习题五

1.

设 $\|\cdot\|$ 是酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的向量范数，证明向量范数的下列基本性质：

(1) 零向量的范数为零

由向量范数正定性 $\|x\|=0 \iff x=0$

(2) 当 x 是非零向量时: $\|\frac{x}{\|x\|}\|=1$

由齐次性

$$\|\frac{x}{\|x\|}\|=|\frac{1}{\|x\|}|\cdot\|x\|=1$$

(3) $\|-x\|=\|x\|$

同上，齐次性；

(4) $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$

$$\begin{aligned}
\|x\|=\|x+y-y\|y\leq\|x-y\|+\|y\| &\qquad\Longrightarrow\ \|x\|-\|y\|\leq\|x-y\| \\
\|y\|=\|y+x-x\|x\leq\|y-x\|+\|y\| &\qquad\Longrightarrow\ \|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|
\end{aligned}$$

综上 $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$

2.

证明: 若 $x\in\mathbb{C}^n$, 则

(1) $\|x\|_2\leq\|x\|_1\leq\sqrt{n}\|x\|_2$

$$\begin{aligned}
&\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\leq\sum_{i=1}^n(x_i^2)^{1/2}=\sum_{i=1}^n|x_i|=\|x\|_1 \\
&(1+1+\cdots+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=n\|x\|\geq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=\|x\|_1^2
\end{aligned}$$

(2) $\|x\|_\infty\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty$

$$\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\sum_{i=1}^n|x_i|\leq\sum_{i=1}^n\max|x_i|=n\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

(3) $\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty$

$$\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\left(\sum_{i=1}^n(\max_{1\leq i\leq n}x_i)^2\right)^{1/2}=\sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

12.

设矩阵 A 的F-范数等于 a，U 是酉矩阵，问 AU 与 UA 的F-范数各是多少？请总结你的计算

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^2 = (\operatorname{tr}(AA^*))^{1/2}$$
$$\|UA\|_F == [\operatorname{tr}(UA \cdot A^*U^*)]^{1/2} = \operatorname{tr}(AA^*)^{1/2}$$
$$\|AU\|_F == [\operatorname{tr}(AU \cdot U^*A^*)]^{1/2} = \operatorname{tr}(A^*A)^{1/2}$$

由上可知，酉矩阵保持范数不变

16.

证明矩阵的1-范数、2-范数和∞-范数分别是向量的1-范数、2-范数和∞-范数的诱导范数

分别依照范数定义证明

$$\|A\|_p \le \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad p = 1, 2, \infty$$

并且说明等号可以取到即可。

(1)

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$$
$$\le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1$$

从而 $\|A\|_1 \ge \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

取 $x = e_k$, $\max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, $\|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ 且有 $\|e_k\|_1 = 1$, 进而

$$\frac{\|Ae_k\|_1}{\|e_k\|_1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_1 \implies \|A\|_1 = \sup_{0\neq x\in \mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

(2)

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = x^*A^*Ax \ge 0$$

A^*A 半正定，非负特征值记为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$, 对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则 $\rho(A^*A) = \lambda_1$.

任取 $\forall x \in \mathbb{F}^n$，$x$ 可写成

$$x = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$$

当取 $||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} l_i^2)^{1/2}$ 时，$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = 1$, 可知

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (\sum_{i=1}^{n} l_i\alpha_i, \sum_{i=1}^{n} l_i\lambda_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i^2 \alpha_i^*\alpha_i \le \lambda_i \sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \lambda_i$$

故 $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\lambda_1} = \rho(A^*A)^{1/2} = \|A\|_2$

取 $x = \alpha_1$ 时，$\|x\|_2 = 1$,

$$\|Ax\|_2^2 = \|A\alpha_1\|_2^2 = (A\alpha_1, A\alpha_1) = (\alpha_1, A^*A\alpha) = (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1) = \lambda_1$$

进而 $\frac{\|A\alpha_1\|_2}{\|\alpha_1\|\ \ _2} = \sqrt{\lambda_1} = [\rho(A^*A)]^{1/2} = \|A\|_2$, 即 $\|A\|_2 = \sup\limits_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

(3)

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j| \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right) \max_{1\leq j\leq \infty} |x_j| = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty\end{aligned}$$

故 $\|A\|_\infty \geq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ 另一方面，若 $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$

取 $x = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, 其中 $\beta_i = \begin{cases} |a_{kj}|/a_{kj} & a_{kj} \neq 0 \\ 1 & a_{kj} = 0 \end{cases}$，此时 $\|x\|_\infty = 1$, 且有

$$\|Ax\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i}^n |a_{ij}| \quad \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|A\|_\infty$$

21.

