Homework 2 of Matrix Theory

matrix theory

Sequence Number:

Name:

Student ID:

习题一

30.

> 对 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$, $y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$, 规定
>
> $$(x,y)=ax_1y_1+bx_1y_2+bx_2y_1+cx_2y_2$$
>
> 证明: (x,y) 是 R^2 的内积 $\iff a>0,\ ac>b^2$

31.

> 设$V=\{a\cos t+b\sin t:\text{其中}a,b\text{为任意实数}\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$ ，定义
>
> $$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})$$
>
> 证明 (x,y) 是 V 上的内积，并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度

习题二

4.

> 证明定理 2.4.1(多子空间直和的判定)

5.

> 设
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
>
> 求 A 的四个相关子空间.

9.

> 设 $U=[(1,2,3,6)^{\mathrm{T}},(4,-1,3,6)^{\mathrm{T}},(5,1,6,12)^{\mathrm{T}}]$ ，
> $W=[(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},(2,-1,4,5)^{\mathrm{T}}]$ 是 R^4 的两个子空间
> (1) 求 $U\cap W$ 的基；
> (2) 扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 U 的基；
> (3) 扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 W 的基；
> (4) 求 $U+W$ 的基

10.

> 设 $U=\{(x,y,z,w):x+y+z+w=0\}$ ，
> $W=\{(x,y,z,w):x-y+z-w=0\}$.
> 求 $U\cap W$ ，$U+W$ 的维数与基

25.

> 分别求导数运算 $\partial : f(x) \mapsto f'(x)$ 在标准基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 与基 $1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 下的矩阵.
> 问 ∂ 的行列式与迹是多少？解释之

26.

> 设 V 是数域 F 上的 n 阶矩阵全体，σ 是将 V 中任意元素的严格下三角部分变为 0 的映射.
> 判断 σ 是否为 V 的线性变换. 若是，求其核与像；并任选 V 的一组基，求 σ 在该组基下的矩阵.

29.

> 设 $V=\mathrm{R}^3$ ，$\sigma(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$. 求
> (1) σ 的核与像空间的基和维数；
> (2) σ 的行列式与迹.

30.

> 设 V 是 n 维内积空间 , U 是 V 的子空间.
> 令 $W=\{\alpha \in V:(\alpha, \beta)=0, \forall \beta \in U\}$. 证明 W 是 V 的子空间且 $V=U \oplus W$.

32.

> 设 $V=\mathrm{R}[x]_n$ ，其上的内积为
>
> $$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$
>
> 设 $U=\{f(x)\in V : f(0)=0\}$.
> (1) 证明 U 是 V 的一个 $n-1$ 维子空间，并求 U 的一组基；
> (2) 当 $n=3$ 时，求 U 的正交补 $U^{\perp}$