



VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

{STUDIJŲ PROGRAMOS} STUDIJŲ PROGRAMA

{Darbo tipas}

Darbo pavadinimas lietuvių kalba

Work Title in English

Vardas Pavardė

Darbo vadovas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

Mokslinis konsultantas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

Recenzentas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

**Vilnius
2025**

Padėka

Darbo autorius dėkoja Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Informacinių technologijų atviros prieigos centrui už suteiktus našųjų skaičiavimų (angl. High Performance Computing, HPC) išteklius šio darbo tyrimui atlikti.

Čia taip pat galima pridėti padėkas įvairiems kitiems dalykams, pavyzdžiui: vadovui, universitetui, įmonei ir t. t.

Santrauka

Darbo santrauka.

Raktiniai žodžiai: čia surašomi su darbu susiję raktiniai žodžiai, *minimalus raktinių žodžių kiekis - 3*, tačiau jų gali būti ir daugiau.

Summary

Summary in english.

Keywords: work related keywords, with a *minimum of 3 keywords*, but can be more.

Iliustracijų sąrašas

1	Paveikslėlių numeriai rašomi apačioje, antraštė rašoma apačioje	15
---	---	----

Lentelių sąrašas

1	Lentelės numeruojamos viršuje, antraštės rašomos viršuje	14
---	--	----

Turinys

Santrauka	3
Summary	4
Iliustracijų sąrašas	5
Lentelių sąrašas	6
Žymėjimai	8
Santrumpos	9
Įvadas	10
1. Formatavimas	11
1.1. Matematinis tekstas	11
1.2. Matematinų rezultatų formulavimas	12
1.3. Lentelės	14
1.4. Paveikslėliai, grafikai, diagramos, nuotraukos	14
1.5. Sąrašai	15
2. Programinio kodo pateikimas	16
2.1. Algoritmai	16
2.1.1. Skyrelio pavyzdys	16
Rezultatai ir išvados	17
1 priedas. Citavimo pavyzdžiai	19

Žymėjimai

Šis skyrius skirtas, jei yra naudojami žymėjimai. Pavyzdžiui:

- $\mathbb{E} X$ žymi atsitiktinio dydžio X vidurkj.

Santrumpos

Šis skyrius skirtas, jei yra naudojamos santrumpos. Pavyzdžiui:

v.p.n.a.d. vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Ivadas

Bet kokiam rašto darbui rašyti būtina naudotis atitinkamos studijų programos metodiniais nurodymais¹. Juose rasite visus rašto darbų nurodymus susijusius su citavimu, darbo struktūra, apimtimi ir t. t.

¹Visų programų naujausius metodinius reikalavimus galima rasti čia, atitinkamoje programoje: <https://mif.vu.lt/lt3/studijos/bakalaurams>

1. Formatavimas

Šiame skyriuje bus pateikti pavyzdžiai matematinio teksto, lentelių ir paveikslėlių formatavimams bei aprašyta, kaip taisyklingai suformuluoti matematinius jūsų baigiamojo darbo rezultatus.

1.1. Matematinis tekstas

Matematinės formulės gali būti įterptos teksto pastraipose, formulės \LaTeX kodą atskiriant simboliais $\$ \dots \$$. Pavyzdys: trigonometrinė tapatybė $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Tačiau formulės atrodys daug gražiau, jeigu jos bus išskirtos į atskiras lygtis, formulės kodą patalpinant į aplinką $\[\dots \]$. Štai tokios lygties pavyzdys:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Šioje lygtyje buvo panaudoti matematiniai simboliai \mathbb{R} ir e , kurių komandos $\backslash\mathbb{R}$ ir $\backslash e$ apibrėžtos šablono pradžioje.

Kartais formulės užima kelias eilutes, pvz.:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 + 0 = \left(\frac{\sqrt{16}}{\tan^2 \pi/3 + 1} \right) + \ln e + \sin \pi \\ &= (\sin^2 17 + \cos^2 17)^{\ln e} + \cos 0 + (x^{1/\ln x})'. \end{aligned} \tag{1}$$

Nepamirškite padėti taško $(.)$ formulės pabaigoje, jeigu tai sakinio pabaiga. Taip pat akreipkite dėmesį į skliaustų, kurių viduje stovi didelė trupmena $\frac{\dots}{\dots}$, aukštį, kuris automatiškai reguliuojamas komandomis $\backslash\left(\dots \right)$ arba nurodomas komandomis $\backslash\big, \backslash\Big, \backslash\bigg, \backslash\Bigg$.

