习题三

2.

设 A 为第一章例 1.2.3 中的矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&-2&3\\-2&1&-1&2\\-2&2&-2&2\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

(1) 利用满秩分解和 Sylevester 降幂公式求 A 的特征多项式与 A^6;

(2) 求与 A 相似的分块对角矩阵，使得每块恰有唯一的特征值.

(1) 利用 Hermite 标准形可以化得

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}=LR$$

则特征多项式

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-LR|=\lambda^2|\lambda I-RL|=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)$$

进一步，可以利用 LR 分解对矩阵的幂进行降维操作

$$\begin{aligned}A^6&=(LR)^6=L(RL)^5R\\&=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&1\\-2&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}96&-95&95&-96\\64&-63&63&-64\\32&-32&32&-32\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 由上可知 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$, $\lambda_4=-2$, 故

$$A\sim 0\oplus 0\oplus 0\oplus -1\oplus -2$$

3.

设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)'$, x 为任意常熟，$A=xI_n+\alpha\beta'$.

(1) 直接计算行列式 $|A|$;

$$A=\begin{pmatrix} x+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n+x \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加在第}i\text{行}]{\text{第一行乘}(\frac{a_i}{a_1})}$$
$$\begin{pmatrix} x+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ -\frac{a_2}{a_1}x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1}x & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}x & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加在第}1\text{行}]{\text{第}i\text{行乘}(\frac{a_1b_i}{x})}$$
$$\begin{pmatrix} x+\sum_{i=1}^n a_ib_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1}x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1}x & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}x & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

于是

$$|A|=(x+\sum_{i=1}^n a_ib_i)x^{n-1}$$

(2) 利用 Sylvester 降幂公式计算行列式 $|A|$;

$$\begin{aligned} |A| &= |xI_n+\alpha\beta'| = x^{n-1}|xI_n+\beta'\alpha| \\ &= x^{n-1}|x+\sum_{i=1}^n a_ib_i| \\ &= x^{n-1}(x+\sum_{i}^n a_ib_i) \end{aligned}$$

(3) 利用特征值计算行列式 $|A|$.

只需考察 $\alpha\beta'$ 的特征值，不难发现其为秩1矩阵，且有特征值 $\beta'\alpha$ (对应特征向量 α)，从而

$$|A|=(x-0)^{n-1}(x-\sum_{i=1}^n(-a_ib_i))=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^n a_ib_i)$$

11.

求下列矩阵的最小多项式并指出其中可以对角化的矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(1)

$$f_A(x)=\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix}=(x-3)(x-5)-8=(x-1)(x-7)$$

不难发现 $m_A(x)=(x-1)(x-7)$

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(3)

$$f_A(x)=\begin{vmatrix} x-4 & 6 & 0 \\ -3 & x+5 & 0 \\ -3 & 6 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)[(x-4)(x+5)+18]=(x-1)^2(x+2)$$

逐项检查因子可得 $(A-I)(A+2I)=0$，于是

$$m_A(x)=(x-1)(x+2)$$

12.

试构造两个同阶矩阵，使得它们

(1) 具有相同的特征多项式与不同的最小多项式；

(2) 具有相同的最小多项式与不同的特征多项式；

(3) 证明矩阵的最小多项式存在且唯一.

解:

(1) 只需构造特征值相同阶数不同的 Jordan 块

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

容易得到 $m_A(x)=x-1$ 而 $m_B(x)=(x-1)^2$

(2) 只需相同特征值 Jordan 块阶数相同，但特征值重数不同

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

容易得到 $m_A(x)=m_B(x)=(x-1)x$ 但 $f_A(x)=(x-1)^2x\neq f_B(x)=(x-1)x^2$

(3)

首先，$f_A(x)$ 是 A 的零化多项式，必有其首一的因式是 A 的最小多项式.

齐次，若 A 存在两个最小多项式，记为 $m_A(x),m_A'(x)$ 则有

$$m_A(x)\mid m_A'(x)\text{ 且 }m_A'(x)\mid m_A(x)$$

从而 $m_A(x)=m_A'(x)$, 矛盾导致了唯一性。

30.

(1) 证明不等于零的幂零矩阵一定不相似于对角阵；

若相似于对角阵，对角阵必幂零。

(2) 设 A 具有唯一特征值但 A 不是对角矩阵. 证明 A 一定不相似于对角矩阵。

A 有唯一特征值但不是对角矩阵, 那么 A 的 Jordan 块阶数必须大于1

37.

