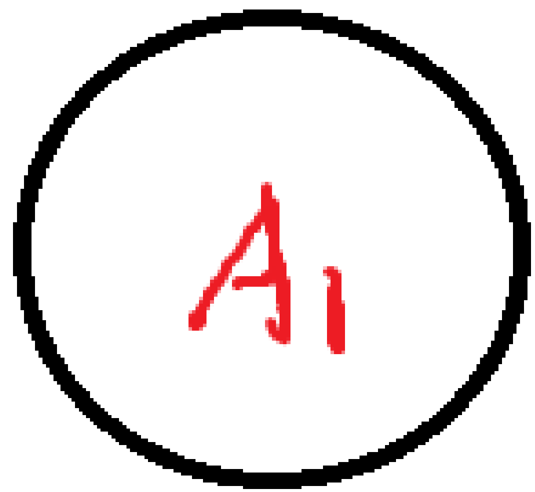
容斥原理和莫比乌斯

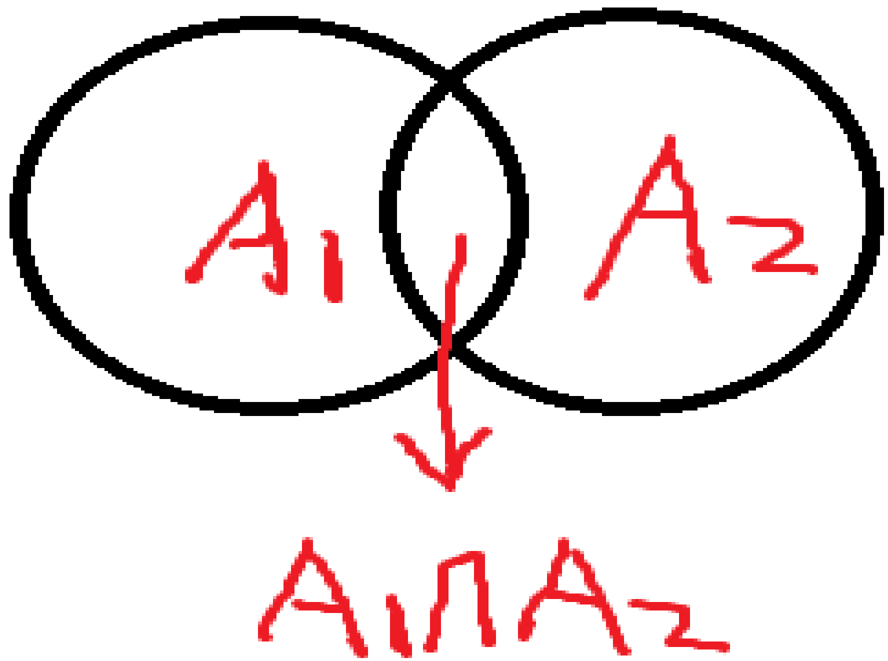
2016年上海大学冬季集训

主讲人:GAUSS_CLB

容斥原理

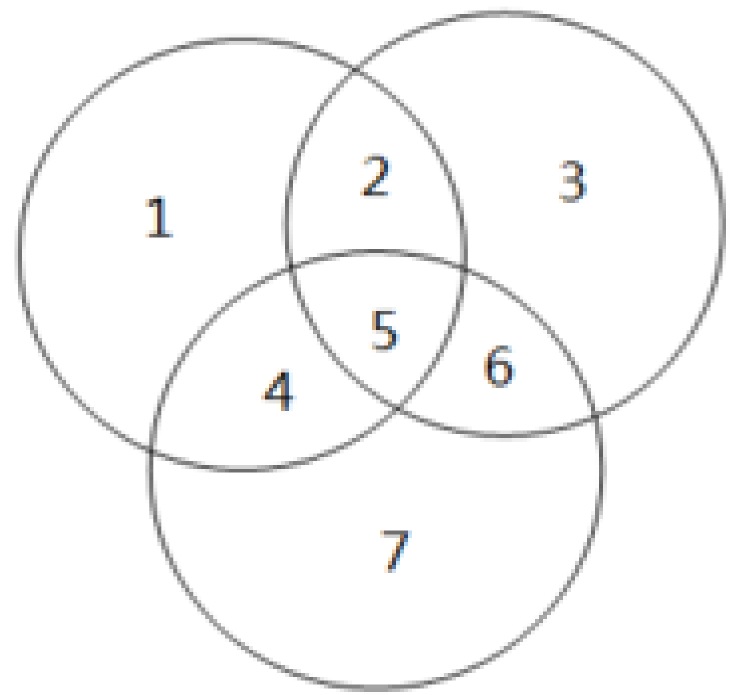
- 有容有斥
- 设有m个集合,$A_1, A_2, \cdots, A_m$,我们要求
- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$
- **m=1**, $|A_1|=|A_1|$





