【レポート#3 IAM】

BV20036　大野 弘貴

令和 4 年 1 月 22 日

Theorem

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Proof.

From defnition

$$\begin{aligned}
& f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x) && (3)\\
&= f(x+h)\,g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)\,g(x) && (4)\\
&= (f(x+h) - f(x))\,g(x+h) + (g(x+h) - g(x))\,f(x) && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} && (7)\\
&= \frac{(f(x+h) - f(x))\,g(x+h) + (g(x+h) - g(x))\,f(x)}{h} && (8)\\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} && (11)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} && (14)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) && (15)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)} && (16)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} && (17)\\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\right) && (18)\\
&= -g'(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\right) && (19)\\
&= -g'(x) \cdot \left(\frac{1}{g^2(x)}\right) && (20)\\
& && (21)
\end{aligned}$$

囲いのタイトル左版

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0.98	7.61	2.47	1.38	3.31	0.83	6.72	8.07	9.83	6.36	14.3	21.0	20/9	14.7	12.3	20.0	13.0	20.7	17.7	23.8

- コレスキー分解および QR 分解を用いた最小二乗法で上のデータを近似する多項式 (の係数) を求め，与えられたデータと得られた多項式を重ねたグラフを作成せよ。 多項式の次数は n=1, 7, 9, 11, 13 の 5 つの場合についてそれぞれ行うこと。
- n=1, 7, 9, 11, 13 のそれぞれの場合について，コレスキー分解および QR 分解を用いて得られた 解 および， に対し，
  - 正規方程式の相対残差 2 ノルム: $\|r_{chol/qr}\|_2 = \|A^T b - A^T A x_{chol/qr}\|_2 / \||b\||$
  - 元の最小二乗問題の相対残差 2 ノルム:$\|r_{chol/qr}\|_2 = \|b - x_{chol/qr}\|_2 / \|b\|_2$
- 【任意】上記に加えて，特異値分解を用いた解法についても上記を行い比較せよ。

1　コレスキー分解とは

A が正定値対称行列のとき, A は下三角行列 L $= (l_i j\ )$ を用いて

$$A = LL^T$$

の形に分解できる。この分解をコレスキー分解という。

A $= LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{23} \end{pmatrix}$

ただし、$l_{ii} > 0$ とする。

2　QR 分解とは

QR 分解は行列分解の 1 つで以下の定理のことである。

囲いのタイトル左版

$$A \in \mathbb{N} \tag{22}$$

と一意に分解できる。ただし、Q $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ は対角成分が正となる上三角行列である。

