

Algebre TD?

Espace Vectoriel?

$E \neq \emptyset, e$

$(E, +, \cdot)$
 \hookrightarrow loi de composition interne
 \hookrightarrow loi de composition externe:

$x \in E$ (x est un vecteur)
 $\lambda \in K$ (λ scalaire)
 \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

$(E, +)$: groupe abélien

- ① + Associative
- ② + commutative
- ③ + admet un élément neutre
- ④ symétrisable.

de plus : ⑤ $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$

⑥ $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$

⑦ $\forall x, \beta \in K, \forall \alpha \in E, (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha (\beta \cdot x)$

⑧ $1x = x$.

e.v \Rightarrow espace vectoriel :

Some quizz :

① \mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v (oui) ② \mathbb{R} est un \mathbb{C} -e.v (non) car $\forall x \in \mathbb{R}, i x \notin \mathbb{R}$.

③ \mathbb{C} est un \mathbb{R} -e.v (oui), ④ \mathbb{C} est un \mathbb{C} -e.v (oui), ⑤ \mathbb{R}^2 est un \mathbb{R} -e.v

⑥ \mathbb{R}^2 est un \mathbb{C} -e.v (non), $(x, y) \in \mathbb{R}^2, i(x, y) \notin \mathbb{R}^2$.

\mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -e.v

⑦ : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\odot \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m) \longrightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m)$$

$$\oplus E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

$$\odot K \times E \longrightarrow E$$

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$$

$0_{\mathbb{R}^m} = (0, 0, \dots, 0)$ élément neutre de \mathbb{R}^m .

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, x + 0_{\mathbb{R}^m} = (x_1, x_2, \dots, x_m) + (0, 0, 0, \dots, 0) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \exists -x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^m}$$

sous-espace vectoriel: s.e.v

Soit E un e.v sur K , F est une partie de E , ($F \subset E$)

$$F \text{ est un s.e.v de } E \text{ssi } \begin{cases} F \neq \emptyset \text{ (} 0_E \in F \text{)} \\ (\forall x, y \in F, \forall \alpha \in K, \alpha x + y \in F) \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in F, x + y \in F \\ \forall x \in F, \forall \alpha \in K, \alpha x \in F \dots \end{cases}$$

Rq: F est une s.e.v d'un e.v E Alors $0_E \in F$.

$(0_E \notin F \Rightarrow F \text{ n'est pas un s.e.v de } E)$

Theoreme: un s.e.v est un e.v.

Sei n° 1: Algebre.
espace vectoriel:

Ex 2:

$$(\mathbb{R}^2, +, *)$$

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$((x, y), (x', y')) \longrightarrow ((x+x'), (y+y'))$$

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, (x, y)) \longmapsto (\lambda x, 2023)$$

$$(\lambda \cdot (x, y)) = (\lambda x, \lambda y)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x', y') \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda \cdot ((x, y) + (x', y')) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\textcircled{1} \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

$$x = (x, y), x' = (x', y'), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \cdot x = \lambda(x, y) = (\lambda x, 2023)$$

$$\lambda \cdot x' = \lambda(x', y') = (\lambda x', 2023)$$

$$\lambda \cdot x + \lambda \cdot x' = (\lambda x, 2023) + (\lambda x', 2023)$$

$$= (\lambda x + \lambda x', 4046) \neq \lambda \cdot (x+x')$$

?

donc, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un R.e.v.

$$\textcircled{2} \text{ Soit } U_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}.$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un R.e.v.

contre exemple:

$$x = (1, 1), x' = (3, 2), \lambda = 2.$$

$$\lambda \cdot (x + x') = 2(4, 3) = (8, 20, 23)$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x + \lambda \cdot x' &= 2(1, 1) + 2 \cdot (3, 2) = (2, 20, 23) + (6, 20, 23) \\ &= (8, 40, 46) \end{aligned}$$

$$\neq \lambda \cdot (x + x') .$$

