

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

19 listopada 2015 r.

Zajęcia 2 grudnia 2015 r.

Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L7.1.** 1 punkt Sprawdź, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach x_0, \dots, x_n można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

- L7.2.** 1 punkt Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a) $\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 & \end{array} \right.$, b) $\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & \\ \hline -2 & 9 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right.$.

- L7.3.** 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych punktów x_0, x_1, \dots, x_n wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ dla $k = 0, 1, \dots, n$?

- L7.4.** 1 punkt Niech $L_n \in \Pi_n$ oznacza wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych węzłach x_0, x_1, \dots, x_n . Sformułuj efektywny algorytm wyznaczania wartości

$$L_n(z_0), L_n(z_1), \dots, L_n(z_M),$$

gdzie $z_0, z_1, \dots, z_M \in \mathbb{R}$ są dane. Jaka jest jego złożoność?

- L7.5.** 1 punkt Niech $L_n \in \Pi_n$ oznacza wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \sin(2x)$ i węzłów będących równoodległymi punktami przedziału $[0, 1]$. Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że dla każdego x z tego przedziału zachodzi

$$|f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-4} ?$$

- L7.6.** 1 punkt Funkcję $f(x) = \ln(x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[1, 2]$. Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [1, 2]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-3} ?$$

- L7.7.** 1 punkt Funkcję $f(x) = e^x$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1} . Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-5} ?$$

L7.8. 2 punkty Język programowania **PW0++** ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura **Interp_Newton**(**x**,**f**) znajdująca dla wektora $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora $\mathbf{f} := [f_0, f_1, \dots, f_n]$ współczynniki b_k ($k = 0, 1, \dots, n$) postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 31. W jaki sposób, wykorzystując procedurę **Interp_Newton**, można **szybko** wyznaczyć współczynniki postaci Newtona wielomianu $L_{31} \in \Pi_{31}$ spełniającego warunki

$$L_{31}(z_i) = h_i \quad (i = 0, 1, \dots, 31; z_i \neq z_j \text{ dla } i \neq j)?$$

(-) *Paweł Woźny*