Diferencialinės lygtys P2

Raimundas Vidunas
Vilniaus Universitetas

MIF, 2023 rugsėjo 11 d.

Pirmųjų paskaitų tikslai

Praeitą savaitę:

- Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai.
- Pirmosios eilės paprastosios diferencialinės lygtys (PDL).
- Koši uždavinys ir jo sprendinio egzistavimas bei vienatis.
- Pirmos eilės lygčių su atsiskiriančiais kintamaisiais sprendimas.

Šiandien:

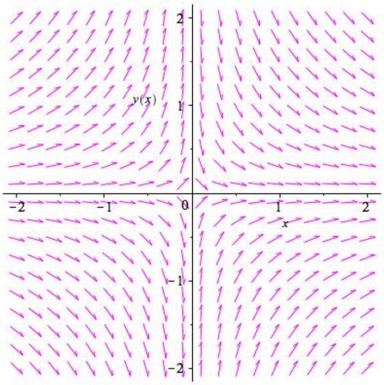
- Geometrinė diferencialinių lygčių ir Koši uždavinio analizė *krypčių laukais*.
- Lygčių su atsiskiriančiais kintamaisiais sprendimo komplikacijos.

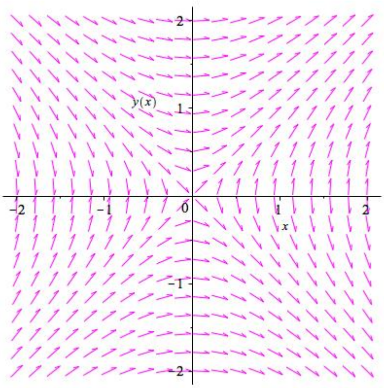
Kitą savaitę: paskaita prasidės 9.30, pratybos vyks iki 12.00.

Krypčių laukas

Normaliosios (pirmos) eilės diferencialinės lygties $\dfrac{dy}{dx} = G(x, y)$ *krypčių laukas* yra grafinis nežinomosios funkcijos išvestinių reikšmių atvaizdavimas (x, y)-plokštumoje.

Pvz., čia yra diferencialinių lygčių $y' = -y/x$ ir $y' = x/y$ krypčių laukai:

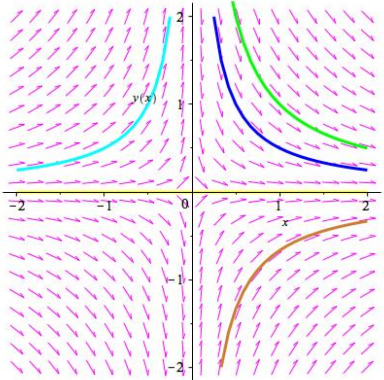


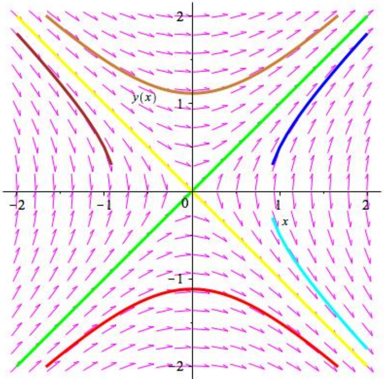


Sprendiniai ir krypčių laukas

Diferencialinės lygties sprendinio grafikas liečia krypčių lauką kiekviename taške.

Pvz., diferencialinės lygties $y' = -y/x$ sprendiniai yra $y(x) = C/x$, apibėžti intervaluose $x \in (-\infty, 0)$ arba $(0, \infty)$.
Lygties $y' = x/y$ sprendiniai yra $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$, apibėžti intervaluose $x \in (-\infty, \infty)$, $(-\infty, -\sqrt{C})$ arba $(\sqrt{C}, \infty)$.

