习题三

18.

求 A 的 Jordan 标准形，其中

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

不难发现 A 为严格上三角矩阵，$A^3=0,\mathbf{rank}(A)=3$ 且 A 的零度 $\eta=n-\mathbf{rank}(A)=2$，故

$$J_A=J_3(0)\oplus J_2(0)$$

25.

详细证明如下定理，并研究矩阵 A 的特征向量与变换矩阵 P 的特征向量之间的关系.

> 设 n 阶矩阵 A 的 Jordan 标准形 $J=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_m}(\lambda_m)$, 设 μ 为 A 的一个特征值，记 $(A-\mu I)^k$ 的零度为 η_k, J 中对角线元素为 μ 的 k 阶 Jordan 块的个数为 ℓ_k, 则
>
> 1. η_1 等于 J 中对角线元素为 μ 的 Jordan 块的个数
> 2. $\ell_1=2\eta_1-\eta_2,\ell_k=2\eta_k-\eta_{k-1}-\eta_{k+1},k\geq 2$

27.

求下列矩阵的 Jordan 标准形

(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4)=(\lambda-2)^3$$

A 的特征值全为 2，检验可知 $(A-2I)^2=0$，最大 Jordan 块的阶数为 2

$$J_A=J_2(2)\oplus J_1(2)$$

(3) $A=\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=(\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+9)=(\lambda+3)^3$$

A 的特征值全为 3，检验可知 $(A+3I)^2=0$，最大 Jordan 块的阶数为 2

$$J_A=J_2(-3)\oplus J_1(-3)$$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda+2)^3$$

A 的特征值全为 -2，检验可知 $(A+2I)^2=0$，最大 Jordan 块的阶数为 2

$$J_A = J_2(-2) \oplus J_1(-2)$$

28.

求下列矩阵的 Jordan 标准形，并求变换矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=J$

(1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3$$

A 的特征值全为 2，检验可知 $(A+2I)^3=0$，最大 Jordan 块的阶数为 3

$$J_A = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

从而 $P^{-1}(A-2I)P = J_A - 2I$，即 $(A-2I)P = P(J_A-2I)$，容易解得

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^4$$

A 的特征值全为 1，检验可知 $(A-I)^2=0$，最大 Jordan 块的阶数为 2

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 21 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $(A-I)$ 的零度 $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 4$，且有 $\ell_1 = 2\eta_1 - \eta_2 = 0$，故不含一阶 Jordan 块

$$J_A = J_2(1) \oplus J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

从而 $P^{-1}(A-I)P = J_A - I$，即 $(A-I)P = P(J_A - I)$，容易解得

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

32.

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的特征值及 A^{100}

因 $|\lambda I - A| = (\lambda^2+1)(\lambda-1)$，故 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 1$

验证可知 $A^4 = I$，故 $A^{100} = (A^4)^{25} = I$

(2) A 的 Jordan-Chevalley 分解是什么?

A 有三个互不相同的特征值，故可对角化。令 $D = A, N = 0$ 显然有 $DN = ND = 0$，$A = A + 0$ 即为 A 的 Jordan-Chevalley 分解

34.

设 V 是由函数 $e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}$ 的线性组合生成的线性空间. 定义 V 的一个线性算子如下：$T(f) = f'$. 求 T 的 Jordan 标准形及 Jordan 基

利用 e^x 的导函数性质可以证明得到 $e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}$ 线性无关。由题意

$$\begin{aligned} T(e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}) &= (e^x, xe^x + xe^x, 2xe^x + x^2e^x, 2e^{2x}) \\ &= (e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \end{aligned}$$

计算 $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^3(\lambda-2) = 0$ 得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$

又 $\ell_1 = 2\eta_1 - \eta_2 = 0, \ell_2 = 0$ 故最大 Jordan 块的阶数为 3，$J_A = J_3(1) \oplus J_1(2)$

欲求 Jordan 基只需求得相似矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = J_A$. 可解得

$P = \mathrm{diag}\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \quad (\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P = (e^x, xe^x, \frac{1}{2}x^2e^x, \frac{1}{2}e^{2x})$

35.

如果矩阵 A 的特征多项式和最小多项式相同，问 A 的 Joran 标准形有何特点

即 $f_A(\lambda)=m(\lambda)$，且 n 次多项式 $f_A(x)$ 有 n 个不同的根。则 A 的 Joran 标准形有 n 个 Jordan 块.

36.

