Diferencialinės lygtys P1

Raimundas Vidunas
Vilniaus Universitetas

MIF, 2023 rugsėjo 4 d.

Kurso pokyčiai

- Vietoj dviejų tarpinių egzaminų bus vienas tarpinis egzaminas spalio 30 d., bei (žinoma) galutinis egzaminas per žiemos sesiją.
- Tarpinis ir galutinis egzaminai turės vienodą svorį.
  Jie abu turi būti išlaikyti bent 45%.

Įtrauksiu programavimo Python'u elementų:

- Naudosimės Sympy, Numpy, Matplotlib paketais/bibliotekomis, atitinkamai simboliniams skaičiavimams, skaitmeniniams metodams, ir grafiniam vaizdavimui.
- Programavimo projektėliai namų darbams sudarys iki 25% abiejų egzaminų vertinimo.
- Rekomenduojama naudotis Google internetine laboratorija https://colab.research.google.com/ arba (dideliu) Anaconda distribuciniu paketu https://www.anaconda.com/ moksliniams skaičiavimams, duomenų aprodojimui Python'u, arba kitos programavimo Python'u sistemos Jupyter'io aplinkoje.

Kurso turinys

Kurso paskaitos ir egzaminai turėtų vyks gyvai, be video įrašo.

- Išmoksime spręsti:
  - įvairias pirmosios eilės diferencialines lygtis;
  - antrosios eilės tiesines diferencialines lygtis;
  - aukštesnės eilės tiesines lygtis su pastoviais koeficientais;
  - tiesines diferencialinių lygčių sistemas su pastoviais koeficientais;
  - išmoksime manipuliuoti tiesines diferencialines lygtis (ar diferencialines sistemas) kaip diferencialinius operatorius.
- Susipažinsime su pagrindinėmis teorijos sąvokomis, nagrinėsime Koši (Caushy) uždavinių sprendinių egzistavimą ir vienatį.
- Modeliuosime dinaminius procesus diferencialinėmis lygtimis, juos spręsime kokybiškai įvertinant fazines trajektorijas, pusiausvyros taškus ir jų stabilumą.
- Išmoksime pritaikyti programavimą Python'u tokiam diferencialinių lygčių nagrinėjimui.

Literatūra

- Petras Golokvosčius. Diferencialinės lygtys, TEV, Vilnius, 2000
- Stasys Rutkauskas. Įvadas į diferencialinių lygčių teoriją, VPU leidykla, 2006
- Algirdas Ambrazevičius. Diferencialinės lygtys, 2008.
- D.K. Arrowsmith, C.M Place, Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications, Chapman & Hall, 1982.
- James D. Meiss, Differential dynamical systems, SIAM, 2007.

Žr. įkeltas knygas VMA aplinkoje.

Pirmųjų paskaitų tikslai

- Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai.
- Pirmosios eilės paprastosios diferencialinės lygtys (PDL).
- Atskirojo ir bendrojo sprendinio bei bendrojo integralo sąvokos.
- Koši uždavinys ir jo sprendinio egzistavimas bei vienatis.
- Pirmos eilės lygčių su atsiskiriančiais kintamaisiais sprendimas.
- Geometrinė diferencialinių lygčių ir Koši uždavinio analizė *krypčių laukais*.

Skaidrės, pažymėtos $\star$, yra pradžiai mažiau aktualios.
Jos pateikia papildomą ar išankstinį vaizdą.

Pirmos eilės normalioji diferencialinė lygtis

Pirmos eilės *normalioji lygtis* yra $y'(x) = G(x, y(x))$,
kur $G : \Omega \to \mathbb{R}$ yra dviejų kintamųjų funkcija $G(x, y)$ *apibrėžimo srityje* $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Pavyzdys: normalioje lygtyje $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ turime $G(x, y) = \dfrac{1}{x}$.
Ši lygtis yra apibrėžta srityje $x \neq 0$.

Kai $G(x, y)$ neprikauso nuo y, t.y., kai $G(x, y) = G(x)$, normaliąją lygtį galime spręsti tiesiog integruodami:

$$y'(x) = G(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \int G(x)dx + C.$$

Gauname sprendinių šeimą, priklausiančią nuo integravimo konstantos C.
Naudodami apibrėžtinį integralą, gauname konkrečius sprendinius $y(x) = \displaystyle\int_a^x G(t)dt$, papildomai tenkinančius $y(a) = 0$.

