

# Kryptographie mit Anwendungen

Rebecca Tiede, Lars Taube



## Inhalt

- Terminologie
- Authentizität
- Hashing
- Digitale Signatur
- Secret Sharing



# Terminologie



# Kryptographie mit Anwendungen

## Terminologie

4

### Sender und Empfänger

Ein Sender möchte einem Empfänger eine Nachricht schicken, die sicher ankommt und nicht von anderen gelesen werden kann.

### Nachricht (message M)

### Verschlüsselung (encryption E)

### Chiffretext (ciphertext C)

### Entschlüsselung (decryption D)



## Terminologie

- Kryptographie  
ist die Wissenschaft, die sich mit der Absicherung von Nachrichten beschäftigt.
- Kryptoanalyse  
ist die Kunst, Chiffretexte aufzubrechen und ihren geheimen Inhalt lesbar zu machen
- Kryptologie  
ist der Zweig der Mathematik, der Kryptographie und Kryptoanalyse umfasst





## Terminologie

- kryptographischer Algorithmus / Chiffrierung  
ist die mathematische Funktion, die zur Ver- und Entschlüsselung verwendet wird.
- Eingeschränkter Algorithmus  
Wenn die Sicherheit eines Algorithmus von der Geheimhaltung seiner Arbeitsweise abhängt, spricht man von einem Eingeschränkten Algorithmus. Sobald ein Algorithmus „versehentlich“ bekannt wird, ein neuer benutzt werden muss.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Terminologie

7

- Um das zu vermeiden, führt man Schlüssel (key K) ein: Dieser kann aus einem sehr umfangreichen Wertebereich gewählt werden, dem
- Schlüsselraum  
Bereich aller möglichen Schlüssel



# Terminologie

- Für die Verschlüsselungsfunktion ergibt sich

$$E_k(M) = C$$

$$D_k(C) = M$$

$$\rightarrow D_k(E_k(C)) = M$$

Bei Verwendung von zwei unterschiedlichen Schlüsseln zur Chiffrierung und Dechiffrierung

$$E_{k1}(M) = C$$

$$D_{k2}(C) = M$$

$$\rightarrow D_{k2}(E_{k1}(C)) = M$$

- Die Sicherheit beruht nun nicht mehr auf der Sicherheit des Algorithmus, sondern auf der der Schlüssel.





# Kryptographie mit Anwendungen

## Terminologie

9

- Ein Kryptosystem

besteht aus einem Algorithmus einschließlich aller möglichen Klartexte, Chiffretexte und Schlüssel. Neben der Geheimhaltung soll Kryptographie noch andere Ansprüche erfüllen:

- Authentizität

Empfänger soll Herkunft einer Nachricht ermitteln können, ein Eindringling sollte sich nicht als andere Person ausgeben können



## Terminologie

- Integrität

Der Empfänger sollte überprüfen können, ob die Nachricht bei Übermittlung verändert wurde, ein Eindringling sollte die echte nicht durch eine falsche Nachricht ersetzen können.

- Verbindlichkeit

Ein Sender sollte nachträglich nicht leugnen können, eine Nachricht gesendet zu haben.



# Authentifizierung



## Authentifizierung

### Authentifizierung

- Zweck: Sicherheit über Inhalt und Quelle von übertragenen Nachrichten
- Authentifizierung nur berechtigten Teilnehmern durch einen geheimen Schlüssel möglich
- „Kommunikations – System“:  
Nachrichtenübertragung und –speicherung zusammengefasst.
- Besteht aus: Sender, Empfänger und einem potentiellen Angreifer, der Nachrichten abfangen oder verfälschen will.





## Authentifizierung

In einem weiteren Szenario taucht noch eine vierte Person auf, ein sog. Vermittler, der Schutz vor dem Angreifer bieten soll.

Kommunikation über öffentlichen Kanal

=> Bedrohung der Authentifizierung, wenn Angreifer im System Nachrichten verfälschen oder falsche in den Kanal leiten kann

In geheimen Systemen: Angreifer passiv, „lauscht“

Authentifizierungssystem: Angreifer aktiv, verfälscht Nachrichten



## Authentifizierung

### Klassifizierung von Authentifizierungssystemen

Betrachtung zweier Kriterien:

- die Beziehung zwischen Authentifizierung und Sicherheit
  - MIT und OHNE Sicherheit
- der Rahmen / das System der Sicherheitsanalyse
  - „uneingeschränkte“ Sicherheit: Feind mit unendlicher Rechenpower
  - „berechenbare“ Sicherheit: Feind mit beschränkter Rechenpower



# Kryptographie mit Anwendungen

## Authentifizierung

15

### Authentifizierung mit Vermittler

### Basismodell von Authentifizierung:

Sender und Empfänger vertrauenswürdig, teilen  
Schlüssel, kryptographisch nicht zu unterscheiden,  
Angreifer ein Außenseiter



# Kryptographie mit Anwendungen

## Authentifizierung

16

Zur Unterscheidung: unterschiedliche Schlüssel,  
nicht vertrauenswürdig, vierte unvoreingenommene  
Person, der Vermittler, hat alle Informationen über  
die Schlüssel und vertrauenswürdig

„Schlüsselverteilungsphase“: Schlüsselwahl nach  
bestimmten Bedingungen, Sender verschlüsselt damit  
seinen Klartext und überträgt ihn.

Zweifel des Empfängers gegenüber dem Sender  
werden durch den Vermittler ausgeräumt.





# Hashing



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

18

Eine Hashfunktion  $h$  ist eine Einweg-Funktion, die einen Eingabe-String variabler Länge in einen (i. d. R. kürzeren) Ausgabe-String (Hashwert) umwandelt.

