上海交通大学 2015-2016 学年第一学期《矩阵理论》试卷 (A)

姓名__________ 学号_____________ 教师姓名__________ 成绩______

一. 单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $V=\mathbb{R}[x]_{2016}$ 是次数小于 2016 的实多项式构成的实线性空间. 设 $n\geq 0, f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)\in V$ 的 n 阶导数, $f^{(0)}(x)=f(x)$. 给定 V 的两个子空间 U,W 如下:

$$U=\{f(x)\in V\,|\,f^{(n)}(0)=0, n\leq 1949\},\ \ W=\{g(x)\in V\,|\,g(x)=x^{1896}(x-1)^{60}h(x),\forall h(x)\in V\}.$$

则 V 的子空间 $U+W$ 的维数 $\dim(U+W)=($ $)$.

(A) 120 (B) 119 (C) 118 (D) 117

2. 设 A 是 $m\times n$ 阶非零复矩阵, $R(A),N(A)$ 分别表示 A 的列空间与零空间. 设 $A=LR$ 是 A 的一个满秩分解. 考虑下述 8 个等式:

$R(A)=R(L)$, $R(A^*)=R(L^*)$, $R(A)=R(R)$, $R(A^*)=R(R^*)$,

$N(A)=N(L)$, $N(A^*)=N(L^*)$, $N(A)=N(R)$, $N(A^*)=N(R^*)$.

则上述等式恒成立的个数为 ( ).

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

3. 设两个 5 阶复矩阵 A 与 B 的最小多项式分别为 $x^3(x-1)$ 与 $x^2(x-1)^2$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} 2A-B & B-A \\ 2A-B & 2B-A \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形所含 Jordan 块的个数为 ( )

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

4. 设 A 为 n 阶正规矩阵, $\|\bullet\|_F$ 是矩阵的 F- 范数, 则 ( ).

(A) $\|A^2\|_F=\|A\|_F^2$ (B) $\|A^2\|_F=\|A^*A\|_F$

(C) $\|A\|_F=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*Ax}{x^*x}$ (D) $\|A\|_F^2=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*A^*Ax}{x^*x}$

5. 设 A 是 $m\times n$ 阶复矩阵, $A^\dagger$ 是 A 的 Moore-Penrose 广义逆, A^* 表示矩阵 A 的共轭转置. 考虑下述 4 个等式:

$A^*AA^\dagger=A^*$; $A^\dagger AA^*=A^*$ $(A^*A)^\dagger A^*=A^\dagger$ $(A^*A)^\dagger A^*=A^*$

则上述等式恒成立的个数为 ( ).

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二. 填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, $e_1=(1,0,)^T, e_2=(0,1)^T, \sigma(e_1)=e_1, \sigma(e_1+e_2)=2e_1$, 则 σ 关于基 e_1+e_2, e_1-e_2 的矩阵为 ( ).

7. 设 $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, A=(e_1,e_1)$. 则 $Ax=e_2$ 的最优解为 ( ).

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos^2(At)-\sin^2(At)=($ $)$.

9. 设 A 是秩为 2 的 3 阶投影矩阵, $3B=I-A$, $C=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B^n$, 则 e^{Ct} 的 Jordan 标准形为 ( ).

10. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n\,(n\geq 2)$, $\|\bullet\|_2$ 是向量的 2- 范数 (即欧几里德范数), $\|\alpha\|_2=1, \|\beta\|_2=\sqrt{10}, \alpha^*\beta=3$. 则矩阵 $\alpha\beta^*+\beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 广义逆为 ( ).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15 题 10 分, 共 70 分)

11. 设

$$U=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z+w=0\},\ W=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y+z-w=0\}$$

是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间. 设 I 是 $\mathbb{R}^4$ 上的恒等变换.