Lygčiai $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ turime sprendinius $y(x) = \ln|x| + C$, kurious reikėtų nagrinėti kaip atskiras dvi sprendinių šeimas srityse $x > 0$ ir $x < 0$.

Elementarūs pavyzdžiai: autonominės lygtys

- Lygtis $y'(x) = y(x)$ turi sprendinį $y(x) = e^x$.
  Padauginus šį sprendinį iš konstantos C, vėl gauname tos pačios lygties sprendinį. Tai yra būdinga *homogeninių tiesinių* lygčių sprendiniams. Šiam pavyzdžiui *bendrasis sprendinys* yra $y(x) = Ce^x$.
  Ši formulė aprašo visus galimus sprendinius apibrėžimo srityje.
- Lygtis $y'(x) = y(x)^2 + 1$ turi sprendinį $y(x) = \tan x$.

  Iš tikrųjų, tada $y(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\quad y'(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

  ir $y(x)^2 + 1 = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Šios lygties *bendrasis sprendinys*

  yra $y(x) = \tan(x + C)$. Tai yra būdinga *autonominių* lygčių $y' = G(y)$ sprendiniams, kad prie x galime pridėti laisvąją konstantą.
  Tai galioja ir pirmajai lygčiai $y' = y$, nes $Ce^x = \pm e^{x+C_0}$
  su pakeista konstanta $C_0 = \ln|C|$.

Koši uždavinys

Pirmos eilės diferencialinės lygties *sprendinys* yra tolygiai diferencijuojama funkcija $y(x) \in C^1([a;b])$ intervale $[a,b]$, tokia kad taškas $(x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ yra lygties apibėžimo srityje visiems $x \in [a,b]$, ir diferencialinė lygtis yra tenkinama visiems $x \in [a,b]$.

Diferencialinė lygtys (be papildomų *pradinių* ar *kraštinių* salygų) paprastai turi be galo daug sprendinių.

Koši uždavinys pirmos eilės diferencialinei lygčiai $y' = G(x, y(x))$: rasti visus jos sprendinius, kurie tenkina duotą pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$ apibrėžimo taške $x = x_0$.

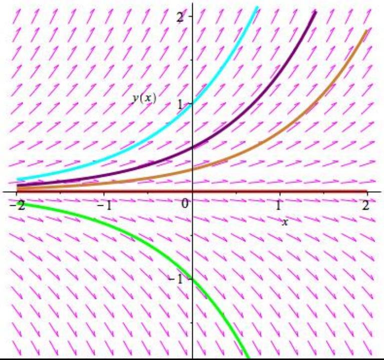
Paprastai toks sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis (tam tikrame intervale).

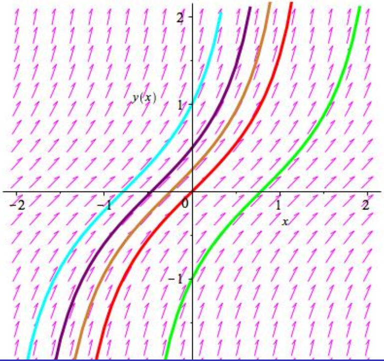
Vienas svarbiausių teorijos klausimų: kada Koši uždavinys turi vieną ir vienintelį sprendinį?

Krypčių laukas

Dažniausiai Koši uždavinys turi vieną ir vienintelį sprendinį. Tai galime pastebėti geometriškai nagrinėjant diferencialinės lygties *krypčių lauką.* Diferencialinė lygtis nusako galimų sprendinių grafikų liestinių kryptis kiekviename apibrėžimo srities taške.

Pvz., vaizduojame matytų diferencialinių lygčių $y'(x) = y(x)$ ir $y'(x) = y(x)^2 + 1$ krypčių laukus, kartu su sprendinių grafikais Koši uždaviniams su $y(0) \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -1\}$.





Bendrieji sprendiniai

Visi pirmos eilės diferencialinė lygties sprendiniai paprastai sudaro tolydžią šeimą, priklausančią nuo tolydaus parametro C.

Šis parametras C yra vadinamas *laisvaja konstanta*,
jei jis vienareikšmiškai išsisprendžia Koši uždavinius pradinio duomens $y(x_0) = y_0$ atžvilgiu tinkamoje apibrėžimo srityje:
$C = \psi(x_0, y_0)$ kažkokiai funkcijai $\psi(x, y)$.

Pirmos eilės diferencialinės lygties sprendinių šeima $y = y(x, C)$ parametrizuota laisvuoju parametru C tam tikroje (x, y) srityje, yra vadinama diferencialinės lygties *bendruoju sprendiniu* (arba *bendruoju integralu*).

