

# 【レポート#3 最二乗法

BV20036 大野 弘貴

令和4年1月12日

# 1 レポート内容

囲いのタイトル左版

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0.98	7.61	2.47	1.38	3.31	0.83	6.72	8.07	9.83	6.36	14.3	21.0	20/9	14.7	12.3	20.0	13.0	20.7	17.7	23.8

- コレスキー分解および QR 分解を用いた最小二乗法で上のデータを近似する多項式 (の係数) を求め、与えられたデータと得られた多項式を重ねたグラフを作成せよ。多項式の次数は  $n=1, 7, 9, 11, 13$  の 5 つの場合についてそれぞれ行うこと。
- $n=1, 7, 9, 11, 13$  のそれぞれの場合について、コレスキー分解および QR 分解を用いて得られた解および、に対し、
  - 正規方程式の相対残差 2 ノルム:  $\|r_{chol/qr}\|_2 = \|A^T b - A^T A x_{chol/qr}\|_2 / \|b\|$
  - 元の最小二乗問題の相対残差 2 ノルム:  $\|r_{chol/qr}\|_2 = \|b - x_{chol/qr}\|_2 / \|b\|_2$
- 【任意】上記に加えて、特異値分解を用いた解法についても上記を行い比較せよ。

## 2 コレスキー分解とは

$A$  が正定値対称行列のとき,  $A$  は下三角行列  $L = (l_{ij})$  を用いて

$$A = LL^T$$

の形に分解できる。この分解をコレスキー分解という。

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{23} \end{pmatrix}$$

ただし、 $l_{ii} > 0$  とする。

## 3 QR 分解とは

QR 分解は行列分解の 1 つで以下の定理のことである。

囲いのタイトル左版

$$A \in \mathbb{N} \tag{1}$$

と一意に分解できる。ただし、 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は対角成分が正となる上三角行列である。