设 T 为正交矩阵，又 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明:

(1) $\|T\|_2 = 1$

$$T'T = I_n \quad \rho(T^*T) = \rho(I_n) = 1 \quad \|T\|_2 = \sqrt{\rho(T^*T)} = 1$$

(2) $\|A\|_2 = \|TA\|_2$

$$\|TA\|_2 = \sqrt{\rho(A^*T^*TA)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A\|_2$$

(3) 试解释上面的两个结果.

- 正交变换为等距变换
- 正交变换保持矩阵2-范数不变

22.

设 A, B 为 n 阶矩阵，，其中 A 可逆而 B 不可逆，设 $\|\cdot\|$ 是任何一种矩阵范数. 定义 A 的条件数 $\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. 证明: $\|A - B\| \geq 1/\|A^{-1}\|$. 解释这个结果

因 B 不可逆，故必有0奇异值，从而 $I - A^{-1}B$ 有特征值1

$$1 \leq \|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|$$

则有 $\|A-B\| \geq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$

因 $\|A\| \neq 0$, $\|A^{-1}\| = \frac{\mathrm{Cond}(A)}{\|A\|}$, 于是

$$\|A-B\| \leq \frac{\mathrm{Cond}(A)}{\|A\|} \quad \mathrm{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1$$

以上结果表明存在奇异矩阵 B 与可逆矩阵 A 在范数意义上最接近

23.

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是 A 的全部奇异值. 证明

(1) $\mathrm{Cond}(A) = \sigma_1(A)/\sigma_n(A)$, 其中 $\sigma_1(A)$ 与 $\sigma_n(A)$ 分别是 A 的最大和最小奇异值

$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是 A 的全部奇异值, 则 $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \cdots, 1/\sigma_n$ 是 A^{-1} 的全部奇异值, 容易得知

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$$

从而$\mathrm{Cond}(A) = \sigma_1(A)/\sigma_n(A)$

(2) $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2\right)^{1/2} = [\mathrm{tr}(A^*A)]^{1/2}$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{1/2} = [\mathrm{tr}(A^*A)]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2\right)^{1/2}$$

(3) $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sigma_1(A)$$

26.

设 $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{k^2+k}{k^2+1} \\ 2 & (1-\frac{2}{k})^k \end{pmatrix}$，求 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$

逐项求极限即可 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & e^{-2} \end{pmatrix}$

27.

设 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$

(1) 如果 A_k 均为正定矩阵，问 A 有何特点

$$\forall x \in \mathbb{C}^n (A_k x, x) > 0 \iff x' A_k x > 0$$

若 $A \neq 0$, 则 $(Ax, x) > 0$; 反之 $A = 0$, $(Ax, x) = 0$. 于是 $(Ax, x) \geq 0$, A 半正定

(2) 如果 A_k 均为正规矩阵，问 A 有何特点

A 为正规矩阵，则 $\forall k, A_k A_k^* = A_k^* A_k$, 两边取极限可以得到 $AA^* = A^* A$

(3) 如果 A_k 均为可逆矩阵，问 A 有何特点

A 不一定可逆，可取 $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ 说明问题

30.

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k}$

根据求和公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k} = (I - \frac{A}{2})^{-1}$$

容易解得 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

31.

设 $A = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$. 试判断 A 是否幂收敛.