(1) 求 U 与 $U\bigcap W$ 的正交补 $(U\bigcap W)^{\perp}$ 的各一组标准正交基;

(2) 试求出 $\mathbb{R}^4$ 上的所有正交变换 σ 使得线性变换 $I-\sigma$ 的核 $Ker(I-\sigma)=U$.

12. 设 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$. 定义线性变换 $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 如下:

$$\sigma(x) = (x_2, x_3, ..., x_n, x_1)^T.$$

设 σ 在标准基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 A, 其中 $e_i\,(1 \leq i \leq n)$ 为 n 阶单位矩阵的第 i 列.

(1) 求 A;

(2) 求 σ 的特征值与特征向量;

(3) 求 A 的谱分解 (请写出乘法形式与加法形式).

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 **Jordan** 标准形 J;

(2) 计算 e^{At};

(3) 设 $x(0)=(1,0,0)^T$. 求定解问题 $x'(t)=Ax(t)$ 的解.

14. 已知 n 阶 **Hermite** 矩阵 A 的秩为 r，其谱分解为 $A = UDU^*$，其中 U 为酉矩阵，$D = \mathrm{diag}\,(a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)$ 是对角矩阵. 记 I 为 n 阶单位矩阵.

(1) 判断矩阵 $C = e^A$ 是否存在正交三角分解 (即 UR 分解)? 如果判断是, 请求出 C 的一个正交三角分解; 如果判断不是, 请说明理由;

(2) 求分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & \sin A \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

15. **设** A **为** n **阶复矩阵.**

(1) 证明: 存在酉矩阵 U **和半正定矩阵** P**, 使得** $A = UP$**. (此分解称为** A **的极分解.)**

(2) 给出 U **与** P **唯一的充分必要条件.**

2014-2015 学年度上学期《矩阵理论》期末试题

一. 选择题:

1. $n(\geq 2)$阶实奇异矩阵A的特征多项式与最小多项式相等,则A的伴随矩阵列空间的维数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. n　　D. 不能确定

2. 设σ是n维线性空间上的线性变换,适合下列条件的与其它三个不同的是(　　)

A. σ是单映射　　B. $\dim\left(\mathrm{Im}(\sigma)\right) = n$

C. σ是一一对应　　D. σ适合条件$\sigma^n = 0$

3. 设A是实的反对称矩阵, 则下列命题正确的是(　　)

A. e^A是实的反对称矩阵　　B. e^A是正交矩阵

C. $\cos A$是实的反对称矩阵　　D. $\sin A$是实的对称矩阵

4. 设方阵A幂收敛到方阵B, 则下列说法

① $|B| = 0$　　②B是幂等矩阵

③ $AB = BA = B$　　④$r(A) \geq r(B)$

正确的有(　　)个

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设n维向量$x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^T$,$n \geq 2$, $B = I - xx^T$,其中I为单位矩阵,则下列选项正确的是(　　)

A. $\|B\|_1 = 1$　　B. $\|B\|_\infty = 1$　　C. $\|B\|_2 = 1$　　D. $\|B\|_F = 1$

二. 填空题:

1.设$e^A=\begin{pmatrix} e & e^2-e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$,则$A=$__________.

2.设n阶方阵A的最小多项式为$\lambda^k(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-k})$，其中$n\geq k\geq 2,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-k}$全不为 0，则 $\dim R(A^{k-1})$=__________;

3. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵 sinA的 Jordan 标准形$J_{\sin A}=$__________.

4. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，A的 Cholesky 分解$A=LL^T$，下三角矩阵$L=$____________________.

5. 设给定矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵空间$R^{2\times 2}$上线性变换$T$为: $T(X)=kX+AXB$，$\forall X\in R^{2\times 2}$. T是可逆变换当且仅当参数k满足条件__________.

三. 设V是有限维欧氏空间，$u\in V$是一个单位向量，V上线性变换σ定义为: 对任意$x\in V$，$\sigma(x)=x-a(x,u)u$.

(1) 试求非 0 实数 a,使得σ是V上正交变换.