## 4 実行結果

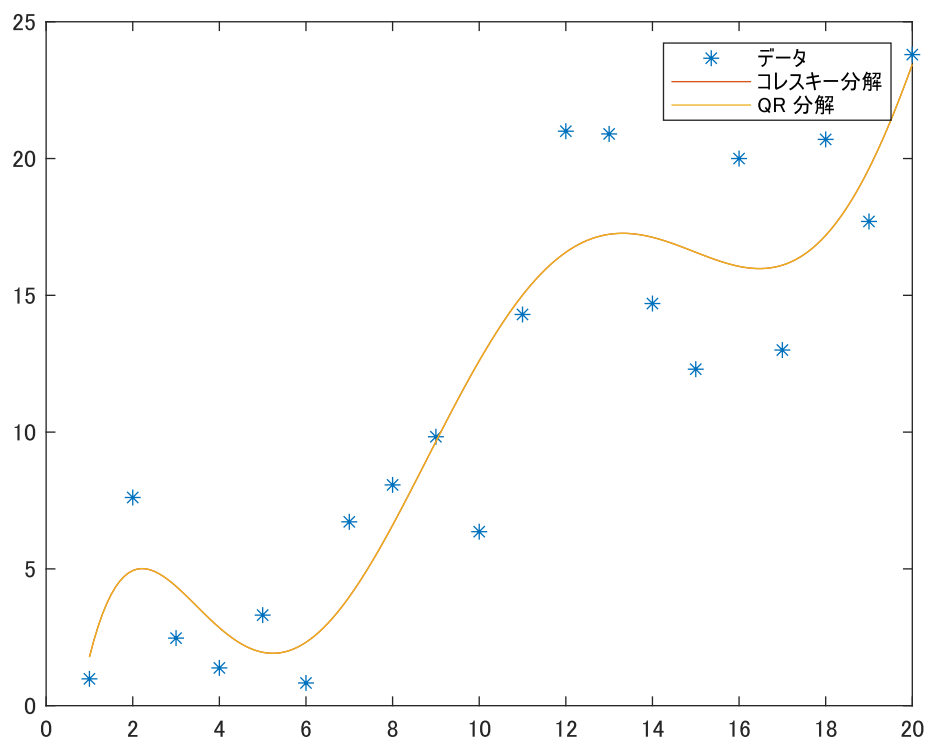


図1 キャプション

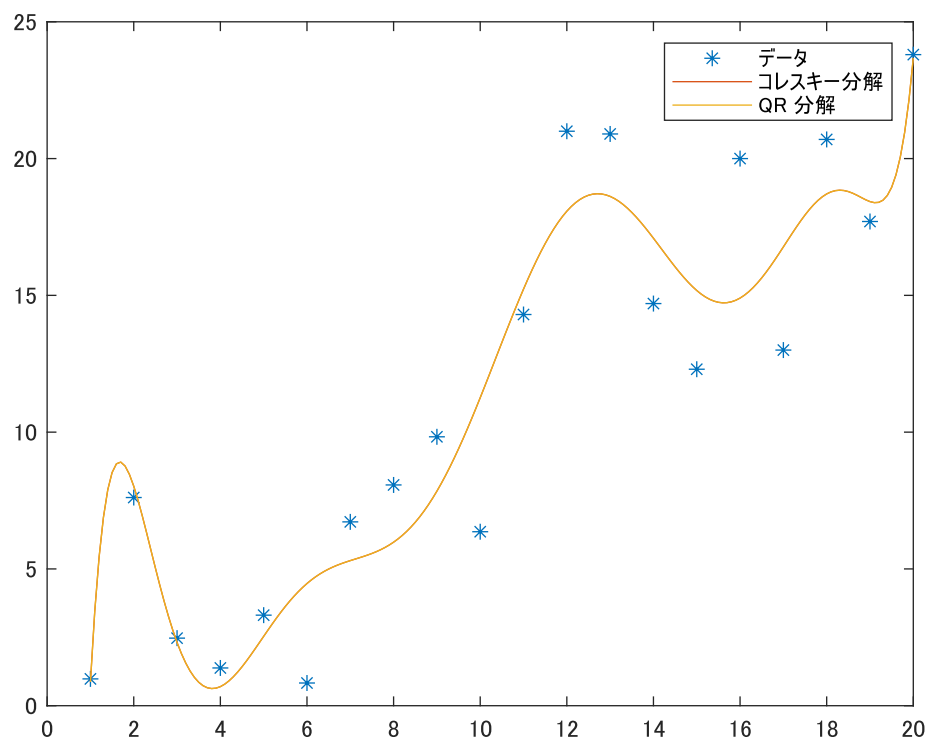


図 2 キャプション

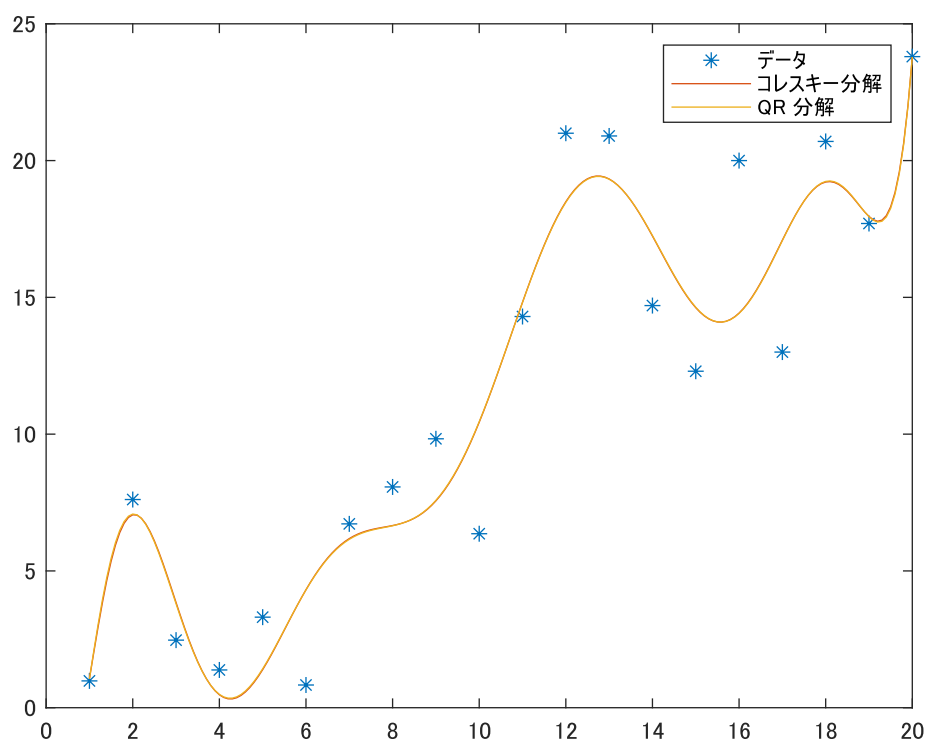


図3 キャプション

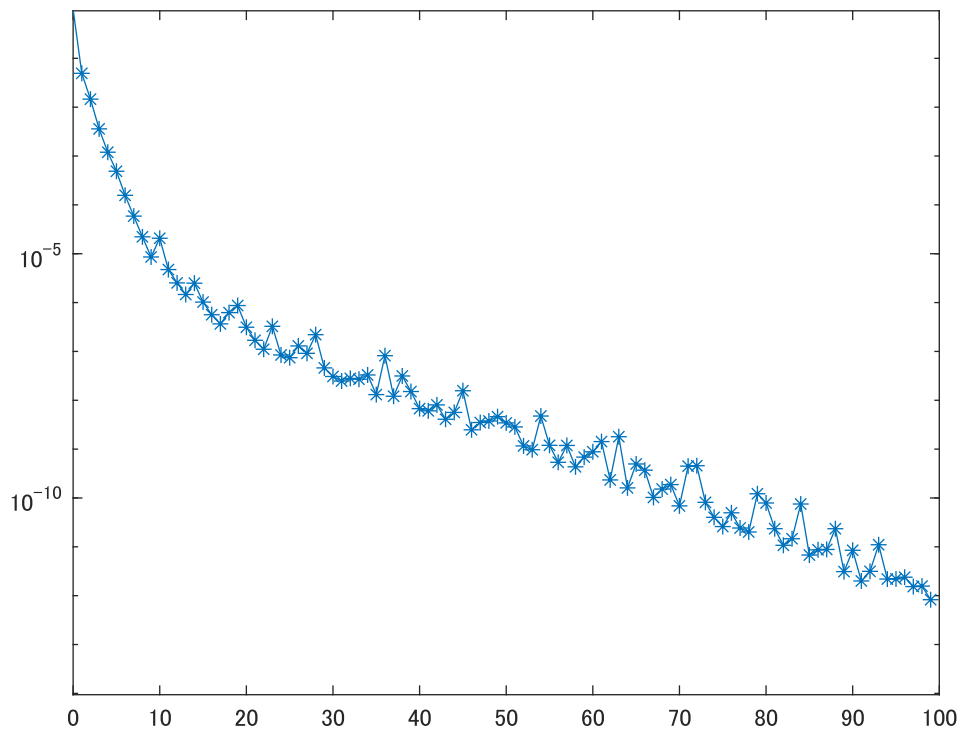


図4 キャプション

## 5 考察

実行結果を見ると、コレスキー分解・QR 分解ともに  $n$  の値を大きくするにつれて残差の値が小さくなっているため、 $n$  の値を増やせばより真の値に近づくことが分かる。また QR 分解より最小二乗法のほうが  $n$  の値を大きくしたときより小さくなったので、最小二乗法のほうが精度がよかった。もしくは標本点との相性がよかったかもしれない。

## 6 破綻する原因

今回用いた数値解法は前提として、求める行列が正定値対称行列である必要があるが、 $n$  の値を大きくするとこの条件を満たさない場合が現れた。これによってコレスキー分解ができず最小二乗法を行うことができなかった。