- **m=2,** $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

- m=3, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$



- 猜想:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| =$$

$$\sum_{1\le i\le m} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

- 证明过程略(提示：数学归纳法)
- 规律:
- 1.加减交替，第一个符号为加号
- 2.都是交集，并且从左到右个数加1，

个数分别为$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \cdots, \binom{m}{m}$

- 考虑到$\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m}=(1+1)^m-\binom{m}{0}=2^m-1$
- 所以容斥的题目复杂度很可能是指数级的，所以一般$m \leq 20$

- 使用二进制枚举的办法，我们可以遍历这2^m-1个真子集。
- [00…01,11…11]
- 符号由二进制中的1的个数决定

例题1

- Cheerleaders(UVa 11806)
- 在一个m*n的网格中放k个相同的石子，有多少种方法？每个格子最多放一个，第一行、最后一行、第一列、最后一列都必须有石子。(2<=m,n<=20,k<=500)，答案对1000007取余。

- 思考一分钟…

- 分析:
- 条件一：每个网格最多放1个石子，也就是当k>m*n时，方法数为0
- 条件二：第一行、最后一行、第一列、最后一列都必须有石子
- 枚举第一行所有的石子放法?
- 四个角的格子既属于行又属于列，这个在枚举时会不会重复计算?
- 枚举是必然不可行的，复杂度O(4^(m+n))爆表!!!
- 但第二点给我们启示，这个就是“斥”

容斥解法

- 求什么设什么…
- r_1, r_m, c_1, c_n分别表示第一行,最后一行，第一列，最后一列有石子
- 那么我们要求的是$|r_1 \cap r_m \cap c_1 \cap c_n|$
- 这个不是容斥的形式，容斥要的是取并集而不是交集
- 转换：
- 德摩根定律$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- $r_1 \cap r_m \cap c_1 \cap c_n = \overline{\overline{r_1 \cap r_m \cap c_1 \cap c_n}}$
- $=\overline{\overline{r_1} \cup \overline{r_m} \cup \overline{c_1} \cup \overline{c_n}}$
- 设S为全集
- $|r_1 \cap r_m \cap c_1 \cap c_n| = |S| - |\overline{r_1} \cup \overline{r_m} \cup \overline{c_1} \cup \overline{c_n}|$
- 将$|\overline{r_1} \cup \overline{r_m} \cup \overline{c_1} \cup \overline{c_n}|$按4元容斥公式展开
- 并且我们发现r_1, r_m, c_1, c_n取反后反而更容易求
- 注意组合数需预处理，并且我们将用二进制方法来快速实现

例题2

- 已知$1 \le u \le m, 1 \le v \le n$, 求$(u, v) = 1$
- 的二元对数，$1 \le n, m \le 100000$

- 思考一分钟…
- 分析：
- 首先这个问题的解空间是O(m*n)

- 使用莫比乌斯反演来做，当然可以，但是还没讲，所以只能考虑容斥了
- 我们枚举一维，比如行，那么考虑第i行，i与[1,n]的互质的对数。
- 考虑i的质因数分解，对i的所有质因子容斥，由于100000以下的数最多有6个不同的质因子，所以容斥的复杂度是
- O(2^6)
- 可以用埃拉托斯特尼筛法预处理100000以内的质因数分解，O(nlogn)

莫比乌斯函数

- 对符号的说明:
- d|n(读作d整除n)等价于n%d==0
- 注意：一般情况下我们认为d是小于等于n的正整数，即d是n的正因子
- 例如6的正因子有1,2,3,6
- 所以$1|6,2|6,3|6,6|6$且$4\nmid 6,5\nmid 6$

- 定义函数f(n)
- 前缀和函数S(n)=f(1)+f(2)+…+f(n)这个大家都听说过吧
- 现在我定义 $$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$
- F(n)只累加约数对应的哪些项
- 比如F(6)=f(1)+f(2)+f(3)+f(6)
- 如果我们知道F(n)的具体表达式，就会得到f(n)的一些性质

- 比如F(n)=n
- 大家猜到f(n)是什么了?
- f(n)就是我们说的欧拉函数
- 欧拉函数f(n)的定义:1~n之间与n互质的数的个数
- 再如F(n)=[n==1],即F(1)=1,对于n>1的情况,F(n)=0
- 这个时候f(n)是什么呢?
- 对，这时候f(n)就是莫比乌斯函数

- 我们将莫比乌斯函数记做u(n)
- 并且我们可以简单计算一下u(n)的前几项
- F(1)=u(1)=1 → u(1)=1
- F(2)=u(1)+u(2) → u(2)=-1
- F(3)=u(1)+u(3) → u(3)=-1
- F(4)=u(1)+u(2)+u(4) → u(4)=0
- ……

- 如何求u(n)的表达式呢?