设 σ 是 $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ 的循环位移变换，即 $\sigma\Big((x_1,x_2,\cdots,x_n)'\Big)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)'$. 证明:

(1) σ 的特征值恰好为方程 $\lambda^n=1$ 的所有根 $\lambda_j=e^{\frac{2\pi i}{n}j},1\le j\le n$

$$\sigma\Big((x_1,\cdots,x_n)'\Big)=A(x_1,\cdots,x_n)'=(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)'$$

故 $A=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&1\\1&&&0\end{pmatrix}$，令 $|\lambda I-A|=0$ 得到

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&1\\1&&&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^n-1=0$$

(2) σ 的属于特征值 λ_j 的特征向量为 $\alpha_j=(\lambda_j,\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n)'$, 且 $\|\alpha_j\|=\sqrt{n}$

假设特征值为 λ_j, 代入验证特征向量 α_j

$$A\alpha_j=(\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n,\lambda_j)'=(\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n,\lambda_j^{n+1})'=\lambda_j(\lambda_j,\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n)'=\lambda_j\alpha_j$$

(3) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交基

由定义

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\lambda_i\bar{\lambda}_j+(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^2+\cdots+(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^n=\lambda_i\bar{\lambda}_j\cdot\frac{1-(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^n}{1-\lambda_i\bar{\lambda}_j}=0$$

最后一个等号是因为 $(\lambda_i\bar{\lambda}_j)^n=\lambda_i^n\bar{\lambda}_j^n=1$

而当 $i=j$ 时，$\lambda_i\bar{\lambda}_i=|\lambda_i|^2=1$,

$$(\alpha_i,\alpha_i)=\lambda_i\bar{\lambda}_i+(\lambda_i\bar{\lambda}_i)^2+\cdots+(\lambda_i\bar{\lambda}_i)^n=n$$

(4) 任何向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 均是 σ 的特征向量 α_j 的线性组合 $x=\sum_{j=1}^n a_j\alpha_j$，即 $x_k=\sum_{j=1}^n a_je^{\frac{2\pi i}{n}j}$

因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交基，故任何向量可以被其线性表示。

(5) 上面的系数 $a_j=(x,\alpha_j)/n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ke^{-\frac{-2\pi i}{n}jk}$

由正交基的性质可知

$$a_j = \frac{(x, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = (x, \alpha_j)/n$$

(6) 研究 σ 与第一章习题7中 Fourier 矩阵的关系，并由此再求该矩阵的逆

Fourier 矩阵可以写成 $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的形式。

由 (3) 所求

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_j^* \alpha_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ n & i = j \end{cases}$$

可以得到 $F^{-1} = \dfrac{1}{n} F^*$, 其中 F^* 为 F 的共轭转置。

习题四

3.

证明两个正规矩阵相似的充要条件是特征多项式相同

1. 必要性

$\text{相似} \iff A = P^{-1}BP \iff |\lambda I - A| = |\lambda I - P^{-1}BP| = |P^{-1}||\lambda I - B||P| = |\lambda I - B|$

2. 充分性

A 和 B 的特征多项式相同，故 A 和 B 有相同的特征值。又 A 和 B 是正规阵，可以酉对角化，故两者相似于相同的对角阵，从而相似。

5.

设 A 是 n 阶正规矩阵，x 是任意复数. 证明

(1) $A - xI$ 也是正规矩阵

A 正规阵，故存在酉阵 U 使得 $U^*AU = D$ 为对角阵， 从而

$$U^*(A - xI)U = U^*AU - U^*xIU = D - xI$$

也是一个对角阵，故 $A - xI$ 也是正规阵

(2) 对于任何向量 x，向量 Ax 与 A^*x 的长度相同

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax = x^*AA^*x = (A^*x)^*(A^*x) = \|A^*x\|^2$$

(3) A 的任一特征向量都是 A^* 的特征向量

A 为正规阵，设 A 的酉对角化为 $U^*AU = D$, 两边同时乘 U 得特征向量 $AU = DU$ 为 U 的列向量；两边同时取共轭转置有 $U^*A^*U = D^*$，同样有 $A^*U = D^*U$ 特征向量仍为 U 的列向量.

(4) A 的属于不同特征值的特征向量正交

由(3)，不同特征值对应的特征向量为 U 中不同的列，因 U 为酉阵，故正交。

7.

