Diferencialinės lygtys P3

Raimundas Vidunas
Vilniaus Universitetas

MIF, 2023 rugsėjo 18 d.

Pirmųjų paskaitų tikslai

Praeitą savaitę:

- Geometrinė diferencialinių lygčių ir Koši uždavinio analizė *krypčių laukais*.
- Pirmos eilės lygčių su atsiskiriančiais kintamaisiais sprendimo komplikacijos.

Šiandien:

- Formuluosime Koši uždavinio sprendinio egzistavimo sąlygą. Pateiksime ir ją netenkinantį pavyzdį.
- Nagrinėsime Koši uždavinio sprendimą skaitiniu metodu.
- Pirmos eilės lygčių $y' = F(ax + by)$ ir $y' = F(y/x)$ suvedimas į lygtis su atsiskiriančiais kintamaisiais.

Koši uždavinys pirmos eilės lygčiai (egzistavimas)

Teorema (Koši ir Peano)

Nagrinėjame diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$

su Koši pradine sąlyga $y(x_0) = y_0$.

Tarkime, funkcija $\varphi(x, y)$ *yra tolydi uždarame stačiakampyje*

$$\Gamma = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, a > 0, b > 0\}.$$

$$\textit{Tegu} \ \ |\varphi(x, y)| \le M < \infty, \ \ \textit{ir} \ \ h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Tada intervale $|x - x_0| \le h$ *egzistuoja diferencialinės lygties sprendinys* $y(x)$, *tenkinantis sąlygą* $y(x_0) = y_0$.

Žr. Golokvosčiaus skyrius 3.1 ir 3.2. Įrodoma, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti artinį $y_\varepsilon(x)$ tokį, kad $(x, y_\varepsilon(x)) \in Q$ kai $|x - x_0| < \varepsilon$, ir $|y'_\varepsilon(x) - \varphi(x, y_\varepsilon(x))| \le \varepsilon$. Riboje gauname tolygų konvergavimą į sprendinį.

Pavyzdys 1: Intervalas sprendinio egzistavimuii

Nagrinėjame Koši uždavinį $y' = x - y^2,\ y(0) = 0.$

Kokiame intervale šiam uždaviniui sprendinys garantuotai egzistuoja?

Imame stačiakampį $|x| < 1,\ |y| < 1.$ Turime aprėžti funkciją $\varphi(x, y) = x - y^2,$ t.y., rasti jos ekstrumumo taškus stačiakampyje.

Kadangi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 \neq 0,$ ekstremumo taškai yra ant stačiakampio kraštų $x = -1$ ir $x = 1$.

Kadangi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y,$ nagrinėjame taškus (x, y) su $x \in \{-1, 1\}$ ir $y \in \{0, -1, 1\}$.

Maksimali $|\varphi(x, y)|$ reikšmė yra $\varphi(-1, 1) = \varphi(-1, -1) = -2$.
Tad $|\varphi(x, y)| \leq 2$, ir sprendinys egzistuoja kai $|x| \leq \min(1, \frac{1}{2})$.
Imame intervalą $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Jei pradėtumėme nuo stačiakampio $|x| < \frac{2}{3},\ |y| < \frac{2}{3}$, gautumėme didesnį intervalą $|x| \leq \min(\frac{2}{3}, \frac{2/3}{2/3+4/9}) = \frac{3}{5}$.

Pavyzdys 2: Koši uždavinio nevienatis

Diferencialinė lygtis $x\,y'(x) = 3y(x)$ su pradine sąlyga $y(0) = 0$ turi be galo daug sprendinių:

$$y(x) = \begin{cases} Cx^3, & \text{jei } x \geq 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0, \end{cases} \quad \text{arba net} \quad y(x) = \begin{cases} C_1 x^3, & \text{jei } x \geq 0, \\ C_2 x^3, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

Pradinei sąlygai $y(0) = 1$ sprendinių nėra.

