Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

15 października 2015 r.

Zajęcia 21 października 2015 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{2}, 1)$.

L2.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podaj wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$? Co z tego wynika?

L2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Zaokrągleniem* niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, c jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\operatorname{rd}(x) = sm_t2^c$, gdzie $m_t \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $| m - m_t | \le \frac{1}{2}2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\operatorname{rd}(x) - x|}{|x|} \le 2^{-t}.$$

L2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omówi go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2}\max(|x|, |y|) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

[1]Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008

L2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku.

L2.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Można wykazać, że dla dowolnego $x_0 > -1$ ciąg

$$x_{n+1} = 2^{n+2}\left(\sqrt{1 + 2^{-(n+1)}x_n} - 1\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do $\ln(x_0 + 1)$. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska.

L2.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $x^3 + \sqrt{x^6 + 2015}$, **b)** $\sin(2x) - 2x + 4x^3/3$, **c)** $\log_3 x - 5$, **d)** $1 - e^{x^2}$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

(–) Paweł Woźny