Notatki — Matematyka dyskretna (M)

telcontar

14 stycznia 2011

1 19.11.2010

1.1 Zasada włączeń i wyłączeń

Przykład: Mamy k pudełek i n kulek (ponumerowanych).

1. Na ile sposobów można te kulki rozłożyć w pudełkach? k^n
2. Ile jest takich sposobów M, że żadne pudełko nie jest puste[1]? Czy $M = k^{n-k}$? NIE.
   Ω - zbiór wszystkich sposobów
   A_i - zbiór sposobów takich, że i-te pudełko jest puste

$$\begin{aligned} M &= |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| \\ &\quad \text{(drugi wyraz: zbiór rozłożeń w których jakieś pudełko jest puste)} \\ |A_i| &= (k-1)^n \\ |A_i \cap A_j| &= (k-2)^n \\ |A_i \cap A_j \cap A_l| &= (k-3)^n \end{aligned}$$

Z zasady włączeń i wyłączeń

$$M = k(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n \ldots = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(k-i)^n(-1)^i$$

1.2 Operacje na ciągach

1.2.1 Wstęp do anihilacji

$$\begin{aligned} &\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle + \langle b_0, b_1, b_2, \ldots\rangle = \langle a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\rangle \\ &c\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle = \langle ca_0, ca_1, ca_2, \ldots\rangle \\ &E\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle \quad \text{(operator przesunięcia)} \\ &(E-3)\langle 2^n\rangle = E\langle 2^n\rangle - 3\langle 2^n\rangle = \langle 2^{n+1} - 3 * 2^n\rangle = \langle -2^n\rangle \\ &(E-2)\langle 2^n\rangle = \langle 2^{n+1} - 2 * 2^n\rangle = \langle 0\rangle \end{aligned}$$

Mówimy, że $(E-2)$ jest anihilatorem ciągu $\langle 2^n\rangle$. Podobnie $(E-c)$ jest anihilatorem ciągu $\langle c^n\rangle$.
Jakie ciągi anihiluje operator $(E-2)(E-3) = E^2 - 5E + 6$?

$$\begin{aligned} (E-2)(E-3)\langle 3^n\rangle &= (E-2)\langle 0\rangle = \langle 0\rangle \\ (E-2)(E-3)\langle 2^n\rangle &= (E-3)(E-2)\langle 2^n\rangle = \langle 0\rangle \\ (E-2)(E-3)\langle A * 2^n + B * 3^n\rangle &= (E-2)(E-3)\langle A * 2^n\rangle + \\ &+ (E-2)(E-3)\langle B * 3^n\rangle = \langle 0\rangle \end{aligned}$$

Czy są jakieś inne ciągi anihilowane przez $(E-2)(E-3)$? Nie. Dlaczego?

$$(E^2 - 5E + 6)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle \Leftrightarrow a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

[1] Pytanie z sali: Czy to nie jest jakoś bardzo podobne do zadania z pracownikami firmy?
Odpowiedź wykładowcy: Liczby Stirlinga II rodzaju $\left\{ {n \atop k} \right\}$ – liczba sposobów rozbicia zbioru n-elementowego na k niepustych rozłącznych podzbiorów $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{M}{k!}$

Rozwiązanie tej zależności jest określone przez dwa warunki początkowe a_0 i a_1. Niech:
x_n – rozwiązanie zależności rekurencyjnej dla $x_0 = 1, x_1 = 0$
y_n – rozwiązanie zależności rekurencyjnej dla $y_0 = 0, y_1 = 1$
Jeśli a_n jest rozwiązaniem zależności rekurencyjnej z warunkami początkowymi a_0 i a_1 to

$$\langle a_n \rangle = \langle a_0 x_n + a_1 y_n \rangle$$

Zbiór wszystkich rozwiązań zależności $(E^2 - 5E + 6)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$ tworzy przestrzeń liniową wymiaru 2 z wektorami bazowymi $\langle x_n, y_n \rangle$. Okazuje się, że ciągi $\langle 2^n \rangle$ i $\langle 3^n \rangle$ są liniowo niezależne, więc też są bazą.

1.2.2 Pewna znana rekurencja

Rozwiążmy zależność $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $a_0 = 0, a_1 = 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (E^2 - E + 1)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (E - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(E - \frac{1-\sqrt{5}}{2})\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle \\ &\qquad \text{bo } \Delta = 1 - (-4) = 5, E_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Wszystkie ciągi a_n spełniające to równanie mają postać

$$\begin{aligned} a_n &= A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ a_0 &= 0 = A + B \\ a_1 &= 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ & A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad B = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

1.2.3 Ciągniemy temat dalej

Uogólniamy powyższe rozważania na równania rekurencyjne liniowe jednorodne, tj. równania postaci

$$a_{n+k} + \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 a_n = 0 \text{ dla } \alpha_0 \neq 0$$

$$\left(E^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i E^i\right)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle \tag{1}$$

Z zasadniczego twierdzenia algebry równanie (1) można zawsze zapisać jako

$$\left(\prod_{i=1}^{k}(E - c_i)\right)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle \quad c_i \in \mathbb{C}$$

Jak mamy szczęście to dla $i \neq j$ mamy $c_i \neq c_j$ i wtedy

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i c_i^n \quad A_i \in \mathbb{C}$$

Gdy nie mamy szczęścia to mamy

Lemat: Rozwiązaniami równania $(E - c)^k\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$ są ciągi c^n, nc^n, n^2c^n, $\ldots$, $n^{k-1}c^n$.
Dowód: indukcja po k.
1°. $a_n = n^i c^n$ dla $i < k - 1$. Wtedy

$$(E - c)^k\langle n^i c^n \rangle = (E - c)(E - c)^{k-1}\langle n^i c^n \rangle = (E - c)\langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle$$

2°. $a_n = n^{k-1}c^n$. Wtedy

$$(E - c)^k\langle n^{k-1}c^n \rangle = (E - c)^{k-1}\langle (n+1)^{k-1}c^{n+1} - n^{k-1}c^{n+1} \rangle = \ldots = \langle 0 \rangle$$

W pominiętym przejściu: rozpisujemy korzystając z dwumianu Newtona i korzystamy z założenia indukcyjnego.

