【レポート#4 CG 法

BV20036　大野 弘貴

令和 5 年 11 月 26 日

1 レポート内容

CG 法

下の行列 A_1, A_2 を係数行列とする連立一時方程式に対し、以下の条件のもとで CG 法を適用し収束するまでの反復回数及び得られた近似解 x˜に対する相対残差 2 ノルム $\|b - Ax˜\|_2/\|b\|_2$ および真の解 x˜との相対残差 2 ノルム $\|x^* - x˜\|_2$ をもとめよ。さらに、横軸を反復回数縦軸（対数）を相対残差 2 ノルムとする収束履歴のグラフを作成し、得られた結果について考察せよ。

- 初期近似解：$x_0 = 0$
- 行列サイズ：$n = 100, 500$
- 最大反復回数：行列サイズ n に対し $2n$ とする。
- 許容誤差：$\varepsilon = 10^{-12}$
- 収束反転条件：相対残差 2 ノルム

$(\|r_{k+1}\|_2)$

- 真の解：$x^* = (1, 1, \cdots, 1)^T$
- 右辺項： b = A * x ˜として作成せよ

2 CG(Conjugate Gradient) 法とは

- 大規模で疎な正定値対称行列を係数行列とする連立一次方程式を解く反復法
- 非零成分の割合が非常に少ない行列 (⇔ 密行列)
- 大規模疎行列は偏微分方程式の数値計算 (離散化) でよくあらわれる
- 通常は, あらかじめ条件数を小さくするような「前処理」を行った CG 法がよく用いられる
  - 不完全コレスキー分解前処理付き共役交配法 (ICCG 法)
- 大規模疎行列の場合, 二次元配列に行列のすべての成分を格納するのではなく, 行列の非零成分のみを保持する疎行列格納形式が用いられる.
  - CRS 形式, CCS 形式. COO 形式, $\cdots$

3 実行結果

	A_1		A_2	
行列のサイズ	100	500	100	500
反復回数	40	39	39	266
相対残差 2 ノルム	7.19e-13	7.59e-13	8.27e-13	8.27e-13
相対誤差 2 ノルム	3.27e-12	7.42e-12	2.17e-08	9.30e-07