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 0.6 & -1 & -0.8 \\ 0 & \lambda - 0.2 & 0 \\ 0.6 & -1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 0.2) \times \begin{vmatrix} \lambda + 0.6 & -0.8 \\ 0.6 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 0.2)\lambda(\lambda - 0.2) \end{aligned}$$

不难发现特征值均小于1，从而幂收敛

32.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，求 $e^A, \sin(A), \cos(A)$

此类矩阵函数问题均可按照课本三种方法来解答，根据实际情况采用简洁高效的算法即可。注意：要多利用最小多项式和 Jordan 标准型的信息

下面利用符号计算软件[Mathematica](#) 来给出计算结果，后面相似问题可同样处理。

```
A = {{0, 0}, {1, -2}};
MatrixExp[A] // MatrixForm // FullSimplify
MatrixFunction[Sin, A] // MatrixForm // FullSimplify
MatrixFunction[Cos, A] // MatrixForm // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2} & \frac{1}{e^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sin(2)}{2} & -\sin(2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin^2(1) & \cos(2) \end{pmatrix}$$

(2) 设 $J=\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$，求 $e^J, \sin(J), \cos(J)$

```
J = {{-2, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 2}};
MatrixExp[J] // MatrixForm // FullSimplify
MatrixFunction[Sin, J] // MatrixForm // FullSimplify
MatrixFunction[Cos, J] // MatrixForm // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & e & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\sin(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(1) & \cos(1) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2) \end{pmatrix}$$

35.

对下列方阵 A，求矩阵函数 e^{At}

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

```
A = {{2, -2, 3}, {1, 1, 1}, {1, 3, -1}};
JordanDecomposition[A] // MatrixForm
MatrixFunction[Exp, A t] // MatrixForm // ExpandAll
```

$$\begin{pmatrix} \{-11,-1,1\} & \{-1,1,1\} & \{14,1,1\} \\ \{-2,0,0\} & \{0,1,0\} & \{0,0,3\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & \frac{11e^{-2t}}{15}-\frac{5e^t}{6}+\frac{e^{3t}}{10} & -\frac{11e^{-2t}}{15}+\frac{e^t}{3}+\frac{2e^{3t}}{5} \\ -\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{15}+\frac{5e^t}{6}+\frac{e^{3t}}{10} & -\frac{e^{-2t}}{15}-\frac{e^t}{3}+\frac{2e^{3t}}{5} \\ -\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & -\frac{14e^{-2t}}{15}+\frac{5e^t}{6}+\frac{e^{3t}}{10} & \frac{14e^{-2t}}{15}-\frac{e^t}{3}+\frac{2e^{3t}}{5} \end{pmatrix}$$

(3) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

```
A = {{-2, 1, 3}, {0, -3, 0}, {0, 2, -2}};
MatrixExp[A t] // MatrixForm // ExpandAll
```

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & 6e^{-2t}t+5e^{-3t}-5e^{-2t} & 3e^{-2t}t \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & -2e^{-3t}+2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

36.

求下列两类矩阵的矩阵函数：$\cos(A), \sin(A), e^A$

(1) A 为幂等矩阵

$A^2 = A$, 可设 $\cos A = aA + bI$

$$\begin{cases} \cos 0 = b \\ \cos 1 = a + b \end{cases} \implies \begin{cases} a = \cos 1 - 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

于是 $\cos A = (\cos 1 - 1)A + I$. 对 $\sin A, e^A$ 采用同样的方法可以得到
$\sin A = \sin 1 \cdot A, e^A = I + (e-1)A$

(2) A 为对合矩阵（即 $A^2 = I$）

$A^2 = I$, 可设 $\cos A = aA + bI$

$$\begin{cases} \cos 1 = a + b \\ \cos -1 = -a + b \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = \cos 1 \end{cases}$$

于是 $\cos A = \cos 1 \cdot I$. 对 $\sin A, e^A$ 采用同样的方法可以得到
$\sin A = \sin 1 \cdot A, e^A = \dfrac{e - e^{-1}}{2}A + \dfrac{e + e^{-1}}{2}I$

37.

设函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & t \\ \frac{\sin t}{t} & e^t & t^2 \\ 1 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$，其中 $t \neq 0$. 计算 $\lim\limits_{t \to 0} A(t), \dfrac{d}{dt}A(t), \dfrac{d^2}{dt^2}A(t)$

```
A[t_] := {{Sin[t], Cos[t], t}, {Sin[t]/t, Exp[t], t^2}, {1, 0, t^3}};
Limit[A[t], t -> 0] // MatrixForm // FullSimplify
D[A[t], t] // MatrixForm // ExpandAll
D[A[t], {t, 2}] // MatrixForm // ExpandAll
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 1 \\ \frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2} & e^t & 2t \\ 0 & 0 & 3t^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ -\frac{2\cos(t)}{t^2} + \frac{2\sin(t)}{t^3} - \frac{\sin(t)}{t} & e^t & 2 \\ 0 & 0 & 6t \end{pmatrix}$$

38.

设函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & t^2 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $\int_0^1 A(t)dt$ 和 $\dfrac{d}{dt}\int_0^{t^2} A(s)ds$

此题前两问可以由对逐个矩阵元素作用得到，第三问可以采用变上限积分公式求导来简化

$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} A(s)ds = (2t)\cdot A(t^2)$$

