

Лабораторная №6.

Коваленко Кирилл и Шматов Иван ИС221

Вариант 6

1. Точное решение:

Дано:

- Кривая спроса: $p(y) = 4 - y$
- Норма акселерации $l = 2$
- Норма инвестиций $m = 0.4$
- Начальный объем продукции: $y(0) = 3$

Шаг 1. Составим дифференциальное уравнение.

Общая модель:

$$y'(t) = k * p(y) * y(t), \text{ где } k = m * l$$

Подставляем значения:

$$k = 0.4 \times 2 = 0.8 \Rightarrow y'(t) = 0.8 * (4 - y) * y$$

Шаг 2. Решим уравнение методом разделения переменных.

Перепишем уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = 0.8 * y * (4 - y)$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y*(4-y)} = 0.8 dt$$

Шаг 3. Интегрируем обе части.

Разложим дробь на простые:

$$\frac{1}{y*(4-y)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-y} \right)$$

Интеграл принимает вид:

$$\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-y} \right) dy = \int 0.8 dt$$

Вычисляем:

$$\frac{1}{4} (\ln|y| - \ln|4-y|) = 0.8 t + C$$

Упрощаем:

$$\ln \left| \frac{y}{4-y} \right| = 3.2t + C$$

Шаг 4. Решаем относительно y .

Избавляемся от логарифма:

$$\frac{y}{4-y} = Ce^{3.2t}$$

Выражаем y :

$$y(t) = \frac{4Ce^{3.2t}}{1+Ce^{3.2t}}$$

Шаг 5. Находим константу C из начального условия $y(0) = 3$:

$$3 = \frac{4C}{1+C} \Rightarrow 3(1+C) = 4C \Rightarrow C = 3$$

Шаг 6. Подставляем $C = 3$:

$$y(t) = \frac{12e^{3.2t}}{1+3e^{3.2t}} = \frac{12}{3+e^{-3.2t}}$$

Проверка асимптотики:

При $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{12}{3+0} = 4 \quad (\text{насыщение рынка})$$

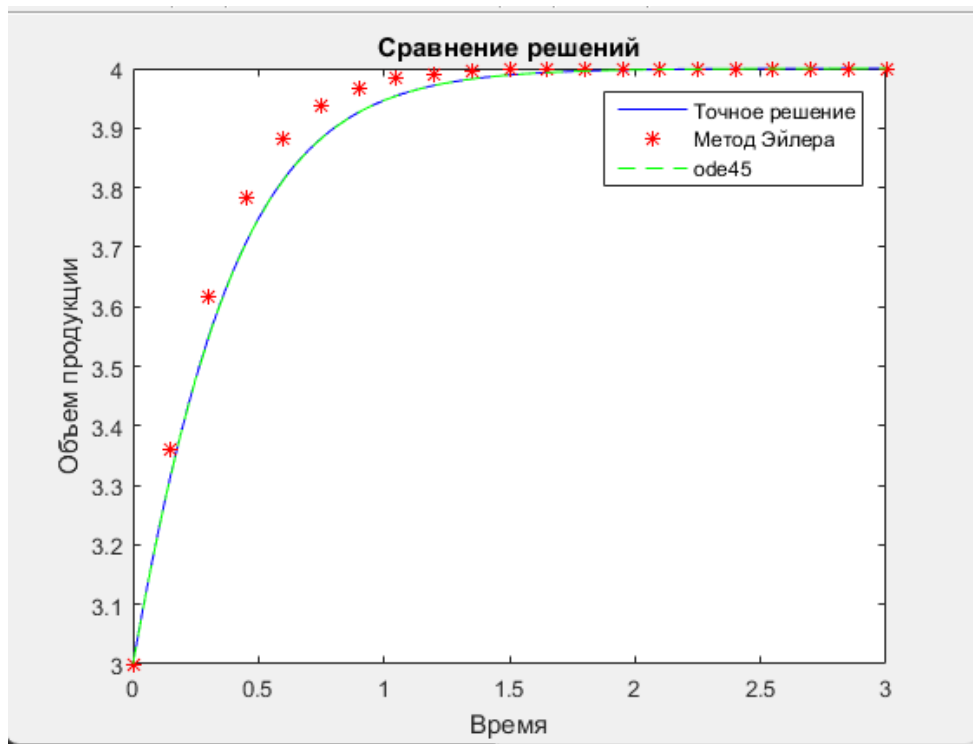
Ответ:

Точное решение задачи:

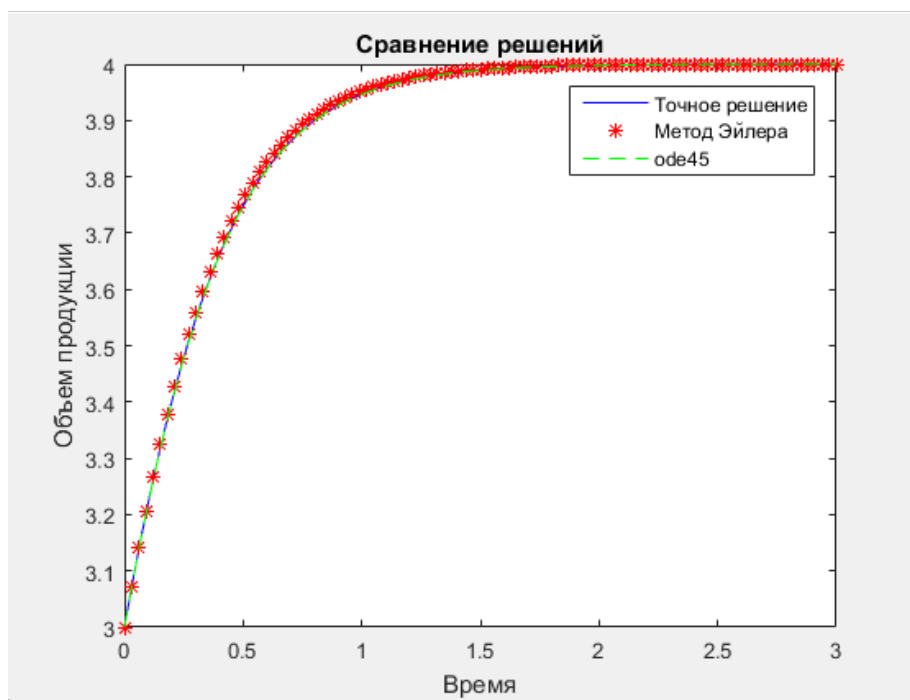
$$y(t) = \frac{12}{3+e^{-3.2t}}$$

2.

$n = 20$



$N = 100$



3. Сравнение решений:

- Точное решение стремится к насыщению $y = 4$.
- Метод Эйлера дает ступенчатое приближение. Чем меньше шаг h (больше n), тем ближе к точному решению.
- ode45 (метод Рунге-Кутты 4-5 порядка) обеспечивает высокую точность и почти совпадает с точным решением.