Einzigster Parameter Nachricht selbst

einfache Berechnung, schwierige Umkehrung



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

19

### Geforderte Eigenschaften:

- sie soll eine komplexe Funktion auf alle Bits der Nachricht sein
- unterschiedliche Nachrichten sollen durch sie auf unterschiedliche Werte abgebildet werden -> Kollisionsresistenz
- sie soll leicht zu berechnen, aber schwer zurückzurechnen sein



## Hashing

Klassifizierung in zwei Klassen:

### I. Starke Hashfunktion mit Eigenschaften

i. h kann auf jede Nachricht jeder Größe angewandt werden

ii. h gibt einen Wert fester Länge zurück

iii.  $h(M)$  ist leicht anzuwenden

iv. es ist rechnerisch unmöglich, zwei Nachrichten  $M_1, M_2$  zu finden, sodass

$$h(M_1) = h(M_2)$$





## 2 Schwache Hashfunktion mit Eigenschaften

(i) – (iii)

(iv') es ist rechnerisch „schwer“ möglich, bei zufällig gewählter Nachricht  $M$  eine Nachricht  $M'$  zu finden, sodass  $h(M) = h(M')$



### Einsatz von Hashfunktionen

- Überprüfung der Echtheit eines Dokuments, anhand seines Hashwertes.
- Als Prüfsumme für Downloads, mit öffentlicher Hashfunktion.
- Zur Authentifizierung des Senders eines Dokumentes mit einer Hashfunktion, die nur Sender und Empfänger bekannt ist.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

23

### Hashing mit Hilfe von Blockchiffren

Kurz: Was sind Blockchiffren?

Unter einer Blockchiffre versteht man das Verschlüsseln einer Nachricht durch Anwendung des Verschlüsselungsalgorithmus auf ihre einzelnen gleich großen Blöcke.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

24

Hashing mit Blockchiffren verläuft folgendermaßen:

- E ein willkürlich gewählter (Verschlüsselungs-) Algorithmus,
- M eine Nachricht,
- K ein Schlüssel und

Dann ist die Verschlüsselung von M mit dem Schlüssel K und den Algorithmus E benutzend:

$E(K, M)$

Beispiel: Rabins Scheme





# Hashing

M wird in t gleichgroße Blöcke  $M_1, M_2, \dots, M_t$  aufgeteilt, deren Länge der des Verschlüsselungs-Algorithmus entspricht.

Der Hashwert wird durch folgende Rechnungen ermittelt:

$H_0 = IV$  mit IV als Initialisierungsvektor

$H_i = E_k (M_i, H_{i-1}), i = 1, 2, \dots, t$

$H(M) = H_t$

$M_i$  ist ein Nachrichtenblock,  $H_i$  Zwischenergebnis

der Hashfunktion (hier als Schlüssel für den jeweils nächsten Wert benutzt) und  $H(M)$  ist der Hashwert.



## Hashing

Gegen Hashfunktionen gibt es zwei (Brute-Force-) Angriffe:

1. Finde bei gegebenem Hashwert einer Nachricht  $H(M)$  ein anderes Dokument  $M'$ , sodass  $H(M) = H(M')$ .
2. Finde zwei zufällige Nachrichten  $M$  und  $M'$ , sodass  $H(M) = H(M')$ .

Man spricht von „Geburtstagsangriff“ oder auch Geburtstags–Attacke



## Hashing

### Geburtstags–Attacke

Idee beruht auf bekanntem Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie, dem Geburtstags-Paradoxon.

Frage 1: Wie viele Leute müssen in einem Raum sein, so dass mit hoher Wahrscheinlichkeit ( $>0,5$ ) eine Person heute Geburtstag hat?

Frage 2: Wie viele Leute müssen in einem Raum sein, so dass mit hoher Wahrscheinlichkeit ( $>0,5$ ) mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

28

- Zu Frage 1:  
Sei  $g_i$  der Geburtstag von Person  $i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} P(g_1 = x \vee g_2 = x \vee \dots \vee g_n = x) \\ = 1 - P(g_1 \neq x \wedge g_2 \neq x \wedge \dots \wedge g_n \neq x) \\ = 1 - (364/365)^n > 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (364/365)^n > 0.5 \\ \Rightarrow n \geq 253 \end{aligned}$$





# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

29

- Zu Frage 2:  
Gesucht ist die Zahl  $k$  der Personen, so dass im Mittel mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben:

$$\begin{aligned} P(g_1 = g_2 \vee g_1 = g_2 \vee \dots \vee g_1 = g_k) \\ = 1 - P(g_1 \neq g_2 \wedge g_1 \neq g_2 \wedge \dots \wedge g_1 \neq g_k) \\ = 1 - (364/365)^{k(k-1)/2} > 0.5 \end{aligned}$$



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

30

Setzt man nun  $k(k-1)/2 = n$ , so erhält man

$$k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} = 22.98 \Rightarrow k \geq 23$$

Auf unsere Hashfunktion bezogen bedeutet das:



## Hashing

Zu 1.)  $n = 2^{m-1}$ ,  $m$  ist die Länge des Hashwertes

Zu 2.)  $k \approx \sqrt{2n}$ , d.h.  $k \approx \sqrt{2 \cdot 2^{m-1}} = \sqrt{2^m} = 2^{m/2}$

=> jeder Hashalgorithmus, der einen Wert der Länge 64 Bit erzeugt, gilt als unsicher, da die Zeitkomplexität der Geburtstags-Attacke hier bei  $2^{32}$  liegt.