Jeigu formulės prisireiktų vėliau, jos nereikia kiekvieną kartą perrašinėti iš naujo. Reikiamą formulę visada galima pacituoti su komanda $\backslash\text{eqref}$. Pavyzdžiui, aukščiau užrašyta formulė su numeriu cituojama taip: lygtis (1). Tam reikia komanda $\backslash\text{label}$ formulei priskirti laikiną pavadinimą, kurį \LaTeX automatiškai pakeis į reikiamą numerį. Daugiau informacijos apie \LaTeX matematinius simbolius, lygtis, matematinės aplinkas ir komandas galima rasti šiame dokumente [SP].

Pateiksime dar keletą formulių, kuriose naudojamos sudėtingesnės matematinės komandos. Matricos ir determinantai užrašomi naudojant LaTeX aplinkas pmatrix ir vmatrix :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2.$$

Sudėtingesnėms lygtims ir matricoms formatuoti labai praverčia paketo mathtools [ML3] komandomis. Paketas mathtools įtrauktas į darbo šabloną, todėl jo komandomis galima naudotis tiesiogiai.

Išvestinė užrašoma naudojant apostrofo simbolį $(')$, pavyzdžiui,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Teiloro polinomas:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Paprastoms ir dalinėms išvestinėms, diferencialams, gradientams ir pan. užrašyti į darbo šabloną įtrauktos labai patogios komandos `\dv` ir `\pdv`, `\dd`, `\grad` iš `physics` paketo [Bar]:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad df, \quad \nabla f$$

Integralą su rėžiais užrašysime naudodami \LaTeX komandą `\int_{a}^b`:

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b) = F(x) \Big|_a^b$$

Daugialypiams, paviršiniams, kreiviniams integralams užrašyti galima naudoti komandas `\iint`, `\iiint`, `\oint`, ir pan.

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad \iint_D f(x, y) dS, \quad \int_{\gamma} f(x, y) dl, \quad \oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

1.2. Matematinų rezultatų formulavimas

Jūsų darbo matematiniams rezultatams suformuluoti reikėtų naudoti aplinkas

Apibrėžimas, Teiginys, Teorema, Lema,

Išvada, Pastaba, Pavyzdys, Įrodymas.

Šios aplinkos jau yra apibrėžtos jūsų baigiamojo darbo šablone `VUMIFTemplateClass.cls`, sulietuvinus standartines \LaTeX komandas

`definition, proposition, theorem, lemma,`

`corollary, remark, example, proof.`

Apibrėžimo pavyzdys:

1.2..1 Apibrėžimas. Skaičius $p \in \mathbb{N}$ yra vadinamas *pirminiu skaičiumi*, jeigu jisai dalijasi tik iš 1 ir savęs paties. Pirminių skaičių aibė yra žymima \mathbb{P} .

Teiginio pavyzdys:

1.2..2 Teiginys. Dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sandaugos XY vidurkis lygus tų pradinių dydžių vidurkių sandaugai:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega) d\mu(\omega) = \mathbb{E} X \cdot \mathbb{E} Y,$$

su sąlyga, kad X, Y ir XY vidurkiai egzistuoja.

Svarbūs matematiniai teiginiai yra vadinami *teoremomis*:

1.2..3 Teorema (Pirmoji teorema apie izomorfizmą). *Sakykime, kad $f : G \rightarrow H$ – grupių G ir H homomorfizmas. Tada grupės G vaizdas $f(G)$ izomorfiškas faktorgrupei $G / \ker(f)$, tai yra*

$$f(G) \cong G / \ker(f).$$

Trumpesni pagalbiniai teiginiai vadinami *lemomis*. Tačiau ir lemų formuluotės gali būti pakankamai sudėtingos:

1.2..4 Lema (Lema apie vektorių pakeitimą). *Tarkime, kad tiesinės erdvės V virš kūno k vektoriai*

$$v_1, v_2, \dots, v_s \tag{2}$$

ys tiesiškai nepriklausomi, ir kad kiekvienas šios šeimos vektorius $v_i, 1 \leq i \leq s$ tiesiškai išreiškiamas vektoriais

$$w_1, w_2, \dots, w_t. \tag{3}$$

Tuomet $s \leq t$, ir egzistuoja toks vektorių šeimos (3) pošeimis $w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_s}$, kurį pakeitę vektoriais v_1, v_2, \dots, v_s , gausime vektorių šeimai (3) ekvivalenčių šeimą (3).

Aplinka *Pastaba* skirta smulkiems pastebėjimams:

1.2..5 Pastaba. Teoremos sąlyga, kad intervalas $[a, b]$ būtų kompaktiškas, o funkcija $f(x)$ tame intervale būtų tolydi, yra būtina.