Atskirųjų sprendinių apibrėžimo sritis turi būti pakankamai apribota, vengti "singuliariųjų" taškų. Nagrinėjamu atveju, apibrėžimo srityje neturėtų būti taško $x = 0$.

Netiesinių lygčių atveju, sprendinių ypatingi taškai gali būti ir neaiškūs. Pvz., lygties $yy' = \frac{1}{2}$ bendras sprendinys yra $y(x) = \sqrt{x - C}$. Tad bet koks taškas $x = C$ gali būti apibrėžimo srities riba.

Skaitinis Koši uždavinio sprendimas

Koši uždavinio $\dfrac{dy(x)}{dx} = \varphi(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ skaitinis sprendimas remiasi Teiloro aproksimacija

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)\,\frac{h}{1!} + y''(x)\,\frac{h^2}{2!} + y'''(x)\,\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

aplink rekursyviai žinomus taškus $x = x_0$, $x = x_0 + h$, $x = x_0 + 2h, \ldots$.
Čia h imamas mažas (t.y., artimas nuliui) žingsnio dydis, galimai neigiamas (sprendinio pretęsimui ¿ neigiamą pusę).

Paprasčiausias metodas yra *Oilerio tiesioginis metodas*, kur sprendinio reikšmės $y(x_0 + h)$, $y(x_0 + 2h)$, $y(x_0 + 3h), \ldots$ yra paskaičiuojamos naudojantis tiesine aproksimacija $y(x + h) = y(x) + h\,y'(x)$.

Jei $x_k = x_0 + kh$, then aproksimuojančio sprendinio reikšmės $\widetilde{y}_k \approx y(x_k)$ yra skaičiuojamos pirmos eilės rekursija $\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k + h\,\varphi(x_k, \widetilde{y}_k)$.

Tikslesni skaitiniai metodai

- Aproksimuoti pirmąją išvestinę aukštenės eilės skirtuminiais (rekursiniais) operatoriais; pvz., $y'(x) = \dfrac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$.
- Netiesioginiai metodai; pvz., $\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k + \varphi(x_{k+1}, \widetilde{y}_{k+1})$.
- Imti daugiau Teiloro aproksimacijos narių.
- Aproksimuoti aukštesnės eilės išvestines Teiloro aproksimacijoje skirtuminiais operatoriais; pvz., $y''(x) = \dfrac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$.

Lygtys su atskiriamais kintamaisiais: platesnis taikymas

Iš diferencialinės lygties $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$

gavome diferencialų lygtį $\dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$

Integruodami abi puses gauname $\displaystyle\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx.$

Apskaičiavę pirmykštes funkcijas $\Phi(x) = \displaystyle\int \varphi(x)dx,\ \Psi(y) = \int \frac{dy}{\psi(y)}$

gauname bendrąjį sprendinį *neišreikštine forma*: $\Psi(y) = \Phi(x) + C.$

Imdami atvirkštinę funkciją $y = \Psi^{-1}$ (bent mažoje srityje), išsprendžiame $y(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x) + C)$.

Šiandien nagrinėjame pirmos eilės lygčių $y' = F(ax + by)$ ir $y' = F(y/x)$
suvedimą į lygtį su atsiskiriančiais kintamaisiais.

Suvedimas į atskiriamų kintamųjų atvejį

Tarkime, turime šio pavidalo pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by).$$

Įvedame naują nežinomąją funkciją: $u = ax + by$.

Tada $\dfrac{du}{dx} = a + b\,\dfrac{dy}{dx}$.

Pradinė lygtis transformuojasi į $\dfrac{du}{dx} = a + b\,F(u)$.

Kintamieji atsiskiria: $\dfrac{du}{a + b\,F(u)} = dx$.

Integruojame: $\displaystyle\int \frac{du}{a + b\,F(u)} = x + C$.

Jei $\Psi(u) = \displaystyle\int \frac{du}{a + b\,F(u)}$ yra pirmykštė funkcija, turime bendrąjį sprendinį neišreikštiniu pavidalu: $\Psi(ax + by) = x + C$.

