UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

LAGRANGEPUNKT I SOLSYSTEMET 2019

Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi
ITE1844, 2019V
Kristoffer Johan Garmann

UNIVERSITETET I TROMSØ

INNHOLDSFORTEGNELSE

Figurliste ... 1
Tall ... 1
1 Innledning ... 2
1.1 Problemstillling ... 2
1.2 Avgrensing ... 2
2 Lagrangepunkt ... 2
2.1 Banemekanikk ... 3
2.2 L1-L2 ... 3
2.3 L3 ... 4
2.4 L4-L5 ... 4
2.5 Stabilitet ... 4
2.6 Lagrangepunkt i solsystemet ... 5
2.6.1 Jorda-Månen ... 5
2.6.2 Sola-Jorda ... 5
2.6.3 Sola-Jupiter ... 6
2.6.4 Sola-Mars ... 6
3 Utnyttelse av lagrangepunkt innen romfart ... 6
4 Diskusjon ... 7
5 Konklusjon ... 8

FIGURLISTE

Figur 1: Lagrangepunktenes plassering ... 2
Figur 2: Banehastighet ved forskjellig radius ... 3
Figur 3: Gravitasjonskrefter mellom jorda og månen ... 4
Figur 4: Jupiters trojanske asteroider(NASA) ... 6
Figur 5: Bilde av Narvik, 17. mai 2019. (NASA, DSCOVR) ... 7
Figur 6: Visualisering av min egen forenkling fra tre til to masser. ... 8
Figur 7: Visualisering av gravitasjonskraft i L4 ... 8

TALL

Avstand fra jorda til månen	$384{,}400\ km$
Gravitasjonskonstanten	$6.67408 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 \mathrm{kg}^{-1} s^{-2}$
Jordas masse	$5.97224 \times 10^{24} kg$
Månens masse	$7.3477 \times 10^{22} kg$

1 INNLEDNING

1.1 PROBLEMSTILLLING

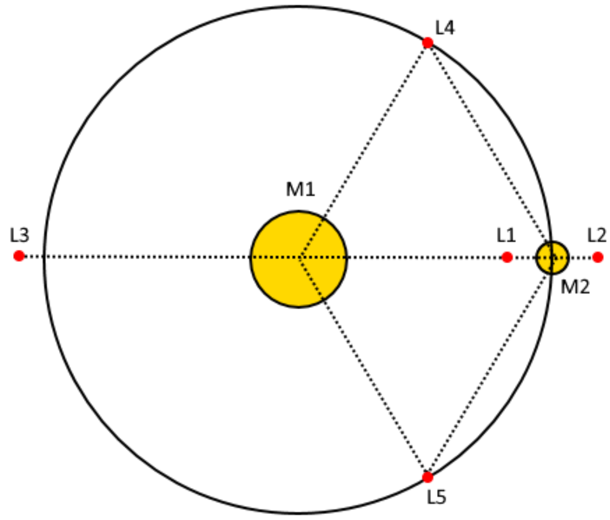
Målet med rapporten er å lære nok om lagrangepunkt til å kunne forklare hva lagrangepunkt er og hvilken betydning de har i romfart til en person uten astronomisk faglig bakgrunn.

1.2 AVGRENSING

Etter en grundig gjennomgang av kildene og noen forsøk har jeg kommet frem til at jeg ikke kommer til å forstå matematikken rundt lagrangepunktene i et system *godt nok* til å kunne videreformidle noe matematisk utover forenklede prinsipper. Det bør heller ikke være nødvendig for å oppnå målet med rapporten.

2 LAGRANGEPUNKT

I et system med to masser som går i bane rundt hverandre vil det oppstå områder hvor summen av gravitasjonskreftene fra begge massene og sentrifugalkraften som virker på en ubetydelig masse, for eksempel en satellitt, vil holde objektet i ro sett fra massesystemet. Dette kalles lagrangepunkt, oppkalt etter Joseph Louis Lagrange(1736-1813). I et system begrenset til to masser i bane rundt hverandre finnes det fem slike punkter hvor de tre første ble oppdaget av Leonard Euler i 1767 (Euler, 1767), mens de to siste ble oppdaget av Lagrange i 1772 (Lagrange, 1772). Plasseringen av disse punktene vises i **Error! Reference source not found.**. Begge massene og alle punktene vil beholde sin relative plassering når systemet roterer om det felles massesenteret til M1 og M2, kalt barysenter.