=> der erzeugte Hashwert einer Hashfunktion sollte eine Länge von ungefähr 128 Bit haben, um eine Geburtstags-Attacke zu vereiteln.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

32

Nun ein Hashalgorithmus, der in der Praxis für digitale Signaturen verwendet wird und der als sicher gilt, weil er einen Hashwert mit einer Länge von 160 Bit erzeugt.





# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

33

### Secure Hash Algorithm (SHA)

- Hänge an die Nachricht eine 1 und dann so viele 0en, dass die Länge einem Vielfachen von  $512 - 64$  Bit entspricht.
- Hänge eine 64-Bit-Darstellung der Nachrichtenlänge (vor Auffüllen) an.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

34

- Fünf Variablen der Länge 32 Bit werden initialisiert:

A=0x67452301

B=0xefcdab89

C=0x98badcfe

D=0x10325476

E=0xc3d2e1f0

a = A

b = B

c = C

d = D

e = E



# Hashing

Die Hauptschleife besteht aus vier Runden mit je 20 Operationen.

Jede Operation führt mit dreien der Werte a, b, c, d, e eine nichtlineare Funktion durch und anschließend Verschiebung und Addition.

Die nichtlinearen Funktionen:

$$f_t(X, Y, Z) = (X \wedge Y) \vee ((X) \wedge Z) \quad \text{für } t = 0 \text{ bis } 19$$

$$f_t(X, Y, Z) = X \oplus Y \oplus Z \quad \text{für } t = 20 \text{ bis } 39$$

$$f_t(X, Y, Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad \text{für } t = 40 \text{ bis } 59$$

$$f_t(X, Y, Z) = X \oplus Y \oplus Z \quad \text{für } t = 60 \text{ bis } 79$$



# Kryptographie mit Anwendungen

## Hashing

36

- Vier Konstanten werden benutzt:

$$K_t = 0x5a827999 \text{ für } t = 0 \text{ bis } 19 // \frac{2^2}{4}$$

$$K_t = 0x6ed9eba1 \text{ für } t = 20 \text{ bis } 39 // \frac{3^2}{4}$$

$$K_t = 0x8f1bbcdc \text{ für } t = 40 \text{ bis } 59 // \frac{5^2}{4}$$

$$K_t = 0xca62c1d6 \text{ für } t = 60 \text{ bis } 79 // \frac{10^2}{4}$$





# Hashing

Nachrichtenblock wird von 16 32-Bit-Wörtern ( $M_0 - M_{15}$ ) nun in 80 32-Bit-Wörter umgewandelt ( $W_0 - W_{79}$ ):

$$W_t = M_t \text{ für } t = 0 \text{ bis } 15$$

$$W_t = (W_{t-3} + W_{t-8} + W_{t-14} + W_{t-16}) \lll 1 \text{ für } t = 16 \text{ bis } 79$$

t sei Operationsnummer, die von 0 – 79 läuft

$W_t$  stellt den t-ten Teilblock der expandierten Nachricht dar

$\lll s$  steht für eine zirkuläre Linksverschiebung um s Bit



## Hashing

Für  $t = 0$  bis 79

$$\text{TEMP} = (a \lll 5) + f_t(b, c, d) + e + W_t + K_t$$

$$e = d$$

$$d = c$$

$$c = b \lll 30$$

$$b = a$$

$$a = \text{TEMP}$$

Schließlich werden  $a, b, c, d, e$  zu  $A, B, C, D, E$  addiert und man fährt mit dem nächsten Datenblock fort.

Die Ausgabe ist die Konkatenierung von  $A, B, C, D, E$ .



# Digitale Signatur



## Digitale Signatur

### Was ist eine Digitale Signatur?

- Eine Digitale Signatur soll genau das selbe darstellen wie eine handschriftliche Signatur bzw, Unterschrift.
- Die Digitale Signatur sollte folgende Bestandteile umfassen:
  - Identität des Signierers
  - das Dokument
  - der Zeitpunkt der Signierung





## Digitale Signatur

- Die digitale Signatur sollte folgendes leisten:
  - Einzigartig:  
Eine Signatur kann nur vom Besitzer erzeugt werden und reflektiert den Inhalt es Dokuments
  - Fälschungssicher
  - Einfach zu erstellen und zu verifizieren
  - Unleugbarkeit des Ursprungs der Signatur
- Der Algorithmus zur Verifikation muss "öffentlich" sein.



## Digitale Signatur

### Asymmetrische Verschlüsselung

Der Unterschied zu symmetrischer Verschlüsselung besteht darin, dass es anstelle eines Schlüssels ein Schlüsselpaar gibt: Einen privaten und einen öffentlichen (public) Schlüssel.

- Asymmetrische Verschlüsselung löst das Schlüsselverteilungsproblem.
- Bei symmetrischer Verschlüsselung ist es schwierig verschlüsselte Daten mit verschiedenen Leuten auszutauschen. Wenn sie denselben Schlüssel an mehrere Leute geben, wird das Verfahren unsicher.
- Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren sind langsamer als symmetrische.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