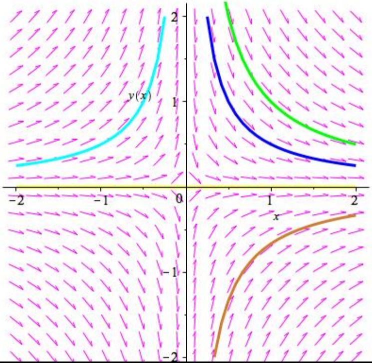


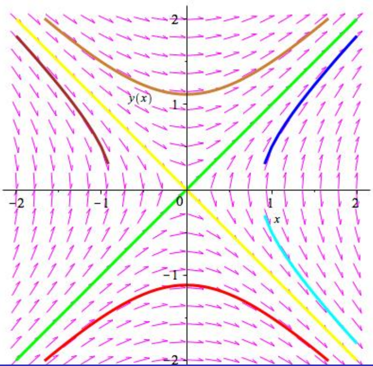


Koši uždavinys ir krypties laukas

Pagal krypčių lauką galima bent apytikriai ar numeriškai pratęsti sprendinius į maksimalius intervalus. Krypties laukas padeda kiekybiškai (arba intuityviai) įvertinti diferencialinės lygties sprendinių apibrėžimo intervalus ir kitas savybes.

Koši uždavinio $y(a) = b$ sprendinio egzistavimas ir vienatis reiškia, kad per tašką $(x, y) = (a, b)$ galima nubrėžti vieną ir vienintelį sprendinio grafiką.

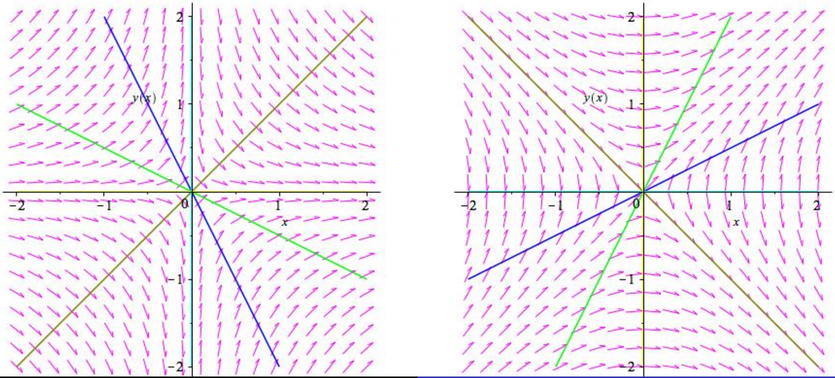




Krypčių laukas pagal izoklines

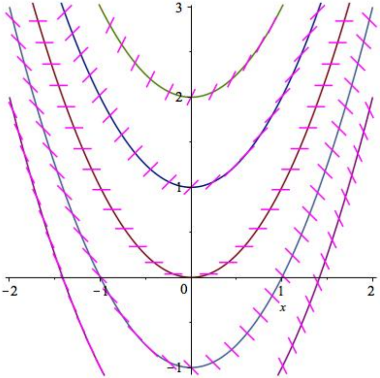
Izoklinė plokštumoje (x, y) su krypčių lauku yra kreivė, kurios visuose taškuose lauko kryptis yra ta pati. Nubrėžus kelias izoklines ir kryptis ant jų, kitos kryptys gali būti apytikriai nubėžtos interpoliuojant.

Nagrinėjamų lygčių $y' = -y/x$ ir $y' = x/y$ atveju, visos izoklinės yra tiesės, einančios per (0,0). Pavaizduotos izoklinės atitinka $y' = -1$ (ruda), $y' = 2$ (mėlyna), $y' = 1/2$ (žalia), $y' = 0$ (geltona) ir $y' = \infty$ (jūros).



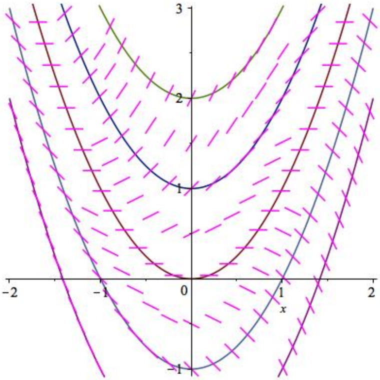
Krypčių laukas lygčiai $y' = y - x^2$ (Užduotis 1)

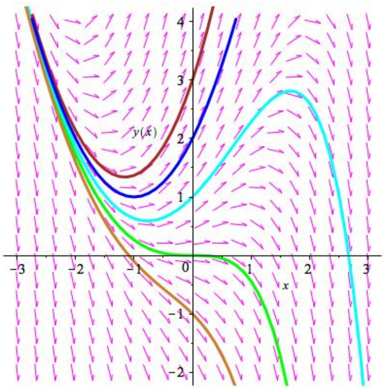
Pirma brėžiame kelias izoklines $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \pm 2$ ir kryptis ant jų.



