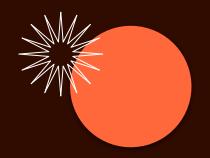
#### POLITECHNIKA WROCŁAWSKA WYDZIAŁ INFORMATYKI I TELEKOMUNIKACJI

# METODY ANALIZY I EKSPLORACJI DANYCH

Wykład 10 - Odkrywanie wzorców: reguły asocjacyjne.

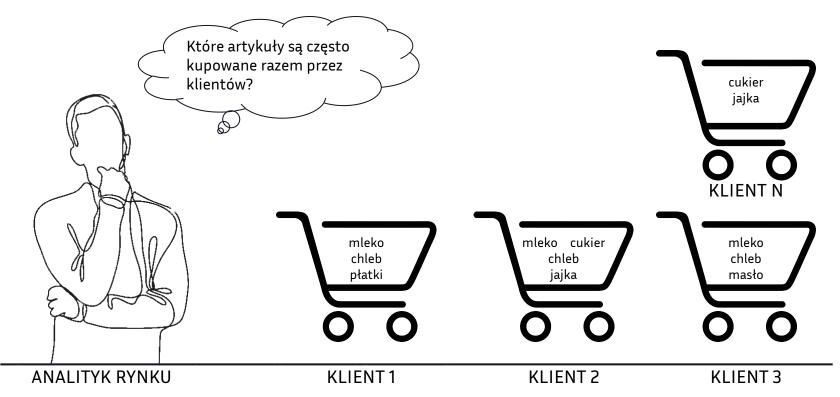
DR INŻ. AGATA MIGALSKA



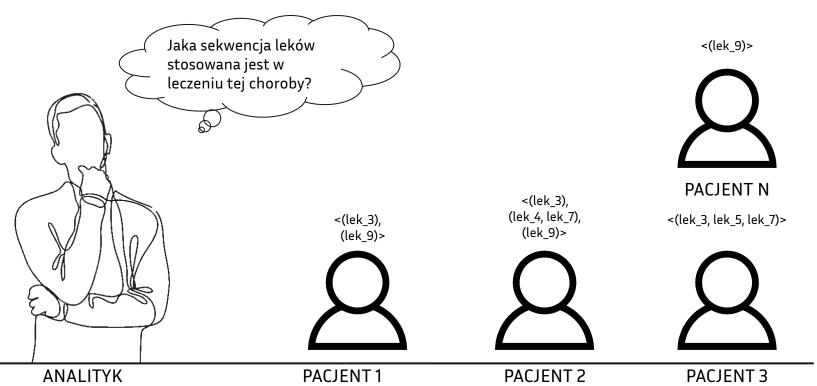


# CEL I MOTYWACJA

## ODKRYWANIE WZORCÓW (PATTERN DISCOVERY)



## ODKRYWANIE WZORCÓW (PATTERN DISCOVERY)



# CZYM JEST ODKRYWANIE WZORCÓW?

Biorąc pod uwagę ogromne dane dotyczące transakcji zakupowych, wykrywanie wzorców może pomóc odpowiedzieć na następujące pytania:

- Jakie grupy artykułów są często kupowane razem?
- Jeśli ktoś kupuje pieluchy w nocy, jakie jest prawdopodobieństwo, że kupi też piwo?
- Jeśli klient kupi iPhone'a 5 lub iPhone'a 7, jakie inne produkty elektroniczne klient najprawdopodobniej kupi w ciągu najbliższych 3 miesięcy?

**Wzorzec**: zestaw elementów, podsekwencji lub podstruktur, które często występują razem (lub są silnie skorelowane) w zbiorze danych.

### ZASTOSOWANIA

- Przewidywanie danych transakcji zakupowych
- W przypadku klienta, który kupuje produkty A i B, jakie jest prawdopodobieństwo, że klient kupi produkt C?
- Przewidywanie strumieni kliknięć na stronie internetowej:
- Która strona internetowa zostanie kliknięta jako następna?
- Błędy oprogramowania do wydobywania: gdzie jest prawdopodobny błąd w tym programie błąd w tym programie?
- Identyfikacja obiektów lub podstruktur w obrazach, filmach i mediach społecznościowych
- Znajdowanie wysokiej jakości fraz, jednostek i atrybutów w obszernym tekście
- Znalezienie powtarzających się sekwencji DNA i białek w genomach
- Znajdowanie "ukrytych" społeczności w ogromnej sieci społecznościowej

#### ODKRYWANIE WZORCÓW

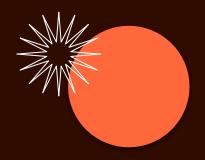
jest zadaniem
a) uczenia nadzorowanego
czy
b) uczenia nienadzorowanego?

