Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 9. 27 kwietnia i 8 maja 2017

[Do zadań 1–3] Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam ciągły rozkład o dystrybuancie $F(x)$ i gęstości $f(x)$. Tworzymy nowe zmienne losowe, mianowicie: $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_{(2)}$ to druga co do wielkości wartość, $X_{(3)} = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

1. Udowodnić, że $f_{(2)}(x) = 6 \cdot F(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot f(x)$.

   [Do zadań 2–3] Dodatkowo zakładamy, że $X_k \sim \mathrm{U}[0, a]$, $k = 1, 2, 3$.

2. Niech $Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$, $Y_2 = X_{(2)}$, $Y_3 = \dfrac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2}$. Udowodnić, że wartości oczekiwane są takie same: $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2) = \mathrm{E}(Y_3) = \dfrac{a}{2}$.

   Wsk.: $\mathrm{E}(Y_1)$ z własności wartości oczekiwanej, $\mathrm{E}(Y_2)$ – całkowanie, $Y_3 = \dfrac{3Y_1 - Y_2}{2}$.

3. Wykazać, że : $\mathrm{V}(Y_1) = \dfrac{a^2}{36}$, $\mathrm{V}(Y_2) = \dfrac{a^2}{20}$.

   Wsk.: Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych, $\mathrm{E}(Y_2^2)$ poprzez całkowanie.

4. Niech (X, Y) oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. Od zmiennej (X, Y) przechodzimy do zmiennej (R, Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X, Y). Wykazać, że gęstość zmiennej (R, Θ) określona jest wzorem

$$g(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\, r \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad \text{gdzie } 0 < \Theta < 2\pi,\ 0 < r < \infty.$$

5. (2 p.) Znaczenie zmiennej (X, Y) niech będzie takie, jak w poprzednim zadaniu. Niech

$$D = R^2 = X^2 + Y^2, \quad \Theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}.$$

   (a) Udowodnić, że gęstość zmiennej (D, Θ) to: $f(d, \Theta) = \dfrac{1}{2}\exp\left\{-\dfrac{d}{2}\right\}\dfrac{1}{2\pi}$, gdzie $0 < d < \infty$, $0 < \Theta < 2\pi$.
   (b) Sprawdzić czy zmienne D i Θ są niezależne.
   (c) Jaki rozkład ma zmienna D?

6. (2 p.) Załóżmy, że niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady, odpowiednio, $\mathrm{Gamma}(b, p)$ i $\mathrm{Gamma}(b, q)$. Niech $U = X + Y$ oraz $V = \dfrac{X}{X + Y}$. Wykazać, że

   (a) Zmienne U i V są niezależne.
   (b) $X + Y$ ma rozkład $\mathrm{Gamma}(b, p + q)$.
   (c) Zmienna V ma rozkład $\mathrm{Beta}(p, q)$, tzn. $f(x) = \dfrac{1}{B(p, q)} x^{p-1}(1 - x)^{q-1}$, $x \in [0, 1]$.

7. Niech zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależne i niech mają ten sam rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \ldots + X_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że dla gęstości zmiennej $(Y_1, \ldots, Y_n)$ zachodzi wzór $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda^n \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

8. Dla gęstości $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$ z poprzedniego zadania wykazać, że gęstość brzegowa względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem $f_{Y_n}(y_n) = \lambda^n \dfrac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_n$.

Witold Karczewski