Kita aplinka *Pavyzdys*, skirta trumpiems skaitiniams arba formulų pavyzdžiams:

1.2..6 Pavyzdys. Lygčių sistemos

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

sprendinių Kramerio formulė:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

čia

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ec.$$

Įrodymams užrašyti naudojama sulietuvinta aplinka proof. Žemiau užrašyti teiginys ir to teiginio įrodymas. Įrodymo pabaigą \LaTeX automatiškai pažymi \square simboliu.

1.2..7 Teiginys. *Kvadratinė matrica A yra neišsigimusi tada ir tik tada, kai $\det A \neq 0$.*

Įrodymas. Jeigu A yra neišsigimusi, tai egzistuoja matrica B , tokia kad $AB = I$. Remiantis matricų sandaugos determinanto savybe,

$$\det A \cdot \det B = \det AB = \det I = 1.$$

Taigi, $\det A \neq 0$. Dabar tarkime, kad $\det A \neq 0$. Tegul A^* yra transponuota adjunktų matrica. Tuomet:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} \\ = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot I.$$

Taigi, $A \cdot A^* = \det A \cdot I$. Padaliję abi tapatybės puses iš skaičiaus $\det A \neq 0$, gauname $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} A^*\right) = I$. Panašiai galime parodyti, kad $\left(\frac{1}{\det A} A^*\right) \cdot A = I$. Vadinasi, $\frac{1}{\det A} A^*$ yra matricos A atvirkštinė, taigi A yra neišsigimusi. \square

Atkreipsime dėmesį, kad matematinės aplinkos numeruojamos automatiškai. Kaip ir formules, matematinius apibrėžimus, teiginius, pavyzdžius galima cituoti kitur tekste pirma įvardijant su \label o tada reikiamoje vietoje sukuriant citavimo nuorodą \ref. Pavyzdžiui, mes galime pacituoti Teoremą 1.2.3 arba Lemą 1.2.4 tose teksto vietose, kuriose mums reikia jomis pasiremti.

1.3. Lentelės

Jei yra pristatomos lentelės, tai lentelių nuorodos turėtų būti paminėti tekste, pavyzdžiui: 1 lentelėje matomi kažkokie rezultatai.

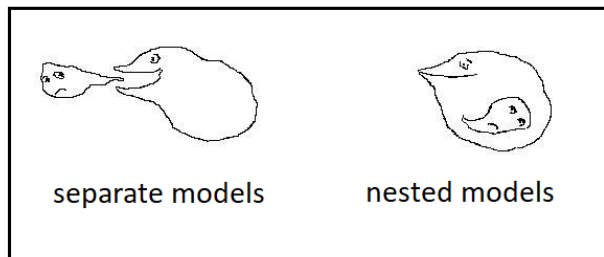
1 lentelė. *Lentelės numeruojamos viršuje, antraštės rašomos viršuje*

Stulpelis 1	Stulpelis 2	Stulpelis 3

Kiekviena lentelė būtinai turi turėti pavadinimą, kuris, kaip ir lentelės numeris, rašomas toje pačioje eilutėje virš lentelės. Visos lentelės numeruojamos paeiliui (nerekomenduojama numeruoti raidėmis, pvz., 7 a lentelė).

1.4. Paveikslėliai, grafikai, diagramos, nuotraukos

Jei darbe naudojami paveikslėliai, būtina juos paminėti tekste, pvz.: 1 paveikslėlyje matome paveikslėlio pateikimo pavyzdį.



1 pav. *Paveikslėlių numeriai rašomi apačioje, antraštė rašoma apačioje*

Toliau eina tekstas po paveikslėliu.

1.5. Sąrašai

Nenumeruojamo sąrašo pavyzdys:

- pirmasis elementas;
- antrasis elementas.

Numeruojamo sąrašo pavyzdys:

1. lorem ipsum dolor sit amet;
2. consectetur adipiscing elit;
3. vivamus a nisl gravida.

2. Programinio kodo pateikimas

Šiame skyriuje pateikiamas programinio kodo pateikimo būdas rašto darbe.

2.1. Algoritmai

Algoritmai, lygiai taip pat, kaip ir paveikslėliai ar lentelės, yra numeruojami. Juos būtina paminėti tekste, pvz.: 1 algoritmas naudojamas surasti minimalią funkcijos \mathcal{L} reikšmę.