43

### Signatur erstellen

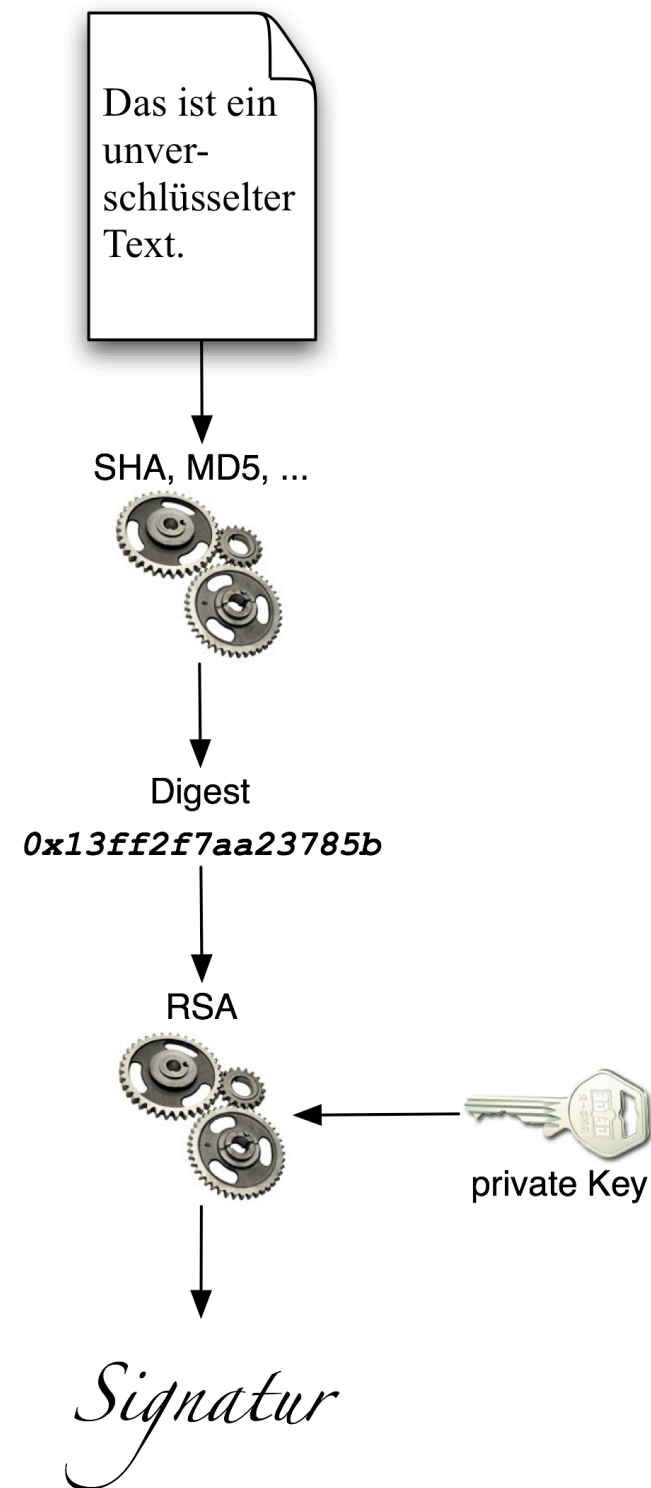
- Der Sender erstellt den Digest des Textes (SHA, MD5).
- Er verschlüsselt den Digest mit seinem privaten Schlüssel (RSA).
- Dann sendet er den Text und die Signatur.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

44





## Digitale Signatur

### Signatur verifizieren

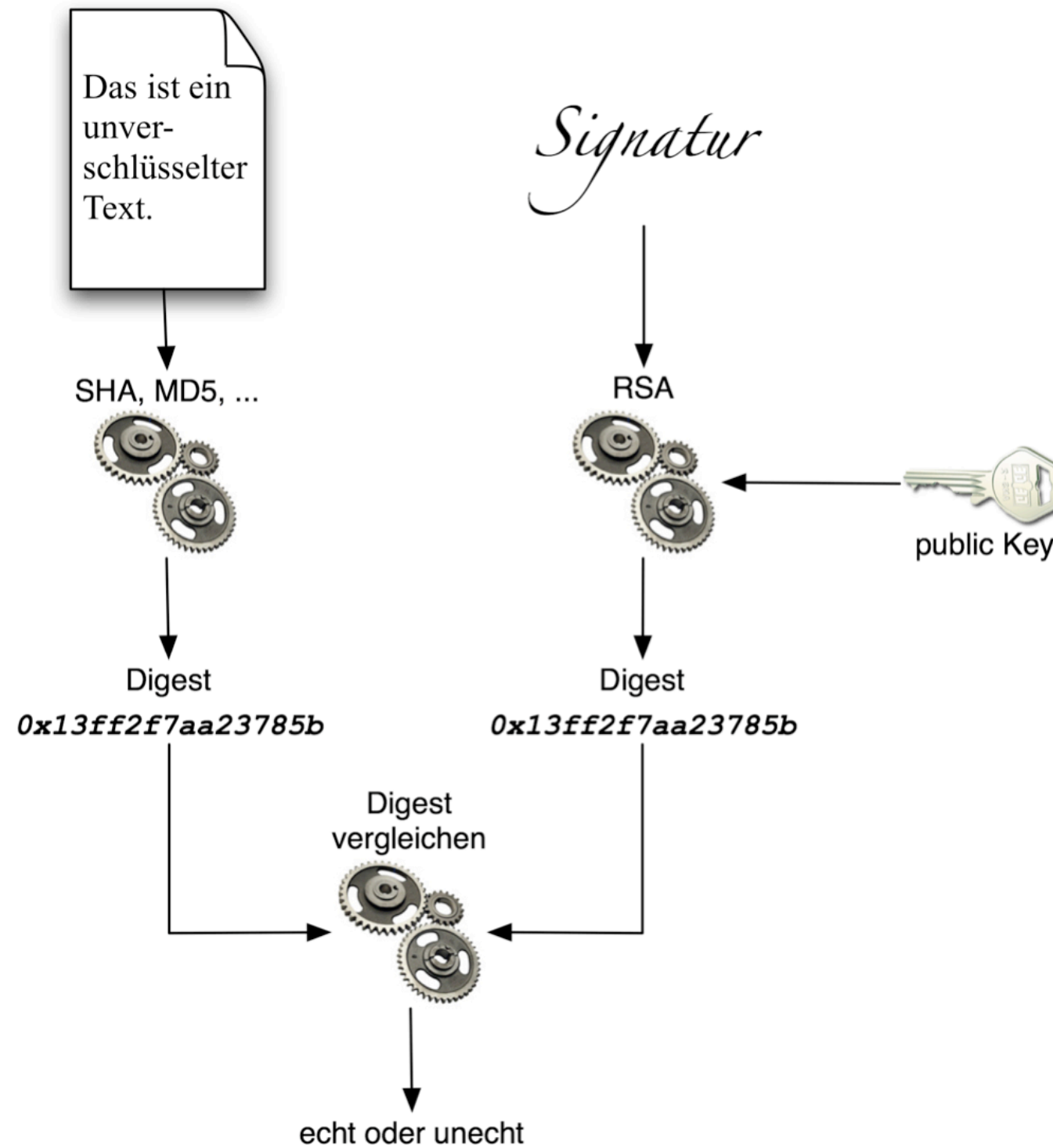
- Der Empfänger bildet den Digest des Textes nach demselben Verfahren des Senders.
- Er entschlüsselt die Signatur mit dem öffentlichen Schlüssel des Senders.
- Er vergleicht den Digest, den er selbst erstellt hat mit dem aus der Signatur des Senders.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

