微分積分学

hono

2023 年 7 月 23 日

目 次

定義 関数の極限

関数 $y=f(x)$ において、x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき、関数 $f(x)$ の値が b に限りなく近づくならば「x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は b である」といい

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{0.1}$$

あるいは、

$$f(x) \to b \quad (x \to a) \tag{0.2}$$

と書く

※極限の表現が曖昧なので論理的ではない

定義 左側極限値 (右側極限値)

$x \to a-0 \quad (x \to a+0)$ のとき $f(x)$ の値が $\alpha \quad \beta$ に限りなく近づくとき、

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \quad (\lim_{x\to a+0} f(x) = \beta) \tag{0.3}$$

と表し、$\alpha \quad (\beta)$ を $f(x)$ の a における左極限値 (右極限値) という

定理 極限の性質

α, β を定数とするとき、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるとき、次が成り立つ

1. $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \alpha \quad$ (k は定数)
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

定理 極限の性質 2

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるとき、次が成り立つ

1. $x=a$ の近くで $f(x) \leq g(x)$ であるとき、$\alpha \leq \beta$
2. $x=a$ の近くで $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ のとき、$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha = \beta$

定義 連続

$x=a$ において $f(x)$ が定義されているとき、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{0.4}$$

が成り立つとき、$f(x)$ は $x=a$ において連続であるという

定義 右連続 (左連続)

$x=a$ において $f(x)$ が定義されているとき、

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)) \tag{0.5}$$

が成り立つとき、$f(x)$ は $x=a$ において右連続 (左連続) であるという

定理

k を定数とする。$f(x), g(x)$ はともに $x = a$ で連続ならば

1. $k \cdot f(x)$ も $x = a$ で連続
2. $f(x) \pm g(x)$ も $x = a$ で連続
3. $f(x) \cdot g(x)$ も $x = a$ で連続

も連続である。また $g(x) \neq 0$ のとき、$f(x)/g(x)$ も $x = a$ で連続である

定理

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

定理 合成関数の連続性

$f(x)$ が $x = a$ で連続、$b = f(a)$ とする。また $y = g(x)$ が $x = b$ で連続であるとき、$y = g \circ f(x)$ は $x = a$ で連続である

定理 逆関数の連続性

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で狭義単調増加ならば、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は閉区間 $[f(a), f(b)]$ 上で連続で狭義単調増加である。狭義単調減少の場合も同様

定理 有界閉区間上の連続関数の最大値と最小値

閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、$[a, b]$ 上で最大値と最小値をもつ

定理 中間値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続、$f(a) \neq f(b)$ であるとき、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 c に対して、

$$f(c) = \mu \quad (a < c < b)$$

を満たす点が少なくとも 1 つ存在する

定義 微分可能

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき、$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。この極限値を $f'(a)$ と書き、$f(x)$ の $x = a$ における微分係数という $f(x)$ が区間 I 上で微分可能であるとき、$f(x)$ は I 上で微分可能であるという

定義 右微分可能 (左微分可能)

$\lim_{h \to a-0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, \lim_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき、それぞれ $f(x)$ は $x = a$ において右微分可能 (左微分可能) であるという。これらの極限値を $f'_+(a), f'_-(a)$ と書き、$x = a$ における右微分係数 (左微分係数) という

定理 微分可能ならば連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、$f(x)$ は $x = a$ で連続である

定理 合成関数の微分法

$f(x), g(x)$ は微分可能とする。このとき次が成り立つ。

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \quad (k$ は定数$)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$

定理 合成関数の微分公式

$y = f(x)$ が x について微分の安濃であり、$z = g(y)$ について微分可能ならば、合成関数 $z = g(f(x))$ は x について微分可能であり、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{0.6}$$

定理 逆関数の微分公式

$x = f(y)$ が微分可能な単調関数ならば、その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は $f'(y) \neq 0$ を満たす点 x で微分可能であり、次の式が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{0.7}$$

定理 バラメータ表示された関数の微分公式

$x = \phi(t), y = \psi(t)$ が t について微分可能な関数で、$\psi(t)$ の逆関数が定義され $\phi'(t) \neq 0$ であるとき、y は x の関数として微分可能であり、次の式が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \quad (\phi'(t) \neq 0) \tag{0.8}$$

定義 高階導関数

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がさらに微分可能であるとき、$f(x)$ は 2 回微分可能であるといい、$f''(x)$ を $f(x)$ の 2 階導関数という。一般に、$f(x)$ が n 回微分可能であるとき、$f(x)$ を n 回微分することによって得られる関数を $f(x)$ の n 階導関数といい、$f^{(n)}(x)$ と表す。