### ODKRYWANIE ASOCJACJI

ALGORYTMY ODKRYWANIA ASOCJACJI BINARNYCH

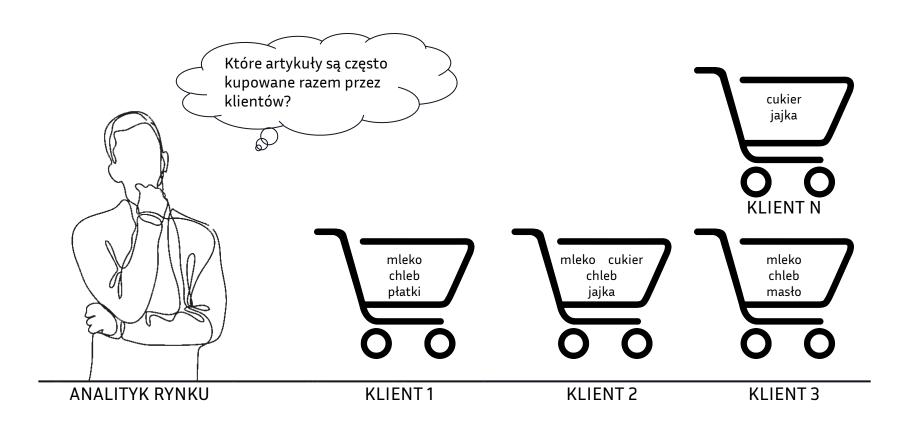
JAK
INTERESUJĄCY
JEST TEN
WZORZEC?

BARDZIEJ ZAAWANSOWANE TEMATY



# ODKRYWANIE ASOCJACJI

#### **ODKRYWANIE ASOCJACJI**



# ZBIORY CZĘSTE (FREQUENT ITEMSETS)

- **Zbiór (itemset)**: zbiór jednego lub więcej elementów
- k-zbiór (k-itemset):  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$
- (bezwzględne) wsparcie X: Częstotliwość lub liczba wystąpień zestawu przedmiotów X
- (względne) wsparcie, s: Ułamek transakcji zawierających X (tj. prawdopodobieństwo, że transakcja zawiera X)
- Zbiór X jest częsty, jeśli wsparcie X jest nie mniejsze niż próg minsup

T_id	Towary
1	piwo, orzeszki, pieluszki
2	piwo, kawa, pieluszki
3	piwo, pieluszki, jajka
4	orzeszki, jajka, mleko
5	orzeszki, kawa, pieluszki, jajka, mleko

Niech minsup = 50%

#### Częste zestawy 1-elementowe:

Piwo: 3 (60%), Orzeszki: 3 (60%), Pieluszki: 4 (80%), Jajka: 3 (60%)

#### Częste zestawy 2-elementowe:

{Piwo, pieluszki}: 3 (60%)

### OD ZBIORÓW CZĘSTYCH DO REGUŁ ASOCJACYJNYCH

- ullet Reguly asocjacyjne: X o Y(s,c)
- ullet Wsparcie, s: Prawdopodobieństwo, że transakcja zawiera  $X\cup Y$ 
  - $\circ$  Uwaga: Notacja!  $X \cup Y$  oznacza, że transakcja zawiera oba elementy, X i Y
- Ufność, c: Prawdopodobieństwo warunkowe, że transakcja zawierająca X zawiera również Y.

$$c = rac{s(X \cup Y)}{s(X)}$$

• **Odkrywanie reguł asocjacyjnych**: znajdowanie wszystkich **silnych** reguł asocjacyjnych, tzn. spełniających warunek minimalnego wsparcia i ufności

Niech minsup = 50%

#### Częste zestawy 1-elementowe:

Piwo: 3 (60%), Orzeszki: 3 (60%), Pieluszki: 4 (80%), Jajka: 3 (60%)

