矩阵理论试题精选(一)

1.

设 $V=\mathbb{R}[x]_{2016}$ 是次数小于 2016 的实多项式构成的实线性空间。设 $n\geq 0, f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)\in V$ 的 n 阶导数，$f^{(0)}(x)=f(x)$. 给定 V 的两个子空间 U,W 如下：

$$U=\{f(x)\in V \mid f^{(n)}(0)=0, n\leq 1949\} \quad W=\{g(x)\in V \mid g(x)=x^{1896}(x-1)^{60}h(x), \forall h(x)\in V\}$$

则 V 的子空间 $U+W$ 的维数 $\dim(U+W)$ 是多少?

2.

设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 上线性变换，$e_1 = (1, 0)'$，$e_2 = (0, 1)'$，$\sigma(e_1) = e_1$，$\sigma(e_1 + e_2) = 2e_1$，则 σ 关于基 $e_1 + e_2$，$e_1 - e_2$ 的矩阵是?

3.

设

$$U=\{(x,y,z,w)'\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0\} \quad W=\{(x,y,z,w)'\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z-w=0\}$$

是通常欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间，设 I 是 $\mathbb{R}^4$ 上的恒等变换。

(1) 求 U 与 $U\cap W$ 的正交补 $(U\cap W)^{\perp}$ 的各一组标准正交基；

(2) 试求出 $\mathbb{R}^4$ 上的所有正交变换 σ 使得线性变换 $I-\sigma$ 的核 $\mathrm{Ker}(I-\sigma)=U$.

4.

设给定矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上线性变换 T 为：$T(X)=kX+AXB, \forall X\in\mathbb{R}^{2\times 2}$。$T$ 是可逆变换当且仅当参数 k 满足何条件?

5.

设

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

(1) 求矩阵 A 的一个满秩分解 LR, 使得 L 的第一列为矩阵 A 的最后一列，并求出 A 的列空间 $R(A)$ 的一组基；

(2) 求 A 的左零化空间 $N(A')$ 的一组基；

(3) 设 $b=(1,1,1,1)'$，求向量 b 在线性空间 $R(A)$ 上的最佳近似

(4) 设 σ 是线性空间 $\mathbb{R}^4$ 上的正交投影变换，且满足 σ 的像空间 $\mathrm{Im}(\sigma)=R(A)$，求 σ 在标准基 e_1,e_2,e_3,e_4 下的矩阵。

6.

证明变换 $\mathrm{tr} : X \to \mathrm{tr}(X)$ 是线性空间 $M_n(R)$ 到 R 的满足性质：$\sigma(XY) = \sigma(YX)$ 及 $\sigma(1) = n$ 的唯一线性变换.

7.

设 V 是全体3阶实矩阵构成的实线性空间。设

$$U = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{12} + a_{23} + a_{31} + a_{32} = 0\} \quad W = \{A \in V \mid A' - A = 0\}$$

则 $\dim(U \cap W)$ 为多少?

8.

设 $U=\{(x,y,z,w)\mid x+y+z+w=0\}, W=\{(x,y,z,w)\mid x-y+z-w=0\}$ 是通常欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间

(1) 求 $U\cap W, U+W$ 的维数和各自的一组标准正交基；

(2) 求 U 的一个2维子空间 U_0 使得其正交补空间 $U_0^{\perp}\subset W$;

(3) 设 σ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的正交投影变换使得 $\mathrm{Ker}(\sigma)=U$, 求 σ 在标准基下的矩阵

9.

设有 $n(n \geq 2)$ 阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_n^2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ a_1 & 1+a_n^2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1+a_{n-2}^2 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1+a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i(1 \leq i \leq n)$ 为实数。记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$.

(1) 判断集合 $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间；如果是，求其维数；如果否，求其生成的子空间的维数；

(2) 设存在 $\mathbb{R}^n$ 的内积 $(\cdot, \cdot)$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $(x, x) = f(x)$，求 $a_i(1 \leq i \leq n)$ 的值；并求向量 $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)'$ 与 $\beta = (1, 1, \cdots, 1)'$ 在该内积下的长度与夹角

10.

设 $V=M_n(\mathbb{C})$ 是全体n阶复矩阵构成的线性空间，$A,B\in V$，对任意 $X\in V$，定义 $\sigma(X)=AX-XB$。证明：A 与 B 没有公共特征值的充分必要条件是对任意n阶矩阵 $C\in V$，存在唯一的n阶矩阵 $X\in V$ 使得 $\sigma(X)=C$