习题一

30.

> 对 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}, y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$, 规定
>
> $$(x,y)=ax_1y_1+bx_1y_2+bx_2y_1+cx_2y_2$$
>
> 证明: (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\iff a>0,\quad ac>b^2$

由定义 $(x,y)=ax_1y_1+bx_1y_2+bx_2y_1+cx_2y_2$ ，双线性性和共轭对称性易证。

只需证明此内积满足正定性

因

$$(x,y)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=y'Ax$$

故 (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\iff \quad A$ 正定 $\iff \quad ac>b^2, a>0$

31.

> 设$V=\{a\cos t+b\sin t: 其中a,b为任意实数\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$, 定义
>
> $$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})$$
>
> 证明 (x,y) 是 V 上的内积，并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度

不妨假设 $f=a_1\cos t+b_1\sin t \quad g=a_2\cos t+b_2\sin t$ 根据内积定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})=a_1a_2+b_1b_2$$

于是

1. $(f,g)=a_1a_2+b_1b_2=g(0)f(0)+g(\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{2})=(g,f)$
2. $(f,f)=f^(0)+f^2(\frac{\pi}{2})=a_1^2+b_1^2\geq 0$ 且等号成立 $\iff f=0$
3. $$\begin{aligned}(mf+ng,h)&=[mf(0)+ng(0)]h(0)+[mf(\frac{\pi}{2})+ng(\frac{\pi}{2})]h(\frac{\pi}{2})\\&=m[f(0)h(0)+f(\frac{\pi}{2}g(\frac{\pi}{2})]+n[g(0)h(0)+g(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2})]\\&=m(f,h)+n(g,h)\end{aligned}$$

所以，(f,g) 是 V 上的一个内积

$$\begin{aligned}\|h\| = \sqrt{(h,h)} &= \sqrt{h^2(0)+h^2(\frac{\pi}{2})} \\ &= \sqrt{(2\cos 7+4\sin 9)^2+[3\cos(\frac{\pi}{2}+7)+4\sin(\frac{\pi}{2}+9)]^2} \\ &= \sqrt{25+24(\cos 7\sin 9-\sin 7\cos 9)} \\ &= \sqrt{25+24\sin 2} \neq 5\end{aligned}$$

习题二

4.

> 证明定理 2.4.1(多子空间直和的判定)

（多子空间直和的判定）设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 是线性空间 V 的子空间，则下列命题等价：
(1) $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和，即

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_s) = \dim W_1+\dim W_2+\cdots+\dim W_s$$

(2) $W_j \cap \Sigma_{k\neq j} W_k = 0, 1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq s$

(3) 任意向量 $\alpha \in W_1+W_2+\cdots+W_s$ 的分解式唯一；

(4) 零向量的分解式唯一

(1) $\Longrightarrow$ (2):

因 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和，故 $(W_1+W_2+\cdots+W_{s-1}) \oplus W_s$ 为直和。每个子空间与其余子空间交集均为 0，即

$$W_j \cap \Sigma_{k\neq j} W_k = 0, 1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq s$$

(2) $\Longrightarrow$ (3):

反证法，若分解式不唯一，即

$$\alpha = w_1+w_2+\cdots+w_s = w_1'+w_2'+\cdots+w_s'$$

其中 $w_i - w_i' \in W_i$。则可得

$$w_1'-w_1 = (w_2-w_2')+\cdots+(w_s-w_s') \in W_2+\cdots+W_s$$

故 $w_1'-w_1 \in W_1$ 且 $w_1'-w_1 \in W_2+\cdots+W_s$

因 $W_1 \cap (W_2+\cdots+W_s) = 0$，故 $w_1'-w_1 = 0$ 与假设矛盾！

(3) $\Longrightarrow$ (4):

取任意向量 $\alpha=0$ 即可

(4) $\Longrightarrow$ (1):

因零向量分解式唯一，故 $W_1+(W_2+\cdots+W_s)$ 是直和，即

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_s)=\dim W_1+\dim(W_2+\cdots+W_s)$$

对 $W_2+\cdots+W_s$ 同样有如上，依此归纳可得

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_s)=\dim W_1+\dim W_2+\cdots+\dim W_s$$

5.