1.2.4 Rozwiązanie równania rekurencyjnego liniowego jednorodnego

Dane jest równanie

$$(E^k + \alpha_{k-1}E^{k-1} + \ldots + \alpha_1 E + \alpha_0)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

które można zapisać w postaci

$$\prod_{i=1}^{s}(E - c_i)^{k_i}\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle \quad \text{gdzie: } c_i{\in}\mathbb{C}, i{\neq}j \Rightarrow c_i{\neq}c_j, \sum_{i=1}^{s} k_i{=}k$$

Ma wszystkie rozwiązania postaci

$$a_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ 0\leqslant j\leqslant k_i-1}} A_{i,j} n^j c_i^n$$

Przykład:

$$\begin{aligned}
s_n &= s_{n-1} + n^2, \quad s_0 = 0\\
\langle s_n - s_{n-1}\rangle &= \langle n^2 * 1^n\rangle\\
(E-1)\langle s_n\rangle &= \langle n^2 * 1^n\rangle\\
(E-1)^4\langle s_n\rangle &= \langle 0\rangle \quad \text{bo } (E-1)^3\langle n^2 1^n\rangle = \langle 0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= A + Bn + Cn^2 + Dn^3\\
s_0 &= 0 = A\\
s_1 &= 1 = B + C + D\\
s_2 &= 5 = 2B + 4C + 8D\\
s_3 &= 14 = 3B + 9C + 27D
\end{aligned}$$

$$B = 1/6 \quad C = 1/2 \quad D = 1/3$$

Do pełni szczęścia pozostało do pokazania, że:

Lemat: ciągi $n^{j_i}c_i^n$ są liniowo niezależne.
Dowód: Nie wprost: załóżmy, że istnieją różne ciągi $n^{j_i}c_i^n$ i współczynniki $A_i \neq 0$ takie, że

$$\sum_{p=1}^{k} A_p n^{j_p} c_p^n = 0$$

Bez utraty ogólności możemy założyć, że $n^{j_1}c_1^n$ jest najszybciej rosnącym z tych ciągów tzn.

$$(\forall i)(|c_1|{\geqslant}|c_i|) \wedge (\forall i)(|c_1|{=}|c_i| \Rightarrow j_1{\geqslant}j_i)$$

Musi zachodzić

$$A_1 + \sum_{p=2}^{k} A_p \frac{n^{j_p}c_p^n}{n^{j_1}c_1^n} = 0$$

Zdefiniujmy granicę ciągu

$$M(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{n}$$

Fakt z analizy[2]:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g \Rightarrow M(b_n) = g$$

Musimy pokazać, że

$$M\left(\frac{n^{j_i}c_i^n}{n^{j_1}c_1^n}\right) = 0 \quad \text{dla } i \neq 1$$

Rozważmy przypadki:

1. $|c_i| < |c_1|$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{j_i}c_i^n}{n^{j_1}c_1^n} = \lim_{n\to\infty} n^{j_i - j_1}\left(\frac{c_i}{c_1}\right)^n = 0 \quad \Rightarrow M\left(\frac{n^{j_i}c_i^n}{n^{j_1}c_1^n}\right) = 0$$

[2] Pod koniec wykładu było uzasadnienie na życzenie.

2. $|c_i| = |c_1|, j_1 > j_i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{j_1 - j_i}} * 1^n = 0 \quad \Rightarrow M\left(\frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n}\right) = 0$$

3. $j_i = j_1$

$$\begin{aligned}
\left|M\left(\frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n}\right)\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 + c_i/c_1 + (c_i/c_1)^2 + \ldots (c_i/c_1)^{n-1}}{n}\right| = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{|1-(c_i/c_1)^n|}{|1-(c_i/c_1)|} = 0 \quad \text{(bo pierwszy ułamek dąży do 0, a drugi jest ograniczony)}
\end{aligned}$$

2 26.11.2010

2.1 Sumowanie

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\
S_{n+1} &= S_n + q^{n+1} = 1 + qS_n \\
S_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n &= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n \\
T_{n+1} &= T_n + (n+1)q^{n+1} = qS_n + qT_n \\
T_n(1-q) &= qS_n - (n+1)q^{n+1} \\
T_n &= \frac{q - (n+1)q^{n+1} - nq^{n+2}}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

Inna metoda – pochodna

$$\begin{aligned}
S_n(q) &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\
S_n'(q) &= 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} \\
T_n(q) &= q * S_n'(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} n^{\underline{k}} &= ? \\
(n+1)^{\underline{k+1}} - n^{\underline{k+1}} &= ? \\
(n+1)^{\underline{k+1}} &= (n+1)n^{\underline{k}} \\
n^{\underline{k+1}} &= n^{\underline{k}}(n-k) \\
(n+1)^{\underline{k+1}} - n^{\underline{k+1}} &= n^{\underline{k}}(n+1-n+k) = (k+1)n^{\underline{k}} \\
n^{\underline{k}} &= \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} \\
\sum_{n=a}^{b} n^{\underline{k}} &= \frac{(b+1)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1}
\end{aligned}$$

Przykłady wykorzystania powyższego wzoru:

1.
$$\sum_{n=1}^{N} n(n-1) = \sum_{n=1}^{N} n^{\underline{2}} = \frac{1}{3}(N-1)N(N+1)$$

2. Możemy zdefiniować ujemne potęgi ubywające:

$$\begin{aligned}
n^{\underline{k}} &= \frac{n^{\underline{k+1}}}{n-k} \\
n^{\underline{0}} &= 1 \\
n^{\underline{-1}} &= \frac{1}{n+1} \\
n^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
\text{i je wykorzystać} & \\
\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{N+2}
\end{aligned}$$

2.2 Funkcje tworzące

2.2.1 Na dobry początek

Dany jest ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
Funkcja tworząca tego ciągu to

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Przykłady:

1. $a_n = 1$

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = 1 + xA(x)$$
$$A(x) = \frac{1}{1-x}$$

2. $a_n = q^n$

$$A(x) = \frac{1}{1-qx}$$

3. $a_n = \binom{m}{n}$ dla ustalonego m

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$

4. $a_n = \frac{1}{n!}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Jest to związane z *wykładniczą funkcją tworzącą*

$$A_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

5. $a_n = n$

$$A(x) = x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots) = x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + x(x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots) = \frac{x}{1-x} + xA(x) \Rightarrow A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2.2.2 Iloczyn Cauchy'ego szeregów potęgowych

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$$

Przykład:

1.
$$(\sum x^n)(\sum x^n) = \sum(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \sum nx^n = \sum(n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2. $a_n = \frac{1}{n}$ z wyrazem początkowym $a_0 = 0$
$$A(x) = \sum \frac{x^k}{k} = \int_0^x (1+t+t^2+\ldots)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x)$$