46



# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

47

### RSA

Dieser Algorithmus aus dem Jahr 1977 ist nach seinen Erfindern Ronald L. Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman benannt.



# Digitale Signatur

Der Algorithmus basiert auf einer "Einwegfunktion" mit "Falttür". Unter einer "Einwegfunktion" versteht man eine Funktion die sich in eine Richtung einfach berechnen lässt, in die andere Richtung aber nur sehr schwierig (z.B.: Zahnpasta aus der Tube drücken ;-). Man kann zwei Zahlen sehr leicht miteinander Multiplizieren und erhält ein Ergebnis. Dieses Ergebnis kann man aber nur sehr schwer wieder in seine Faktoren zerlegen. Mit Hilfe einer "Falttür" d.h. einer Zusatzinformation kann man die schwierige Richtung auch berechnen, z.B.: Brief in einen Briefkasten werfen (der Briefträger kann ihn leicht wieder herausholen).





# Digitale Signatur

## Schlüsselgenerierung:

- Wähle zufällig und stochastisch unabhängig zwei Primzahlen  $p \neq q$ , die etwa gleich lang sein sollten und berechne deren Produkt  $N = p \cdot q$ .
- Berechne  $\varphi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ , wobei  $\varphi$  für die Eulersche  $\varphi$ -Funktion steht.
- Wähle eine Zahl  $e > 1$ , die teilerfremd zu  $\varphi(N)$  ist.
- Berechne die Zahl  $d$  so, dass das Produkt  $e \cdot d$  kongruent 1 bezüglich des "Modulus"  $\varphi(N)$  ist, dass also  $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$  gilt.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

50

- Die Zahlen  $N$  und  $e$  werden veröffentlicht (öffentlicher Schlüssel)
- $d$ ,  $p$  und  $q$  und damit auch  $\varphi(N)$  bilden den geheimen Schlüssel (secret key)



## Digitale Signatur

### Verschlüsseln von Nachrichten

Um eine Nachricht  $M$  zu verschlüsseln, verwendet der Absender die Formel

$$C \equiv M^e \pmod{N}$$

und erhält so aus dem Klartext  $M$  den Geheimtext  $C$ .



## Digitale Signatur

### Entschlüsseln von Nachrichten

Der Geheimtext C kann durch modulare Exponentiation wieder entschlüsselt werden. Der Nachrichteneempfänger benutzt die Formel:

$$M \equiv C^d \pmod{N}$$

mit den nur ihm bekannten Werten d und N.





# Kryptographie mit Anwendungen

## Digitale Signatur

53

Die Sicherheit basiert darauf, dass der Angreifer  $d$  nicht kennt. Um  $d$  zu berechnen benötigt er  $\varphi(N)$ .  $\varphi(N)$  ist aber für grosse Zahlen nicht effizient berechenbar.



# Secret Sharing



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

55

- Was ist Secret Sharing?

Als Secret Sharing bezeichnet man das Verfahren, einen Schlüssel  $S$  in  $n$  Teilschlüssel  $s_1, \dots, s_n$  aufzuteilen.

- Wo wird Secret Sharing benutzt?





## Secret Sharing

- Piraten haben ihre Schatzkarten zerschnitten und untereinander aufgeteilt, dadurch waren Sie nur gemeinsam in der Lage den Schatz wieder zu finden.





# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

57

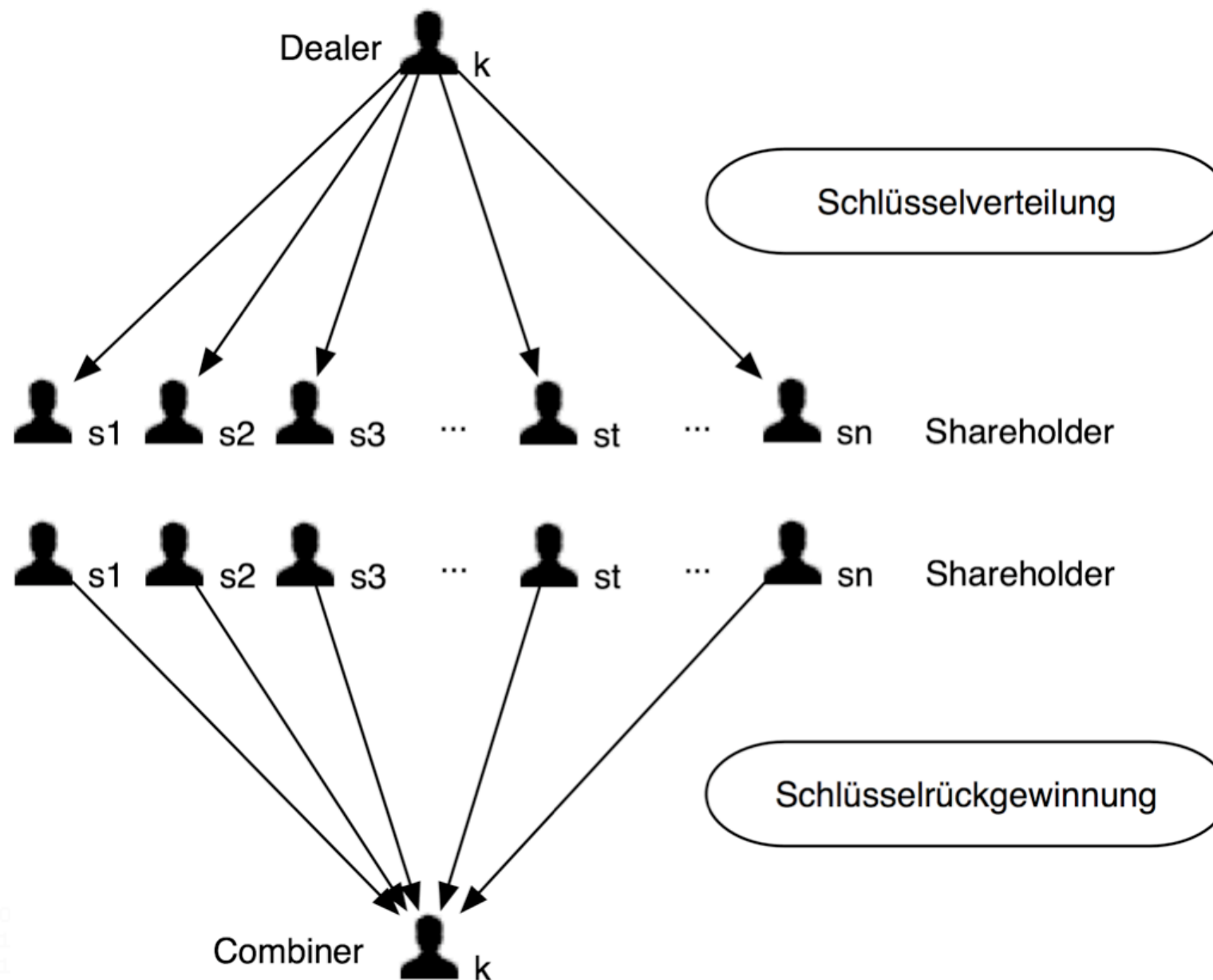
weiter Beispiele:

- Eine Atombombe kann nur von mehreren Leuten gleichzeitig gestartet werden.
- Einen wichtigen Tresor in einer Bank können nur zwei Angestellte gleichzeitig öffnen.



## Secret Sharing

### Modell:



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

59

Es gelten folgende Voraussetzungen:

- Der Dealer ist eine vertrauenswürdige Institution.
- Jeder Teilnehmer hat einen sicheren und geheimen Kommunikationsweg, über diesen gelangen die Keys vom Dealer zu den Shareholdern.



## Secret Sharing

Es gibt Verfahren mit folgenden Eigenschaften:

- perfektes Secret Sharing:  
Als perfektes Secret Sharing bezeichnet man ein Verfahren, bei dem es nicht möglich ist mit weniger als  $t$ -Teilschlüsseln auf den Schlüssel  $S$  zu schließen.
- robustes Secret Sharing:  
Unter robust versteht man ein Verfahren, welches selbst durch verfälschte oder zurückgehaltene Teilschlüssel noch sicher bleibt.
- demokratisches oder autokratisches Verfahren:  
Damit bezeichnet man ein Verfahren ohne oder mit Geber.





# Secret Sharing

## Threshold Secret Sharing bzw. Schwellwert Geheimnis Aufteilung

- Der Schwellwert bezeichnet die Anzahl an Shareholdern, ab der man den Schlüssel wieder herstellen kann.
- Es gibt Verfahren bei denen man alle Teilschlüssel braucht. Diese nennt man  $(n,n)$ -Verfahren.
- Es gibt aber auch Verfahren, bei denen ein kleinerer Schwellwert  $t$  ausreicht. Hier spricht man von  $(t,n)$ -Verfahren.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

62

### Ein einfaches Beispiel für ein $(n,n)$ -Verfahren

- Der Schlüssel ist eine Summe und die Teilschlüssel bestehen aus den Summanden.
- Man kann den Schlüssel wieder herstellen, indem man die Summanden addiert.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

63

- Dieses Verfahren ist perfekt, weil man mit  $t-1$  Summanden nicht auf die richtige Summe kommt.
- Das Verfahren ist aber nicht robust, weil einer der Shareholder einen falschen Summanden angeben kann. Dadurch kommt man zu einem falschen Schlüssel. Für den betrügerischen Shareholder ist es nun ein Leichtes, aus der falschen Summe die richtige zu berechnen.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

64

Aus diesem  $(n,n)$ -Verfahren kann man leicht ein  $(t,n)$ -Verfahren machen.

Die einzelnen Shareholder teilen ihren Summanden in  $j$  weitere Summanden auf und verteilen diese  $j$  Summanden auf  $j$  Shareholder, denen Sie vertrauen.





