Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8. 27 i 24 kwietnia 2017

1. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład Beta(p,q). Wykazać, że $\mathrm{E}(X) = \dfrac{p}{p+q}$, $\mathrm{V}(X) = \dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.
2. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że znana jest wartość parametru a.
3. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że nie jest znana wartość parametru a.
4. Niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_5$ mają ten sam, ciągły rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k. Obliczyć wartość p.
5. X, Y, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U[0,1]$. Obliczyc $P(X \geqslant YZ)$.
6. X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Znaleźć rozkład (3-wymiarowy) zmiennej $(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3)$.

   Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o tym samym, ciągłym rozkładzie. Mówimy, że w chwili j notujemy rekord ($j \leqslant n$), jeśli $X_j \geqslant X_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant j$. Niech zmienna losowa Z będzie liczbą rekordów w ciągu $\{X_k\}$.

7. (2p.) Wykazać, że $\mathrm{E}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

   [Do zadań 8–9] Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:

$$f(x,y) = 1, \;\; 0 <\leqslant x, y \leqslant 1.$$

8. Znaleźć gęstość zmiennej $Z = {}^{X}\!/_{Y}$.
9. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą cyfrą znaczącą Z jest 1.
10. Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam ciągły rozkład o dystrybuancie $F(x)$ i gęstości $f(x)$. Tworzymy nowe zmienne losowe, mianowicie: $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_{(2)}$ to druga co do wielkości wartość, $X_{(3)} = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Wykazać, że $f_{(1)}(x) = 3 \cdot (1 - F(x))^2 \cdot f(x)$ oraz $f_{(3)}(x) = 3 \cdot (F(x))^2 \cdot f(x)$.
    Wsk.: Obliczyć najpierw dystrybuantę.

Witold Karczewski