Analyse : cours :
Suite Réelle :

I) Déf : une suite Réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain nombre $n_0 \in \mathbb{N}$

on prendra soin de distinguer,

* Le terme général, noté U_n
* La suite noté $(U_n)_n$

Exp : $U_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = \sqrt{n-3}$, $n \geq 3$

Il existe plusieurs façons de définir une suite, on rencontre principalement deux types : → Les suites définies explicitement en fonction de n.

Exp : $U_n = 2n+1, \dots$

→ Les suites rencontrées définies par une relation de Reccurence et la donnée d'un ou plusieurs termes initiaux

Exp : $\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$

Notation : l'ensemble des suites Réelles est noté $\mathbb{R}^n$

II) Monotonie d'une suite :

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle, on dit que

* $(U_n)_n$ est croissante à partir du rang n_0 si, $U_{n+1} \geq U_n$,
  $U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$

* $(U_n)_n$ est strictement croissante à partir du rang n_0 si
  $U_{n+1} > U_n$, $\forall n \geq n_0$

* $(U_n)_n$ est décroissante à partir du rang n_0 si $U_{n+1} \leq U_n$, $\forall n \geq n_0$

* $(U_n)_n$ est strictement décroissante à partir du rang n_0 si $U_{n+1} < U_n$, $\forall n \geq n_0$

* $(U_n)_n$ est constante lorsque $U_{n+1} = U_n$ pour tout entier n du domaine de définition de $(U_n)_n$.

* $(U_n)_n$ est stationnaire lorsque $U_{n+1} = U_n \; \forall n \geq n_0$.

Remarque :

Il existe des suites non monotones :

Exp : $U_n = (-1)^n$

2) pour étudier la monotonie d'une suite on procède comme suit

* $U_{n+1} - U_n$ et comparer le résultat à 0.

* $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et comparer avec 1.

* $U_n = f(n)$, on étudie la monotonie de f :
  $(U_n)_n$ et f ont la même monotonie.

Ex : Etudier la monotonie des suites définies par :

① $U_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$, ② $V_n = 2n+1 \; \forall n \geq 0$.

③ $W_n = \dfrac{2}{n^2}$, $\forall n \geq 1$.

5

Steps :

Dérivée et puis comparer avec 0

- $\geq 0 \to$ croissante
- $\leq 0 \to$ decroissante.
- $= 0 \to$ constante?

① $U_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$ $\quad \dfrac{f}{g} \Rightarrow \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

$$\begin{cases} f = 2n^2+1, \; f' = 4n \\ g = n^2+5, \quad g' = 2n. \\ g^2 = (n^2+5)^2 = n^4 + 2n^2 + 5^2 = n^4 + 2n^2 + 25. \end{cases}$$

on pose $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{n^2+5}$

just Replace n with x.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+5) - 2x(2x^2+1)}{x^4+2x^2+25}$$

$$= \frac{\cancel{4n^3} + 20n - \cancel{4n^3} - 2n}{n^4\left(\frac{2}{n^2} + \frac{25}{n^4}\right)} = \frac{\overbrace{20n - 2n}^{\geq 0 \Rightarrow (+)}}{\underbrace{n^4\left(\frac{2}{n^2} + \frac{25}{n^4}\right)}_{\geq 0 \Rightarrow (+)}},$$

$\forall n \geq 0$, U_n est croissante car $f'(x) \geq 0$.

2) $V_n = 2n+1$, $\forall n \geq 0$. to check.

$V_{n+1} - V_n = 2n+1+1 - 2n+1 = 1 > 0 \Rightarrow$ est croissante.

3) $W_n = \dfrac{2}{n^2} \Rightarrow$ on pose $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $f'(x) = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ $\begin{cases} f = 2, \; f' = 0. \\ g = x^2, \; g' = 2x, \; g^2 = x^4 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2x\,2}{x^4} = \dfrac{-4x}{x^4}$, $\Rightarrow$ $\quad$ to check

$\forall x \geq 1$, $f'(x)$ est $\ominus$, Alors La suite W_n est decroissante.

Suite Majorée, minorée, bornée.

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle, on dit que

→ $(U_n)_n$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tq $U_n \leq M \quad \forall n \geq n_0$

→ $(U_n)_n$ est minorée lorsqu'il existe un réel m tq $U_n \geq m \quad \forall n \geq n_0$

→ $(U_n)_n$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée

$m \leq U_n \leq M \quad (U_n)_n$

$|U_n| \leq M$, U_n est bornée.