> 设
>
> $$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&3&4\end{pmatrix}$$
>
> 求 A 的四个相关子空间.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&3&4\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&-1&-2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}H_A&P\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}&R(A)=\operatorname{span}\{(1,0,1)',(1,1,3)'\}\\&R(A')=\operatorname{span}\{(1,0,1)',(0,1,1)'\}\\&N(A)=\operatorname{span}\{(-1,-1,1)'\}\\&N(A')=\operatorname{span}\{(-1,-2,1)'\}\end{aligned}$$

9.

> 设 $U=[(1,2,3,6)^{\mathrm{T}},(4,-1,3,6)^{\mathrm{T}},(5,1,6,12)^{\mathrm{T}}]$，$W=[(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},(2,-1,4,5)^{\mathrm{T}}]$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间

> (1) 求 $U\cap W$ 的基；
> (2) 扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 U 的基；
> (3) 扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 W 的基；
> (4) 求 $U+W$ 的基

不妨设 $U=(u_1,u_2,u_3),W=(w_1,w_2)$ 不难发现 $u_1+u_2=u_3$ 则有 $\dim U=\dim W=2$

考虑方程组

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} u_1 & u_2 & w_1 & w_2 \end{array}\right)}_{A} X=0$$

的解，可得 $x=(\frac{7}{9},-\frac{4}{9},3,-1)'$ 由此 $\dim(U+W)=3$

于是 $U\cap W$ 的基是

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

由基的扩充定理，可得 U 的基为 $(-1,2,1,2)',(1,2,3,6)'$ W 的基为 $(-1,2,1,2)'(1,-1,1,1)'$

$U+W$ 的基为 $(-1,2,1,2)'$， $(1,2,3,6)'$，$(1,-1,1,1)'$

10.

> 设 $U=\{(x,y,z,w):x+y+z+w=0\}$，$W=\{(x,y,z,w):x-y+z-w=0\}$.
>
> 求 $U\cap W$，$U+W$ 的维数与基

将 U,W 视为齐次线性方程的解空间，可知 $\dim U=\dim W=4-1=3$

记 $U\cap W$ 为 $AX=0$ 的解空间，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以解得 $U\cap W$ 的一组基为 $(1,0,-1,0)$，$(0,1,0,-1)$

由维数定理 $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=4$

故可取标准基 e_1,e_2,e_3,e_4

25.

> 分别求导数运算 $\partial: f(x) \mapsto f'(x)$ 在标准基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 与基 $1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 下的矩阵.
>
> 问 ∂ 的行列式与迹是多少? 解释之

$$
\begin{aligned}
\partial(1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}) &= (0, 1, 2x, \cdots, (n-1)x^{n-2}) \\
&= (1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & n-1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{A}
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{tr}(A) = 0 \quad r(A) = n-1 < n \implies |A| = 0
$$

利用变量替换 $x = x - a$ 可以知道另一组基下结果是一样的。

26.

> 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵全体，σ 是将 V 中任意元素的严格下三角部分变为 0 的映射.
>
> 判断 σ 是否为 V 的线性变换. 若是，求其核与像；并任选 V 的一组基，求 σ 在该组基下的矩阵.