Imdami konkrečias laisvųjų konstantų reikšmes, gauname *atskirąjį diferencialinės lygties sprendinį* (dar vadinamu *atskiruoju integralu*).

⋆ Du pavyzdžiai

- Lygtis $xy'(x) = a\,y(x)$ yra ekvivalenti

  normaliajai lygčiai $y'(x) = \dfrac{a}{x}\,y(x)$ srityje, kur $x \neq 0$.

  Turime sprendinį $y(x)=x^a$, apibrėžtą intervale $x \in [0, \infty)$.
  Bendrasis sprendinys yra $y(x)=C|x|^a$.

- Lygtis $y(x)y'(x) = a\,x$ yra ekvivalenti

  normaliajai lygčiai $y'(x) = \dfrac{a\,x}{y(x)}$ srityje, kur $y \neq 0$.

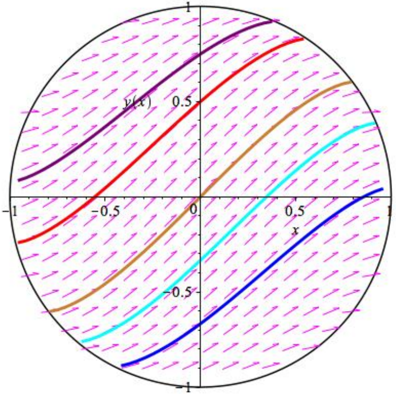
  Galite patikrinti, kad $y(x) = \pm\sqrt{a\,x^2 + C}$
  yra jos sprendinys visiems $C \in \mathbb{R}$ ir abiems $\pm$.

  Sakykime, $a = 1$ šiame pavyzdyje.
  Tada $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$ yra bendrasis sprendinys srityje $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$;
  ir $y(x) = -\sqrt{x^2 + C}$ yra bendrasis sprendinys srityje $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$
  (arba mažesnėje srityje). Išraiška $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$ nusako
  bendruosius sprendinius abiejose srityse. Atskirųjų sprendinių
  apibrėžimo sritys priklauso nuo to, ar $C > 0$ ar $C < 0$.

⋆ Bendroji pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis

Pirmos eilės diferencialinė lygtis gali būti užduota neapibrėžtiniu pavidalu: $H(x, y, y') = 0$.

Pvz., lygtys $y'(x)^3 + y(x)y'(x) = x^2$ arba $\cos y'(x) = 3x\, y(x)$.
Naudojantis neišreikštinės funkcijos teorema, jas galime paversti keliomis (ar be galo daug) normaliosiomis diferencialinėmis lygtimis su susiaurintomis apibrėžimo sritimis.
Pvz., antroji lygtis ekvivalenti šiai normaliųjų lygčių sekai:
$y'(x) = \arccos(3xy(x)) + 2k\pi$,
su $k \in \mathbb{Z}$ ir apibrėžimo sritimi $|xy| < \frac{1}{3}$.



Neapibrėžtinė diferencialinė lygtis
$y'(x)^2 + y(x)^2 + x^2 = 1$
atitinka dvi normaliasias lygtis:
$y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
ir $y' = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

⋆ Aukštesnės eilės diferencialinės lygtys

Paprastoji diferencialinė lygtis (angl., *ordinary differential equation*) yra lygtis vieno kintamojo nežinomai funkcijai $y(x)$, kurioje pasirodo nežinomos funkcijos (kurios nors eilės) išvestinės.

Paprastosios diferencialinės lygties *eilė* (angl. *order*) vadinama didžiausia išvestinės, pasirodančios diferencialinėje lygtyje, eilė.

Išvestinių žymėjimai:

- $\dfrac{dy(x)}{dx}, \dfrac{d^2y(x)}{dx^2}, \dfrac{d^3y(x)}{dx^3}, \ldots, \dfrac{d^ny(x)}{dx^n}, \ldots$.
- $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2},\ \dfrac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,\ \dfrac{d^ny}{dx^n},\ \ldots$.
- $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots, y^{(n)}(x), \ldots$.
- $y',\ y'',\ y''',\ \ldots,\ y^{(n)},\ \ldots$.
- Fizikoje, išvestinė laiko atžvilgiu: $\dot{y},\ \ddot{y},\ \dddot{y}$.

