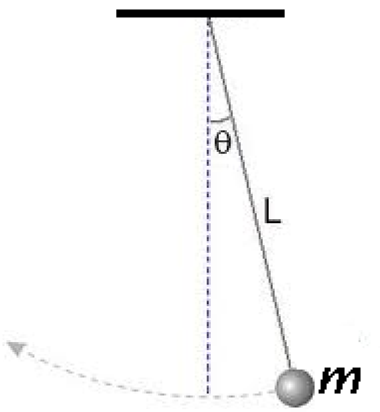
TAREA: PÉNDULO SIMPLE (Ecuación diferencial de 2º orden)



Consideremos un péndulo simple (figura izda), asumiendo que la masa del hilo (longitud L) es despreciable frente a la de la bola m. Su ecuación diferencial es simplemente $\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot \sin(\theta)$, siendo L la longitud del péndulo (en metros) y g la gravedad (9.8 m/s2).

Un péndulo es estable porque una perturbación del ángulo θ que le aparte del equilibrio ($\theta = 0$) causa una fuerza opuesta (debido al signo menos) que tiende a devolverle a su posición de equilibrio.

Para resolver, hay que convertir la ecuación en un sistema de dos ecuaciones de primer orden acopladas, usando como vector del nuevo problema las variables θ y θ' (esta función la tenéis en las transparencias como pendulo.m). Recordad que se trabaja en radianes para θ y rads/seg para θ'.

Supongamos un péndulo de longitud L=1 m que sujetamos a 2º ($2 \cdot \pi/180 = \pi/90$ rads) de la horizontal y dejamos caer. Usar euler.m con paso h=0.001 para resolver el problema en el intervalo t=[0,5]. Dar el vector de condiciones iniciales y adjuntar una gráfica mostrando SOLO del ángulo del péndulo (en grados) en función de tiempo. Usando el cursor de datos de MATLAB determinar el periodo de la oscilación (tiempo que tarda el péndulo en volver a recuperar la máxima amplitud positiva ~2º)

Pese a su sencillez, esta ecuación diferencial no tiene solución exacta. Si asumimos que las oscilaciones son pequeñas, $\sin(\theta) \sim \theta$ y la ecuación quedaría:

$$\theta'' = -(g/L) \cdot \theta$$

Esta ecuación sí tiene solución exacta. Para una amplitud inicial θ_0 y velocidad inicial 0 su solución es:

$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$, una oscilación sinusoidal de periodo $P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ~ 2.01 segundos

Calcular esta solución (usando θ_0 = 2º = $\pi/90$ rads) en los mismos tiempos donde habéis calculado la solución anterior y pintad la diferencia entre ambas en una nueva figura. Adjuntad figura. ¿Cuál es la mayor diferencia (en º) entre ambas soluciones?

Un péndulo es un sistema físico dentro del cual se produce un intercambio entre energía potencial (máxima cuando el péndulo se encuentra en su posición más alta) y la energía cinética (que crece con la velocidad que adquiere el péndulo).

La energía cinética es proporcional a la velocidad al cuadrado $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m (L \cdot \theta')^2$,

y la energía potencial U es proporcional a la altura: $U = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos\theta)$

Ignorando la masa (factor constante en ambas expresiones) calcular la energía cinética K y potencial U del péndulo para la solución numérica. Representarlas superpuestas en una gráfica en función del tiempo con colores distintos. Adjuntad gráfica de K y U.
Observaréis como partimos de una energía cinética K=0 (péndulo parado) y como K crece al ganar velocidad a consta de la energía potencial U. Al pasar por el punto más bajo toda la energía es cinética, que en la fase de subida vuelve a transferirse a energía potencial.

En un péndulo ideal no habría perdidas de energía por lo que la suma E=K+U debería ser constante. Adjuntad la gráfica de la energía total E. ¿Se conserva? ¿Crece o decrece?

Esto nos indica que esta solución numérica no es del todo correcta. Ahora que conocéis el problema, ¿podéis ver qué efecto tiene en la gráfica de la solución numérica? ¿Cómo se podría solucionar (o reducir) este problema?

En este caso ambas soluciones (numérica y aproximada) son prácticamente iguales, pero la ventaja de la solución numérica es que sigue funcionando aunque las oscilaciones ya no sean pequeñas. Si aumentamos la oscilación (soltando el péndulo desde más arriba) los ángulos ya no serán tan pequeños y la aproximación $\sin(\theta)\sim\theta$ falla por lo que la ecuación aproximada no es fiable. En este caso la solución numérica será preferible.

Volver a resolver la ecuación diferencial (con el mismo intervalo y paso h) pero ahora para un desplazamiento inicial mucho mayor de θ_0 = 1 rad (~57.3º).

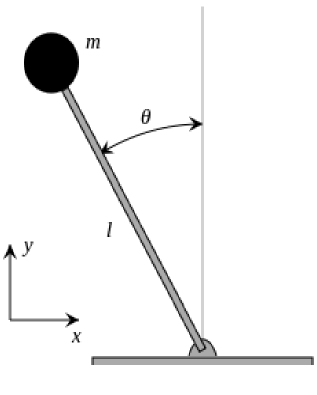
Adjuntad una gráfica superponiendo ambas soluciones (numérica + coseno) para este ángulo inicial de 1 rad. Ahora las diferencias deben ser muy apreciables.