Częste zestawy 2-elementowe:

{Piwo, pieluszki}: 3 (60%)



Reguły asocjacyjne: Niech minconf=50% Piwo->Pieluchy (60%, 100%)

Pielucha->Piwo (60%, 75%)

## ODKRYWANIE ZBIORÓW CZĘSTYCH

#### Algorytm naiwny

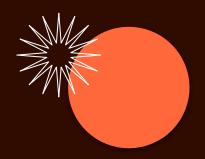
- Wygeneruj dla danego zbioru elementów L i bazy danych D wszystkie możliwe binarne reguły asocjacyjne
- Oblicz dla każdej reguł wsparcie i ufność
- Odrzuć te reguły, które nie spełniają warunków minimalnego wsparcia i minimalnej ufności.
- ullet Liczba wszystkich możliwych podzbiorów zbioru elementów L wynosi  $\,2^{|L|}-1\,$

### WŁASNOŚĆ ANTYMONOTONICZNOŚCI

- Jeżeli {piwo, pieluszki, orzeszki} jest zbiorem częstym, to {piwo, pieluszki} też jest zbiorem częstym.
- Każda transakcja zawierająca {piwo, pieluszki, orzeszki} zawiera również {piwo, pieluszki}.
- **Obserwacja**: Każdy podzbiór zbioru częstego musi być zbiorem częstym.
- Wydajna metodologia eksploracji:
  - o jeżeli jakikolwiek podzbiór zbioru S jest nieczęsty, odetnij gałąź zawierającą S.

#### Własność antymonotoniczności

Niech będzie danych zbiór elementów L oraz jego zbiór potęgowy  $J=2^{|L|}$ . Mówimy, że miara jest antymonotoniczna na zbiorze J, jeżeli  $\forall X,Y\in J: (X\subseteq Y)\to f(Y)\leqslant f(X)$ .



# ALGORYTMY ODKRYWANIA ASOCJACJI BINARNYCH

# ALGORYTM APRIORI

- 1. Niech k=1
- 2. Powtarzaj
  - a. Stwórz zbiór kandydatów C<sub>k</sub> składający się z k-elementowych zbiorów częstych
  - b. Oblicz wsparcie dla każdego zbioru w C<sub>k</sub>
  - c. Filtrowanie zbiorów kandydujących:  $\mathbf{L_k}$  zbiór tych zbiorów c z  $\mathbf{C_k}$ , dla których  $s(c)\geqslant minsup$
  - d. k := k + 1
  - e. Jeżeli  $L_{k-1}=\emptyset$ , to przerwij pętlę.
- 3. Zwróć  $\bigcup_k L_k$

### APRIORI - PRZYKŁAD

#### Transakcje

T_id	Towary
1	A, C, D
2	B, C, E
3	A, B, C, E
4	B, E

#### minsup=2



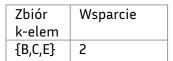
Zbiór	Wsparcie
k-elem	
{A}	2
{B}	3
{C}	3
{D}	1
{E}	3



Zbiór	Wsparcie
k-elem	
{A}	2
{B}	3
{C}	3
{E}	3



$$F_3=C_3$$





Zbiór	Wsparcie
k-elem	
{A,C}	2
{B,C}	2
{B,E}	3
{C,E}	2



Zbiór k-elem	Wsparcie
{A,B}	1
{A,C}	2
{A,E}	1
{B,C}	2
{B,E}	3
{C,E}	2

## APRIORI - PRZYKŁAD

#### Transakcje

T_id	Towary
1	A, C, D
2	B, C, E
3	A, B, C, E
4	B, E

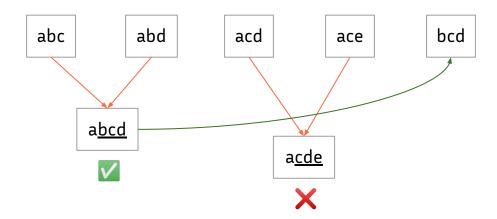
minsup=2



Zbiór	Wsparcie
k-elem	
{A}	2
{B}	3
{C}	3
{E}	3
{A,C}	2
{B,C}	2
{B,E}	3
{C,E}	2
{B,C,E}	2

