Następnie sprawdź eksperymentalnie na wybranych przykładach przydatność tej metody w praktyce obliczeniowej. Spróbuj ustalić w jaki sposób wybierać x_0 oraz ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej?

L4.6. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ bez wykonywania dzieleń. Opracowaną metodę sprawdź eksperymentalnie (patrz zadanie **L4.5**).

L4.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $a = m\,2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Zaproponować efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. Ustal eksperymentalnie dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna.

L4.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ r-krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$? Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

(–) Paweł Woźny