1. 首先证明若 σ 保持其余部分不变为线性变换，这是因为

$$
\forall A, B \in V \; k_1, k_2 \in \mathbb{F} \quad k_1 A + k_2 B \in V
$$

且

$$
\sigma(k_1 A + k_2 B) = k_1 \sigma(A) + k_2 \sigma(B) \in V
$$

2. 根据定义

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}\sigma = \{A \mid \sigma(A) = 0\} = \{A\text{为严格下三角矩阵}\} \\
&\mathrm{Im}\sigma = \{A \mid \sigma(B) = A, \forall B \in V\} = \{A\text{为上三角矩阵}\}
\end{aligned}
$$

取 V 的一组标准基 $E_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，然后按照先 $E_{ij} \in \mathrm{Ker}\sigma$ 再 $E_{ij} \in \mathrm{Im}\sigma$ 顺序进行排序，即

$$
(E_{21}, E_{31}\;, E_{32}, \cdots, E_{n,n-1}, E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{22}, \cdots, E_{2n}, \cdots\cdots, E_{nn})
$$

易知，σ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 \\ 0 & I_{\frac{n(n+1)}{2}} \end{pmatrix}$$

29.

> 设 $V=\mathbb{R}^3$，$\sigma(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$. 求
>
> (1) σ 的核与像空间的基和维数；
>
> (2) σ 的行列式与迹.

(1)

$$\begin{aligned}\sigma(x,y,z)&=(x+2y-z,y-z,x+y-2z)\\&=(x,y,z)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}}_{A}\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{Ker}\sigma=\{X\mid XA=0\}=\{X\mid A'X'=0\}=\mathrm{span}\{(3,-1,1)'\}$$

从而 $\dim\mathrm{Ker}\sigma=1$ 因 $\mathrm{Im}\sigma\cong R(A')$ 有

$$\mathrm{Im}\sigma=\mathrm{span}\{(1,0,1)',(2,1,1)'\}\quad\dim(\mathrm{Im}\sigma)=2$$

(2)

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(A)=1+1-2=0\\&r(A)=2<3\implies|A|=0\end{aligned}$$

30.

> 设 V 是 n 维内积空间，U 是 V 的子空间.
>
> 令 $W=\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in U\}$. 证明 W 是 V 的子空间且 $V=U\oplus W$

1. 先证 W 是线性子空间。显然 $W\subset V$ 又

$$\forall\alpha,\gamma\in W,(a\alpha+b\gamma,\beta)=a(\alpha,\beta)+b(\gamma,\beta)=0\quad\forall\beta\in U$$

则 $a\alpha+b\gamma\in W$

2. 下证直和。因

$$U\cap W=\{\alpha\in U:(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in U\}=\{0\}$$

对任意 $\alpha \in V$, 将其往 β 上作正交投影分解，即 $\alpha = \mathrm{Proj}_\beta \alpha + (\alpha - \mathrm{Proj}_\beta \alpha)$

其中 $\mathrm{Proj}_\beta \alpha \in U$, 且有 $(\mathrm{Proj}_\beta \alpha, \alpha - \mathrm{Proj}_\beta \alpha) = 0$

故有 $\alpha \in U + W$ 即 $V \subset U + W$

又有 $U + W \subset V$，所以 $V = U + W$，从而 $V = U \oplus W$

32.

> 设 $V = \mathbb{R}[x]_n$, 其上的内积为
>
> $$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$
>
> 设 $U = \{f(x) \in V : f(0) = 0\}$.
> (1) 证明 U 是 V 的一个 $n-1$ 维子空间，并求 U 的一组基；
> (2) 当 $n = 3$ 时，求 U 的正交补 $U^\perp$

(1)

设 $f, g \in U$，对任意实数 a, b，我们有 $af + bg \in U$ 所以 U 是 V 的一个子空间。

取 U 的一组基 $\{x, x^2, \cdots, x^n\}$ 可以知道 $\dim U = n - 1$

(2)

当 $n = 3$ 时，我们有 $V = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ 以及 $U = \mathrm{span}\{x, x^2\}$

不妨假设 $U^\perp = \mathrm{span}\{ax^2 + bx + c\}$ 因 $U \oplus U^\perp = V$ 则由

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c,\ x)\ &= 0 \\ (ax^2 + bx + c,\ x^2) &= 0\end{aligned}$$

可以推出

$$a = -10 \quad b = 12 \quad c = -3$$

从而给出正交补空间的一种表达 $U^\perp = \mathrm{span}\{-3 + 12x - 10x^2\}$