$x = A\sin(\omega t + \alpha)$ কীভাবে এলো?

কে. এম শারিয়াত উল্লাহ

শিক্ষার্থী, তড়িৎ ও ইলেকট্রনিক প্রকৌশল বিভাগ, শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির জন্য,

$$F = -kx$$

$$\gg ma + kx = 0$$

$$\gg m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\gg \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\gg \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

এটি একটি ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন। ধরি এর একটি সমাধান $x = Ce^{pt}$ যেখানে C এর মাত্রা সরণের মাত্রার সমান ও pt মাত্রাহীন। তাহলে,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}Ce^{pt}\right) = \frac{d}{dt}(Cpe^{pt}) = Cp^2e^{pt}$$

x এর মান ও $\frac{d^2x}{dt^2}$ এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$Cp^2e^{pt} + \omega^2 Ce^{pt} = 0$$

$$(p^2 + \omega^2)Ce^{pt} = 0$$

এখান, Ce^{pt} যেহেতু আমাদের সমাধান তাই এটি শুন্য হবে না। অতএব, $(p^2 + \omega^2) = 0$ বা, $p = \pm\, i\,\omega$

অতএব, আমাদের দুইটি সমাধান বিদ্যমান, $x_1 = C_1e^{i\omega t}$ ও $x_2 = C_2e^{-i\omega t}$

সাধারণ সমাধান, $x = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}$

এখন, $C_1 = Ce^{i\alpha}$ ও $C_2 = C_1^* = Ce^{-i\alpha}$

অতএব,

$$x = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t} = Ce^{i\alpha}e^{i\omega t} + Ce^{-i\alpha}e^{-i\omega t} = Ce^{i(\omega t+\alpha)} + Ce^{-i(\omega t+\alpha)}$$

$$x = C[\cos(\omega t + \alpha) + i\sin(\omega t + \alpha)] + C[\cos(\omega t + \alpha) - i\sin(\omega t + \alpha)] = 2C\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$