```
A[t_] := {{Exp[2 t], t Exp[t], t}, {Exp[-t], 2 Exp[2 t], 0}, {3 t, 0,
    0}};
Integrate[A[t], {t, 0, 1}] // MatrixForm // FullSimplify
D[Integrate[A[s], {s, 0, t^2}], t] // MatrixForm // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+e^2}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1+e}{e} & -1+e^2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2e^{2t^2}t & 2e^{t^2}t^3 & 2t^3 \\ 2e^{-t^2}t & 4e^{2t^2}t & 0 \\ 6t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

39.

证明：(1) 若 A 为实反对称矩阵，则 e^A 为正交矩阵

$$e^A(e^A)' = e^A \cdot e^{A'} = e^{A+A'} = e^0 = I$$

(2) 若 A 为 Hermite 阵，则 e^{iA} 为酉矩阵

$$e^{iA}(e^{iA})^* = e^{iA}\cdot e^{-iA^*} = e^{iA}\cdot e^{-iA} = e^0 = I$$

43.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 $e^{At}, \sin(At), \cos(At)$

首先求解 Jordan 标准形，$|\lambda I - A| = 0 \implies \lambda = 1,2,3$，于是 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

设 $f(\lambda) = e^{\lambda t}, g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1) \qquad & a_0 &= 3e^t - 3e^{2t} + e^{3t} \\ g(2) &= f(2) \qquad & a_1 &= -(5e^t + 8e^{2t} - 3e^{3t})/2 \\ g(3) &= f(3) \qquad & a_2 &= (e^t - 2e^{2t} + e^{3t})/2 \end{aligned}$$

从而 $f(A) = g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 = \ldots$

```
A = {{1, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 3}};
Map[MatrixForm, JordanDecomposition[A]]
MatrixFunction[Exp, A t] // MatrixForm // ExpandAll
MatrixFunction[Sin, A t] // MatrixForm // ExpandAll
MatrixFunction[Cos, A t] // MatrixForm // ExpandAll
```

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix},J_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^t&-e^t+e^{2t}&\frac{e^t}{2}-e^{2t}+\frac{e^{3t}}{2}\\0&e^{2t}&-e^{2t}+e^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\sin(At)=\begin{pmatrix}\sin(t)&\sin(2t)-\sin(t)&\frac{\sin(t)}{2}-\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin(3t)\\0&\sin(2t)&\sin(3t)-\sin(2t)\\0&0&\sin(3t)\end{pmatrix}$$

$$\cos(At)=\begin{pmatrix}\cos(t)&\cos(2t)-\cos(t)&\frac{\cos(t)}{2}-\cos(2t)+\frac{1}{2}\cos(3t)\\0&\cos(2t)&\cos(3t)-\cos(2t)\\0&0&\cos(3t)\end{pmatrix}$$

46.

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，计算积分 $\int_0^t e^{As}ds$

```
A = {{1, 0}, {1, 0}};
Integrate[MatrixExp[A s], {s, 0, t}] // MatrixForm // ExpandAll
```

$$\begin{pmatrix}-1+e^t&0\\-t+e^t-1&t\end{pmatrix}$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，计算 e^A 与 e^{At}

```
A = {{0, 1}, {1, 0}};
MatrixExp[A] // MatrixForm // FullSimplify
MatrixExp[A t] // MatrixForm // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix}\frac{1+e^2}{2e}&\frac{-1+e^2}{2e}\\\frac{-1+e^2}{2e}&\frac{1+e^2}{2e}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\cosh(t)&\sinh(t)\\\sinh(t)&\cosh(t)\end{pmatrix}$$

47.

设 $A^2-A+I=0$，计算 e^{At} 与 $\int_0^t e^{As}ds$

由题意，A 的最小多项式至多为2次。设 $f(\lambda)=e^{\lambda t},g(\lambda)=a_0+a_1\lambda$

令 $f(\lambda_i)=g(\lambda_i)$, 可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = e^{t/2}[\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - 1/(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)] \\
a_1 &= \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t
\end{aligned}
$$

代入 $e^{At} = f(A)$ 中，可得

$$
e^{At} = e^{\frac{t}{2}} \left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - 1/(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right) I + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin\sqrt{3}t/2A
$$

56.

求下列微分方程组的通解

(2) $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$