2.2.3 Znajdowanie funkcji tworzącej na podstawie zależności rekurencyjnej

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad a_0 = 0, a_1 = 1$
Dodajemy stronami równania $x^k a_k = x^k a_{k-1} + x^k a_{k-2}$
i dostajemy $A(x) - a_1 x - a_0 = x(A(x) - a_0) + x^2 A(x)$, stąd

$$A(x) = \frac{a_1 x + a_0 - a_0 x}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sum(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n x^n + \sum(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n x^n)$$

2.3 Liczby Catalana

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \end{aligned}$$

Początkowe wyrazy ciągu są następujące: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$. Interpretacja kombinatoryczna: c_n to liczba poprawnych nawiasowań złożonych z n par nawiasów – tj. takich, że każdy prefiks ciągu nawiasowań zawiera co najmniej tyle '(' co ')'. Dlaczego? rozpatrz takie poprawne nawiasowania, że k jest najmniejszą liczbą taką, iż w prefiksie $2k$ jest tyle samo przedwiasów i zawiasów[3].

Obliczmy funkcję tworzącą.

$$\begin{aligned} C^2(x) &= \sum(\sum c_{n-k}c_k)x^n = \sum c_{n+1}x^n \\ xC^2(x) &= \sum_{n\geqslant 0} c_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n>0} c_n x^n - 1 = C(x) - 1 \\ xC^2(x) - C(x) + 1 &= 0 \\ C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

Ale czy oba te rozwiązania są dobre?

$$\begin{aligned} C(0) &= c_0 \\ \lim_{x\to 0} C_1(x) &= \infty \\ \lim_{x\to 0} C_2(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{1-4x})(1-\sqrt{1-4x})}{2x(1-\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{(1+\sqrt{1-4x})2x} = 1 = c_0 \end{aligned}$$

Jak dostać wzór bez pierwiastka?

$$(1+x)^a = \sum \binom{a}{n} x^n = \sum \frac{a^{\underline{n}}}{n!} x^n \text{ dla } a \in \mathbb{R}$$

rozpisujemy

$$\begin{aligned} (1-4x)^{1/2} &= \ldots = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k>0} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} 4^k x^k = 1 - \frac{1}{2}\sum \frac{(2k-2)!2k}{k!k!} x^k = 1 - \sum \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k \\ C(x) &= \sum_{k>0} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \sum \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k \Rightarrow c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

[3]Niestety, rozdziału o liczbach Catalana nie ma jeszcze w wersji 2 skryptu J. Marcinkowskiego *Matematyka w dwa tygodnie*.

3 3.12.2010

3.1 Dalej o liczbach Catalana

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \\ c_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \text{(już wiemy)} \end{aligned}$$

c_n – liczba ciągów n zer i n jedynek, których każdy prefiks zawiera co najmniej tyle zer co jedynek d_n – liczba ciągów n zer i n jedynek, które nie spełniają warunku na prefiks, tzn. jakiś prefiks zawiera większą liczbę jedynek niż zer.

$$c_n + d_n = \binom{2n}{n}$$

Pokażemy bijekcję między zbiorem ciągów n zer i n jedynek zawierających prefiks z liczbą jedynek większą od liczby zer a wszystkimi ciągami $n+1$ zer i $n-1$ jedynek, czyli że $d_n = \binom{2n}{n+1}$

Dla danego ciągu: wybieramy najkrótszy prefiks zawierający więcej jedynek niż zer – ma on o jedną jedynkę więcej. Negujemy ten prefiks. Jest to bijekcja – można wskazać przekształcenie odwrotne.

$$\begin{aligned} c_n &= \binom{2n}{n} - d_n = \binom{2n}{n} - \frac{n(2n)!}{n(n-1)!n!(n+1)} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} \\ c_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Drugi (trzeci) sposób: Pokażemy, że c_n to liczba rozłożeń $n+1$ zer i n jedynek na okręgu takich, że dwa rozłożenia przechodzące na siebie przez obrót uważamy za takie same.

Obliczmy tę liczbę wprost. Jeżeli rozróżniamy rozłożenia przechodzące na siebie przez obrót $\binom{2n+1}{n}$. Po uwzględnieniu utożsamienia rozłożeń przechodzących na siebie przez obrót $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Dlaczego to są liczby Catalana? Jeżeli do ciągu n zer i n jedynek spełniających warunek na prefiks dodamy 0 jako pierwszy element, to powstanie ciąg, którego każdy prefiks zawiera więcej zer niż jedynek.

Fakt 1: dla każdego rozłożenia $n+1$ zer i n jedynek na kole istnieje taki element (będący zerem) że wśród dowolnej liczby kolejnych elementów (począwszy od tego elementu, wziętych zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) jest więcej zer niż jedynek.

Dowód: indukcja po n. Istnieją kolejne elementy 01 na kole (licząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara). Usuwając je otrzymujemy n zer i $n-1$ jedynek, w którym istnieje odpowiedni element 0 z założenia indukcyjnego. Łatwo zauważyć, że po ponownym wstawieniu naszej pary 01 ten element dalej spełnia warunek tezy Faktu 1.

Fakt 2: Wyróżniony element z Faktu 1 jest tylko jeden. Dowód (nie wprost): niech będą dane dwa takie elementy. Dzielą one okrąg na dwie części. W każdej z nich liczba zer jest większa od liczby jedynek, tzn. większa lub równa liczbie jedynek powiększonej o 1. Sumując mamy $n+1 \geqslant \#0 \geqslant \#1+2 = n+2$. Sprzeczność.

3.2 Problem wydawania reszty

W kasie mamy

- 10 1-złotówek
- 8 2-złotówek
- 5 5-złotówek
- 6 10-złotówek

a_n – liczba sposobów wypłacenia n złotych. Łatwo napisać funkcję tworzącą.

$$A(x) = \sum_n a_n x^n = \sum_n \sum_{\substack{0\leqslant c_1\leqslant 10, 0\leqslant c_2\leqslant 8\\ 0\leqslant c_3\leqslant 5, 0\leqslant c_4\leqslant 6\\ c_1+2c_2+5c_3+10c_4=n}} x^n = \sum_{\substack{0\leqslant c_1\leqslant 10, 0\leqslant c_2\leqslant 8\\ 0\leqslant c_3\leqslant 5, 0\leqslant c_4\leqslant 6}} x^{c_1+2c_2+5c_3+10c_4} =$$

$$= (\sum x^{c_1})(\sum x^{2c_2})(\sum x^{5c_3})(\sum x^{10c_4}) = \frac{1-x^{11}}{1-x}\frac{1-x^{18}}{1-x^2}\frac{1-x^{30}}{1-x^5}\frac{1-x^{70}}{1-x^{10}}$$

Gdybyśmy mieli nieograniczoną liczbę monet to

$$A(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$$

3.3 Podziały liczby

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \quad n_i \in \mathbb{N}_+$ Podziałów liczby nie rozróżnia się ze względu na kolejność składników, równie dobrze możemy założyć $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$.