3　実行結果

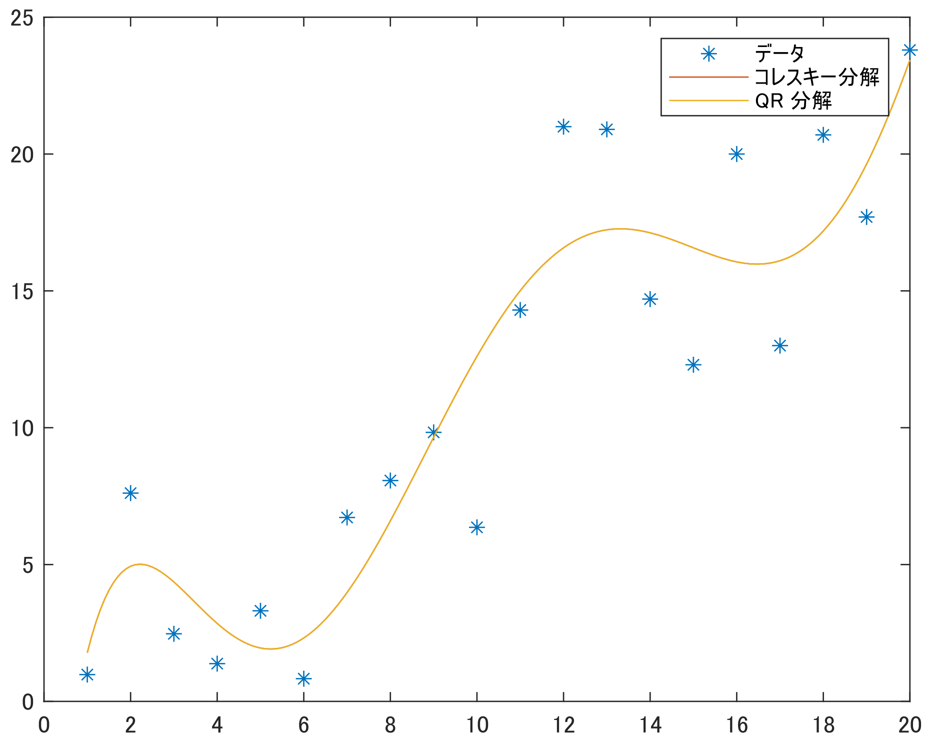

図 1　キャプション

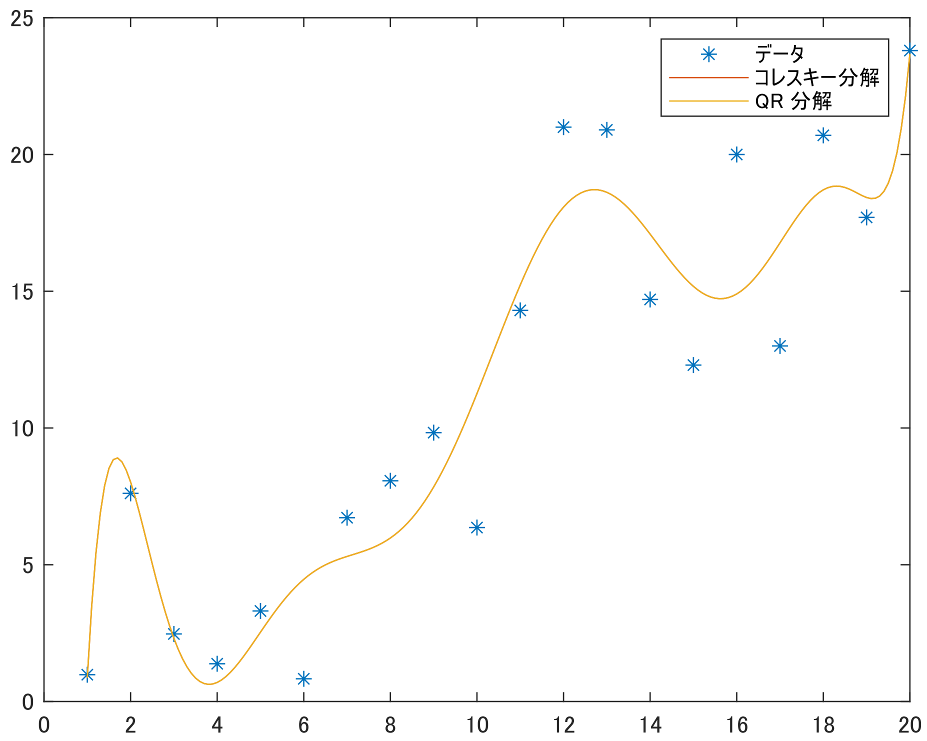

図 2　キャプション

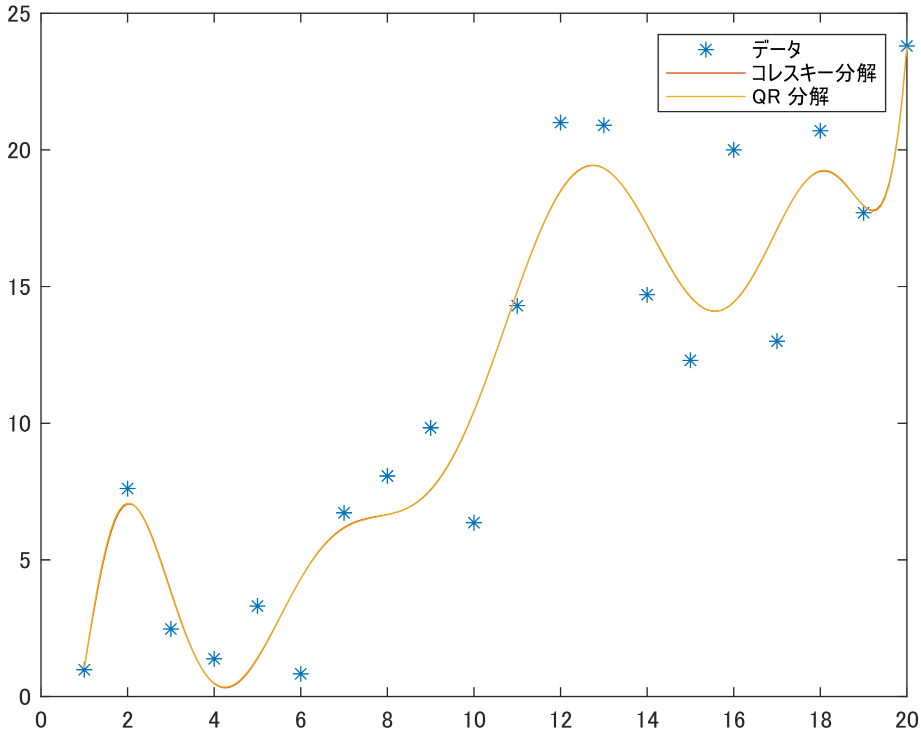

図 3　キャプション

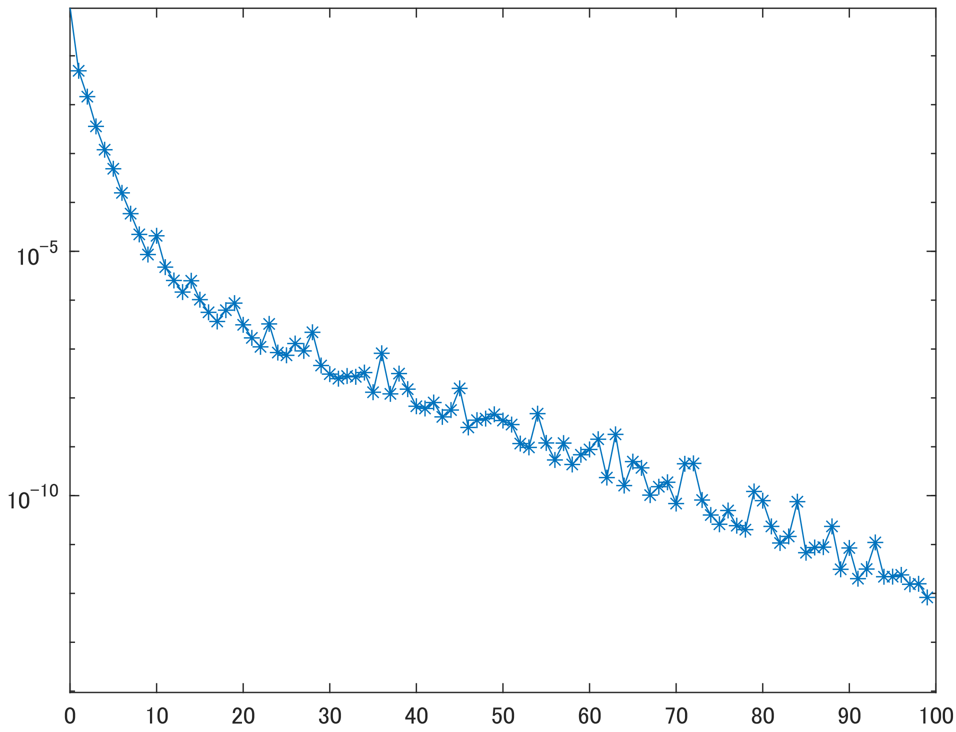

図 4　キャプション

4　考察

実行結果を見ると、コレスキー分解・QR 分解ともに n の値を大きくするにつれて残差の値が小さくなっているので、n の値を増やせばより真の値に近づくことが分かる。また QR 分解より最小二乗法のほうが n の値を大きくしたときより小さくなったので、最小二乗法のほうが精度がよかった。もしくは標本点との相性がよかったかもしれない。

5　破綻する原因

今回用いた数値解法は前提として、求める行列が正定値対称行列である必要があるが、n の値を大きくするとこのせい値対称行列を満たさない場合が現れた。これによってコレスキー分解ができず最小二乗法を行うことができなかった。