Pavyzdys 3

Spręskime diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$.

Pakeitę $u = y + x$ turime $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{dx} + 1$,

ir lygtis tampa $\dfrac{du}{dx} = u^2 + 1$.

Išskaidome $\dfrac{du}{u^2+1} = dx$ ir integruojame: $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \int dx$.

Gauname $\arctan u = x + C$, arba $u = \tan(x + C)$.

Pradinei nežinomai funkcijai $y = u - x$, turime

$$y = \tan(x + C) - x.$$

Kadangi dalijome iš $u^2 + 1$, dar yra kompleksiniai pastovūs sprendiniai $y = \pm i - x$, bet juos ignoruojame.

Lygties $y' = F(y/x)$ suvedimas į atskiriamus kintamuosius

Tarkime, turime šio pavidalo pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Įvedame naują nežinomąją funkciją: $u = y/x$, arba $y = x\,u$.

Tada $\dfrac{dy}{dx} = x\,\dfrac{du}{dx} + u$.

Pradinė lygtis transformuojasi į $x\,\dfrac{du}{dx} + u = F(u)$.

Kintamieji atsiskiria: $\dfrac{du}{F(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$.

Integruojame: $\displaystyle\int \frac{du}{F(u) - u} = \ln|x| + C$.

Jei $\Psi(u) = \displaystyle\int \frac{du}{F(u) - u}$ yra pirmykštė funkcija, turime

bendrąjį sprendinį neišreikštiniu pavidalu: $\Psi\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$.

Pavyzdys 4

Spręskime diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Padaliję skaitiklį ir vardiklį iš x^2, gauname: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$.

Įvedame $u = y/x$, atpažįstame $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Iš $y = x\,u$ gauname $\dfrac{dy}{dx} = x\,\dfrac{du}{dx} + u$,

tad lygtis naujajai nežinomajai funkcijai $u(x)$ tampa $x\,\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Perrašome $x\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u}{1+u^2} - u = \dfrac{u-u^3}{1+u^2}$.

Kintamieji atsiskiria: $\dfrac{(1+u^2)\,du}{u-u^3} = \dfrac{dx}{x}$.

Pavyzdžio 4 tęsinys

Integruojame: $\displaystyle\int \frac{(1+u^2)\,du}{u-u^3} = \int \frac{dx}{x}.$

Kairėje pusėje skaidome *dalinėmis trupmenomis*:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+u^2)\,du}{u-u^3} &= \int \frac{(1+u^2)\,du}{u\,(1-u)(1+u)} \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right) du \\
&= \ln|u| - \ln|u+1| - \ln|u-1| + C_0 \\
&= \ln\left|\frac{u}{u^2-1}\right| + C_0.
\end{aligned}$$

uncover<4-> Neišreikštine forma, turime:

$\displaystyle \ln\left|\frac{u}{u^2-1}\right| = \ln|x| + C_1.$

Imame eksponentes, gauname $\displaystyle\frac{u}{u^2-1} = C_2\,x.$

Pavyzdžio 4 pabaiga

Iš $\ln\left|\dfrac{u}{u^2-1}\right| = \ln|x| + C_1$ gavome $\dfrac{u}{u^2-1} = C_2\, x.$

Moduliai $|\cdot|$ logaritmuose įtraukti į konstantą C_2.

Galime spręsti u: $u(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{4C_2^2x^2+1}}{2C_2x},$

arba $u(x) = \dfrac{C_3 \pm \sqrt{x^2+C_3^2}}{x}$ su $C_3 = \dfrac{1}{2C_2}.$

Kadangi $y = u\,x$, bendrasis sprendinys yra $y(x) = C_3 \pm \sqrt{x^2+C_3^2}.$

Atskiram sprendiniui parenkame C_3 ir $\pm$ ženklą prie kvadratinės šaknies.