(2) 多项式空间$R[x]_3$中的内积定义如下：对任意$f(x),g(x)\in R[x]_3$，$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. 试求$R[x]_3$中向量$\alpha=1$和$\beta=x$的长度；并求正实数$k$和单位向量$u\in R[x]_3$，使得上述正交变换$\sigma$将向量$\alpha$变成$k\beta$.

四. 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1)求矩阵A的一个满秩分解LR,使得L的第一列为矩阵A的最后一列，并给出A的列空间R(A)的一组基;

(2)求A的左零化空间$N(A^T)$的一组基;

(3)设$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，求向量 b 在线性空间R(A)上的最佳近似.

(4)设σ是线性空间R^4上的正交投影变换,且满足σ的像空间$\mathrm{Im}(\sigma)=R(A)$,试求σ在标准基e_1,e_2,e_3,e_4下的矩阵.

五．设矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.

(1)求矩阵A的 Jordan 标准形J;

(2)试求一个可对角化矩阵D和一个幂零矩阵N,且$DN=ND$，使得$A=D+N$.

(3)计算e^{At};

(4)设$x(0)=(1\quad 2\quad 3)^T$．求定解问题$x'(t)=Ax(t)$的解.

六．设σ是由线性空间R^m到线性空间R^n上的线性变换，其中$m\le n$.

(1)试证：存在R^m到R^m上的幂等变换τ,及R^m到R^n上的单变换φ,使得$\sigma=\varphi\cdot\tau$

(2)令$m=2,n=4$，线性变换σ为:$\sigma(x,y)^T=(x,y,2x,-y)^T$．试求$R^2$上一组标准正交基,及$R^4$上一组标准正交基，使得线性变换σ在这

两组基下的矩阵为对角线元素均非负的4×2矩阵.

七. 证明变换$\mathrm{tr}: X \to \mathrm{tr}(X)$是线性空间$M_n(R)$到$R$的满足性质: $\sigma(XY) = \sigma(YX)$及$\sigma(I) = n$的唯一的线性变换.

上海交通大学 2013-2014 学年第一学期《矩阵理论》试卷

姓名__________　　学号____________　　教师姓名__________　　成绩______

一. 单项选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 V 是全体 3 阶实矩阵构成的实线性空间. 设

$$U=\{A=(a_{ij})\in V\mid a_{12}+a_{23}+a_{31}+a_{32}=0\}, W=\{A\in V\mid A^T-A=0\}.$$

则 $\dim(U\bigcap W)=$(　　).

(A) 3　　**(B)** 4　　**(C)** 5　　**(D)** 6

2. 设 U,W,X 是线性空间 V 的任意三个子空间. 考虑下列等式:

甲. $(U+W)\bigcap X=(U+X)\bigcap(W+X)$;　　乙. $(U+W)\bigcap X=(U\bigcap X)+(W\bigcap X)$;

丙. $X+(U\bigcap W)=(X+U)\bigcap(X+W)$;　　丁. $X+(U\bigcap W)=(X\bigcap U)+(X\bigcap W)$.

则上述四个等式恒成立的个数为(　　).

(A) 0　　**(B)** 1　　**(C)** 2　　**(D)** 3

3. 设 α 是 $n\,(n\geq 2)$ 维单位向量, $A=\alpha\alpha^*$. 考虑下列命题:

甲. A 存在三角分解　　乙. A 存在谱分解

丙. A 存在 QR 分解　　丁. A 存在奇异值分解

则上述四个命题恒成立的个数为(　　).

(A) 1　　**(B)** 2　　**(C)** 3　　**(D)** 4

4. 设 A 为 n 阶正规矩阵, $\|\bullet\|_F$ 是矩阵的 F-范数, 则(　　).

(A) $\|A^2\|_F=\|A\|_F^2$　　**(B)** $\|A^2\|_F=\|A^*A\|_F$

(C) $\|A\|_F=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*Ax}{x^*x}$　　**(D)** $\|A\|_F^2=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*A^*Ax}{x^*x}$

5. 设 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^2=I$, 则 $e^A=$(　　).