- 完全奇性函数:
- 对于m=m1*m2,
- 则h(m)=h(m1)*h(m2)
- 奇性函数:
- 对于m=m1*m2,且(m1,m2)=1,
- 则h(m)=h(m1)*h(m2)

- 定理：F(n)为积性函数等价于f(n)为积性函数。证明略。

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

- 例如F(n)=n显然是积性函数,所以欧拉函数也是积性函数
- 事实上欧拉函数确实是积性函数
- 再如F(n)=[n==1]也是积性函数，所以莫比乌斯函数也是积性函数

- 所有的积性函数都可以使用欧拉筛来筛，因此莫比乌斯函数可以在O(n)时间内求得前n项

- 设n=p1^a1*p2^a2*…*pk^ak
- 因为u(n)是积性函数
- 所以p1^a1，p2^a2，…，pk^ak两两互质
- 所以u(n)=u(p1^a1)*u(p2^a2)*…*u(pk^ak)
- 所以我们只需知道p^k这种形式的莫比乌斯函数就行了

- 因为F(p^k)=u(1)+u(p)+…+u(p^k)=0
- 且F(1)=u(1)=1
- 令k=1,u(1)+u(p)=0 → u(p)=-1
- 令k=2,u(1)+u(p)+u(p^2)=0 → u(p^2)=0
- …
- 可以发现k>=2,u(p^k)=0

- 归纳一下:

$$\mu(m)=\prod_{p\mid m}\mu(p^{m_p})=\begin{cases}(-1)^r, & \text{如果} m=p_1p_2\cdots p_r;\\ 0, & \text{如果某个} p^2 \text{可除尽} m.\end{cases}$$

- 于是莫比乌斯函数又可以被定义为:

其中$\mu(d)$为莫比乌斯函数，定义如下：

(1)若$d=1$则 $\mu(d)=1$

(2)若$d=p_1p_2\cdots p_k$,p_i为互异素数，那么$\mu(d)=(-1)^k$

(3)其它情况下$\mu(d)=0$

- 这个定义也可以反推之前的那个定义
- 证明见PPT末(来自PoPoQQQ神牛)
- 如何用欧拉筛来筛莫比乌斯函数?

莫比乌斯函数有何用?

- 我们之前求f(n)是手推的，其实可以容斥求

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

- 然而莫比乌斯函数教你如何在O(n)时间内求得任何一项f(n)
- PS：从F(n)求解f(n)的过程叫做反演
- 因为自带莫比乌斯函数，所以叫莫比乌斯反演

如何求f(n)?

- 反演定理:

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d})$$

- 左→右证明:

$$g(m)=\sum_{d\backslash m} f(d) \Leftrightarrow f(m)=\sum_{d\backslash m}\mu(d)g\left(\frac{m}{d}\right).$$

$$\sum_{d\backslash m}\mu(d)g\left(\frac{m}{d}\right)=\sum_{d\backslash m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)g(d)=\sum_{d\backslash m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)\sum_{k\backslash d} f(k)$$

$$=\sum_{k\backslash m}\sum_{d\backslash (m/k)}\mu\left(\frac{m}{kd}\right)f(k)=\sum_{k\backslash m}\sum_{d\backslash (m/k)}\mu(d)f(k)$$

$$=\sum_{k\backslash m}[m/k=1]f(k)=f(m).$$

莫比乌斯反演的另一种形式

- 倍数形式:

$$F(n)=\sum_{n|d} f(d) \Rightarrow f(n)=\sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n})F(d)$$

- 证明类似.

