TAREA2 (Ampliación Métodos Adaptativos)

El método adapta12.m que implementamos en clase es de un orden demasiado bajo para ser útil en la mayoría de las aplicaciones. Vamos a subir su orden, pasando a ser un método de orden 2 controlado por otro de orden 3, al que llamaremos adapta23:

```
function [T S]=adapta23(fun,Tspan,y0,tol)
```

Los parámetros son idénticos a los de adapta12 y la implementación es muy similar. Si partimos del código de adapta12 solo hay tenemos que cambiar un par de cosas:

- En vez de una estimación de orden 1 (s1) y otra de orden 2 (s2), ahora se calcula una de orden 2 (s2) y otra de orden 3 (s3), de la siguiente forma:

  1. Usando el último punto conocido (t,y) evaluamos K1, K2 y K3:

  $$K_1 = f(t,y) \qquad K_2 = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}K_1\right) \qquad K_3 = f\left(t+\frac{3h}{4}, y+\frac{3h}{4}K_2\right)$$

  y los usamos para la estimación de orden 3, $s3 = y+\frac{h}{9}(2K_1+3K_2+4K_3)$.

  2. Luego calculamos $K_4 = f(t+h, s3)$ y usamos K1, K2, K3 y K4 para calcular la

  estimación de orden 2: $s2 = y+\frac{h}{24}(7K_1+6K_2+8K_3+3K_4)$

- La parte de estimar el error E y el ratio r es similar. La única diferencia es que cuando se usa el ratio r para modificar el paso h en la siguiente iteración, hay que usar una fórmula ligeramente distinta

  $$h_{new} \approx h\cdot\sqrt[3]{\frac{tol}{E}} = \frac{h}{\sqrt[3]{r}}.$$

  Esto es debido a que el error ahora va con E~ h^3 en vez de con E~ h^2. Añadid el mismo factor adicional (0.8) que usamos en adapta12.

Adjuntad vuestro código para adapta23.m

Solucionar la ecuación diferencial del anterior LAB (fun_rara.m) en el intervalo [0,4] con la condición inicial y(0)=0.84, y usando la misma tolerancia TOL=5e-4. ¿Cuántos puntos necesita ahora adapta23 para cubrir el intervalo comparados con los que usó adapta12?

Resolver la misma ecuación usando ahora el método rk4 con un paso fijo h=0.125. Este paso está escogido para que el número de puntos de rk4 sea similar al que usa adapta23.

Superponer en una gráfica las 2 soluciones (adapta23 en azul 'bo:', rk4 en rojo 'ro:'). El modificador 'o:' añadido al color muestra (además de la línea) los puntos donde se ha calculado la solución. Adjuntar la figura. Veréis que, aunque bastante parecidas entre sí, ambas soluciones no coinciden en todo el intervalo.

Al ser RK4 un método de orden superior podríamos asumir que su solución es la correcta. Para comprobarlo volver a correr RK4 con un paso 10 veces más pequeño h=0.0125 y volver a superponer la solución con la de adapta23. Adjuntad nueva gráfica.

Comparando ambas gráficas, ¿qué solución era la más exacta en el primer caso, adapta23 o rk4 con h=0.125? ¿Cómo es esto posible si usan el mismo número de pasos y rk4 es un método de orden más alto?

Verificación con una ecuación de 2º orden con solución exacta conocida.

Sea la ecuación diferencial $y''=-2y'-5y$ con condiciones iniciales $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

Escribid una función fun.m codificando esta ecuación diferencial. Adjuntad su código.

Resolver esta ecuación usando el método adapta23 en el intervalo [0, 6] especificando una tolerancia de 10^-4. Adjuntad el código usado para resolverla y una gráfica de la solución y(t) obtenida en función del tiempo T. ¿Cuántos puntos usa adapta23 para cubrir el intervalo?

La ventaja de esta ecuación es que su solución real es conocida: $y(t)=\sin(2t)\cdot e^{-t}$. De esta forma, usando la solución real podemos calcular el verdadero error de la solución numérica obtenida con adapta23.

Adjuntad la gráfica del error absoluto entre la solución numérica de adapta23 y la real. ¿Cuál es el error máximo cometido por la solución numérica en el intervalo [0,6]? ¿Cumple más o menos la solución numérica las especificaciones (Eabs<~10^-4)?

Vamos ahora a usar rk4 para resolver la misma ecuación diferencial en el intervalo [0,6]. ¿Qué paso h debéis usar para que la solución de rk4 tenga el mismo número de puntos que la obtenida por adapta23? Justificar

Resolver con rk4 usando el h que acabáis de deducir. Hacer una gráfica del error de la solución numérica obtenida. Adjuntad la gráfica. ¿Cuál es el máximo error cometido por el método rk4? ¿Es ahora el error mayor o menor que el conseguido por adapta23? ¿Por qué creéis que pasa ahora esto?

Finalmente compararemos los resultados de adapta23 con los de ode23, una función de MATLAB. Para resolver nuestra ecuación con ode23 hacer:

```
opt=odeset('AbsTol',TOL,'NormControl','on','RelTol',TOL);
[T S]=ode23(@fun,inter,y0,opt); T=T'; S=S';
```

La primera línea especifica unas opciones para ode23 que parecidas a las de adapta23. La segunda línea resuelve la ecuación y transpone los resultados T, S para presentarlos en el mismo formato que nuestra función. ¿Cuántos pasos da ode23 para cubrir el intervalo?

Superponer en una gráfica los errores absolutos cometidos por adapta23 y ode23 (comparar en ambos casos con la solución real conocida). Adjuntad la gráfica. Deberían ser bastante parecidos, lo que nos indica que, aunque más complicada y con muchas más opciones, ode23 utiliza básicamente el mismo algoritmo que hemos usado en adapta23.