Figur 1: Lagrangepunktenes plassering

De tre første lagrangepunktene ligger på en rett linje som går gjennom massesenteret til begge massene. Det første punktet ligger mellom massene nærmere $M2$. Det andre punktet ligger på baksiden av den mindre massen sett fra barysenteret. På den motsatte siden av den største massen finner man det tredje punktet. De to siste punktene finner man omtrentlig ved å lage en likebent trekant av avstanden mellom massene og speiler denne.

Dersom masseforholdet $\frac{M1}{M2} > 24.96$ vil $L4$ og $L5$ være stabile punkt (Westra, 2017). Det vil si at dersom et objekt på dette punktet forstyrres litt vil det etter hvert bevege seg tilbake til utgangspunktet. $L1$-$L3$ er ustabile og dersom et objekt på disse punktene forstyrres vil det fortsette å bevege seg bort fra punktet.

Som utgangspunkt for resten av rapporten antar vi at masseforholdet alltid er over 24.96 og at omløpsbanen til $M2$ er en perfekt sirkel slik som i Figur 1.

2.1 Banemekanikk

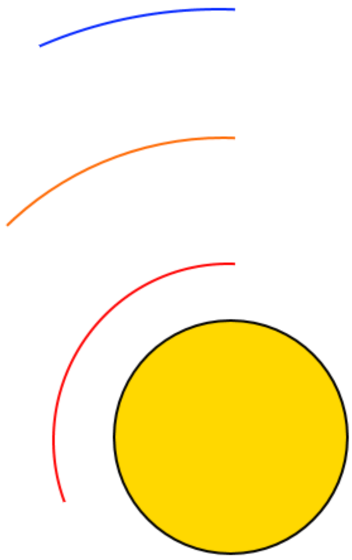
For å illustrere hva som gjør lagrangepunktene spesielle må man vite litt om banemekanikk. For en satellitt som går i en sirkulær bane rundt en planet(eller annet himmellegeme) kan man finne banehastigheten ved formelen(1)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{1}$$

Banehastigheten er lik kvadratroten av gravitasjonskonstanten(G) ganger massen(M) til massen man går i bane rundt delt på radiusen(r). Radiusen er avstanden mellom planetens og satellittens massesentre. Banehastigheten til en satellitt rundt en gitt planet er derfor kun avhengig av radiusen. Banehastigheten avtar når man beveger seg lenger unna planeten. I Figur 2 er dette illustrert ved tre banehøyder med en lengde som representerer banehastighet.

Man kan aldri få lik vinkelhastighet(ω) med ulik radius i dette systemet med kun en stor masse. Det kan man oppnå i et system med to masser som går i bane rundt hverandre, og det er en av egenskapene som gjør lagrangepunkt spesielle.

For å beskrive de fem punktene bruker jeg jorda og månen som eksempel.



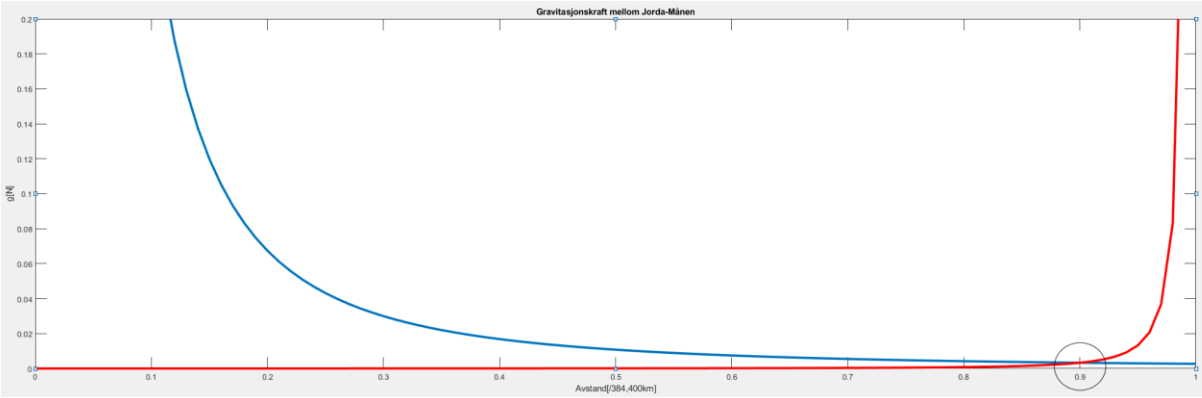
Figur 2: Banehastighet ved forskjellig radius