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的盖尔圆盘并隔离之.

$$D_1=\{|x-9|\le 2\} \quad D_2=\{|x-i|\le 2\} \quad D_3=\{|x-3|\le 2\}$$

不妨假设放缩变换为 $P=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,d_3\}, d_i\neq 0$ 则有

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 20 & \frac{3d_1}{d_2} & \frac{d_1}{d_3} \\ \frac{2d_2}{d_1} & 10 & \frac{2d_2}{d_3} \\ \frac{8d_3}{d_1} & \frac{d_3}{d_2} & 0 \end{pmatrix}$$

取 $d_1=\frac{3}{2}, d_2=d_3=1$, 得

$$D_1=\{|x-20|\le 6\} \quad D_2=\{|x-10|\le \frac{10}{3}\} \quad D_3=\{|x|\le \frac{19}{3}\}$$

新的圆盘不再重叠，并确定了特征值范围

$$[14,26], \quad [\frac{20}{3},\frac{40}{3}], \quad [-\frac{19}{3},\frac{19}{3}]$$

38.

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的盖尔圆盘并讨论 A 的特征值的范围与性质.

$$D_1=\{|x-20|\le 4\} \quad D_2=\{|x-10|\le 4\} \quad D_3=\{|x|\le 9\}$$

其中 D_2 与 D_3 连通，可以缩小 D_3, 取 $P=\mathrm{diag}\{1,1,\frac{2}{3}\}$, 计算得

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 20 & 3 & 3/2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 11/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1=\{|x-20|\le \frac{9}{2}\} \quad D_2=\{|x-10|\le 5\} \quad D_3=\{|x|\le \frac{13}{3}\}$$

新的圆盘不再重叠，并确定了特征值范围

$$[\frac{31}{2}, \frac{49}{2}], \quad [5, 15], \quad [-\frac{13}{3}, \frac{13}{3}]$$

39.

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的盖尔圆盘并利用对角相似变换改进之;

$$D_1 = \{|x-7| \le 24\} \quad D_2 = \{|x-7| \le 24\} \quad D_3 = \{|x+5| \le 16\}$$

不妨假设放缩变换为 $P = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, d_3\}, d_i \neq 0$ 则有

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -16\frac{d_2}{d_1} & 8\frac{d_3}{d_1} \\ -16\frac{d_1}{d_2} & 7 & -8\frac{d_3}{d_2} \\ 8\frac{d_1}{d_3} & -8\frac{d_2}{d_3} & -5 \end{pmatrix}$$

得到新圆盘

$$\begin{aligned} D_1 &= \{|x-7| \le \frac{16d_2 + 8d_3}{d_1}\} \\ D_2 &= \{|x-7| \le \frac{16d_1 + 8d_3}{d_2}\} \\ D_3 &= \{|x+5| \le \frac{d_1 + d_2}{d_3}\} \end{aligned}$$

(2) 通过特征多项式计算 A 的特征值并与 (1) 比较.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 16 & -8 \\ -16 & \lambda - 7 & -8 \\ 8 & -8 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 27)(\lambda + 9)^2$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = -9$(二重)，$\lambda_2 = 27$

40.

证明 Hilbert[1] 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \cdots & \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \cdots & \frac{3}{4^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

可以对角化，且 A 的特征值都是实数.

根据盖尔圆盘定理，可知第 i 个圆盘为

$$D_i(A)=\{x\in\mathbb{C}\mid |x-2i|\le 1-\frac{1}{(i+1)^{n-1}}\}$$

因圆盘半径小于1，故 A 的 n 个圆盘彼此分隔，故可对角化且特征值均为实数。

41.

分别利用盖尔圆盘定理和 Ostrowski 圆盘定理估计下面矩阵的谱半径：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 3 & 0.1 & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -1 & 0.5 \\ 1.2 & -0.6 & -1 & -3.6 \end{pmatrix}$$

1. (行)盖尔圆盘

$$\rho(A)\le\max_{1\le i\le 4}\sum_{j=1}^{4}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{4}|a_{4j}|=5.6$$

2. Ostrowski 圆盘

$$|\lambda-a_{ii}|\le R_i(A)^\alpha C_i(A)^{1-\alpha}$$

对每一行考虑可以得到

$$\begin{aligned} |\lambda-1| &\le 0.6^\alpha\cdot 2.7^{1-\alpha} \\ |\lambda-3| &\le 0.8^\alpha\cdot 1^{1-\alpha} \\ |\lambda+1| &\le 1.8^\alpha\cdot 0.5^{1-\alpha} \\ |\lambda+3.6| &\le 2^\alpha\cdot 1^{1-\alpha} \end{aligned}$$

调整参数 α 例 $\alpha=\frac{2}{3}$ 可得 $\rho(A)\le 3.86$

---

1. David Hilbert(1862-1943)，德国著名数学家，对数学与物理的众多分支有杰出贡献.↩