Homework 3 of Matrix Theory

Sequence Number:

Name:

Student ID:

习题一

32.

> 设欧式空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 中的内积为
>
> $$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$
>
> (1) 求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵
> (2) 用矩阵乘法形式计算 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

34.

> (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的二维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积，使得 i 与 $1+i$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基，为什么?
>
> (2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积，使得向量组 $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度是多少? 它们的夹角又是多少?

37.

> 在欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求三个向量 $\alpha_1 = (1,0,1,1)', \alpha_2 = (2,1,0,-3)'$ 和 $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)'$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

39.

> 设二维欧式空间 V 的一组基为 α_1, α_2，其度量矩阵为
>
> $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
>
> 试求 V 的一个标准正交基到 α_1, α_2 的过渡矩阵.

42.

> 设线性空间 $V=\mathbb{R}^2$ 是欧式空间 (未必是通常的欧式空间). 设 $\alpha_1=(1,1)',\alpha_2=(1,-1)'$ 与 $\beta_1=(0,2)',\beta_2=(6,12)'$ 是 V 的两组基. 设 α_j 与 β_k 的内积分别为
>
> $$(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_1,\beta_2)=15,(\alpha_2,\beta_1)=-1,(\alpha_2,\beta_2)=3$$
>
> (1) 求两组基的度量矩阵
> (2) 求 V 的一个标准正交基.

44.

> 设 A 是**反对称**实矩阵（即 $A' = -A$），证明：
> (1) A 的特征值为 0 或纯虚数
> (2) 设 $\alpha + \beta\mathrm{i}$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量，其中 α, β 均为实向量，则 α 与 β 正交。

45.

> 设 A 是 Hermite 矩阵。如果对任意向量 x 均有 $x^* Ax = 0$，则 $A = 0$.

习题二

33.

> 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中求一个超平面 W，使得向量 e_1+e_2 在 W 中的最佳近似向量为 e_2.

37.

> 设 α_0 是欧式空间中 V 的单位向量，$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \alpha_0)\alpha_0, \alpha \in V$. 证明
> (1) σ 是线性变换；
> (2) σ 是正交变换.

38.

> 证明：欧式空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 $\Longleftrightarrow$ σ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

44.

> 证明 Givens 旋转矩阵 G 是正交矩阵，对任意向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，计算 Gx 的各个分量. 设 x 是单位向量，讨论如何重复使用若干 Givens 旋转矩阵将 x 变为标准向量 e_1.

习题三

10.

> 设 A 的特征值为 $0, 1$，对应的特征向量为 $(1, 2)', (2, -1)'$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A.

Bonus Questions

> 求 $\alpha = (7, -4, -1, 2)'$ 在 ω 上的正交投影，其中 ω 为 $Ax = 0$ 的解空间
>
> $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$