设 A 是正规矩，证明

(1) 若 A 是幂等阵，则 A 是 Hermite 矩阵

幂等阵的特征值非零即1，故必有 $A^*=A$

(2) 若 $A^3=A^2$，则 $A^2=A$

不妨假设 $A=U^*DU$ 为 A 的酉对角化. 因 $A^3=A^2$, 容易推出 $D^3=D^2$, 进而 $D^2(D-I)=0$. A 的特征值均为 0 或 1, 故 A 幂等（也可直接从特征值考虑）

(3) 若 A 又是 Hermite 阵，而且也是一个幂幺阵 (即 $A^k=I$)，则 A 是对合阵 (即 $A^2=I$)

不妨假设 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^k=1$. 因 A 为 Hermite 阵，故 λ 为实数 $\lambda=\pm1$, 进而 $\lambda^2=I$, 容易推出 $A^2=I$

8.

证明特征值的极大极小定理：设 A 是 Hermite 矩阵，其全部特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\lambda_n$ 则：

$$\lambda_k=\min_{\substack{w_i\in\mathbb{C}^n\\1\le i\le n-k}}\max_{\substack{0\neq x\perp w_i\\1\le i\le n-k}}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\max_{\substack{w_i\in\mathbb{C}^n\\1\le i\le n-k}}\min_{\substack{0\neq x\perp w_i\\1\le i\le n-k}}\frac{x^*Ax}{x^*x}$$

特别地,

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}=\lambda_n=\max_{x\neq0,x\in\mathbb{C}}\frac{x^*Ax}{x^*}=\max_{x^*x=1}x^*Ax\\ \lambda_{\min}=\lambda_1=\min_{x\neq0,x\in\mathbb{C}}\frac{x^*Ax}{x^*}=\min_{x^*x=1}x^*Ax\end{aligned}$$

参考wikipedia上的证明即可

10.

直接证明实对称矩阵与（实）正交矩阵可以酉对角化，从而均为正规矩阵.

1. 实对称矩阵 A 可以对角化

$$Q'AQ=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$$

2. 实正交矩阵 A 可做 Schur 三角变换

$$U^*AU=T$$

其中 U 为酉阵，$A'A=I$ 得 $T^*=T^{-1}$ 进而 T 为对角阵(上三角+下三角)。

21.

设 $A=LU$ 可逆，其中 L 与 U 分别为下三角矩阵与上三角矩阵，证明存在单位下三角矩阵 L' 与上三角矩阵 U', 使得 $A=L'U'$

利用高斯消元的思想进行分解，设 $A=(a_{ij})$，对其做行变换得上三角阵

$$LA^{(0)}=A^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix} \quad m_{i1}=-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

从而 $A^{(0)}=L^{-1}A^{(1)}=L'U'$ 即为所求

22.

证明矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不存在三角分解

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bd & b \\ cd & c \end{pmatrix}$

找不到符合要求的 a,b,c,d. 故 A 不存在三角分解

27.

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(1) 求 $R(A)$ 的标准正交基

容易知道 $R(A)=\mathbf{span}\{(2,1,2)',(1,1,1)'\}=\mathbf{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$

对 α_1,α_2 做 Schmidt 正交化可得标准正交基

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})' \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_2-(\alpha_2,\beta_1)\beta_1}{\|\alpha_2-(\alpha_2,\beta_1)\beta_1\|}=(-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}})' \end{aligned}$$

(2) 写出 A 的 QR 分解

令 $Q=(\beta_1,\beta_2)$, 可得

$$R=\begin{pmatrix} \|\alpha_1\| & (\alpha_2,\beta_1) \\ 0 & \|\alpha_2-(\alpha_2,\beta_1)\beta_1\| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5/3 \\ 0 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

(3) 求 $Ax=b$ 的最小二乘解

最小二乘解为 $x=(A'A)^{-1}A'b=R^{-1}Q'b$ 代入可得 $x=(4,2)'$

(4) 证明 $u_1=(0,1,0)', u_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})'$ 也是 $R(A)$ 的标准正交基，其中 $R(A)$ 为 A 的列空间

不难发现 u_1,u_2 线性无关且 $(u_1,u_2)=0$, $\|u_1\|=\|u_2\|=1$. 故 u_1,u_2 为 $R(A)$ 的标准正交基。

28.