Krypčių laukas lygčiai $y' = y - x^2$ (Užduotis 1)

Pirma brėžiame kelias izoklines $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \pm 2$ ir kryptis ant jų. Nubrėžiame ir kelias interpoliuojančias kryptis.





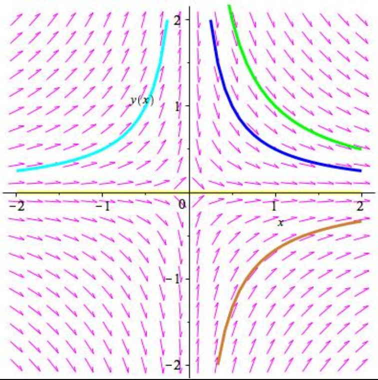
Bendrasis sprendinys yra $y(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2$.
Kertiniai atskirieji sprendiniai yra su $C = 0$ ir $C = -2$, atskiriantys sprendinius su skirtingais didėjimais ir mažėjimais.

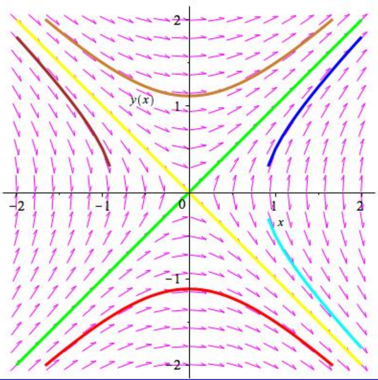
Krypčių laukų sąryšiai I

Diferencialinių lygčių $\frac{dy_1}{dx} = G(x, y_1)$, $\qquad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{G(x, y_2)}$

krypčių laukai yra ortogonalūs vieni kitam, nes skaliarinė sandauga $(1, y_1') \cdot (1, y_2') = 0$. Atitinkamai, šių lygčių bendrieji sprendiniai sudaro dvi viena kitai ortogonalias funkcinių kreivių šeimas.

Rodomas ortogonalumas: $\left[1, -\frac{y}{x}\right] \cdot \left[1, \frac{x}{y}\right] = 0.$

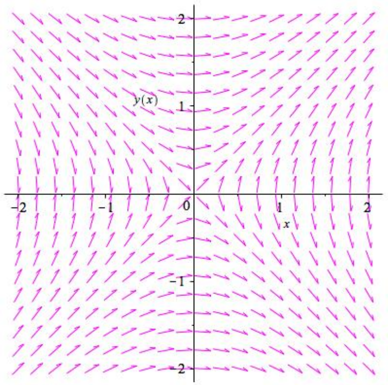


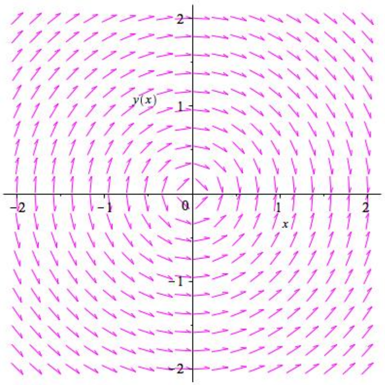


Krypčių laukų sąryšiai II

Diferencialinių lygčių $y' = x/y$ ir $y' = -x/y$ krypčių laukai skiriasi krypčių laukų nuožulnumo aritmetiniu ženklu.

Antrosios lygties sprendiniai $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$ apibėžia pusapskritimius su $y \geq 0$ arba $y \leq 0$.





Logistinis augimas

Diferencialinė (autonominė) lygtis $y' = \alpha y$ su $\alpha > 0$
apibrėžia eksponentinį kintamojo y augimą.
Labiau realistinė populiacijos augimo (ar epidemijos plitimo) lygtis
yra *logistinė lygtis* $y' = \alpha y(N - y)$, su $N > 0$.
Parametras N modeliuoja aplinkos ribotus resursus ar ribotą *išlaikymą*
(angl. *carrying capacity*), t.y., maksimalų galimą populiacijos dydį.
Logistinė lygtis yra autonominė, ir ją
išsprendžiame atskiriant kintamuosius:

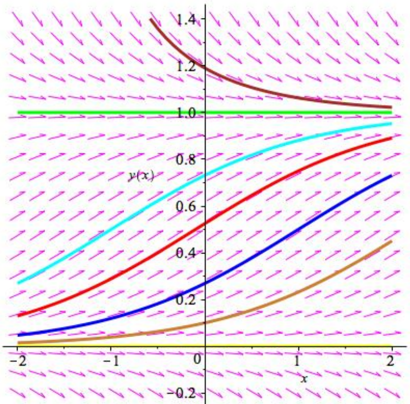
$$\int \alpha dx = \int \frac{dy}{y(N-y)},$$

$$\Rightarrow \alpha \int dx = \frac{1}{N} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}\right) dy,$$

$$\Rightarrow \alpha N(x + C_0) = \ln|y| - \ln|y - N|$$

$$\Rightarrow C_1 e^{\alpha N x} = \frac{y}{y - N} \Rightarrow \frac{1}{C_1} e^{-\alpha N x} = 1 - \frac{N}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{N}{1 + C_2 \exp^{-\alpha N x}}.$$



Autonominės lygties fazinis portretas

Autonominės lygties $y'(x) = G(y(x))$ krypčių laukas nepriklauso nuo x.
Krypčių lauko izoklinės yra horizontalios tiesės.

Tokį krypčių laukągalime "suspausti" į vienamatį *fazinį portretą*:

- Pažymime pusiausvyros taškus $G(y) = 0$;
- Pažymime neapibrėžtumo taškus ($G(y) = \infty$ ir pan.);
- Nubraižome $y(x)$ kitimo kryptis (t.y., didėjimą ar mažėjamą) tarp jų pagal $G(y)$ ženklą.

Pvz., logistinei lygčiai $y' = \alpha y(N - y)$ su $\alpha > 0$, $N > 0$ turime:

Yra du konstantiniai (t.y., *pusiausvyros*) sprendiniai: $y(x) = 0$ ir $y(x) = N$.

Sprendinys $y(x) = N$ yra *stabilus*,
o sprendinys $y(x) = 0$ yra *nestabilus*.

Lygtys su atskiriamais kintamaisiais: komplikacijos

Iš diferencialinės lygties $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$

gavome diferencialų lygtį $\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$

Integruodami abi puses gauname $\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx.$

Apskaičiavę pirmykštes funkcijas $\Phi(x) = \int \varphi(x)dx, \;\; \Psi(y) = \int \frac{dy}{\psi(y)}$

gauname bendrąjį sprendinį *neišreikštine forma*: $\Psi(y) = \Phi(x) + C.$

Imdami atvirkštinę funkciją $y = \Psi^{-1}$ (bent mažoje srityje),
išsprendžiame $y(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x) + C)$.

Komplikacijos:

- Kadangi dalijame iš $\psi(y)$, turime patikrinti pastovius (konstantinius) sprendinius $y = C_k$, t.y., $\psi(C_k) = 0$.
- Atvirkštinė funkcija Ψ^{-1} gali būti daugiareikšmė, tad reikėtų nagrinėti visus neišreikštinės lygtis sprendinius.

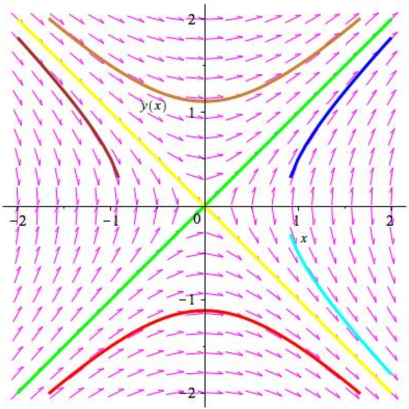
Lygtys atsikiriamais kintamaisiais: pavyzdys 1

$y(x)\,y'(x) = x$: $\quad y\,\dfrac{dy}{dx} = x \;\Rightarrow\; y\,dy = x\,dx \;\Rightarrow\; \displaystyle\int y\,dy = \int x\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + C_0 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2C_0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + C_1}$ su $C_1 = 2C_0$.

Bendrasis sprendinys yra $y = \pm\sqrt{x^2 + C_1}$.
Atskirasis sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(a) = b$, yra:

- Jei $b > 0$: $y(x) = \sqrt{x^2 + C_1}$, su $C_1 = b^2 - a^2$;
- Jei $b < 0$: $y(x) = -\sqrt{x^2 + C_1}$, su $C_1 = b^2 - a^2$;
- Jei $b = 0$, Koši uždavinys arba neturi sprendinių (kai $a = 0$), arba turi du (t.y., daugiau nei vieną) sprendinius.



