微分積分学 II

小野廣隆

名古屋大学・情報学部

2025 年 12 月 18 日

Contents

連絡事項

スケジュール：

- 12/04 第 8 回：重積分 1（定義その他）
- 12/11 第 9 回：重積分 2（変数変換）
- 12/18 第 10 回：重積分 3（広義重積分）
- 12/25 第 11 回：線積分（オンデマンド）
- 1/8 は月曜授業
- 1/15 第 12 回：グリーンの定理等
- 1/22 演習（自習）
- 1/29 試験

広義積分

重積分でも広義積分を考えることが出来る（ここでは $f(x, y)$ を非負で D 上の有界閉集合上で有界な値を取るとする）．（一般の場合はもっと精密な議論が必要）

「D の近似増加列（単調近似列）」 $\Leftrightarrow$

- $D_n \subset D_{n+1}$
- 有界閉集合である $\forall D' \subset D$ に対して, $\exists n$: $D' \subseteq D_n$

「D 上で広義積分が存在」 $\Leftrightarrow$
D のある近似増加列，D_n において,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dxdy$$

が収束する

広義積分

D_n の候補は無数にあるが，一つに対して収束性が言えれば十分

定理 (定理 22.1)

f は D 上の非負値の関数とする．D の近似増加列 $\{D_n\}$ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

は近似列の取り方によらず一定である．

広義積分の例

例題

以下を証明せよ．

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$

まず以下を計算する．

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, D_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq n^2\}$$

（この D_n が R^2 の単調近似列となっている）．

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-r^2} rdr = \pi \int_0^{n^2} e^{-t}dt = \pi(1-e^{-n^2})$$

広義積分の例

よって,

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\pi(1-e^{-n^2}) = \pi.$$

ちなみに, 別の単調近似列として, $I_n = \{(x,y) \mid -n \leq x, y \leq n\}$ を考えることもできる.
この場合,

$$\iint_{I_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-n}^{n} dy \int_{-n}^{n} e^{-x^2}e^{-y^2}dx$$

$$= \left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy\right)\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right) = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)^2$$

であることから（広義積分値は単調近似列の取り方によらない）,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

被積分関数が正とは限らないとき (1)

例

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy, D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

やり方１： 単調近似列として $I_n = \{[0,n] \times [0,n]\}$ を考える．

$$\begin{aligned}\iint_{I_n} \sin(x^2+y^2)dxdy &= \iint_{I_n} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)dxdy \\ &= 2\left(\int_0^n \sin x^2 dx\right)\left(\int_0^n \cos y^2 dy\right).\end{aligned}$$

で，$n \to \infty$ とすると収束する．

被積分関数が正とは限らないとき (2)

やり方２： 単調近似列として $R_n = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ を考える.

$$\begin{aligned} \iint_{R_n} \sin(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^n \sin(r^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{4}(1-\cos n^2). \end{aligned}$$

$n \to \infty$ としても収束しない.

このように単調近似列の取り方により収束したりしなかったりすることがある ＝ 広義積分が存在しない！

例その 2(無限が絡まない場合)

$$\iint_D \frac{(x-y)}{(x+y)^3}dxdy, D = \{[0,1]\times[0,1]\setminus\{(0,0)\}\}.$$

＊累次積分の取り方も単調近似列の取り方であることに注意する.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2y}{(x+y)^3}\right)dx\right)dy$$
$$= \int_0^1\left[-\frac{1}{(x+y)}+\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1}dy = -\int_0^1\frac{1}{(1+y)^2}dy = -\frac{1}{2}.$$

＊一番最初の変形は $x-y=(x+y)-2y$ としている.

一方，累次積分の順番を変えると（$x-y=2x-(x+y)$ と変形して）

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{(x-y)}{(x+y)^3}dy\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\int_0^1\left(-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x}{(x+y)^3}\right)dy\right)dx=\frac{1}{2}.$$

となって，積分値が異なることがわかる．＝広義積分が存在しない！

このようなことが起こる理由のようなもの

直感的には無数の正負の打ち消しあいがおかしな収束を導いているため．⇒絶対値をとって積分してみると？

例

$$\iint_D |\sin(x^2+y^2)|dxdy, D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

近似増加列 $D_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq \pi n, x \geq 0, y \geq 0\}$ を定義し，積分すると，

$$\iint_{D_n} |\sin(x^2+y^2)|dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi n}} |\sin r^2| r dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi n} |\sin t| dt = \frac{\pi}{4} n \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{\pi n}{2}.$$

つまり，$n \to \infty$ で発散するため，この広義積分は存在しない．

同様に,

$$\iint_D \frac{|x-y|}{(x+y)^3}dxdy, D = \{[0,1]\times[0,1]\setminus\{(0,0)\}\}.$$

も広義積分不可能であることを示すことができる.

絶対積分可能

定義

非有界集合 D が面積確定であるとは，面積確定な任意の有界閉集合 K に対して，$K \cap D$ が面積確定となるときのことを言う．

定義

関数 f は面積確定集合 D 上で連続であるとする．このとき，次のように定義する：
f が D で絶対積分可能 $\Leftrightarrow$ $|f|$ が D で広義積分可能．

つまり，先の 2 例は絶対積分可能でない例．

定理

関数 $f(x, y)$ が D で絶対積分可能ならば，D の任意の近似増加列 $\{D_n\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)dxdy$$

は同じ値に収束する（広義積分可能）．

略証： 関数を $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \max(-f, 0)$ とおくと，$f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ と表すことができる．ここで f^+, f^- 共に連続で，$|f| \geq f^+ \geq 0$, $|f| \geq f^- \geq 0$. つまり，f が絶対積分可能であるならば, f^+, f^- は D 上で広義積分可能．よって，

$$\iint_D fdxdy = \iint_D f^+dxdy - \iint_D f^-dxdy.$$

（右辺の積分は共に有限値を取るので）となり f も広義積分可能．