

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 6

12 listopada 2015 r.

Zajęcia 25 listopada 2015 r.  
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

**L6.1.** 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

**L6.2.** 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie  $x$ , gdzie  $c_0, c_1, \dots, c_n$  są danymi stałymi, a  $T_n$  oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa.

**L6.3.** 2 punkty Niech  $T_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa.

- (a) Podaj postać potęgową wielomianu  $T_6$ .
- (b) Wykaż, że współczynnik wielomianu  $T_n$  przy  $x^n$  jest równy  $2^{n-1}$ .
- (c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego  $x$  z przedziału  $[-1, 1]$   $n$ -ty ( $n \geq 0$ ) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ :
  - i. sprawdź, że  $|T_n(x)| \leq 1$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ;  $n \geq 0$ );
  - ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne*  $n$ -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania  $|T_n(x)| = 1$ ;
  - iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa  $T_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) ma  $n+1$  zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale  $(-1, 1)$ .

**L6.4.** 1 punkt Udowodnij jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

**L6.5.** 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & 0 & 2 & 4 & 7 \\ \hline y_k & -1 & 1 & 3 & -5 \end{array}.$$

**L6.6.** 1 punkt Niech będzie  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

- (a) Wyznacz wielomian stopnia  $\leq 6$  interpolujący funkcję  $f$  w punktach  $-2015, -1977, -1, 0, 1, 1977, 2015$ .
- (b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję  $f$  w punktach  $-1, 0, 1$ .

**L6.7.** 1 punkt Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(0)x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

(-) *Paweł Woźny*