# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

14 stycznia 2016 r.

Zajęcia 27 stycznia 2016 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

**L13.1.** 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f$ ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

**L13.2.** 1 punkt O funkcji ciągłej $f$ wiadomo, że $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 1$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $\varepsilon$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

**L13.3.** 1 punkt Jak należy dobrać $n$, aby stosując złożony wzór Simpsona $S_n$ obliczyć przybliżoną wartość całki $\displaystyle\int_1^2 \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x$ z błędem względnym $\le 10^{-7}$?

**L13.4.** 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

**L13.5.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenie $T_{15,0}$ następujących całek:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} (x^5 + 2x^3 - 7x + 2015)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+25x^2}$, b) $\displaystyle\int_{\pi}^{50} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Skomentuj wyniki.

**L13.6.** 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ ($f$ – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-1, 3]$ wystarczy wyznaczyć wartość funkcji $f$, aby obliczyć przybliżenie $T_{10,0}$ całki $I$?

**L13.7.** 1 punkt Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**L13.8.** $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Dobierz węzły $x_0, x_1, x_2$ oraz współczynnki $A_0, A_1, A_2$ kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = Q_2(f)$$

zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia $\leq 5$.

*(–) Paweł Woźny*