## Secret Sharing

Beispiel für ein (2,3)-Verfahren:

$$S=30, \quad s_1=8, \quad s_2=13, \quad s_3=9 \quad \Rightarrow \quad 8+13+9=30$$

Der Shareholder mit dem Teilschlüssel  $s_2$  teilt seinen Summanden in 6 und 7 auf und gibt jeweils einen von den beiden an die anderen beiden Shareholder. Diese können nun durch die Addition ihrer beiden Schlüssel und den Schlüssel von Shareholder 2 die Summe bilden:

$$8+9+6+7=30$$

Einer alleine kann die Summe aber immer noch nicht bilden.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

66

### Das Blakley Schema

Blakley's im Jahre 1979 vorgestelltes Schwellwert Schema beruht auf geometrischer Konstruktion und ist ein  $(t,n)$  Schema.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

67

### Schlüsselverteilung:

- Der Dealer wählt einen zufälligen Punkt in einem Vektorraum der Dimension  $t$  über dem Ganzzahlkörper  $\mathbb{Z}_P$ .
- Ein Untervektorraum der Dimension  $(t-1)$  wird Hyperebene genannt. Jedem Shareholder wird eine Hyperebene zugeteilt.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

68

- Man braucht zur Rekonstruktion des Schlüssels genau  $t$  Hyperebenen.
- Dieses Verfahren ist nicht perfekt. Man kann zwar nicht mit  $t-1$  Teilschlüsseln auf das Ergebnis schließen, aber man kann es enorm einschränken, denn der Punkt muss irgendwo auf den  $t-1$  Hyperebenen liegen.

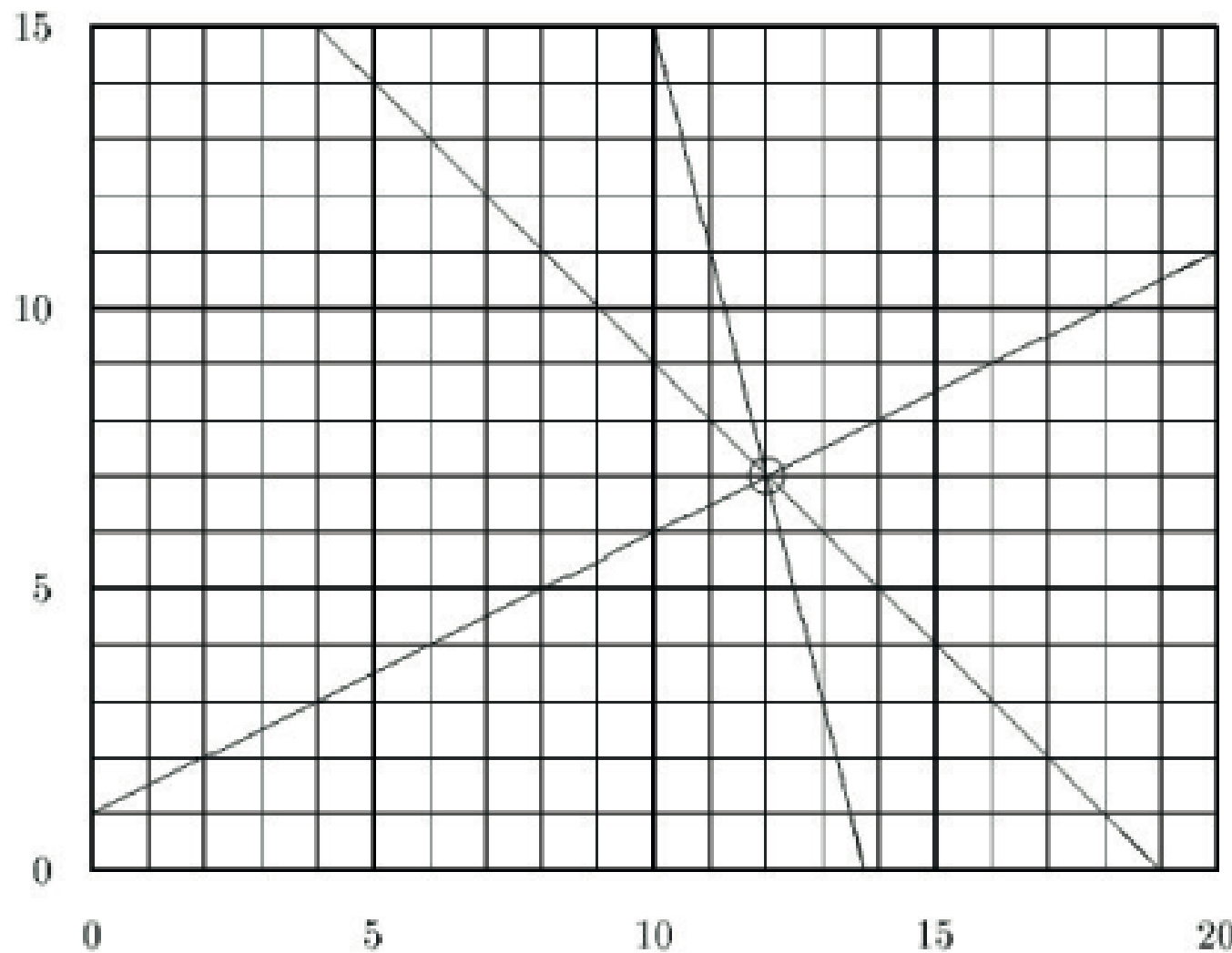




# Secret Sharing

Beispiel für ein (2, 3) Blakley Schema:

Das Geheimnis ist der Punkt (12,7). Zur Rekonstruktion des Geheimnisses sind mindestens 2 Geraden welche sich in diesem Punkt schneiden notwendig.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

70

### Das Shamir Schema

Das 1979 von Adi Shamir vorgestellte Schema ist ein  $(t,n)$  Schema und basiert auf Polynominterpolation.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

71

### Schlüsselverteilung:

- Der Dealer wählt eine Primzahl  $p$  für die gilt  $p > k$  und  $p > n$
- Der Dealer wählt  $n$  verschiedene Punkte  $x_i$
- Der Dealer bestimmt ein Polynom  $P(x)$  vom Grad  $t-1$  mit Koeffizienten  $a_i$  aus  $\mathbb{Z}$
- Das Geheimnis ist  $k = P(0)$   
Die Shares sind  $s_i = P(x_i)$  und werden an die  $n$  Shareholder verteilt.