Niech p_n – liczba podziałów n. Ten ciąg ma elegancką funkcję tworzącą – mamy wydać liczbę n posiadając nieograniczoną liczbę monet wszystkich nominałów.

$$P(x) = \prod_i \frac{1}{1-x^i}$$

r_n – liczba podziałów n na różne składniki

$$R(x) = \prod_i (1-x^i)$$

q_n – liczba podziałów n na składniki nieparzyste

$$Q(x) = \prod_i \frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

Okazuje się, że $Q(x) = R(x)$:

$$R(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots = Q(x)$$

Twierdzenie:

$$Q(x) = R(x) \Leftrightarrow q_n = r_n$$

3.4 Grafy

Graf nieskierowany – para uporządkowana $G = (V, E)$.
$V = v_1, v_2, \ldots$ (wierzchołki)
$E = e_1, e_2, \ldots$ (krawędzie)

Gdy w grafie jest krawędź $e_1 = \{v_1, v_6\}$ to mówimy, że v_1, v_6 są sąsiednie, v_1, e_1 są incydentne
Stopień wierzchołka $\deg(v)$ – liczba krawędzi incydentnych z v
$n = |V| = n(G)$ (zwyczajowo)
$m = |E| = m(G)$

Lemat o uściskach dłoni

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m(G)$$

Graf prosty to graf bez pętli i krawędzi wielokrotnych. Wtedy E to pewna rodzina 2-elementowych podzbiorów zbioru V.

Grafy mogą reprezentować wiele rzeczywistych obiektów:

- sieci drogowe
- sieci kolejowe
- sieci energetyczne, rurociągi
- obwody elektryczne
- cząsteczki związków chemicznych
- struktury danych w algorytmach

Graf skierowany (digraf) – ma krawędzie skierowane (łuki): $e = (u, v)$ (kolejność ma znaczenie)
Mówimy, że grafy są **izomorficzne** jeżeli istnieje izomorfizm ...

$$(\exists \phi : V(G_1) \stackrel{\text{izomorfizm}}{\longrightarrow} V(G_2)) \quad \{v, u\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{\phi(v), \phi(u)\} \in E(G_2)$$

Podgraf grafu G to taki graf $G' \subset G$, że $V(G') \subset V(G) \wedge E(G') \subset E(G)$.
Grafy puste (bezkrawędziowe) N_n
Grafy pełne (kliki) $K_n \quad m(K_n) = \binom{n}{2}$
Dopełnienie grafu (określany głównie dla grafu nieskierowanego) $V(\overline{G}) = V(G) \wedge E(\overline{G}) = E(K_n) \setminus E(G)$, łatwo zauważyć że $\overline{\overline{G}} = G$ oraz $E(G) + E(\overline{G}) = E(K_n)$
Grafy regularne $(\forall u, v) \deg(v) = \deg(u)$.
Możemy zdefiniować $\deg(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$
G jest k-regularny – jest regularny i $\deg(G) = k = \deg(v)(\forall v \in E(G))$
Grafy platońskie – siatki wielościanów foremnych
Grafy dwudzielne $\exists V_1, V_2 \subseteq V : V_1 \cap V_2 = \phi \wedge V_1 \cup V_2 = V \;\; E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ tj. krawędzie łączą jedynie wierzchołki z V_1 z wierzchołkami z V_2.
Szczególny przypadek powyższego: graf pełny dwudzielny, oznaczamy $K_{m,n}$ dla $m = |V_1|, n = |V_2|$, mamy $|E(K_{m,n})| = |\{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}| = mn$

4 10.12.2010

Graf spójny – to taki, który nie jest niespójny.
Graf niespójny – $(\exists V_1, V_2) V_1 \cap V_2 = \phi, V_1 \cup V_2 \subseteq V, ((\forall e = \{u, v\}) u, v \in V_1 \vee u, v \in V_2)$ tj. nie ma krawędzi łączących V_1 z V_2.

4.1 Drogi w grafach

Marszruta – ciąg $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ taki, że $v_i \in V$, $e_i \in E$, $\{v_{i-1}, v_i\} = e_i$.
Marszruta w grafie skierowanym – jedynym dodatkowym wymaganiem jest poruszanie się zgodnie z kierunkiem krawędzi, czyli $(v_{i-1}, v_i) = e_i \in E$.
Długość marszruty – liczba krawędzi w marszrucie.
Droga – marszruta, w której nie powtarzają się wierzchołki.
Cykl – marszruta zamknięta na której powtarza się tylko pierwszy i ostatni wierzchołek[4].
Drogowa spójność – graf jest drogowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych wierzchołków $u, v \in V$ istnieje droga z u do v.
W grafie skierowanym – najlepiej jest dla każdej pary wierzchołków określić, czy istnieje droga skierowana z u do v czy nie.
Digraf jest **silnie spójny**, gdy taka droga istnieje między każdą parą wierzchołków w obie strony.
W grafach nieskierowanych:
Most – krawędź, której usunięcie rozspójnia graf.
Graf bez mostów – krawędziowo 2-spójny.
Wierzchołek rozcinający (punkt artykulacji) – jego usunięcie rozspójnia graf.
Graf bez wierzchołków rozcinających – graf (wierzchołkowo) 2-spójny.
Twierdzenie: G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy G jest drogowo spójny.
Lemat: Jeśli w G istnieje marszruta z u do v, to również istnieje droga z u do v złożona z pewnego podzbioru krawędzi tej marszruty.
Dowód lematu: Niech M' będzie najkrótszą marszrutą zawartą w M łączącą u i v. Jeśli M' nie jest drogą, to istnieje na niej jakiś wierzchołek, który się powtarza. Jeśli wytniemy fragment M' pomiędzy dwoma wystąpieniami tego wierzchołka to dostaniemy krótszą marszrutę – sprzeczność z założeniem o minimalności M'.
Dowód twierdzenia:
$\Rightarrow$: Załóżmy, że G nie jest drogowo spójny. Pokażemy, że jest niespójny. Załóżmy, że nie ma drogi z u do v. Niech:
$V_1 = \{x : \text{istnieje droga z } u \text{ do } x\} \quad u \in V_1 \neq \phi$
$V_2 = \{y : \text{nie ma drogi z } u \text{ do } y\} \quad v \in V_1 \neq \phi$
Pokażemy, że nie ma krawędzi z V_1 do V_2. Wynika to z faktu, że krawędź $\{x, y\}$ przedłuża drogę z u do x do drogi z u do y – sprzeczność z $y \in V_2$.
$\Leftarrow$: Załóżmy, że G jest drogowo spójny. Niech $u \in V_1, v \in V_2$, rozważmy pierwszy element drogi z u do v, który