⋆ Antros eilės diferencialinių lygčių pavyzdžiai

- $y''(x) + y(x) = 0$, su sprendiniais $y(x) = \sin x$ ir $y(x) = \cos(x)$. Bendriau turime $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.
- $xy''(x) + y'(x) = 0$, su bendruoju sprendiniu $y(x) = C_1 \ln x + C_2$.
- $(1 - x^2)y''(x) = xy'(x)$, su sprendiniais $\arccos(x), \arcsin(x), 1$.
- $(1 + x^2)y''(x) + 2xy'(x) = 0$, su sprendiniu $\arctan(x)$.
- Klaidos funkcija $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-z^2} dz$ statistikoje tenkina diferencialinę lygtį $y''(x) + 2xy'(x) = 0$.

⋆ Antros eilės diferencialinės lygtys fizikoje

Fizikoje gamtos dėsniai yra užrašomi antros eilės diferencialinių lygčių pavidalu. Pvz., Niutono antrasis dėsnis $F = ma$, kur a yra pagreitis, t.y., antrosios eilės pozicijos išvestinė.

Pvz., šokančio parašiutininko diferencialinė lygtis:

$$m\frac{d^2h(t)}{dt^2} = -mg + b\left(\frac{dh(t)}{dt}\right)^2.$$

Čia $h(t)$ yra aukštis virš Žemės, $-mg$ yra Žemės traukos jėga, ir paskutinis narys išreiškia oro pasipriešinimą, proporcingą kritimo greičio $\frac{dh(t)}{dt}$ kvadratui.

Lygtys su atskiriamais kintamaisiais

Tarkime, turime šio pavidalo diferencialinę lygtį: $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y).$

Tokia lygtis yra vadinama *su atskiriamais kintamaisiais.*

Išskaidome išvestinę kaip diferencialų santykį,
ir grupuojame diferencialus dx, dy
prie atitinkamų vieno kintamojo funkcijų: $\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$

Integruojame abi puses pagal atitinkamus kintamuosius:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx.$$

Jei $\Phi(x) = \int \varphi(x)dx$, $\Psi(y) = \int \frac{dy}{\psi(y)}$ yra atitinkamos pirmykštės funkcijos,
turime bendrąjį sprendinį *neišreikštine forma*: $\Psi(y) = \Phi(x) + C.$

Žinodami atvirkštinę funkciją $y = \Psi^{-1}$ (bent mažoje srityje),
išsprendžiame $y(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x) + C)$.

Pavyzdys 1

Spręskime diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx} = 6y^2x.$

Išskaidome $\dfrac{dy}{y^2} = 6x\,dx$ ir integruojame: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int 6x\,dx.$

Gaunome *bendrąjį integralą* $-\dfrac{1}{y} = 3x^2 + C.$

Išsprendžiame, gaunome *bendrąjį sprendinį* $y(x) = -\dfrac{1}{3x^2 + C}$.

Pažymėjus $\widehat{C} = -C$, bendrąsis sprendinys tampa $y(x) = \dfrac{1}{\widehat{C} - 3x^2}$.

Jei papildomai užduota pradinė sąlyga, pvz., $y(1) = \frac{1}{3}$,
galime įstatyti $x = 1, y = \frac{1}{3}$ į bendrąjį integralą arba bendrąjį sprendinį,
ir gauti $C = -6$. Taip randame pareikalautą *atskirąjį sprendinį* $y(x) = \dfrac{1}{6 - 3x^2}$.
Šio sprendinio maksimali apibrėžimo sritis yra intervalas $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Pavyzdys 2

Spręskime diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 y.$

Išskaidome $\dfrac{dy}{y} = 6x^2\,dx$ ir integruojame: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 6x^2\,dx.$

Gauname *bendrąjį integralą* $\ln|y| = 2x^3 + C.$

Sprendžiame $|y| = e^{2x^3 + C},\quad$ arba $y = \pm e^C e^{2x^3}.$

Pažymėję $\widehat{C} = \pm e^C,$
gauname gerai atrodantį *bendrąjį sprendinį* $y(x) = \widehat{C}\,e^{2x^3}.$

Pastebėkime: $e^C > 0,$ bet $\widehat{C}$ gali būti arba teigiamas, arba neigiamas.

Taip pat $\widehat{C} = 0$ duoda tinkamą sprendinį;
jį "pražiopsojome" kadangi dalijome iš y pirmame žingsnyje.

Sprendžiant diferencialines lygtis, integralas $\int \frac{dy}{y}$ pasirodo taip dažnai,
kad sprendžiama suprastintai: $\ln y = 2x^3 + C, \ldots, y = \widehat{C}\,e^{2x^3}$ su $\widehat{C} = e^C.$
Bet tai nėra korektiška, vertindamas pedantiškai prikibčiau.