再看例题2

- 求$1 \le u \le m, 1 \le v \le n$中(u,v)=l的二元组个数
- 我们这次就要用莫比乌斯函数解决这个问题
- 我们使用第二种倍数的形式

$$F(n)=\sum_{n|d} f(d) \Rightarrow f(n)=\sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n})F(d)$$

- 我们的目标函数f(l)
- 当然f(d)表示$1 \le u \le m, 1 \le v \le n$中(u,v)=d的二元组个数
- 那F(x)表示什么?

$$F(n) = \sum_{n|d} f(d) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) F(d)$$

- 显然F(x)=f(x)+f(2*x)+…
- 所以F(x)表示$1 \le u \le m, 1 \le v \le n$中(u,v)=k*x(k>=1)的二元组个数

- 既然要通过F(x)来求f(d)
- 所以F(x)显然要很好计算
- 事实上$1 \le u \le m, 1 \le v \le n$中(u,v)=k*x(k>=1)的二元组个数就是$\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor$
- 为什么?
- 因为1~n中x的倍数是x,2x,…,$\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor$x,而1~m中x的倍数是x,2x,…,$\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor$x
- 两两结合就是$\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor$

- 代入公式的：

$$f(i)=\sum_{i|d}\mu(\frac{d}{i})F(d)=\sum_{i|d}\mu(\frac{d}{i})\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$$

- 注意我们求得是f(1)
- d可以取1~min(m,n)
- 直接暴力计算O(n)
- 然而实际还有O(sqrt(n))的解法

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d)\quad\Rightarrow\quad f(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)$$

容斥定理证明(百度百科)

严格证明

对于容斥原理我们可以利用数学归纳法证明：

证明： 当 $n=2$ 时，等式成立(*证明略*)。

假设 $n=s(s\geq 2,s\in N^+)$ 时结论成立，则当 $n=s+1$ 时，

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{s+1}A_i\right|=\left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cup A_{s+1}\right|$$

$$=\left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right|+|A_{s+1}|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cap A_{s+1}\right|$$

$$=\left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right|+|A_{s+1}|-\left|\bigcup_{i=1}^{s}(A_i\cap A_{s+1})\right|$$

$$= \sum_{1\le i_1 \le s+1} |A_i| + \sum_{k=2}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right| +$$

$$\sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k} \sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le s} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{i_{s+1}}\right| + (-1)^{s}\left|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s\cap A_{s+1}\right|$$

$$= \sum_{1\le i_1 \le s+1} |A_i| + [\sum_{k=2}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right| +$$

$$\sum_{k=2}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le s} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{k-1}\cap A_{s+1}\right|] + (-1)^{s}\left|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{s+1}\right|$$

$$= \sum_{1\le i_1 \le s+1} \left|A_{i_1}\right| + \sum_{k=2}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le s+1} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right| + (-1)^{s}\left|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{s+1}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s+1} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$$

所以当 $n=s+1$ 时，结论仍成立。因此对任意 $n\in N^{+}, n\ge 2$，均可使所证等式成立。[1]

F(n)和f(n)积性等价性证明

础步是容易的，因为 $f(1)=g(1)=1$。设 $m>1$，且假设每当 $m_1 \perp m_2$ 以及 $m_1m_2<m$ 时，$f(m_1m_2)=f(m_1)f(m_2)$。如果 $m=m_1m_2$ 和 $m_1 \perp m_2$，我们有

$$g(m_1m_2)=\sum_{d\backslash m_1m_2} f(d)=\sum_{d_1\backslash m_1}\sum_{d_2\backslash m_2} f(d_1d_2)$$

和 $d_1 \perp d_2$，因为 m_1 的所有因子和 m_2 的所有因子互素。依据归纳假设，除了可能当 $d_1=m_1$ 和 $d_2=m_2$ 外，$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$；因此我们得到

$$\left(\sum_{d_1\backslash m_1} f(d_1)\sum_{d_2\backslash m_2} f(d_2)\right)-f(m_1)f(m_2)+f(m_1m_2)$$

$$=g(m_1)g(m_2)-f(m_1)f(m_2)+f(m_1m_2).$$

但是这等于 $g(m_1m_2)=g(m_1)g(m_2)$，所以 $f(m_1m_2)=f(m_1)f(m_2)$。

反之，如果 $f(m)$ 是积性的，则对应的因子上求和的函数 $g(m)=\sum_{d\backslash m} f(d)$ 总是积性的。事实上，习题33证明还是真的。因此好奇的事情和它的逆都是真实的。

莫比乌斯定义2反推定义1证明

- 证明：
- ①当$n=1$时显然
- ②当$n\neq 1$时，将n分解可以得到$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$
- 在n的所有因子中，μ值不为零的只有所有质因子次数都为1的因子，其中质因数个数为r个的因子有C_k^r个
- 那么显然有：

$$\sum_{d|n}\mu(d)=C_k^0-C_k^1+C_k^2+\ldots+(-1)^k C_k^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i$$

- 只需证明$\sum_{i=0}(-1)^i C_n^i=0\ (n\in N_+)$即可
- 二项式定理：$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i y^{n-i}$
- 令$x=-1,y=1$，代入即可得证。