http://www.ii.uni.wroc.pl/~pwo/An/an-L-lista-01.pdf

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 1

8 października 2015 r.

Zajęcia 14 października 2015 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L1.1. Włącz komputer! | 1 punkt | Wiadomo, że rozwiązaniem równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ są liczby

$$x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pokaż na kilku przykładach (innych niż te z wykładu!), że bezpośrednie stosowanie powyższych wzorów w obliczeniach numerycznych może być niebezpieczne.

L1.2. | 1 punkt | Ilu wyrazów szeregu

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

trzeba użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-5}?

L1.3. | 1 punkt | Sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ponad dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

L1.4. Włącz komputer! | 1 punkt | Wykorzystując jedynie operacje arytmetyczne $(+, -, *, /)$ i stosując pomysł z poprzedniego zadania, zaproponuj szybki `algorytm` obliczania logarytmu naturalnego bardzo dużych liczb. Opracowaną metodę porównaj z funkcją biblioteczną.

L1.5. Włącz komputer! | 1 punkt | Sprawdź doświadczalnie, jak dobrym przybliżeniem wartości $\ln x$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ jest następujące wyrażenie:

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1} \left(\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^{2k+1}, \tag{1}$$

gdzie

$$a_1 := 1.999999993788, \qquad a_3 := 0.399659100019,$$

$$a_5 := 0.666669470507, \qquad a_7 := 0.300974506336.$$

Następnie, wykorzystując wzór (1), zaproponuj efektywny `algorytm` obliczania z podobną dokładnością wartości $\ln x$ dla $x > 0$. Opracowaną metodę porównaj z funkcją biblioteczną.

L1.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ W języku programowania `PWO++` funkcja `ACTan`(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\operatorname{arcctg}(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $|x| \leq 1$. Wykorzystując funkcję `ACTan`, zaproponuj szkic `algorytmu` wyznaczającego w języku `PWO++` wartości funkcji arcus cotangens z dużą dokładnością także dla $|x| > 1$.

L1.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n} \qquad \left(n = 1, 2, \ldots;\ I_0 = \ln\frac{6}{5}\right). \tag{2}$$

Następnie wykorzystaj związek (2) do wyznaczenia wartości całek $I_1, I_2, \ldots, I_{20}$ wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej precyzji (`single`). Czy wyniki są wiarygodne? Odpowiedź uzasadnij.

L1.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{2 punkty}}$ Na wykładzie pokazano, że użycie wzoru

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (h \text{ – małe})$$

do przybliżenia wartości $f'(x)$ nie jest dobrym pomysłem. Uzasadnij, że

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

a następnie zbadaj doświadczalnie przydatność wyrażenia

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad (h \text{ – małe})$$

do wyznaczania przybliżonej wartości pochodnej funkcji f w punkcie x. Czy stosowanie drugiego wzoru coś zmienia? Jak to wytłumaczyć?

(–) Paweł Woźny

– Czyli, że zasadniczo Pan się musi na tym rozeznać całkowicie żeby wiedzieć ile i gdzie...

– Dotychczas tak było, ale teraz mamy komputer. Może Pan pisać co tylko Pan chce to nie ma żadnego znaczenia.

– Komputer?

– Eeee, on się i tak zawsze pomyli przy dodawaniu, proszę pana. Nie było miesiąca, żeby się nie pomylił.

– Czyli, że teraz nie trzeba się tak znać na robocie?

– A teraz już nie. Teraz jest dużo łatwiej, jest proszę pana.

Miś, reż. S. Bareja, 1980.