2.2 L1-L2

Det første lagrangepunktet ligger mellom jorda og månen. Dette punktet vil alltid ligge på en rett linje mellom jorda og månen. Ved å bruke formelen(2) for jorda i retning månen og for månen i retning jorda kan man finne et punkt hvor gravitasjonskraften fra månen og jorda har lik størrelse men motsatt retning.

$$F = \frac{GM}{r^2} \tag{2}$$

I Figur 3 under plottes gravitasjonskreftene og man kan se at krysningspunktet ligger på ca 0.9 av avstanden mellom jorda og månen. Dette er det nøytrale gravitasjonspunktet, og dette ville vært L1 dersom systemet vårt ikke hadde vært roterende(dette punktet blir ofte feilaktig presentert som L1 i en del kilder på internett).



Figur 3: Gravitasjonskrefter mellom jorda og månen

Når systemet roterer må man kompensere for sentripetalkraften og corioliseffekten, og L1 ligger derfor litt nærmere jorda enn det nøytrale gravitasjonspunktet. Uten å gå noe nærmere inn på det matematiske beviset (Cornish, 1998) så kan man, ved den forenklingen vi allerede har gjort, finne avstanden fra månen(r) til både L1 og L2 ved formelen(3)

$$r = R\sqrt[3]{\frac{M_m}{M_j}} \tag{3}$$

Ved hjelp av avstanden mellom jorda og månen R og deres respektive masser, M_j og M_m finner vi at L1 er på ca 0.84 ganger avstanden fra jorda til månen og L2 er tilsvarende 1.16 ganger avstanden på samme linje. L1 og L2 har samme avstand fra månen i dette forenklede tilfellet, men dette gjelder ikke for alle systemer.

Som vist i 2.1 skal man forvente at en satellitt i L1 hadde høyere banehastighet enn månen og kortere omløpstid, mens i L2 vil den ha lengre omløpstid og lavere banehastighet. Summen av kreftene i lagrangepunktene gjør likevel at et objekt som holder seg der vil få samme omløpstid som månen og da holde seg direkte mellom Jorda og månen(L1) eller bak månen(L2).

2.3 L3

L3 ligger 180˚ fra månen på motsatt side av Jorda, på linje med L1 og L2, litt innenfor månens bane. Om punktet er innenfor eller utenfor den minste massens bane kan variere.

2.4 L4-L5

De to siste lagrangepunktene finner man ved å lage en likebent trekant med avstanden mellom jorda og månen som base. Toppen av denne trekanten og dens speilbilde er L4 og L5, hvor L4 er foran månen, mens L5 er bak. I disse punktene vil summen av gravitasjonskreftene fra jorda og månen direkte motvirke sentrifugalkraften på en masse og massen vil holde seg i ro relativt til jorda og månen.

2.5 Stabilitet

De tre første lagrangepunktene er såkalte salpunkter (Cornish, 1998). Disse er ustabile og en liten forstyrrelse som ikke er i baneretning vil føre en masse ut av punktet. Det kreves derimot ikke mye energi for å motvirke disse forstyrrelsene. I en rapport fra 2011 skriver Craig E. Roberts at alle tre satellittene NASA hadde i bane omkring sola-Jordas L1-punkt brukte under 1 m/s i året på å holde posisjonen (Roberts, 2011). Satellitter som kaller disse tre punktene sirkler vanligvis rundt punktene i det som kalles en Lissajousbane, eller en halobane(gloriebane). Lissajousbaner er baner som tilsynelatende går i bane rundt et lagrangepunkt, men som i realiteten er en varierende bane rundt barysenteret til de to store massene. Disse ser ut som sirkler eller ellipser som står vinkelrett på linja dannet av L1-L2. Disse er periodiske, men også ustabile så det kreves fremdeles fremdriftskraft for å holde posisjonen. Halobanen er en lissajousbane med tilnærmet perfekt sirkelform.

De to siste punktene, L4 og L5, er derimot stabile. Det vil si at en masse i et av disse punktene vil føres tilbake til punktet etter det opplever en liten forstyrrelse.

2.6 LAGRANGEPUNKT I SOLSYSTEMET

Det finnes flere interessante lagrangepunkt i solsystemet vårt. Disse kan være interessante i både astronomisk forstand og med tanke på romfart.

