# 习题一

## 1.

计算：

(1)

> $$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}^n$$

令 $R=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$，则 $|R|=1$ 且 $R$ 是一个单位旋转变换，转角为 $x$.

于是

$$R^n=\begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

(3)

> $$\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}^n$$

令 $A=aI+J$，其中 $J$ 为幂零阵 i.e. $J^n=0$ , $\forall n\geq 5$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

于是对 $n\geq 4$, 我们有

$$\begin{aligned} A^n &= (aI+J)^n=(aI)^n+C_n^1(aI)^{n-1}J+\cdots+C_n^{n-1}(aI)J^{n-1}+J^n \\ &= a^nI+C_n^1a^{n-1}J+C_n^2a^{n-2}J^2+C_n^3a^{n-3}J^3+C_n^4a^{n-4}J^4 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} & C_n^4a^{n-4} \\ & a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ & & a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ & & & a^n & C_n^1a^{n-1} \\ & & & & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中，定义 $C_n^i=0$ 如果 $n<i$.

## 2.

> 证明：与任意 $n$ 阶方阵可交换的矩阵必是纯量矩阵 $\lambda I$.

记 $A=(a_{ij})=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}E_{ij}$

由题意 $AE_{ij}=E_{ij}A$，比较两边矩阵元素可得 $a_{ii}=a_{jj},a_{ij}=0,\forall i\neq j$

## 3.

> 利用初等变换求 $A^{-1}B$ 及 $CA^{-1}$, 其中
>
> $$A=\begin{pmatrix}4&5&0\\2&3&1\\2&7&-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&5&0&10\\2&3&1&-1\\2&7&9&-3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}4&5&0\\2&3&1\\2&7&9\\-2&3&7\end{pmatrix}$$

利用矩阵的行列变换可以简化求解

$$\left(\begin{array}{c:c}A&B\end{array}\right)\xrightarrow[\text{左乘}A^{-1}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{c:c}I&A^{-1}B\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}A\\\hdashline C\end{array}\right)\xrightarrow[\text{右乘}A^{-1}]{\text{初等列变换}}\left(\begin{array}{c}I\\\hdashline CA^{-1}\end{array}\right)$$

结果为

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&\frac{95}{12}\\0&1&2&-\frac{13}{3}\\0&0&0&-\frac{23}{6}\end{pmatrix}$$
$$CA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&9&0\\-\frac{14}{3}&8&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

## 5.

> 证明：对任意矩阵 $A$, 有 $r(A^*A)=r(AA^*)=r(A)$.

记 $N(A)$ 为 $AX=0$ 的解空间。欲证 $r(A'A)=r(A)$ 只需证[1] $\dim N(A'A)=\dim N(A)$

显然 $\dim N(A'A)\geq\dim N(A)$，这是因为 $AX=0$ 的解均为 $A'AX=0$ 的解.

又当 $A'AX=0$ 时，$X'A'AX=(AX)'(AX)=0$ 则 $AX=0$

从而 $\dim N(A'A)\leq\dim N(A)$

## 7.

> 设 $\omega$ 是 $n$ 次本原单位根 (可设 $\omega=\mathrm{e}^{2\pi i/n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ )，试求Fourier[2]矩阵
>
> $$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&\omega&\omega^2&\cdots&\omega^{n-1}\\1&\omega^2&\omega^4&\cdots&\omega^{2(n-1)}\\1&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\omega^{n-1}&\omega^{2(n-1)}&\cdots&\omega^{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix}$$

> 的逆矩阵.

由本原单位根的性质[3]，知 $\forall j=0,1,2,\cdots,n-1$

$$(\omega^j)^0+(\omega^j)^1+\cdots+(\omega^j)^{n-1}=0 \quad \omega^j\cdot\bar{\omega}^j=1$$

现记 $F$ 中第 $i$ 行为 $\alpha_{i+1}=(1,\omega^i,\omega^{2i},\cdot,\omega^{(n-1)i})$, 其中 $i=0,1,\cdots,n-1$ 则有

$$\alpha_{i+1}\bar{\alpha_{j+1}}'=1+\omega^i\bar{\omega}^j+\cdot+\omega^{(n-1)i}\cdot\bar{\omega}^{(n-1)j}=\begin{cases}n & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