# Kryptographie mit Anwendungen

## Secret Sharing

72

### Schlüsselrückgewinnung:

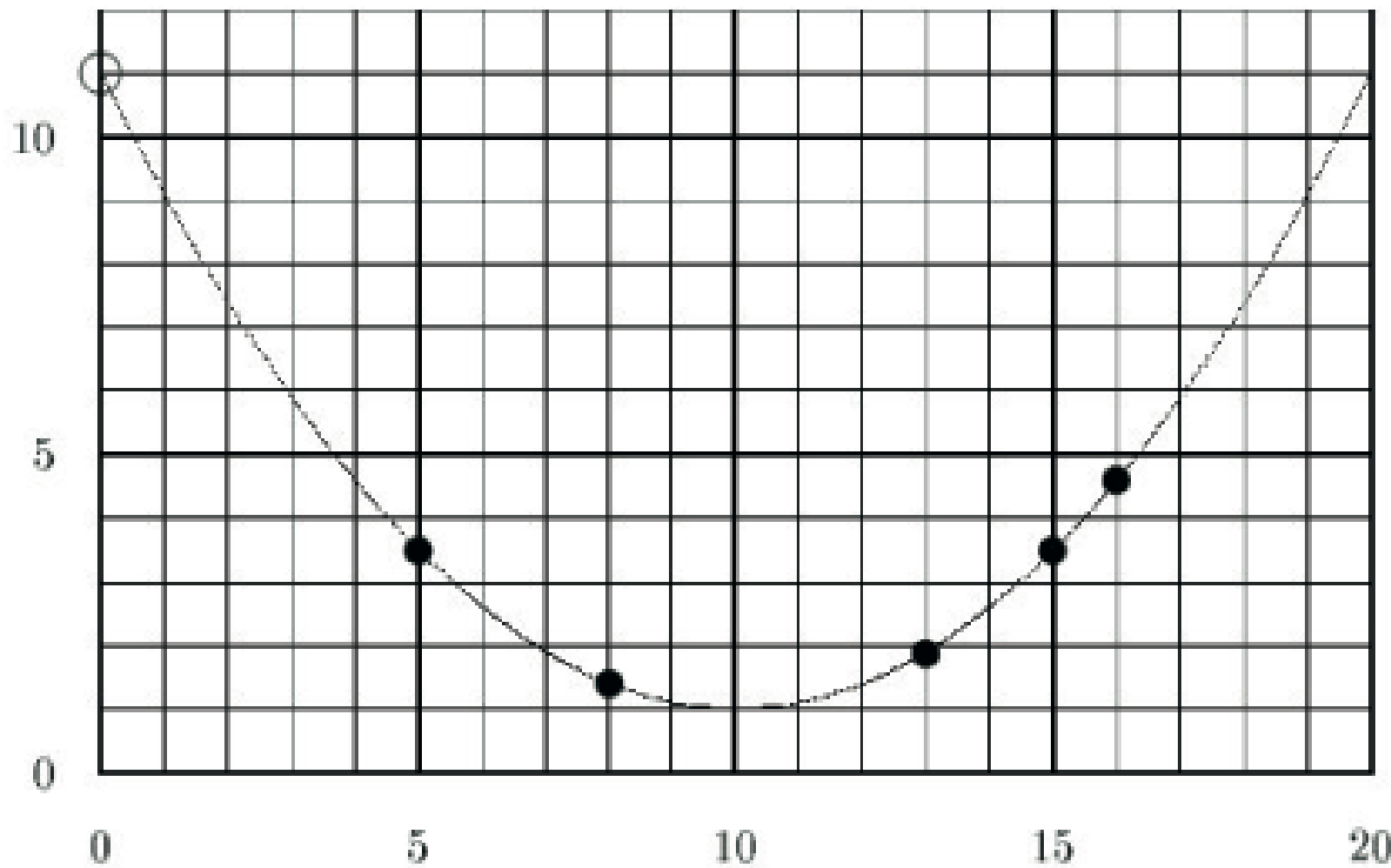
- $t$  der  $n$  Shareholder geben ihre Shares dem Combiner
- Der Combiner versucht das Polynom wieder herzustellen





# Secret Sharing

Mit Hilfe der Lagrange Interpolation lässt sich  $k$  aus  $t$  Punkten bei einem Polynom vom Grad  $t-1$  berechnen.



## Secret Sharing

- Wenn man  $t$  oder mehr Shareholder hat, kann man den Schlüssel wieder rekonstruieren, daher gilt das Verfahren als perfekt.
- Wenn ein Shareholder aber einen falschen Punkt angibt, dann kommt es zu einem falschen Schlüssel, das Schema ist also nicht robust.

Um das Verfahren robust zu machen kann man den einzelnen Shareholdern noch einen Checkvektor zum überprüfen der Punkte der anderen Shareholder mitgeben. Dieser darf aber nicht auf den richtigen Schlüssel schließen lassen.



# ENDE