(A) eI　　**(B)** eA　　**(C)** $\frac{1}{2}[(e+e^{-1})I+(e-e^{-1})A]$　　**(D)** $\frac{1}{2}[(e-e^{-1})I+(e+e^{-1})A]$

二. 填空题(每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $\sigma((x,y,z)^T)=(x+2y-z,y+z,x-3z)^T$ 是欧氏空间 R^3 上的线性变换, 则 σ 的伴随变换 σ^* 的像空间 $Im(\sigma^*)$ 的一个标准正交基为(　　　　　　　　　　　　).

7. 设两个 3 阶矩阵 A 与 B 满足条件 $A\neq 0, A^2=0, B^2=I$. 如果 $I+B$ 的零空间的维数为 2, 则 $\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ A+B & A-B \end{pmatrix}$ 的极小多项式=(　　　　　　　　　　　　).

8. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 是两个 n 维向量, 其中$x_1=y_1=1$. 如果 $xy^T=LU$ 是矩阵 xy^T 的三角分解, 则 $UL=$(　　　　　　　　　　　　).

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos(At)=$(　　　　　　　　　　　　).

10. 设 α,β 是两个正交的 $n\,(n\geq 2)$ 维向量, 且 $\alpha^*\alpha=\beta^*\beta=4$, 则矩阵 $\alpha\beta^*+\beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 逆为(　　　　　　).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15题 10 分, 共 70 分)

11. 设 $U = \{(x,y,z,w) \,|\, x+y+z+w=0\}$, $W = \{(x,y,z,w) \,|\, x-y+z-w=0\}$ 是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间.

(1) 求 $U \cap W$, $U+W$ 的维数与各自的一组标准正交基;

(2) 求 U 的一个 2 维子空间 U_0 使得 其正交补空间 $U_0^{\perp} \subseteq W$;

(3) 设 σ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的正交投影变换使得 $Ker(\sigma) = U$, 求 σ 在标准基下的矩阵.

12. 设有 $n\,(n \geq 2)$ 阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_n^2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ a_1 & 1+a_1^2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1+a_{n-2}^2 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1+a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ 为实数. 记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x.$

(1) 判断集合 $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间; 如果是, 求其维数; 如果否, 求其生成的子空间的维数;

(2) 设存在 $\mathbb{R}^n$ 的内积 $(\bullet, \bullet)$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $(x, x) = f(x)$, 求 $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ 的值; 并求向量 $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)^T$ 与 $\beta = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 在该内积下的长度与夹角.

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 **Jordan** 标准形 J;

(2) 计算 e^{At};

(3) 设 $x(0)=(1,1,1)^T$. 求定解问题 $x'(t)=Ax(t)$ 的解.

14. **设两个** n **阶 Hermite 矩阵** A, B **的谱分解分别为** $A = UDU^*, B = V\Lambda V^*$**, 其中** U, V **均为酉矩阵，** $D = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_s, 0, \cdots, 0), \Lambda = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_t, 0, \cdots, 0)$ **是对角矩阵，** $a_i \neq 0, 1 \leq i \leq s, b_j \neq 0, 1 \leq j \leq t$**. 记** I **是** n **阶单位矩阵.**

(1) 求 $C = A\, e^{iB}$ **的奇异值分解;**

(2) 求 分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ **的奇异值分解;**

(3) 求 分块矩阵 $N = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ **的 Moore-Penrose 广义逆.**

15. 设$V = M_n(\mathbb{C})$是全体n阶复矩阵构成的复线性空间，$A, B \in V$. 对任意$X \in V$，定义$\sigma(X) = AX - XB$. 证明：A与B没有公共特征值的充分必要条件是对任意n阶矩阵$C \in V$，存在唯一的n阶矩阵$X \in V$使得$\sigma(X) = C$.