Algebre TD:
Espace Vectoriel :

E ∀ Z, e

$(E, +, \cdot)$ → lci : loi de composition interne
↳ lce : loi de composition externe :

$x \in E$ (x est un vecteur)
$\alpha \in \mathbb{K}$ (α scalaire)
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(E, +)$: groupe abélien
① + Associative
② + commutative
③ + admet un element neutre
④ symetrisable.

de plus : ⑤ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = x\alpha + x\beta$

⑥ $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$

⑦ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$

⑧ $1x = x$.

e.V ⇒ espace vectoriel :

Some quizz :

(*) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$.e.v (oui) (*) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$ e.v (non) car $\forall x \in \mathbb{R}, ix \in \mathbb{C}$.

(*) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ e.v, (oui), (*) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ e.v (oui), (*) $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ e.v

(*) $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{C}$ e.v (non), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $i(x, y) \notin \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$.ev

⑦ $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\odot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \longrightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$\oplus \quad E \times E \longrightarrow E$.

$(x, y) \longmapsto x + y$

$\odot \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$.

$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ element neutre de $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x + 0_{\mathbb{R}^n} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, 0, 0 \dots 0) = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$
$= x$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists -x \in \mathbb{R}^n$ tq, $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Sous-espace Vectoriel : s.e.v

Soit E un e.v sur $\mathbb{K}$, F est une partie de E, $(F \subset E)$

F est un s.e.v de E ssi $\begin{cases} F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ (\forall x, y \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \text{ on a } \alpha x + y \in F). \end{cases}$

ssi $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in F, x + y \in F. \\ \forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha x \in F \dots \end{cases}$

Rqs F est une s.e.v d'un e.v E Alors $0_E \in F$.

($0_E \notin F \Rightarrow F$ n'est pas un s.e.v de E.

Theoreme : un s.e.v est un e.v .

Serie n° 1 : Algebre.
espace vectoriel :

Ex 2 :

$(\mathbb{R}^2, +, *)$

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$.

$((x,y),(x',y')) \longrightarrow ((x+x'),(y+y'))$

$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$(\lambda,(x,y)) \longmapsto (\lambda x, 2023)$

$(\lambda * xy) = (\lambda x, \lambda y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$\lambda * (x,y) + (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

(4) $\forall x,y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

$X = (x,y)$, $X' = (x',y')$, $= (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot X = \lambda(x,y) = (\lambda x, 2023)$

$\lambda \cdot X' = \lambda(x',y') = (\lambda x', 2023)$

$\lambda \cdot X + \lambda X' = (\lambda x, 2023) + (\lambda x', 2023)$

$= \underbrace{(\lambda x + \lambda x', 4046) \neq \lambda \cdot (X+X')}_{?}$

donc, $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ n'est un $\mathbb{R}$.e.V.

(1) soit $U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^7 + x_2^7 = 1\}$.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un $\mathbb{R}$.e.V.

contre exemple :

$X = (1,1)$, $X' = (3,2)$, $\lambda = 2$.

$\lambda \cdot (x + x') = 2(4,3) = (8, 2023)$

$\lambda \times X + \lambda x' = 2(1,1) + 2\cdot(3,2) = (2, 2023) + (6, 2023)$

$= (8, 4046)$

$\neq \lambda \cdot (x + x')$.

Ex 3 :

① $V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^7, x_2^7\} \subset \mathbb{R}^2$ } $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$.e.v.

V_1 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ car $0_{\mathbb{R}^2} \notin V_1$ $(0 + 0 \neq 1)$

Autrement $\left\{ \begin{array}{l} x = (1,0) \in V_1 \text{ car } 1^7 + 0^7 = 1. \\ 2x = (2,0) \notin V_1 \text{ car } 2^7 + 0^7 \neq 1 \end{array} \right)$ ← contre exemple

② $V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$

V_2 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

contre exemple : $\frac{3}{4} \in V_2$?

$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in V_2$, $2x = (1, 1) \notin V_2$.

$V_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + x_2^2) \geq 4\}$ non

contre exemple :

$x = (1, 4) \in V_3$, $-x = (-1, -4) \notin V_3$.

④ $V_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 0\}$ non

CE :

$x = (-1, 2) \in V_4$ mais $x + x' = (4, 1) \notin V_4$.

$x' = (5, -1) \in V_4$.

⑤ $V_s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ qui

cas générale ?

$$F = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 \dots \alpha_n x_n = 0\}$$
est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$.

Demonstration : $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0) \in F$, car $\alpha_1 0 + \alpha_2 0, \dots, \alpha_n 0 = 0$.

donc $F \neq \emptyset$.

④ soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1 \dots y_n) \in F$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 . \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0 .$$

mq $\lambda x + y \in F$.