1 algoritmas Gradientinio nusileidimo pseudokodas

```
1: # Darome prielaidą, kad  $\mathcal{L}$  apibrėžtas tekste
2: Įeitis:  $\mathcal{D}$  – duomenų rinkinys
3: Įeitis:  $\theta_0$  – parametrų atsitiktinių reikšmių inicializavimas
4: Įeitis:  $\gamma$  – žingsnio dydis, mokymosi greitis (angl. learning rate, step size)
5: Įeitis:  $m$  – epochų skaičius
6: for  $i = 1, 2, \dots, m$  do
7:    $\theta_i := \theta_{i-1} - \gamma \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\mathcal{D}, \theta_{i-1})$ 
8:   # Funkcijos  $\mathcal{L}$  išvestinė suskaičiuojama automatiškai, autograd pagalba
9: end for
```

2.1.1. Skyrelio pavyzdys

Nebūtina naudoti daug skyrelių (*subsubsections*).

Rezultatai ir išvados

Detaliau, kas turi būti parašyta šiame skyriuje, rasite atitinkamos programos metodiniuose reikalavimuose.

Literatūra ir šaltiniai

- [Bar] S. C. de la Barrera. *The physics package*. URL: <https://ctan.altpu.ru/macros/latex/contrib/physics/physics.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [ML3] M. Høgholm, L. Madsen, the \LaTeX 3 project. *The mathtools package*. URL: <https://sunsite.icm.edu.pl/pub/CTAN/macros/latex/contrib/mathtools/mathtools.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [Ope24a] OpenAI. *ChatGPT*. 2024. URL: <https://www.openai.com/> (žiūrėta 2024-06-06).
- [Ope24b] OpenAI. *ChatGPT*. Atsakymas į klausimą apie citavimo pavyzdį. 2024. URL: <https://chatgpt.com/share/550cde77-019d-414d-b36a-f3ac9b857b9c> (žiūrėta 2024-06-06).
- [Pav05] A. Pavardonis. „Magistrinio darbo pavadinimas“. Magistro darbas. Universiteto pavadinimas, 2005.
- [PPP+02] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas, D. Pavardinskas. „Straipsnio pavadinimas“. Iš: *Rinkinio pavadinimas*. Miestas, šalis: Leidykla, 2002, puslapiai 3–15.
- [PPP01] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. „Straipsnio pavadinimas“. Iš: *Žurnalo pavadinimas* IV (2001), puslapiai 8–17.
- [PPP03] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Knygos pavadinimas*. 172 psl. Miestas, šalis: Leidykla, 2003.
- [PPP04] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Elektroninės publikacijos pavadinimas*. <http://example.com/kelias/iki/straipsnio.pdf>. 45 KB, žiūrėta 2015-02-01. 2004.
- [PPP22] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Duomenų rinkinio pavadinimas*. 2022. URL: nuoroda.
- [pus] I. puslapis. *Puslapio pavadinimas*. URL: [puslapio%20nuoroda](#) (žiūrėta 2024-04-25).
- [SP] A. M. Society, the \LaTeX Project. *User's Guide for the amsmath Package (Version 2.1)*. URL: <https://mirror.macomnet.net/pub/CTAN/macros/latex/required/amsmath/amslldoc.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [STU+02] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname, D. Vsurname. „Article title“. Iš: *Conference book title*. City, country: Publisher, 2002, puslapiai 3–15.
- [STU01] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. „Article Title“. Iš: *Journal Title* IV (2001), puslapiai 3–15.
- [STU03] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. *Book title*. 172 p. City, country: Publisher, 2003.
- [STU04] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. *Online Publication Title*. <http://example.com/path/to/the/article.pdf>. 45 KB, žiūrėta 2015-02-01. 2004.
- [Sur05] A. Surname. „Title of PhD thesis“. Disertacija. Title of university, 2005.

1 priedas.

Citavimo pavyzdžiai

Dokumente - *bibliografija.bib*, reikia sudėti visus cituojamus šaltinius ir panaudojus funkciją `{\cite{cituojamo objekto pavadinimas}}` atitinkamas šaltinis bus pridėtas prie literatūros šaltinių sąrašo.

bibliografija.bib galima rasti kelių dažniausiai cituojamų šaltinių tipų pavyzdžius:

- internetiniai puslapiai (*@online*) [pus],
- duomenų rinkiniai (*@dataset*) [PPP22]
- straipsniai (*@article*) [PPP01; STU01],
- straipsniai iš konferencijos (*@inproceedings*) [PPP⁺02; STU⁺02],
- knygos (*@book*) [PPP03; STU03],
- baigiamieji darbai (*@thesis arba mastersthesis/phdthesis* [Pav05; Sur05])
- elektroninės publikacijos (*@misc*) [PPP04; STU04]

Taip pat yra pateikti pavyzdžiai - ChatGPT citavimui, tiek bendrai [Ope24a], tiek konkrečiam pokalbiui [Ope24b].