求下列矩阵的 QR 分解

(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

不难发现 $\mathrm{rank}(A)=3$ 列满秩, 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$\begin{aligned}\eta_1&=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\ \eta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ \eta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\alpha_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

进一步标准化

$$\beta_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1\quad\beta_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_2\quad\beta_3=\frac{\eta_3}{\|\eta_3\|}=\sqrt{3}\eta_3$$

从而

$$\begin{aligned}A&=QR\\&=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\sqrt{(\eta_1,\eta_1)}&(\alpha_2,\beta_1)&(\alpha_3,\beta_1)\\&\sqrt{(\eta_2,\eta_2)}&(\alpha_3,\beta_2)\\&&\sqrt{(\eta_3,\eta_3)}\end{pmatrix}\\&=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\&&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$

不难发现 $\mathrm{rank}(A)=2$ 列满秩，记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\eta_1&=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ \eta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

进一步标准化

$$\beta_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 \quad \beta_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\eta_2$$

从而

$$\begin{aligned} A &= QR \\ &= (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} \sqrt{(\eta_1, \eta_1)} & (\alpha_2, \beta_1) \\ & \sqrt{(\eta_2, \eta_2)} \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

30.

计算 28 题中各矩阵的奇异值分解和相应的四个子空间

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

本题特征值手算较为复杂，可以采用 julia 做分解计算

```
A = [0 1 1; 1 1 0; 1 0 0];
U, D, V = svd(A);
U # 依次输入U, D, V 即可•SVD分解
```

```
3×3 Array{Float64,2}:
 -0.591009  -0.736976   0.327985
 -0.736976   0.327985  -0.591009
 -0.327985   0.591009   0.736976
```

可以得到

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= UDV' \\ = \begin{pmatrix} -0.591009 & -0.736976 & 0.327985 \\ -0.736976 & 0.327985 & -0.591009 \\ -0.327985 & 0.591009 & 0.736976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.80194 & & \\ & 1.24698 & \\ & & 0.445042 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.591009 & -0.736976 & 0.327985 \\ -0.736976 & 0.327985 & -0.591009 \\ -0.327985 & 0.591009 & 0.736976 \end{pmatrix}' \end{aligned}$$

从而四个相关子空间

$$\begin{aligned} R(A) &= \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} & R(A^*) &= \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \\ N(A) &= \emptyset & N(A^*) &= \emptyset \end{aligned}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

令 $|\lambda I - A^*A| = (\lambda-2)^2 - 1 = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, 故 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

对 $(\lambda_i I - A^*A)\beta = 0$ 可以求得单位特征向量

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

则 A^*A 的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ 对应的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

令 $U = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3), V = (\beta_1 \quad \beta_2)$, 则 $A = UDV^*$ 为 A 的 SVD 分解

$$\begin{aligned} R(A) &= \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}, & R(A^*) &= \text{span}\{\beta_1, \beta_2\} \\ N(A) &= \emptyset, & N(A^*) &= \text{span}\{\alpha_3\} \end{aligned}$$

31.

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 证明

$\sigma_{\min}(A) = \min\{(x^*A^*Ax)^{1/2} : x^*x = 1\} \qquad \sigma_{\max}(A) = \max\{(x^*A^*Ax)^{1/2} : x^*x = 1\}$

$(A^*A)^* = A^*A$，A 是 Hermite 阵，故 A^*A 是正规阵

存在酉阵 U，使得 $U^*A^*AU = \text{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 其中 λ_i 是 A^*A 的特征值 $\lambda_i \geq 0$

不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ 取 $X = u_i$, 则

$$(AX, AX) = X^*A^*AX = \lambda_i X^*X = \lambda_i \implies (X^*A^*AX)^{1/2} = \sqrt{\lambda_i}$$

为 A 的奇异值，故 $\sigma_{\min}(A) = \sqrt{\lambda_n}, \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_1}$

33.

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的秩为 $r > 0$, A 的奇异值分解为 $A = U\text{diag}(s_1, \cdots, s_r, 0, \cdots, 0)V^*$，求矩阵 $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

由题意 $B^*B = (A^*A^*)\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 2A^*A$, A^*A, B^*B 为正规阵。于是存在 Q 酉阵，使得

$$Q^*A^*AQ=\begin{pmatrix} s_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & s_r^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad Q^*B^*BQ=\begin{pmatrix} 2s_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2s_r^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设 $\Sigma=\mathrm{diag}\{s_1,\cdots,s_r,0,\cdots,0\}$, 则 B 的非零奇异值为 $\sqrt{2}s_1,\cdots,\sqrt{2}s_r$

因 B^*B 特征向量与 A^*A 一致，故

$$B=\begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2}} & \frac{u}{\sqrt{2}} \\ \frac{u}{\sqrt{2}} & -\frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}D \\ 0 \end{pmatrix}\cdot V^* \qquad A=U\Sigma V^*$$