2.6.1 Jorda-Månen

L1-punktet er en strategisk plass å plassere en mellomstasjon for videre utforskning av månen. Her kan man alltid ha radiokontakt med både jorda og månen. Skal man kommunisere med baksiden av månen kan det være hensiktsmessig med en kommunikasjonssatellitt i L2. I L2 vil en eventuell satellitt også være skjermet fra radiostøy fra jorda.

I vårt nærmeste system er det også relativt enkelt å flytte seg mellom disse to punktene om det skulle være nødvendig (Almeida Prado, 2006).

De nærmeste lagrangepunktene er ansett som aktuelle kandidater til å ta menneskehetens neste steg ut av lav jordbane(LEO). L1 vil være en utmerket byggeplass for en eventuell etterfølger til den internasjonale romstasjonen (Bobskill & Lupisella, 2011).

2.6.2 Sola-Jorda

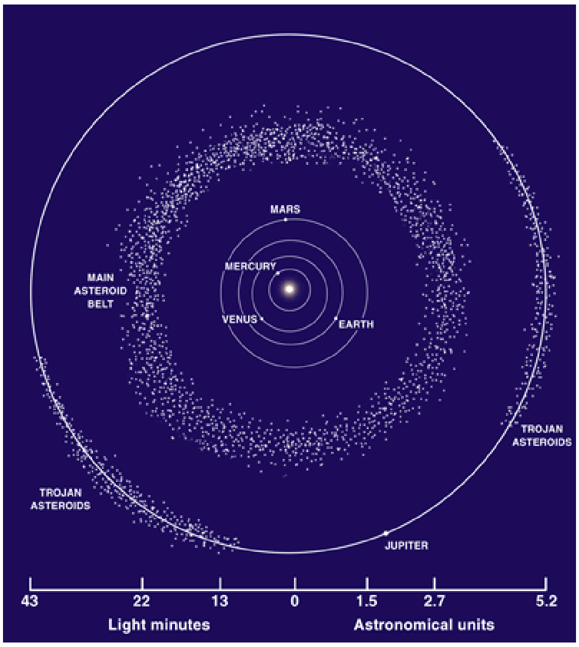
Rundt vår egen planet og sola våre har vi også fem lagrangepunkt. L1 er i dag en populær plass for å observere sola og jorda. I L2 ligger man i skyggen av jorda, uforstyrret av sola, noe som gjør dette også til en populær plass å observere.

L3 er ikke synlig fra jorda, og kan derfor brukes til å gjemme ting. Det er ikke gjort noen observasjoner av objekter i dette punktet, og det er heller ikke utført noen oppdrag med dette punktet som mål. Et mulig mål med oppdrag til L3 kan være å observere lokale forhold på Sola før vi kan se de fra Jorda (Tantardini, et al., 2010). Det å løse problemene med å kommunisere med et fartøy som er gjemt bak sola vil imidlertid kunne gjøre oppdraget for dyrt til at det blir ansett som realistisk.

2.6.3 Sola-Jupiter

Jupiter, den største planeten i solsystemet, samler på asteroider i L4- og L5-punktene sine (Levison, Shoemaker, & Shoemaker, 1997). Disse kalles trojanske asteroider. Som vist i Figur 4 finnes det to svære skyer med trojanske asteroider i Jupiters bane, 60° foran og bak. Dette er et utmerket eksempel på stabiliteten av lagrangepunktene. I dette systemet finner vi en mengde objekter i de to stabile punktene, mens man ikke finner noe merkverdig i de tre ustabile punktene.

Trojanske asteroider kan for øvrig finnes i alle system. Jorda har minst en trojansk asteroide, og de fleste planetene utover i solsystemet har flere.



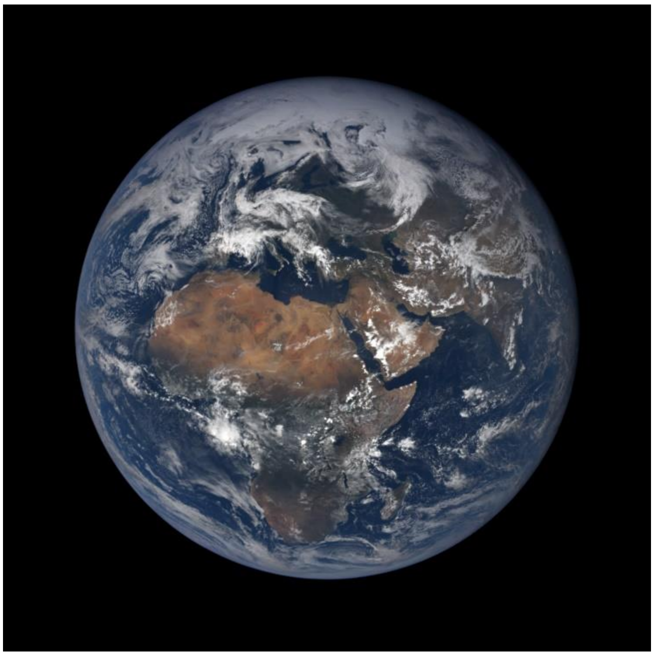
Figur 4: Jupiters trojanske asteroider(NASA)