[4]W szczególności (v_1, e, v_2, e, v_1) dla $e = v_1, v_2$ nie jest cyklem – powtarza się też krawędź

jest wierzchołkiem ze zbioru V_2. Krawędź pomiędzy tym a poprzednim wierzchołkiem jest mostem między V_1 a V_2.[5]
Twierdzenie: Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w grafie ma długość parzystą.
Lemat: Jeśli każdy cykl w grafie G ma długość parzystą, to każda zamknięta marszruta w G też ma długość parzystą.
Dowód lematu: Weźmy najkrótszą marszrutę zamkniętą M o długości nieparzystej. Istnieje w niej wierzchołek, który się powtarza. Możemy rozbić tą marszrutę na dwie krótsze zamknięte marszruty, jedna ma długość parzystą, a druga nieparzystą, dostaliśmy krótszą marszrutę o długości nieparzystej – sprzeczność z minimalnością M.
Dowód twierdzenia:
$\Rightarrow$: Jeśli G jest dwudzielny, to każdy cykl przechodzi na przemian przez zbiory V_1 i V_2. Jeśli początek cyklu jest w V_1, to aby wrócić do V_1 potrzebuje on parzystej liczby krawędzi.
$\Leftarrow$: Zauważmy, że nie przeszkadza nam to, że graf może być niespójny – bo wtedy każda jego składowa spójna jest dwudzielna.
Niech G' będzie dowolną składową spójną w G. Pokażemy, że z parzystości długości cykli w G' wynika dwudzielność G'.
Wyróżnijmy dowolny wierzchołek $v \in V(G')$. Niech:
$V_1 = \{x : \text{z } v \text{ do } x \text{ można dojść drogą o długości parzystej}\}$
$V_2 = \{y : \text{z } v \text{ do } y \text{ można dojść drogą o długości nieparzystej}\}$ $V_1 \cup V_2 = V(G'), V_1 \cap V_2 = \phi$ bo inaczej istniałby wierzchołek, do którego można dojść drogą długości parzystej i nieparzystej – czyli istniałaby marszruta zamknięta długości nieparzystej, a z lematu taka marszruta nie istnieje.
Krawędzie istnieją jedynie między V_1 a V_2, bo gdyby istniała krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami z V_i, to dostalibyśmy marszrutę zamkniętą o długości nieparzystej.

4.2 Drzewa

Drzewo – graf spójny bez cykli.
Twierdzenie: Niech T będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Następujące warunki są równoważne:

1. T jest drzewem
2. T nie ma cykli i ma $n-1$ krawędzi
3. T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi
4. T jest spójny i każda jego krawędź jest mostem
5. dowolne 2 wierzchołki T łączy dokładnie jedna droga
6. T nie ma cykli, ale dodanie jakiejkolwiek krawędzi tworzy cykl.

Dowód: Indukcja po n. Dla $n = 1$ oczywiste. Dowód dla n przy założeniu prawdziwości twierdzenia dla $n' < n$ – łatwo pokazać kolejne implikacje (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ [6](4) $\Rightarrow$ [7](5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ [8](1).

Fakt. Każde drzewo zawiera co najmniej dwa wierzchołki wiszące (tj. wierzchołki stopnia 1).
Dowód. Nie wprost $\deg(v_1) \geqslant 1 \wedge ((\forall i > 1) \deg(v_i) \geqslant 2)$ i mamy

$$2(n-1) = 2m = \sum_i \deg(v_i) \geqslant 2n - 1$$

Las – graf, którego wszystkie składowe spójne są drzewami (czyli graf bez cykli).

[5]– A gdzie korzystamy z lematu?
– Nigdzie, ale lemat jeszcze się przyda.
[6]Rozważamy drzewo spinające T grafu G – usuwamy z G wszystkie krawędzie nie będące mostami; krawędzie cyklu nie są mostami
[7]Trzeba pokazać, że jest tylko jedna taka droga – w końcu korzystamy z lematu
[8]Pokazujemy spójność nie wprost

5 17.12.2010

5.1 Dalej drzewa

Ile jest drzew o zbiorze wierzchołków $N = \{1, 2, \dots, n\}$?
Tw. Cayley'a: Różnych drzew o zbiorze wierzchołków N jest n^{n-2}.
Dowód: Pokażemy bijekcję między drzewami a ciągami $n - 2$ elementowymi o zbiorze wartości N. Dla danego drzewa ciąg taki nazywamy kodem Prüfera tego drzewa.
Aby go uzyskać dla danego drzewa Wykonujemy $n - 2$ kroków:
W i-tym kroku:

- odrywamy od drzewa liść o najniższej etykiecie
- dopisujemy nr sąsiada tego liścia jako a_i

Jak odtworzyć drzewo mając jego kod Prüfera?
Fakt: W kroku i wierzchołek j jest liściem wtedy i tylko wtedy, gdy j nie występuje w ciągu $(a_i, \dots, a_{n-2})$ i nie został wcześniej oderwany.

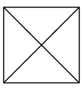
5.2 Sposoby reprezentacji grafów

Macierz sąsiedztwa: kwadratowa macierz $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{Z}_2)$, gdzie $n = |V|$.
$a_{ij} = [\{v_i, v_j\} \in E]$[9] (macierz jest symetryczna)
$a_{ij} = [(v_i, v_j) \in E]$ dla digrafów

Macierz incydencji: macierz $M \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{Z}_2)$, gdzie $m = |E|$.
$a_{ij} = [v_i, e_j$ są incydentne$]$
Listy sąsiadów: tablica jednowymiarowa o rozmiarze n, w i-tym polu lista sąsiadów v_i.
Tablica z uporządkowaną leksykograficznie listą krawędzi – można dodać tablicę rozmiaru n ze wskaźnikami.
jak szybko wykonują się typowe operacje na grafach?