```
X[t_] := {x1[t], x2[t], x3[t]};
A = {{0, 1, 1}, {1, 1, -1}, {0, 1, 1}};
Map[MatrixForm, JordanDecomposition[A]]
MatrixExp[A t] // MatrixForm // ExpandAll
eqs = Thread[D[X[t], t] == A.X[t]];
X[t] /. DSolve[eqs, X[t], t] // ExpandAll
```

$$
P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} e^t t - e^t + 2 & e^t t & -e^t t + 2e^t - 2 \\ -1 + e^t & e^t & 1 - e^t \\ e^t t - e^t + 1 & e^t t & -e^t t + 2e^t - 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x1(t) &= 2C[1] - E^t C[1] + E^t tC[1] + E^t tC[2] - 2C[3] + 2E^t C[3] - E^t tC[3] \\
x2(t) &= -C[1] + E^t C[1] + E^t C[2] + C[3] - E^t C[3] \\
x3(t) &= C[1] - E^t C[1] + E^t tC[1] + E^t tC[2] - C[3] + 2E^t C[3] - E^t tC[3]
\end{aligned}
$$

57.

求下列微分方程组 $x'(t) = Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
X[t_] := {x1[t], x2[t]};
A = {{1, 12}, {3, 1}};
eqs = Thread[D[X[t], t] == A.X[t]];
DSolve[eqs && X[0] == {0, 1}, X[t], t] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{x1(t)\to e^{7t}-e^{-5t},x2(t)\to \frac{e^{-5t}}{2}+\frac{e^{7t}}{2}\right\}\right\}$$

60.

求方程 $y'''+6y''+11y'+6y=e^{-t}$ 满足 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的解

转化为常微分方程组来做，写出等价形式如下

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t)\\ x(t)|_{t=0}=x(0)\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

```
DSolve[y'''[t] + 6 y''[t] + 11 y'[t] + 6 y[t] == Exp[-t] &&
   y[0] == y'[0] == y''[0] == 0, y[t], t] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y(t)\to \frac{e^{-t}t}{2}-\frac{e^{-3t}}{4}+e^{-2t}-\frac{3e^{-t}}{4}\right\}\right\}$$

61.

(1) 证明微分方程 $x'(t)=Ax(t)+\gamma e^{at}$ 有形如 $x(t)=\beta e^{at}$ 的解 $\iff$ $(aI-A)\beta=\gamma$，其中 β,γ 都是 n 维向量，$a\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ 若微分方程 $x'(t)=Ax(t)+\gamma e^{at}$ 有形如 $x(t)=\beta e^{at}$ 的解，则有 $a\beta e^{at}=A\beta e^{at}+\gamma e^{at}\implies a\beta=A\beta+\gamma$, 此即 $(aI-A)\beta=\gamma$

$\Leftarrow$ 若 $(aI-A)\beta=\gamma$, 则 $a\beta=A\beta+\gamma\implies(\beta e^{at})'=A\beta e^{at}+\gamma e^{at}$. 于是 βe^{at} 是上述微分方程的解。

(2) 解 $x'(t)=Ax(t)+e^{2t}C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

```
X[t_] := {x1[t], x2[t]};
A = {{3, 1}, {2, 2}};
c = {-1, -1};
Map[MatrixForm, JordanDecomposition[A]]
eqs = Thread[D[X[t], t] == A.X[t] + Exp[2 t] c];
DSolve[eqs && X[0] == {0, 1}, X[t], t] // ExpandAll
```

$$P=\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix},J_A=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$
$$\left\{\left\{x1(t)\to -\frac{e^{t}}{3}+\frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{4t}}{6},x2(t)\to \frac{2e^{t}}{3}+\frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{4t}}{6}\right\}\right\}$$