2.6.4 Sola-Mars

Med tanke på fremtidige og pågående oppdrag til Mars kan det være hensiktsmessig å ha en kommunikasjonssatellitt i enten L4 eller L5. Dette er fordi Mars gjemmer seg bak sola i et par uker omtrent hver 26 måned. Dette kan føre til dårlig eller manglende kommunikasjon mellom planetene, og NASA unngår i dag å sende kommandoer til Mars i denne perioden selv om vi bare har ubemannede oppdrag på Mars. Pålitelig kommunikasjon vil være en absolutt nødvendighet ved eventuelle bemannede oppdrag (Webster, Cantillo, & Brown, 2017).

3 UTNYTTELSE AV LAGRANGEPUNKT INNEN ROMFART

I dagens romfartmiljø er L1-punktet mellom sola og jorda og L2-punktet på Jordas bakside spesielt populære for observasjonsoppdrag. Det er i skrivende øyeblikk fire pågående oppdrag i L1, alle i NASAs regi. Av disse er det tre som observerer Sola, ACE, WIND, og SOHO. Satellitten DSCOVR observerer Jorda fra L1. I Figur 5 kan vi se et bilde tatt fra nettopp DSCOVR på 17. mai 2019.



Figur 5: Bilde av Narvik, 17. mai 2019. (NASA, DSCOVR)

Satellittene som observerer sola kan gi oss verdifull informasjon om romværet og eventuelle solstormer før disse treffer jorda. Dette ville ikke vært mulig uten lagrangepunktet da satellittene ikke ville holdt posisjonen mellom jorda og sola.

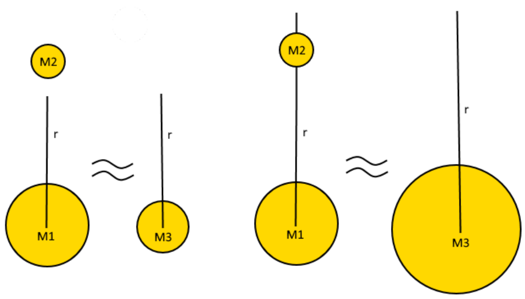
I sola-jordas L2-punkt finner vi i dag ett oppdrag i regi ESA, Gaia (ESA, 2019). I tillegg er James Webb-teleskopet planlagt en parkeringsplass i L2 for å kunne observere uforstyrret fra 2021 dersom oppdraget unngår flere utsettelser (NASA, 2019).

4 DISKUSJON

Lagrangepunktene gir oss muligheten til å plassere romfartøy i faste områder rundt et himmellegeme. Dette har stor nytteverdi med tanke på observasjon og skjerming.

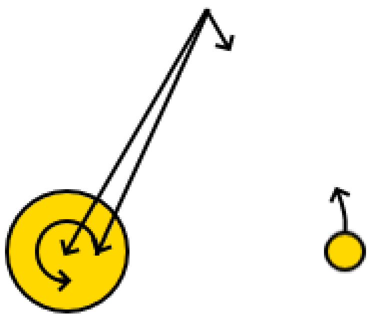
For å forklare hva et lagrangepunkt er det viktig å kunne forklare litt underliggende banemekanikk. Jeg tror ikke banemekanikk er intuitivt for folk flest. Spør man hvem som helst hvilken vei man må akselerere for å komme seg ned på jorda fra LEO så får man fire forskjellige svar.

Når jeg forestiller meg lagrangepunkt, så prøver jeg å se for meg et ekvivalent system med bare en masse. For en satellitt i L1 ser jeg for meg at månen utjevner en del av gravitasjonskraften til jorda. Dette tilsvarer en satellitt som går i bane rundt en mindre massiv jord, og den vil dermed ha lengre omløpstid. For en satellitt i L2 ser jeg for meg at månen legger til litt ekstra gravitasjonskraft, som igjen tilsvarer en satellitt som går i bane rundt en mer massiv jord. I Figur 6 prøver jeg å tegne tankene mine.