	Macierz sąsiedztwa	Listy sąsiadów	tablica krawędzi
ilość zajętej pamięci	$O(n^2)$	$O(m+n)$	$O(m+n)$
czas wczytywania grafu	$O(n^2)$	$O(m+n)$	$O(m+n)$
wypisz sąsiadów v_i	$O(n)$	$O(\deg(v_i))$	$O(\deg(v_i))$
dodaj krawędź $\{v_i, v_j\}$	$O(1)$	$O(1)$	$O(m)$
czy $\{v_i, v_j\} \in E$?	$O(1)$	$O(\deg(v_i))$	$O(\log\deg(v_i))$
usuń $\{v_i, v_j\}$	$O(1)$	$O(\deg(v_i) + \deg(v_j))$	$O(m)$

5.3 Grafy eulerowskie


Czy ten rysunek można wykonać bez odrywania ołówka od kartki i rysowania jednej linii wiele razy?
Czy można odbyć spacer po Królewcu przechodząc przez każdy z mostów dokładnie jeden raz? (można dodatkowo wymagać, aby punkt startowy był punktem końcowym).
Cykl Eulera[10] – marszruta zamknięta przechodząca przez każdą krawędź dokładnie raz
Droga Eulera – marszruta przechodząca przez każdą krawędź dokładnie raz
Graf eulerowski – ma cykl Eulera
graf półeulerowski – ma drogę Eulera

Fakt. Jeżeli graf jest eulerowski to:

- wszystkie krawędzie są w jednej składowej spójnej
- wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty.

Twierdzenie: Powyższe dwa warunki są wystarczające do istnienia cyklu Eulera.
Dowód: indukcja po $m = |E|$.
Niech C – dowolny cykl w G. Po usunięciu krawędzi z C każda składowa spójna ma cykl Eulera. Wszystkie te cykle można połączyć w jeden cykl Eulera w G.
Twierdzenie: Graf jest półeulerowski gdy:

[9] Notacja jak w *Matematyce Konkretnej* – $[p] = 1$ jeśli p jest prawdą, wpp. równe 0
[10] Te wszystkie rzeczy działają dla multigrafów

- wszystkie krawędzie są w jednej składowej spójnej
- co najwyżej dwa wierzchołki mają stopień nieparzysty.

Dowód:
1° mamy 0 wierzchołków o stopniu nieparzystym – jest cykl Eulera
2° mamy 1 wierzchołek o stopniu nieparzystym – sprzeczność z lematem o uściskach dłoni
3° mamy 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym v_i, v_j – dodajemy krawędź $\{v_i, v_j\}$, dostajemy cykl Eulera, który po usunięciu dodanej krawędzi jest drogą Eulera

Problem chińskiego listonosza[11]
Istnieje algorytm wielomianowy dla tego problemu.

% Notatki z trzeciej godziny wykładu dodam kiedyś. Było o

1. *Drogi, cykle Hamiltona*
2. *Twierdzenie Ore z dowodem*
3. *trochę o problemie komiwojażera*
4. *DFS*
5. *BFS*

6 7.01.2011

6.1 Najkrótsze drzewo spinające grafu

Dany jest graf ważony. Szukamy taki spójny podgraf, który ma najmniejszą sumę wag krawędzi - jest to najkrótsze drzewo spinające.

Algorytm 1 (Kruskal)

1. Uporządkuj krawędzie w takiej kolejności, by ciąg ich wag był niemalejący
2. Dla $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ jeśli dodanie do T krawędzi e_i nie tworzy cyklu to
   $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$

Złożoność zależy od implementacji – przy dobrej okazuje się, że najbardziej czasochłonne jest sortowanie. [12]

Lemat: każdy algorytm, który w kolejnych $n-1$ krokach dodaje do T najkrótszą krawędź między niepołączonymi zbiorami wierzchołków S i $V(G) \setminus S$ znajduje najkrótsze drzewo spinające T.
Dowód: Algorytm zwraca drzewo, bo T na końcu nie ma cykli i ma $n-1$ krawędzi. Załóżmy nie wprost, że T nie jest najkrótszym drzewem spinającym i że $T*$ jest najkrótszym drzewem spinającym zawierającym największy początkowy zbiór krawędzi $\{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$ dodanych przez algorytm do T. Wtedy e_i jest pierwszą krawędzią dodaną przez algorytm, której nie ma w $T*$; e_i jest najkrótszą krawędzią między S i $V(G) \setminus S$. Graf $T* \cup \{e_i\}$ ma cykl C. Cykl C musi zawierać inną krawędź e' między S i $V(G) \setminus S$. Mamy $c(e') \geqslant c(e)$. Zauważmy, że $T' = T* \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ ma wagę nie większą niż $T*$ i jest drzewem. Zatem T' jest najkrótszym drzewem spinającym i zawiera krawędzie $\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ – sprzeczność z doborem $T*$.

Algorytm 2 (Prim-Dijkstra)

1. $S \leftarrow v_0$
2. Dla v: $v \neq v_0$ jeśli $\{v, v_0\} \in E$ to $d[v] = c(v_0, v)$; $p[v] = v_0$ wpp. $d[v] = \infty$
3. Dopóki $S \neq V(G)$
   wybierz $v \in V(G) \setminus S$ o minimalnym $d[v]$
   $S \leftarrow S \cup \{v\}$
   Dla w: $\{v, w\} \in E$ jeśli $d[w] > c(v, w)$ to $d[w] \leftarrow c(v, w)$; $p[w] \leftarrow v$

[11] Problem chińskiego listonosza na MINI PW
[12] Zakładam, że nie znacie *union-find*.

6.2 Problem najkrótszych dróg

Dany jest graf ważony skierowany (drogi mogą być jednokierunkowe).