### APRIORI: TWORZENIE KANDYDATÓW

- 1. Tworzenie kandydatów C<sub>k</sub>
  - a. Łączenie iloczyn kartezjański zbiorów L<sub>k-1</sub>
  - b. Odcięcie usunięcie tych zbiorów, które mają choć jeden podzbiór nienależący do L<sub>k-1</sub>



### ECLAT: ALGORYTM EKSPLORACJI PIONOWEJ

- ECLAT (Equivalence Class Transformation) algorytm oparty na przeszukiwaniu w głąb oraz przecięciu zbiorów transakcji
- Algorytm rekurencyjnie generuje k-elementowe zbiory kandydujące, łącząc (k-1)-elementowe zbiory częste (tak jak Apriori).
- Do obliczenia wartości wsparcia k-elementowego zbioru kandydującego X, wygenerowanego przez połączenie dwóch zbiorów (k-1)-elementowych X<sub>1</sub> i X<sub>2</sub>, wykorzystuje listy identyfikatorów transakcji zbiorów X<sub>1</sub> i X<sub>2</sub> (inaczej niż Apriori).
- Własności listy transakcji:
  - t(X) = t(Y): X i Y zawsze występują razem, np. t(B) = t(E)
  - o t(X) ⊂ t(Y): transakcje zawierające X zawsze zawierają Y, np. t(A)
     ⊂t(C)
- Algorytm zakłada sortowanie leksykograficzne elementów w zbiorach częstych.

#### Transakcje w orientacji poziomej

	' '	
T_id	Towary	
1	A, C, D	
2	B, C, E	
3	A, B, C, E	
4	B, E	

#### Transakcje w orientacji pionowej

F		
Towar	Transakcje	
Α	1, 3	
В	2, 3, 4	
С	1, 2, 3	
D	1	
E	2, 3, 4	

### ECLAT - PRZYKŁAD

#### Transakcje

Towar	Transakcje	
Α	1, 3	
В	2, 3, 4	
С	1, 2, 3	
D	1	
E	2, 3, 4	

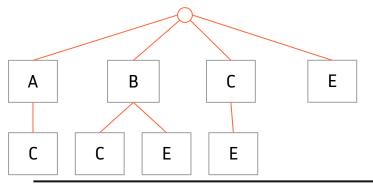




Zbiór k-elem	Transakcje	Wsparcie
{A}	1, 3	2
{B}	2, 3, 4	3
{C}	1, 2, 3	3
{D}	1	1
{E}	2, 3, 4	3



Zbiór k-elem	Transakcje	Wsparcie
{A, B}	3	1
{A, C}	1, 3	2
{A, E}	3	1
{B, C}	2, 3	2
{B, E}	2, 3, 4	3
{C, E}	2, 3	2



Zbiór k-elem	Transakcje	Wsparcie
{B, C, E}	2, 3	2



Algorytm często realizowany rekurencyjnie

### FP-GROWTH: DRZEWO WZORCÓW

- FP-Growth: Frequent Pattern Growth
  - Znajduje 1-elementowe zbiory częste i dzieli bazę danych wg tych zbiorów na rozdzielne partycje.
  - Rekurencyjnie rozszerza zbiory częste poprzez znajdowanie ich pod-partycji.
  - Wykorzystując wydajną strukturę FP-drzewa.
- Algorytm:
  - o Rekurencyjnie tworzy i eksploruje (warunkowe (tj. wewnątrz partycji)) FP-drzewa dopóki przetwarzane FP-drzewo nie jest puste lub dopóki zawiera więcej niż jedną krawędź
- Algorytm zakłada sortowanie leksykograficzne elementów w zbiorach częstych.
- Algorytm eksploracji poziomej.
- Algorytm utrzymuje pomocniczą tablicę nagłówkową, która dla każdego elementu posiada listę wskaźników do tego elementu w FP-drzewie.