Figur 6: Visualisering av min egen forenkling fra tre til to masser.

Dersom jeg utvider denne tankegangen til de resterende punktene kommer jeg frem til en måte jeg enkelt kan forklare hvorfor lagrangepunktene har de egenskapene de har. Ved å forenkle systemet med massene M1 og M2 til et system med én masse med massesenter i barycenteret til M1 og M2 kan jeg forklare omløpstid og banehastighet på en måte som er mer intuitiv. I L4 og L5 ser jeg for meg at punktet går i bane rundt en samlet masse som igjen følger barycenteret til det originale systemet. I Figur 7 under prøver jeg å visualisere dette. Summen av gravitasjonskraften fra M1 og M2 peker mot barycenteret som igjen roterer.



Figur 7: Visualisering av gravitasjonskraft i L4

Jeg har ikke noe matematisk grunnlag for disse påstandene, de er kun et verktøy for å øke forståelse. Jeg kunne tenkt meg å undersøke matematikken i modellen min nærmere dersom jeg skulle jobbet videre med dette.

I løpet av litteratursøket har jeg kommet over mange forslag om romkolonier og diverse andre konstruksjoner i lagrangepunkt som har flere bein i sci-fi enn i realiteten. Nytteverdien i dag ligger i dag helt klart i observasjon og kommunikasjon. En fast plassering man kan holde med minimal energi.

5 KONKLUSJON

Lagrangepunktene er punkter rundt et system med to masser der en kreftene på en tredje masse utjevner hverandre. Disse punktene følger rotasjonen til systemet. Punktene er ustabile og derfor vil en forstyrrelse på en masse i punktet vil øke med tid. Men, dersom den ene massen er over ≈25 ganger den andre massen vil to av disse punktene være stabile.

Uansett krever det ikke mye energi å opprettholde en fast orientering rundt noen av lagrangepunktene, og de viser seg å være ypperlige parkeringsplasser for observasjonssatellitter.

6 REFERANSER

Almeida Prado, A. F. (2006, April-June 2006). Orbital Maneuvers Between the Lagrangian Points and the Primaries in the Earth-Sun System. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.* , p. 139.

Bobskill, M. R., & Lupisella, M. (2011, November 15). *Earth-Moon L1 / L2 Infrastructure – What Role Does It Play?* Retrieved from nasa.gov: https://www.nasa.gov/pdf/604657main_4-%20GER%20Stakeholders%20Workshop%20Earth-Moon%20L1_L2%20Bobskill.pdf

Cornish, N. J. (1998). *The Lagrange Points.* NASA.

ESA. (2019, May 16). *GAIA*. Retrieved from ESA Science & Technology: http://sci.esa.int/gaia/

Euler, L. (1767). De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11*, 144-151.

Lagrange, J. L. (1772). Essai sur le probleme des trois corps. *Prix de l'académie royale des Sciences de paris*, 292.

Lasky, M., & Hamaker, J. (2017). *L1, L2 Missions: Earth-orbiting or Planetary.* Retrieved from nasa.gov: https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/66_cost_effects_of_destination_on_space_mission_cost_v6.pdf

Levison, H. F., Shoemaker, E. M., & Shoemaker, C. S. (1997). Dynamical evolution of Jupiter's Trojan asteroids. *Nature* , 42-44.

NASA. (2019, February 8). *James Webb Space Telescope Independent Review Board Assessment Report.* Retrieved from nasa.gov: https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/webb_irb_assessment_with_nasa_response_03.01.19.pdf

Roberts, C. E. (2011). *LONG TERM MISSIONS AT the SUN-EARTH LIBRATION POINT L1: ACE, SOHO, and WIND.* Retrieved from nasa.gov: https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20110008638.pdf

Tantardini, M., Fantino, E., Ren, Y., Pergola, P., Gómez, G., & Masdemont, J. J. (2010). Spacecraft trajectories to the L point of the Sun–Earth three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 215-232.

Webster, G., Cantillo, L., & Brown, D. (2017, July 14). *Nasa Science.* Retrieved from Mars Exploration Program: https://mars.nasa.gov/news/2905/for-moratorium-on-sending-commands-to-mars-blame-the-sun/

Westra, D. (2017, July 5). *Lagrangian Points.* Retrieved from Wien University: https://www.mat.univie.ac.at/~westra/lagrangepoints.pdf