Observando la gráfica, ¿se alarga o se acorta el periodo de un péndulo real al aumentar la amplitud inicial? Medir el periodo observado para la nueva oscilación con 2 decimales y compararlo con el correspondiente a oscilaciones pequeñas P ~ 2.01 seg.

Buscar en Wikipedia la fórmula de cómo se modifica el periodo de un péndulo para el caso de un desplazamiento inicial grande. Hacer una captura de la fórmula usada, aplicarla a vuestro caso y comparar el resultado con el que habéis medido "experimentalmente".

Péndulo invertido

Consideremos ahora un péndulo invertido. Ya no se puede usar un hilo para sujetar la masa y en su lugar usaremos una varilla rígida que tendrá una cierta masa. Si el peso de la varilla es el mismo que el de la masa m, la ecuación queda:



$$\theta'' = 1.125\frac{g}{L}\cdot\sin(\theta)$$

El factor 1.125 es debido a la influencia de la masa de la varilla en el giro del péndulo. Aparte de eso, el único cambio es el signo (que ahora es positivo). Esto es lo que hace inestable el sistema, ya que ahora cualquier perturbación del equilibrio (ángulo θ=0) provocará una fuerza en el mismo sentido, lo que empeora la situación. Eventualmente el ángulo θ alcanzará +/-π/2 (+/-90º) lo que indica que el péndulo ha llegado al suelo.

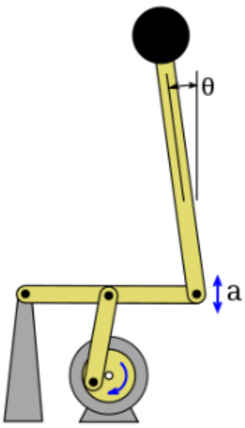
Dad la función codificando la ecuación diferencial para L=1m.

Resolver con el método de Euler entre 0 y 5 segundos, con un paso h=0.0001, con las mismas condiciones iniciales de antes: desviación inicial de 2º (π/90 rads) y velocidad inicial nula (rads/sec).

Adjuntar la gráfica de la evolución del ángulo (pasadlo a grados para hacer la gráfica). Interpretar la gráfica en términos del comportamiento del péndulo. Si el péndulo estuviera sobre una mesa (como en la figura ajunta) ¿cuánto tardaría en llegar al suelo?

Estabilización de un péndulo invertido

Para mantener en equilibrio un péndulo invertido una posibilidad es mover la base en el eje X. Lo que haríamos es mover la base en el sentido de la caída del péndulo (intentando volver a poner el soporte debajo de la masa). Imaginad que estáis intentando equilibrar un palo sobre vuestra mano. Si se cae hacia delante, adelantáis la mano y viceversa. Este es el fundamento de los sistemas de control de los patinetes tipo "segway" o similares.



Otra forma menos intuitiva para equilibrar un péndulo inverso es el llamado péndulo de Kapitza en el que hacemos oscilar la base en el eje vertical Y. Sería como mover nuestra mano arriba y abajo, impartiendo un movimiento a la base del péndulo del tipo:

$$y(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Este movimiento vertical provoca un cambio en la gravedad "efectiva" que nota el péndulo (pensad en la sensación que nos permite saber si un ascensor está subiendo o bajando). La gravedad efectiva que siente el péndulo es:

$$\hat{g} = g - a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

y la ecuación diferencial queda $\theta'' = 1.125 \dfrac{\hat{g}}{L} \sin(\theta)$

Escribir una función kapitza.m que codifique esta nueva ecuación diferencial.

- La longitud del péndulo es la de antes, L=1 metros y la gravedad es g=9.8 m/s2.
- Usar una amplitud a = 0.25 m (esto es, movéis la mano +/- 25 cm arriba y abajo).
- La frecuencia ω (rads/seg) corresponde a la velocidad de las oscilaciones verticales (cuanto mayor sea ω, más rápidas). Inicialmente usaremos ω = 5.

Resolver el problema en el intervalo [0 10] usando como un paso h=0.0001. Aumentad el valor de ω (10,15,20,...) hasta llegar a uno que consiga estabilizar el péndulo. A partir de ahí, determinar el valor más pequeño de ω (con una precisión de unidades) para el que se logra estabilidad. Dar la frecuencia ω con la que habéis conseguido estabilizar el péndulo y adjuntar una gráfica del ángulo calculado en la solución. ¿Cuál es la amplitud máxima (en grados) de las oscilaciones del péndulo?

Finalmente, vamos a hacer una gráfica de la **trayectoria** del péndulo en el plano (X, Y). Si el péndulo estuviera estacionario las componentes (x,y) serían:

$$x = L\sin(\theta)$$
$$y = L\cos(\theta)$$

Al moverse la base en el eje vertical (eje Y) debemos sumar el movimiento de la base a·sin(ω·t) a la componente y por lo que tenemos que:

$$x = L\sin(\theta)$$
$$y = L\cos(\theta) + a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Adjuntad gráfica de la trayectoria en el plano (X,Y) usando a=0.25 y ω=50