微分方程式

hono

2023 年 9 月 14 日

目 次

1 変数分離形 fdsa

1.1 基本的な解き方

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

$$g(y) \neq 0 \text{ のとき} \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)dx \tag{1.4}$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx \tag{1.5}$$

1.2 問 $y' = 2xy(y-1)$ を解く

定数関数 $y \equiv 0$ と $y \equiv 1$ は解であることが容易にわかる $y \neq 0, 1$ のとき

$$y' = 2xy(y-1) \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy(y-1) \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{y(y-1)}dy = 2xdx \tag{2.3}$$

$$\int \frac{1}{y(y-1)}dy = \int 2xdx \tag{2.4}$$

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = \int 2xdx \tag{2.5}$$

$$\log|y-1| - \log|y| = x^2 + C \tag{2.6}$$

$$\log\left|\frac{y}{y-1}\right| = x^2 + C \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{x^2+C} \tag{2.8}$$

$$\frac{y}{y-1} = \pm e^C e^{x^2} \tag{2.9}$$

あらためて e^C を C とおくと $(C \neq 0)$

$$\frac{y}{y-1} = Ce^{x^2} \tag{2.10}$$

$$1 - \frac{1}{y} = Ce^{x^2} \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{y} = 1 - Ce^{x^2} \tag{2.12}$$

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{x^2}} \tag{2.13}$$

y= 1 が解であることから C = 0 のときも解であるから、微分方程式の解は C を任意定数として

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{x^2}} \text{ または } y \equiv 0 \tag{2.14}$$

である。

$$\tag{2.15}$$

1.3　問 $y' = e^{2x-3y}$ を解く

$$
\begin{align}
y' &= e^{2x-3y} \tag{3.1}\\
\frac{dy}{dx} &= e^{2x-3y} \tag{3.2}\\
e^{3y}dy &= e^{2x}dx \tag{3.3}\\
\int e^{3y}dy &= \int e^{2x}dx \tag{3.4}\\
\frac{1}{3}e^{3y} &= \frac{1}{2}e^{2x} + C \tag{3.5}\\
e^{3y} &= \frac{3}{2}e^{2x} + C \tag{3.6}\\
3y &= \log\left(\frac{3}{2}e^{2x} + C\right) \tag{3.7}\\
y &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{3}{2}e^{2x} + C\right) \tag{3.8}
\end{align}
$$

1.4　問 $y' = x^2y^2$ を解く

y $\equiv$ 0 は解であることが容易にわかる。y $\neq$ 0 のとき

$$
\begin{align}
y' &= x^2y^2 \tag{4.1}\\
\frac{dy}{dx} &= x^2y^2 \tag{4.2}\\
\frac{1}{y^2}dy &= x^2dx \tag{4.3}\\
\int \frac{1}{y^2}dy &= \int x^2dx \tag{4.4}\\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{3}x^3 + C \tag{4.5}\\
y &= -\frac{3}{x^3} + \frac{3C}{x^3} \tag{4.6}\\
y &= \frac{3}{C - x^3} \tag{4.7}
\end{align}
$$

1.5　$y' = f(ax + by)(b \neq 0)$ のときに変数分離形にするやり方

$u(x) = ax + by(x)$ とおくと

$$
y' = \frac{u' - a}{b} \tag{5.1}
$$

であるから、$y' = f(ax + by)$ に代入すると

$$
\begin{align}
\frac{u' - a}{b} &= f(u) \tag{5.2}\\
u' &= bf(u) + a \tag{5.3}
\end{align}
$$

となり x の関数 $u(x)$ についての微分方程式になる。

$$ \tag{5.4} $$

1.6　問 $y' = \dfrac{x-2y+1}{2x-4y+3}$ を解く