Możemy chcieć znaleźć: - najkrótszą drogę między u i v - najkrótsze drogi z u do innych wierzchołków - najkrótsze drogi między wszystkimi parami wierzchołków

Algorytm Dijkstry (problem 2) – warunkiem jego poprawności są nieujemne wagi wszystkich krawędzi

1. $S \leftarrow v_0$
2. Dla v: $v \neq v_0$ jeśli $(v, v_0) \in E$ to $d[v] = c(v_0, v)$; $p[v] = v_0$ wpp. $d[v] = \infty$
3. Dopóki $S \neq V(G)$
   wybierz $v \in V(G) \setminus S$ o minimalnym $d[v]$
   $S \leftarrow S \cup \{v\}$
   Dla w: $(v, w) \in E$ jeśli $d[w] > d[v] + c(v, w)$ to $d[w] \leftarrow d[v] + c(v, w)$; $p[w] \leftarrow v$

Dowód poprawności: Załóżmy, że algorytm Dijkstry prawidłowo wyznacza $d[v]$ dla wszystkich wierzchołków v które są bliższe v_0 niż w i dla tych, które mają tę samą odległość, ale najkrótsza droga z v_0 do nich ma mniej krawędzi niż do w. Musimy pokazać, że algorytm Dijkstry prawidłowo wyznacza odległość do w. Niech v będzie poprzednikiem w na najkrótszej drodze z v_0 do w. W kroku, w którym dodawane jest v, mamy sprawdzanie $d[w] > d[v] + c(v, w)$. [13]

Złożoność $O(m + n \log n)$ przy najlepszej implementacji, przy gorszej $O(n^2)$

Algorytm Warshalla (– Floyda) – warunkiem poprawności jest nieistnienie cykli o wadze ujemnej

Na początku tablica `c[i,j]` zawiera długości $c(i, j)$ krawędzi lub nieskończoność, gdy krawędź z i do j nie istnieje.

```
for k = 1 to n do
    for i = 1 to n do
        for j = 1 to n do
            if c[i,j] > c[i,k] + c[k,j]
                then c[i,j] := c[i,k] + c[k,j]
```

Złożoność: jak widać $O(n^3)$. Uzasadnienie poprawności: Po k-tej iteracji najbardziej zewnętrznej pętli każde c[i,j] zawiera długość najkrótszej drogi z i do j w której pośrednimi wierzchołkami mogą być $1, 2, \ldots, k$.

6.3 Problem znajdowania przechodniego domknięcia digrafu

Dany jest digraf G. Chcemy znaleźć digraf $G*$ taki, że $(u, v) \in E(G*) \Leftrightarrow$ w G istnieje droga skierowana z u do v. Wiąże się to z przechodnim domknięciem relacji.

Metody znajdowania przechodniego domknięcia

1. BFS/DFS
2. zmodyfikowany algorytm Warshalla – `c[i,j]` to macierz sąsiedztwa

```
for k = 1 to n do
    for i = 1 to n do
        for j = 1 to n do
            c[i,j] := c[i,j] OR (c[i,k] AND c[k,j])
```

6.4 Przepływy w sieciach

Sieć to digraf z wyróżnionymi dwoma wierzchołkami: s - źródło, t - ujście.
$c(u, v)$ – maksymalny możliwy przepływ łukiem u, v
$f(u, v)$ – przepływ płynący łukiem u, v; $f(u, v) \leqslant c(u, v)$
dla każdego v różnego od s, t spełniony jest warunek Kirchhoffa – $\forall_v \sum_{e \text{ – wchodzące do } v} f(e) = \sum_{e \text{ – wychodzące z } v} f(e)$.
Szukamy największego przepływu, wartością przepływu jest[14]:

$$|f| = \sum_{e \text{ – wychodzące z } s} f(e) = \sum_{e \text{ – wchodzące do } t} f(e)$$

[13] Wykładowca: Wiem, że nie udowodniłem do porządku, ale przejdziemy do następnego algorytmu.
[14] Pierwsza równość: definicja, druga z prawa Kirchhoffa

Przekroje w sieciach
Przekrój to podział wierzchołków sieci na dwa spójne zbiory S i T taki, że $s \in S \wedge t \in T$. Wartość przekroju

$$c(S,T) = \sum_{(u,v):u\in S, v\in T} c(u,v)$$

Przepływ netto przez przekrój S,T

$$f(S,T) = \sum_{(u,v):u\in S, v\in T} f(u,v) - \sum_{(v,u):u\in S, v\in T} f(v,u)$$

Z prawa Kirchhoffa pokazujemy, że

$$f(S,T) = \sum_{e wych. z v \in S} f(e) - \sum_{e wch. do v\in T} = \sum_{e wych z S} f(e) = |f|$$

Fakt. Dla każdego przekroju S,T mamy $c(S,T) \geqslant f(S,T) = |f|$.
Twierdzenie.[15] Jeśli f jest maksymalnym przepływem, to istnieje przekrój S,T taki, że $|f| = c(S,T)$.
Dowód: Ścieżka powiększająca przepływ to ścieżka przechodząca z s do t po dwóch rodzajach łuków:

1. po łukach (u,v) takich, że $f(u,v) < c(u,v)$
2. „pod prąd" po łuku, który ma przyporządkowany niezerowy przepływ czyli z v do u jeśli $f(u,v) > 0$

Fakt. Jeśli istnieje ścieżka powiększająca to bieżący przepływ f możemy powiększyć o przepływ na tej ścieżce.
Fakt. Jeśli f jest największy to ścieżka powiększająca z s do t nie istnieje.
S – zbiór wierzchołków do których można dojść z s ścieżką powiększającą.
T – pozostałe wierzchołki.
$f(S,T) = c(S,T)$
Algorytm Forda–Fulkersona
Dopóki istnieje ścieżka powiększająca f
powiększ f o maksymalny przepływ na tej ścieżce

7 14.01.2010

7.1 Planarność

Fakt: K_5 nie może być narysowany na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.
Uzasadnienie: K_5 zawiera cykl długości pięć. Po jego narysowaniu rysujemy kolejne krawędzie – muszą być na przemian w środku i na zewnątrz cyklu, ale okazuje się, że jest ich zbyt dużo.[16]

Graf płaski – rysunek grafu na płaszczyźnie, w którym krawędzie się nie przecinają.
Graf planarny – graf, który da się narysować jako graf płaski (np. K_5 nie jest planarny).
Fakt: $K_{3,3}$ nie jest planarny[17] – uzasadnienie jak powyżej, mamy cykl długości 6.
Graf G' jest homeomorficzny do G jeśli powstaje przez zmianie w G wybranych krawędzi na krawędź-wierzchołek-krawędź – na rysunku po prostu dorysowujemy wierzchołek na krawędzi.
Fakt: Podgraf grafu planarnego jest planarny.
Fakt: Jeśli graf zawiera podgraf homeomorficzny z K_5 lub $K_{3,3}$ to nie jest planarny.
Tw. Kuratowskiego: Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$.[18]

7.2 Ściany

Na grafy planarne można spojrzeć też jak na wielościany.
Niech G będzie spójny, płaski i niech ma n wierzchołków, m krawędzi i f ścian. Wtedy zachodzi wzór Eulera[19]:

$$n - m + f = 2$$

Dowód: indukcja po m.