Lygtys atsikiriamais kintamaisiais: pavyzdys 2

$y(x)\,y'(x) = -x$:

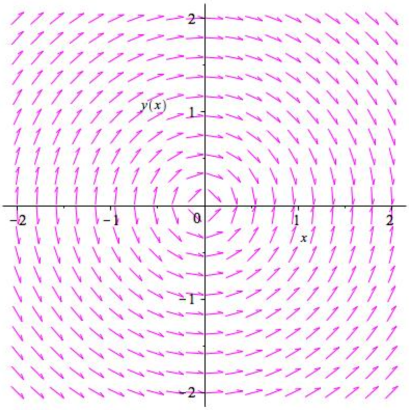
$\Rightarrow \displaystyle\int y\,dy = -\int x\,dx$

$\Rightarrow y^2 = 2C_0 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{2C_0 - x^2}$.

Atskirų sprendinių grafikai yra pusapskritimiai, prasidedantys ir besibaigiantys and x-ašies. Pradinei sąlygai $y(a) = b$ turime:

- Jei $b > 0$: $y(x) = \sqrt{C_1 - x^2}$, su $C_1 = a^2 + b^2$;
- Jei $b < 0$: $y(x) = -\sqrt{C_1 - x^2}$, su $C_1 = a^2 + b^2$.



Lygtys atsikiriamais kintamaisiais: pavyzdys 3

Nagrinėjame lygtį $y'(x) = 2x \cos^2 y(x)$.

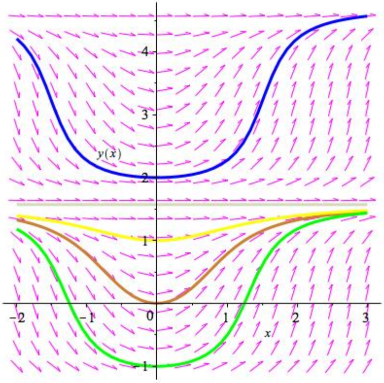
Gauname $\displaystyle\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2x\,dx$

$\Rightarrow \tan y = x^2 + C_0$

$\Rightarrow y = \arctan(x^2 + C_0) + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$

Be to, dalijome iš $\cos^2 y$,
tad turime konstantinius sprendinius
$y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ su $k \in \mathbb{Z}$.

[Golokvosčiaus knygos psl. 57
daugiareišmės šakos praleistos.]



Krypčių laukas yra periodinis vertikalia kryptimi, su periodu 2π.
Turime horizontalius grafikus konstantiniems sprendinims $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Kitų sprendinių grafikai telpa į juostas tarp tų horizontalių tiesių,
nes sprendinių grafikai nesikerta (sprendinių apibrėžimo srityse).

Uždaviniai

Pabraižykite krypčių laukus šioms diferencialinėms lygtims, pirma apytikriai ant popieriaus, ir su Python'u:

1. $y' = y^2 + x^2 - 1.$
2. $2(y + y') = x + 3.$

Raskite šių lygčių bendruosius sprendinius:

3. $4x\,y' = y^3.$
4. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin 2y}.$
5. $y' = -2x \tan y.$
6. $2x^2 y\, y' + y^2 = 2.$

Raskite atskiruosius spendinius šioms lygtims:

7. $x^3 \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-3}{y}$ su pradine sąlyga $y(1) = 1.$
8. $\dfrac{dy}{dx} = y^3(1 + x^2)$ su pradine sąlyga $y(0) = -2.$
9. Pabraižykite lygties $y' = (y-3)(y^2-4)\ln(y^2+1)$ fazinį portretą.

Pirmos paskaitos uždavinių atsakymai

1. $y(x) = C/x$.
2. $y(x) = C(x+1)e^{-x}$.
3. $y(x) = C\,e^{x+e^x}$.
4. $y(x) = \ln(x^3 + C)$.
5. $y(x) = -\ln(C + 4x - x^2)$.
6. $y(x) = (x+C)^3$ ir $y = 0$.
7. $y(x) = \dfrac{2}{Ce^{-x^2} - 1}$ ir $y = 0$.
8. $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$; bendrasis sprendinys $y = \dfrac{1}{Cx+1}$ ir $y = 0$.
9. $y(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x^2)+1}$;

   bendrasis sprendinys $y = \dfrac{1}{\ln|x^2-1| + C}$ ir $y = 0$.