Pvz., Koši uždavinio $y(1) = -2$ sprendinys yra $y(x) = -\frac{3}{4} - \sqrt{x^2+\frac{9}{16}}.$

Homogeninės funkcijos

Kaip atpažinti, kad dešinioji pusė lygtyje $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

yra funkcija $F(y/x)$ nuo y/x?

Skaitiklis ir vardiklis dešinėje pusėje yra *homogeninės funkcijos*, antro laipsnio ($m = 2$): $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$.

Visa trupmena yra nulinio $m = 0$ laipsnio homogeninė funkcija, t.y., invariantinė homotetijos $(x, y) = (tx, ty)$ atžvilgiu.

Imdami $t = \dfrac{1}{x}$ gauname $f(x, y) = \dfrac{1}{x^m} f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ skaitiklyje ir vardiklyje, su $m = 2$. Visa trupmena tampa $F(y/x)$, su $m = 0$.

Nulinio laipsnio homogeninių funkcijų pavyzdžiai:

$$\frac{x^3 - xy^2}{x^2y + y^3}, \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}, \quad \sin\frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x}\left(1 + \ln y - \ln x\right).$$

Uždaviniai

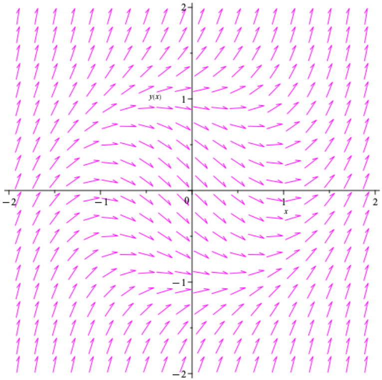
1. Nurodykite kokią nors atkarpą $[a, b]$, kurioje egzistuoja sprendinys šiam Koši uždaviniui: $y' = x + y^3$, $y(1) = 0$.

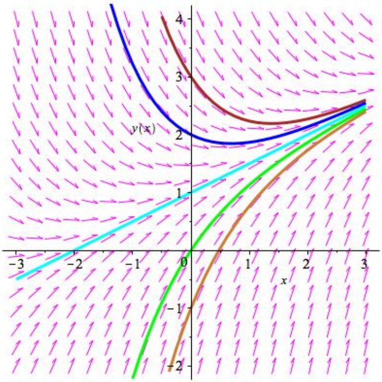
Raskite bendruosius ar (Koši uždaviniams) atskiruosius sprendinius šioms lygtims:

2. $y' - y = 2x - 3$.
3. $(x + 2y)\, y' = 1$, su pradine sąlyga $y(0) = -1$.
4. $x^2 y' = 2xy - y^2$.
5. $x\, y' = x + 2y$, su pradine sąlyga $y(1) = -1$.
6. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$, su pradine sąlyga $y(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}$.
7. $xy' = y + x \tan \dfrac{y}{x}$.
8. $xy' = y + \sqrt{xy}$.
9. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.
10. $y' = \cos(y - x)$.

Pasirinkite kurią nors šių lygčių, nubrėžkite jos krypčių lauką, ir kelias integralines kreives (t.y., sprendinių grafikus).

1. Žr. brėžinį kairėje.
2. Žr. brėžinį dešinėje. Izoklinės yra tiesės, lygiagrečios tiesei $y = \frac{1}{2}x$.
   Bendrasis sprendinys yra $y(x) = \frac{1}{2}x + 1 + Ce^{-x}$.
   Dabar galite sprendinį rasti!





Antros paskaitos sprendimų atsakymai

3. $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2}{C - \ln|x|}}$.
4. $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$.
5. $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$.
6. $y(x) = \pm\sqrt{2 + \dfrac{C}{x}}$.
7. $y(x) = \dfrac{\sqrt{3-2x}}{x}$; bendrasis sprendinys $y = \pm\dfrac{\sqrt{3 - 2x + Cx^2}}{x}$.
8. $y(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1 - 8x - \frac{8}{3}x^3}}$;

   bendrasis sprendinys $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{C - 2x - \frac{2}{3}x^3}}$ ir $y = 0$.
9.