

PCA

$$\text{Samples} = \{(2,1), (2,2), (3,2), (4,1), (6,5), (7,4), (8,5), (8,5), (8,6), (9,7), (9,7)\}$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{11} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 57 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu = \text{mean}$$

$$S = \frac{1}{11} \sum (x_k - \mu)(x_k - \mu)^T = \frac{1}{11} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right)^T + \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$+ \dots + \left(\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.18 \\ 3.72 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 5.24 & 3.87 \\ 3.87 & 3.84 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{covariance}$$

Eigen values

$$\begin{bmatrix} 5.24 & 3.87 \\ 3.87 & 3.84 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5.24 - \lambda & 3.87 \\ 3.87 & 3.84 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow (5.24 - \lambda)(3.84 - \lambda) - 3.87^2 = 0$$

$$= 20.12 - 5.24\lambda - 3.84\lambda + \lambda^2 = 3.87^2 \Rightarrow \lambda^2 - 9.08\lambda + 5.14 = 0$$

$$\lambda_1 = 8.473$$

$$\lambda_2 = 0.606$$

↓
eigen values

Eigen vectors

$$\begin{bmatrix} 5.24 & 3.87 \\ 3.87 & 3.84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.473 v_{11} \\ 8.473 v_{12} \end{bmatrix} \quad v_{11} = 1$$

$$5.24 v_{11} + 3.87 v_{12} = 8.473 v_{11}$$

$$3.87 v_{11} + 3.84 v_{12} = 8.473 v_{12}$$

$$v_{11} = 0.767$$

$$v_{12} = 0.64$$

↑ eigen vectors

$$\begin{bmatrix} 5.24 & 3.87 \\ 3.87 & 3.84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.606 v_{21} \\ 0.606 v_{22} \end{bmatrix}$$

$$5.24 v_{21} + 3.87 v_{22} = 0.606 v_{21} \Rightarrow v_{21} = -0.64$$

$$3.87 v_{21} + 3.84 v_{22} = 0.606 v_{22} \Rightarrow v_{22} = 0.767$$