Pavyzdys 3

Spręskime diferencialinę lygtį $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

Išskaidome $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ ir integruojame: $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$.

Gauname $\arctan y = \arctan x + C_0$, arba

$$y = \tan(\arctan x + C_0) = \frac{x + \tan C_0}{1 - x \tan C_0}.$$

Turime parametrizuotą sprendinių šeimą $y(x) = \frac{x + C_1}{1 - C_1 x}$,

kur $C_1 = \tan C_0$.

Reikėtų nepamiršti ir ribinio sprendinio su $C_1 \to \infty$, atitinkantį $C_0 = \frac{\pi}{2}$,

būtent $y(x) = -\frac{1}{x}$.

Išraiška $y(x) = \frac{x + C_1}{1 - C_1 x}$ yra bendrasis lygties sprendinys srityje $xy \neq -1$.

Atskiri atvejai

- Neapibrėžtinio integravimo uždavinys: $y'(x) = \varphi(x)$.

  Sprendimas: $y(x) = \displaystyle\int \varphi(x)dx + C$.

- Autonominė lygtis: $y'(x) = \psi(y)$.

  Sprendimas: $\displaystyle\int \frac{dy}{\psi(y)} = x + C$.

Autonominės lygtys dažnai pasitaiko (ypač fizikoje) kai kintamasis x (arba t) modeliuoja laiką, nes laiko skaičiavimas nuo vieno ar kito laiko momento neturi reikšmės. Jei $y(x)$ yra sprendinys, tada ir $y(x-x_0)$ yra sprendinys.

Pvz.,

- $y' = y^2 + 1$, su bendruoju sprendiniu $y(x) = \tan(x + C)$.
- $y' = \alpha y$, su bendruoju sprendiniu $y(x) = C\,e^{\alpha x}$ visoje $\mathbb{R}^2$, arba bendruoju sprendiniu $y(x) = e^{\alpha(x-x_0)}$ srityje $y > 0$, ir $y(x) = -e^{\alpha(x-x_0)}$ srityje $y < 0$. Sąryšis: $|C| = e^{-\alpha x_0}$.

$\star$ Diferencialinės lygtys ir išvestinės atvirkštinėms funkcijoms

Diferencialinė lygtis $\dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx$ yra praktiškai simetrinė kintamųjų x, y atžvilgiu. Atitinkamai, pirmos eilės diferencialinės lygtys funkcijai $y(x)$ ir jos atvirkštinei $x(y)$ yra susijusios.

Jei diferencialinė lygtis funkcijai $y(x)$ yra neapibrėžtinio integravimo uždavinys, tai diferencialinė lygtis funkcijai $x(y)$ bus autonominė lygtis, ir atvirkščiai.

Pvz., logaritminė funkcija $y(x) = \ln x$ tenkina lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

Atvirkštinės funkcijos $x(y) = e^y$ lygtis yra $\dfrac{dx}{dy} = x$.

Kad gauti išvestinę funkciją $x'(y)$ įstatome sprendinį: $\dfrac{dx}{dy} = x = e^y$.

⋆ Atvirkštinių trigonometrinių išvestinės

- Funkcija $y(x) = \arctan(x)$ tenkina lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

  Atvirkštinės funkcijos $x(y) = \tan(y)$ lygtis yra $\dfrac{dx}{dy} = x^2 + 1$.

  Skaičiuopjame išvestinę: $x'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \tan(y)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(y)}$.

- Imame $y(x) = \sin(x)$, tada $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x)$.

  Turime lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y(x)^2}$ intervale $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

  Vadinasi $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

  Tad funkcijos $x(y) = \arcsin(y)$ išvestinė yra lygi $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Uždaviniai

Raskite bendruosius spendinius šioms lygtims:

1. $x\,y' + y = 0.$
2. $(x+1)\,y' + xy = 0.$
3. $y' = (1 + \mathrm{e}^x)\,y.$
4. $y' = 3x^2\,\mathrm{e}^{-y}.$
5. $y' = \mathrm{e}^y(2x-4).$
6. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$
7. $y' - xy^2 = 2xy.$

Raskite atskiruosius spendinius šioms lygtims:

8. $x\,y' + y = y^2$, su pradine sąlyga $y(1) = \frac{1}{2}$.
9. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, su pradine sąlyga $y(0) = 1$.