T_id	Towary	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, a, c, d, g, i, m, p}	{f, c, a, m, p}
2	{a, b, c, f, l, m, o}	{f, c, a, b, m}
3	{b, f, h, j, o, w}	{f, b}
4	{b, c, k, s, p}	{c, b, p}
5	{a, f, c, e, l, p, m, n}	{f, c, a, m, p}

- 1. Przeskanuj bazę danych raz w celu znalezienia 1-elementowych zbiorów częstych. f:4, a:3, c:4, b:3, m:3, p:3
- Posortuj zbiory częste wg malejącego wsparcia
   F-list = f-c-a-b-m-p
- 3. Przeskanuj skompresowaną bazę danych i skonstruuj FP-drzewo.

T_id	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, c, a, m, p}
2	{f, c, a, b, m}
3	{f, b}
4	{c, b, p}
5	{f, c, a, m, p}

Element	Wsparcie	Wskaźnik
f	4	f:1
С	4	,
a	3	
b	3	c:1
m	3	I
р	3	
		a:1
		m:1
		p:1

T_id	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, c, a, m, p}
2	{f, c, a, b, m}
3	{f, b}
4	{c, b, p}
5	{f, c, a, m, p}

Wsparcie	Wskaźnik
4	f:2
4	
3	,
3	c:2
3	
3	
	a:2
	m:1 b:1
	p:1 - m:1
	4 3 3 3

T_id	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, c, a, m, p}
2	{f, c, a, b, m}
3	{f, b}
4	{c, b, p}
5	{f, c, a, m, p}

Element	Wsparcie	Wskaźnik
f	4	f:3
С	4	
a	3	
b	3	c:2 b:1
m	3	
р	3	
		a:2
		m:1 b:1
		p:1 m:1

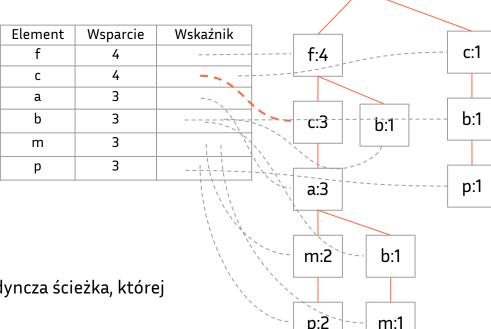
T_id	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, c, a, m, p}
2	{f, c, a, b, m}
3	{f, b}
4	{c, b, p}
5	{f, c, a, m, p}

Element	Wsparcie	Wskaźnik
f	4	f:3 c:1
С	4	
a	3	
b	3	b:1 b:1
m	3	
р	3	
		a:2 p:1

T_id	1-elementowe zbiory częste po usunięciu zbiorów nieczęstych, posortowane wg malejącego wsparcia
1	{f, c, a, m, p}
2	{f, c, a, b, m}
3	{f, b}
4	{c, b, p}
5	{f, c, a, m, p}

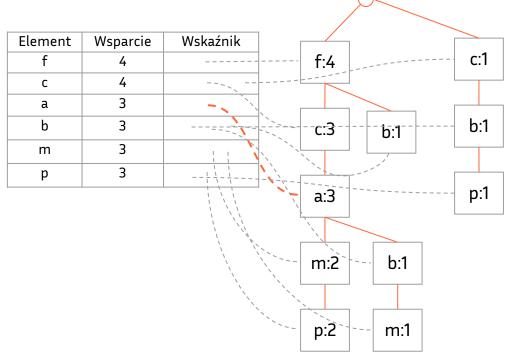
Element	Wsparcie	Wskaźnik
f	4	f:4 c:1
С	4	
a	3	
b	3	b:1
m	3	
р	3	
		a:3 p:1
		m:2 b:1 p:2 m:1

Wzorzec	Warunkowa baza wzorca
С	f: 3
a	
b	
m	
р	

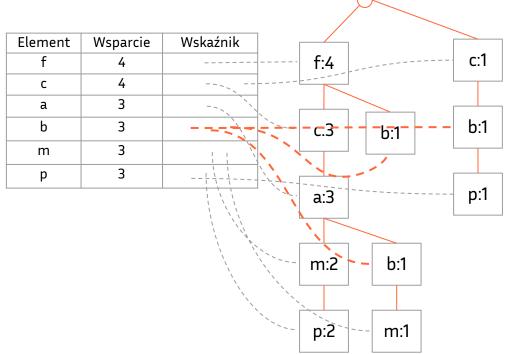


Ścieżka prefiksowa wzorca  $\alpha$  - pojedyncza ścieżka, której końcowym wierzchołkiem jest  $\alpha$ .