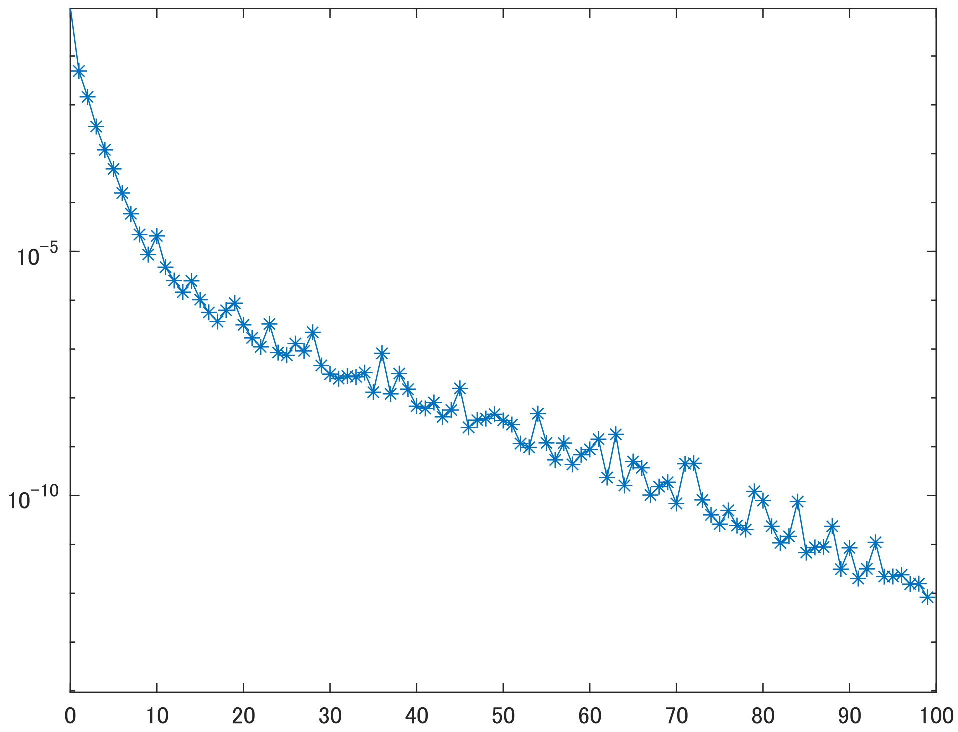

図 1　A_2 n=100

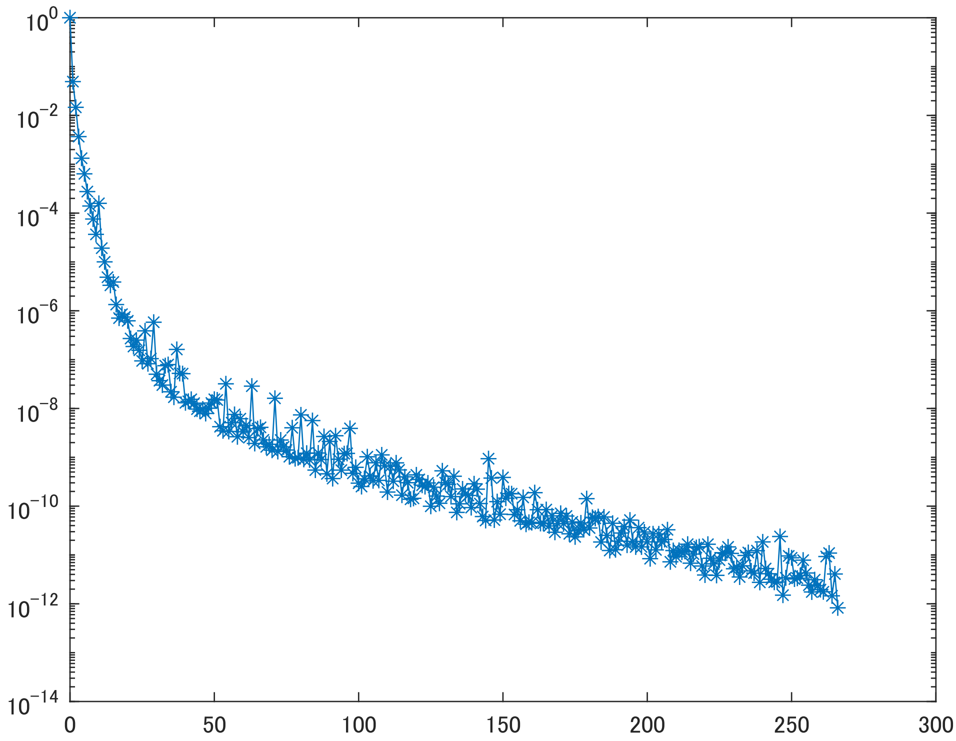

図 2　A_2 n=500

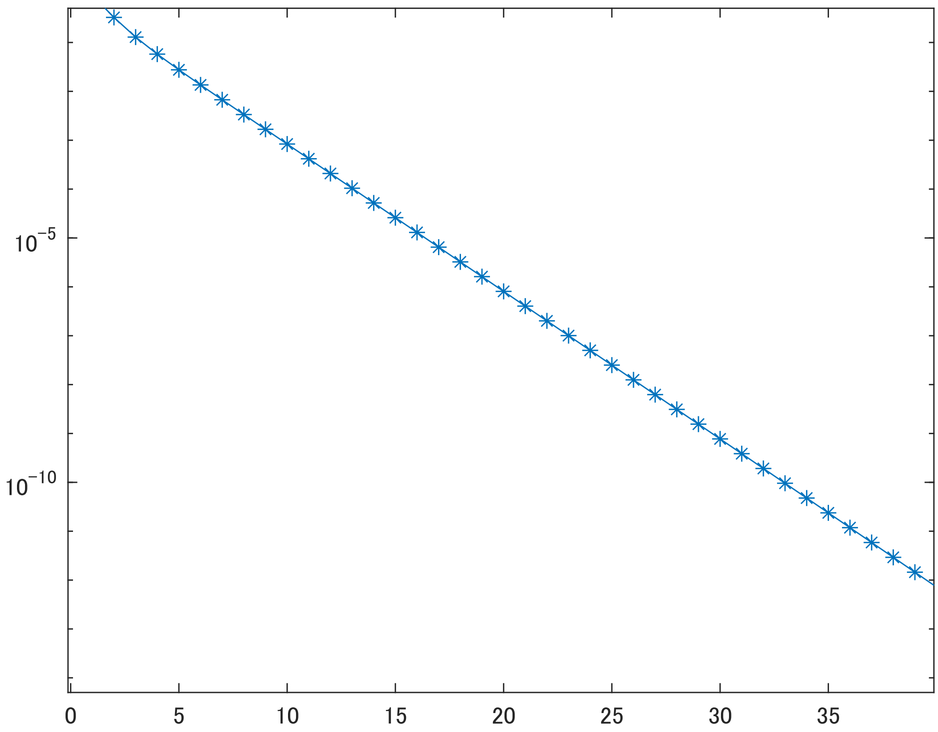

図 3　A_1 n=100

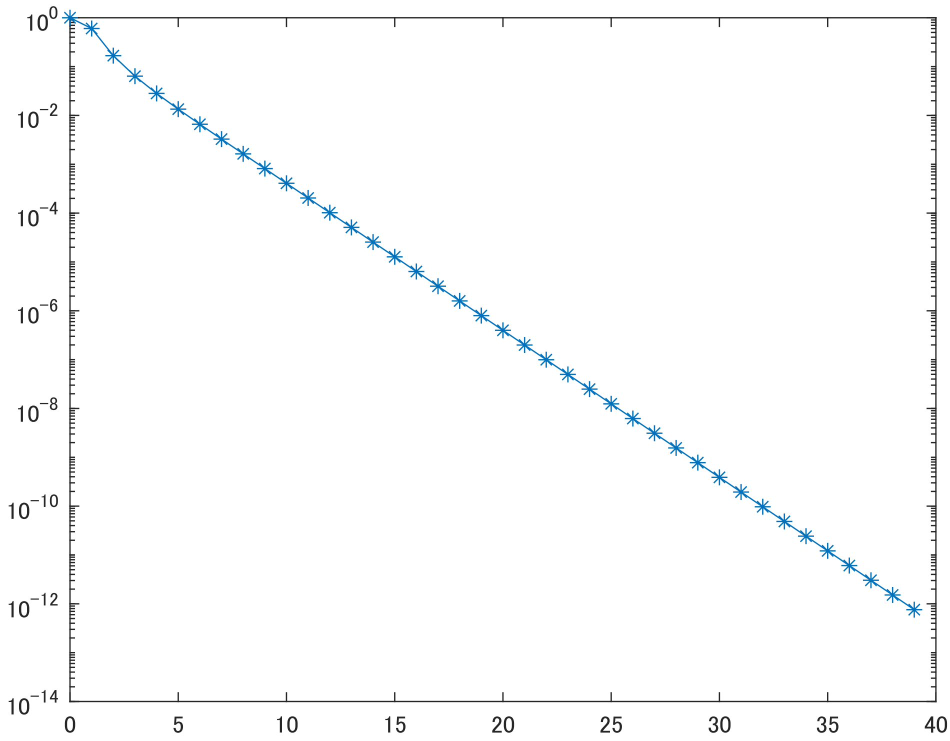

図 4　A_1 n=500

4　考察

A_1 の行列はわかりやすく、n が多くなく成るほど線形に精度がよくなっていくことがわかった。対して A_2 は n を増やすと徐々に精度がよくなっていくことは変わらないが、A_2 とは違い線形ではなく、波が生じながら精度が良くなっている。　また、相対誤差に関しては、行列が大きくなると要素数が増え計算が多くなることが原因なのか、行列を大きくしたほうが相対誤差も増えた。