[15] Patrz: Twierdzenie 26.7 (O maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju), CLRS, str. 670
[16] Jeżeli to nie jest przekonujące, patrz 7.2
[17] Graf pełny dwudzielny o 3+3 wierzchołkach
[18] Wykładowca: Widziałem kiedyś jakiś dowód, ale dowiedzenie tego byłoby dość skomplikowane.
[19] też dla multigrafów

1. G jest drzewem (baza indukcji), wtedy $n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2$.

2. G nie jest drzewem – G ma cykl, możemy wybrać taki cykl C, że C ogranicza pewną ścianę. Niech $e \in C$. Wtedy $m(G \setminus e) = m - 1 \wedge f(G \setminus e) = f - 1$. Z założenia indukcyjnego dla $G \setminus e$ mamy

$$2 = n - (m-1) + (f-1) = n - m + f$$

.

Wniosek: G prosty, spójny, planarny, $n > 2$. Wtedy $m \leqslant 3n - 6$.
Dowód: Niech m_i to liczba krawędzi ograniczających ścianę f_i. Wtedy $2m = \sum m_i \geqslant 3f$. Z wzoru Eulera $6 \leqslant 3n - m$.

Fakt: K_5 nie jest planarny.
Dowód: $n = 5, m = 10$, gdyby był planarny to $10 \leqslant 9$.

Fakt: Każdy prosty graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Dowód: Załóżmy nie wprost, że stopnie wszystkich wierzchołków w składowej spójnej G są większe od 5. Wtedy $2m = \sum \deg(v) \geqslant 6n$, ale $m \leqslant 3n - 6$ – sprzeczność.

Fakt: G prosty, spójny, planarny, $n > 2$, bez trójkątów. Wtedy $m \leqslant 2n - 4$.
Dowód: Jak we wniosku wyżej otrzymujemy $2m \geqslant 4f$. Zatem z wzoru Eulera $4 \leqslant 2n - m$.

Fakt: $K_{3,3}$ jest nieplanarny (bo $n = 6, m = 9$).

7.3 Kolorowanie grafów planarnych

Twierdzenie o czterech barwach: Każdą mapę można pokolorować czterema kolorami.

Czym mapa jest każdy widział. Kolorujemy mapę tak, że sąsiadujące państwa mają różne kolory[20].

Definicja. Graf dualny do grafu planarnego G to taki graf G', że wierzchołki w G' odpowiadają ścianom w G, a krawędzie w G' są pomiędzy wierzchołkami odpowiadającymi sąsiadującym ścianom w G.

Jeżeli weźmiemy graf dualny do wcześniej rozważanego, okazuje się, że problem jest równoważny do kolorowania wierzchołków.

Fakt. Wierzchołki każdego grafu planarnego można tak pokolorować 4 kolorami, żeby każde 2 sąsiadujące wierzchołki miały różne kolory.

Udowodnimy sobie słabsze twierdzenie – o 5 kolorach. Dowód: Możemy założyć, że G jest prosty. Dowód przeprowadzamy indukcyjnie po n. W G istnieje wierzchołek v o stopniu co najwyżej 5.

1. $\deg(v) \leqslant 4$. Wtedy z założenia indukcyjnego $G \setminus v$ ma kolorowanie 5 kolorami, dodając v łączymy go z 4 wierzchołkami, więc możemy pokolorować v na piąty z kolorów.

2. $\deg(v) = 5$. Niech $v_1 \dots v_5$ będą sąsiadami v. Wiemy, że $\exists_{i,j} \{v_i, v_j\} \notin E$ (Gdyby nie, mielibyśmy podgraf G będący K_5). Usuwając v z G i sklejając v_i, v_j otrzymujemy graf, który możemy pokolorować 5 kolorami. Okazuje się, że otrzymane kolorowanie jest też prawidłowe na $G \setminus v$ i ma dodatkowo własność – kolory v_i, v_j są takie same.

7.4 Kolorowanie grafów

G – bez pętli.
Kolorowanie G – przyporządkowanie wierzchołkom kolorów tak, że żadnych dwóch sąsiadów nie ma takiego samego koloru.
G jest k-kolorowalny – można pokolorować G za pomocą k kolorów.
Liczba chromatyczna G (oznaczamy $\chi(G)$) to minimalne k takie, że G jest k-kolorowalny.

Istnieje wiele problemów optymalizacyjnych, które można sprowadzić do problemu kolorowania grafów. Np. planowanie sesji egzaminacyjnej:

- wierzchołki – egzaminy
- krawędź – dwa egzaminy nie mogą odbyć się w tym samym czasie
- kolory – terminy egzaminów

Fakt.

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G = N_n$ (graf pusty)
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ jest dwudzielny

[20] Państwa o tym samym kolorze mogą mieć jeden wspólny wierzchołek – gdyby nie, ograniczenie na liczbę kolorów by nie istniało

- $\chi(G) = 3$ – problem NP-zupełny
- $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leqslant \chi(G)$
- $K_k \subseteq G \Rightarrow \chi(G) \geqslant k$

Podzbiór $V_1 \subseteq V(G)$ jest niezależny – żadne z wierzchołków w V_1 nie są połączone.
Fakt: W każdym kolorowaniu wierzchołków G podzbiór wierzchołków dowolnego koloru C jest niezależny.
Fakt: jeśli k jest rozmiarem największego podzbioru niezależnego w G to $\chi(G) \geqslant \frac{n}{k}$.
Dowód: jeśli k_C to liczba wierzchołków koloru C to $n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} k_i \leqslant k * \chi(G)$

Algorytm sekwencyjny

1. Posortuj wierzchołki w kolejności $v_1, \ldots, v_n$ wg. twojej ulubionej heurystyki
2. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ pokoloruj v_i na najniższy możliwy kolor

Możemy użyć np. heurystyki LF – sortowanie nierosnąco po stopniach.

Fakt: $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$
Dowód: Pokażemy, że jeśli używając algorytmu sekwencyjnego i kolejności LF dla G otrzymamy k_1 kolorów i używając algorytmu sekwencyjnego dla $\overline{G}$ z kolejnością odwrotną otrzymamy k_2 kolorów to

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n + 1$$

Niech k będzie takie, że $k < \deg_G(v_k) \wedge k + 1 \geqslant \deg_G(v_{k+1})$. Wtedy ...

Fakt: $\chi(G) \leqslant deg(G) + 1$
Tw. Brooksa: $\chi(G) = deg(G) + 1 \Leftrightarrow G$ jest kliką lub cyklem długości nieparzystej