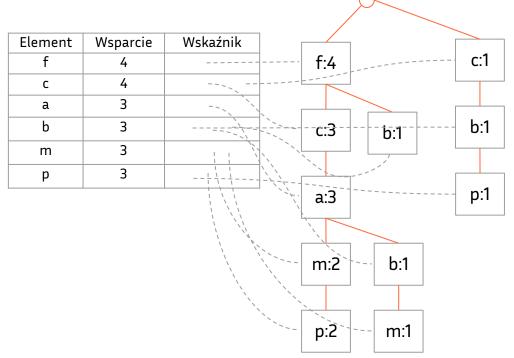
Wzorzec	Warunkowa baza wzorca
С	f: 3
a	fc: 3
b	
m	
р	



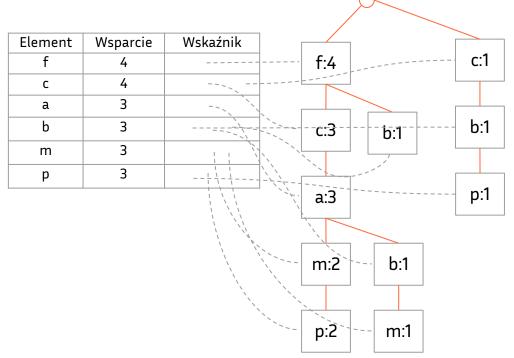
Wzorzec	Warunkowa baza wzorca
С	f: 3
a	fc: 3
b	fca: 1, f: 1, c: 1
m	
р	



Wzorzec	Warunkowa baza wzorca
С	f: 3
a	fc: 3
b	fca: 1, f: 1, c: 1
m	fca: 2, fcab: 1
р	fcam: 2, cb: 1



Wzorzec	Warunkowa baza wzorca
С	f: 3
a	fc: 3
b	fca: 1, f: 1, c: 1
m	fca: 2, fcab: 1
р	fcam: 2, cb: 1

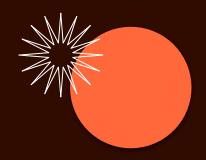


### PODSUMOWANIE

- Zbiór X jest częsty, jeśli wsparcie X jest nie mniejsze niż próg minsup
- **Odkrywanie reguł asocjacyjnych** znajdowanie wszystkich **silnych** reguł asocjacyjnych, tzn. spełniających warunek minimalnego wsparcia *minsup* i ufności *minconf*
- Obserwacja: Każdy podzbiór zbioru częstego musi być zbiorem częstym.
- Skalowalne metody odkrywania asocjacji w danych:
  - Eksploracja pozioma:
    - Apriori
    - FP-Growth
  - Eksploracja pionowa:
    - Eclat

#### **IMPLEMENTACJE**

- FPGrowth w Apache Spark
   https://spark.apache.org/docs/latest/ml-frequent-pattern-mining.html
- Apriori <a href="https://pypi.org/project/apriori-python/">https://pypi.org/project/apriori-python/</a>
- FP-Growth <a href="https://github.com/enaeseth/python-fp-growth">https://github.com/enaeseth/python-fp-growth</a>
- FP-Growth <a href="https://pypi.org/project/pyfpgrowth/">https://pypi.org/project/pyfpgrowth/</a>
- Apriori, ECLAT, FP-Growth <a href="https://github.com/udayRage/PAMI">https://github.com/udayRage/PAMI</a>



# JAK INTERESUJĄCY JEST TEN WZORZEC?

# PRZYPOMNIENIE: REGUŁY ASOCJACYJNE

- Reguly asocjacyjne: X o Y(s,c)
- ullet Wsparcie, s: Prawdopodobieństwo, że transakcja zawiera  $X\cup Y$ 
  - $\circ$  Uwaga: Notacja!  $X \cup Y$  oznacza, że transakcja zawiera oba elementy, X i Y
- Ufność, c: Prawdopodobieństwo warunkowe, że transakcja zawierająca X zawiera również Y.

$$c = rac{s(X \cup Y)}{s(X)}$$

• Odkrywanie reguł asocjacyjnych: znajdowanie wszystkich silnych reguł asocjacyjnych, tzn. spełniających warunek minimalnego wsparcia i ufności

