Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 7. 10 i 13 kwietnia 2017

1. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego $B(n,p)$. Udowodnić, że
$$E = \left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

2. Dana jest n-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:
$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \;\text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$
Znaleźć postać (współczynniki) Jacobianu
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

3. Dane są zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$. Udowodnić, że:
$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{\mathbf{X}})^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

[**Zadania 4–5**] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

4. Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \dfrac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$

5. Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{\mathbf{X}})^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$

6. Pociągi do miejscowości A odjeżdżają co 10 minut, rozpoczynając od 7.00. Pociągi do miejscowości B odjeżdżają co 15 minut, rozpoczynając od 7.05. Pasażer P_1 przychodzi na stację w chwili o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.00 a 8.00; pasażer P_2 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.10 a 8.10. Jakie jest ppb, że pasażer P_1 dojedzie do A? Jakie jest ppb, że pasażer P_2 dojedzie do A? Jeżeli w chwili przyjścia pasażera na stacji znajdują się 2 pociągi — wybiera on losowo jeden z nich z ppb $= {}^1\!/_2$. Rozwiązanie (raczej) rysunkowe.

7. Zmienna losowa X ma dyskretny rozkład jednostajny

$$P(X = i) = \frac{1}{100}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 99, 100\}\,.$$

Zmienne losowe Y oraz Z określone są następująco

$$Y = \begin{cases} 1, & 2|X \vee 3|X, \\ 0, & \text{wpw}, \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} 1, & 3|X, \\ 0, & \text{wpw}. \end{cases}$$

Znaleźć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y i Z. (Odp.: $\rho = {}^{33}/_{67}$)

[Do zadań 8–9] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1, 2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1 X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

8. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: 6, ${}^2/_3$ dla Y_1, ${}^9/_4$, ${}^{55}/_{144}$ dla Y_2).

9. Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: ${}^{3\sqrt{330}}/_{55}$).

10. Ze zbioru n-elementowego wybieramy losowo niepusty podzbiór (każdy z podzbiorów jest jednakowo prawdopodobny). Wartością zmiennej losowej X jest liczba elementów wylosowanego podzbioru. Wykazać, że $E(X) = \dfrac{n}{2 - (.5)^{n-1}}$.

Witold Karczewski