故 $F\cdot\bar{F}'=nI$

即

$$F^{-1}=\frac{1}{n}\bar{F}'=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^4 & \cdots & \cdots & \bar{\omega}^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 1 & \bar{\omega}^{n-1} & \bar{\omega}^{2(n-1)} & \cdots & \cdots & \bar{\omega}^{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix}$$

# 13.

> 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆，$B,C,D$ 分别是 $n\times m,m\times n,m\times m$ 矩阵. 证明
>
> $$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

在增广矩阵上作初等变换

$$\left(\begin{array}{cc:cc}A & B & I & 0\\ C & D & 0 & I\end{array}\right)\xrightarrow{-CA^{-1}\times r(1)+r(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}A & B & I & 0\\ 0 & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I\end{array}\right)$$

等价于

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

两边取行列式即得.

# 14.

(1)

> 设矩阵 $A,C$ 均可逆，求分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\left(\begin{array}{cc:cc}A & B & I & 0\\ 0 & C & 0 & I\end{array}\right)\xrightarrow[C^{-1}\times r(2)]{A^{-1}\times r(1)}\left(\begin{array}{cc:cc}I & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ 0 & I & 0 & C^{-1}\end{array}\right)\xrightarrow{-A^{-1}B\times r(2)+r(1)}\left(\begin{array}{cc:cc}I & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & I & 0 & C^{-1}\end{array}\right)$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

(2)

> 设矩阵 $A$ 可逆，$D - CA^{-1}B$ 也可逆，证明矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ 也可逆并求其逆.

结合13 和 (1) 中结论，可设 $F = D - CA^{-1}B$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BF^{-1} \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BF^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BF^{-1} \\ -F^{-1}CA^{-1} & F^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

# 17.

> 求下列各矩阵的满秩分解：
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{标准化}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) := H$$

从而

$$A = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# 21.

> 证明例1.4.2[4]中的 $(V, \oplus, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

- (C) **封闭性**： $\forall x, y \in V$， $x \oplus y \in V$
- (A1) **结合律**： $\forall x, y, z \in V$， $(x \oplus y) \oplus z = xyz = x \oplus (y \oplus z)$
- (A2) **交换律**： $\forall x, y \in V$， $x \oplus y = xy = y \oplus x$
- (A3) 存在**零向量**：存在 $1 \in V$，使得 $\forall x \in V$， $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$
- (A4) 存在**负向量**：$\forall x \in V$，存在 $x^{-1} \in V$ 使得 $x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$
- (B1) 数乘的结合律：设 $x \in V$， $a, b \in F$ 有

$$a \cdot (b \cdot x) = a \cdot x^b = x^{ab} = (ab) \cdot x$$

- (B2) 数乘关于向量加法的分配律： 设 $x, y \in V$， $k \in F$ 有

$$k \cdot (x \oplus y) = (xy)^k = x^k y^k = x^k \oplus y^k = k \cdot x \oplus k \cdot y$$

- (B3) 数乘关于数的加法分配律：设 $x \in V$， $a, b \in F$ 有

$$(a + b) \cdot x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = x^a \oplus x^b = a \cdot x \oplus b \cdot x$$

- (B4) 数乘初始条件：存在单位元"1"，使得 $1 \cdot x = x^1 = x$，其中 $1 \in F$

# 28.

> 证明 $1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 上的一组基，并求多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在该组基下的坐标.

先证 $1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 线性无关.

若存在不全为0的 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ 使得

$$f(x) = k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot (x-1) + \cdots + k_n \cdot (x-1)^n$$

令 $x \to \infty$，可知最高项系数 $k_n = 0$，依次下去得到 $k_{n-1} = \cdots = k_1 = k_0 = 0$ 矛盾！

由泰勒展式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

得到基坐标为

$$\left( f(1), f'(1), \frac{f''(1)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right)$$

1. 这是因为 $\dim N(A) = n - r(A)$ ↩
2. Joseph Fourier (1768-1830), 法国著名数学家与物理学家，发现了三角级数、Fourier变换、热传导方程、热传导定律和温室效应. ↩
3. 本原单位根共轭分布于单位圆上 ↩
4. $V = \{\text{所有正实数}\}, F = \mathbb{R}, x \oplus y = xy, k \cdot x = x^k \quad \forall k \in F, x, y \in V$ ↩