Niech minsup = 50%

#### Częste zestawy 1-elementowe:

Piwo: 3 (60%), Orzeszki: 3 (60%), Pieluszki: 4 (80%), Jajka: 3 (60%)

Częste zestawy 2-elementowe:

{Piwo, pieluszki}: 3 (60%)



Reguły asocjacyjne: Niech minconf=50% Piwo->Pieluchy (60%, 100%)

Pielucha->Piwo (60%, 75%)

### MIARY ATRAKCYJNOŚCI REGUŁ ASOCJACYJNYCH

- Popularne miary:
  - Wsparcie ocena ogólności reguły asocjacyjnej
  - Ufność ocena wiarygodności reguły asocjacyjnej
- Miary wsparcia i ufności są niewystarczające do oceny atrakcyjności reguły asocjacyjnej, gdyż:
  - o nie uwzględniają korelacji pomiędzy poprzednikiem i następnikiem reguły asocjacyjnej,
  - eliminują możliwość znalezienia interesujących reguł asocjacyjnych o niewielkim wsparciu.

	kawa	nie_kawa	suma
herbata	20	5	25
nie_herbata	70	5	75
suma	90	10	100

$$herbata 
ightarrow kawa \left[ s = rac{20}{100} = 0.2, \, c = rac{20}{25} = 0.8 
ight] 
onumber nie\_herbata 
ightarrow kawa \left[ s = rac{70}{100} = 0.7, \, c = rac{70}{75} = 0.93 
ight]$$

### LIFT

• Lift - miara zależności / korelacji pomiędzy zdarzeniami

$$lift(A,B) \,=\, rac{P(B|A|)}{s(B)} = rac{c(A o B)}{s(B)} = rac{s(A\cup B)}{s(A)s(B)}$$

- o lift = 1 ⇔ zdarzenia A i B są niezależne
- o lift < 1 ⇔ zdarzenia A i B są skorelowane negatywnie
- o lift > 1 ⇔ zdarzenia A i B są skorelowane pozytywnie

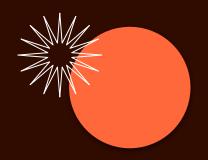
### INNE MIARY ATRAKCYJNOŚCI

- Nie sprawdza się jeżeli dla danej reguły istnieje wiele transakcji, które nie zawierają elementów reguły
  - o np. wiele transakcji nie zawierających ani kawy ani herbaty
- W odpowiedzi, w literaturze zaproponowano wiele innych miar, w tym takich, które są odporne na obecność transakcji nie zawierających m.in.:
  - miara cosinusów

$$Cosine(A,B) = rac{s(A \cup B)}{\sqrt{s(A)s(B)}}$$

o miara Jaccarda

$$Jaccard(A,B) = rac{s(A \cup B)}{s(A) + s(B) - s(A \cup B)}$$

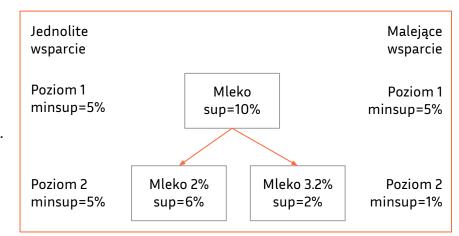


### BARDZIEJ ZAAWANSOWANE TEMATY

## WIELOPOZIOMOWE REGUŁY ASOCJACYJNE

- Obiekty, np. towary, często tworzą hierarchię

  - Chleb → Chleb pszenny
- Wielopoziomowe reguły mają często większą wartość poznawczą niż reguły jednopoziomowe.
- W jaki sposób ustawić próg minsup?
  - o jednolity próg dla wszystkich poziomów,
  - próg wsparcia coraz mniejszy wraz z głębokością w hierarchii.
- Jak wydajnie eksplorować dane jeżeli próg wsparcia jest zależny od poziomu w hierarchii?
  - Użyj najmniejszego wsparcia do filtrowania zbiorów.



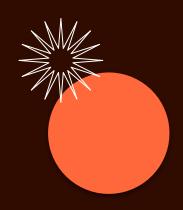
### WIELOWYMIAROWE REGUŁY ASOCJACYJNE

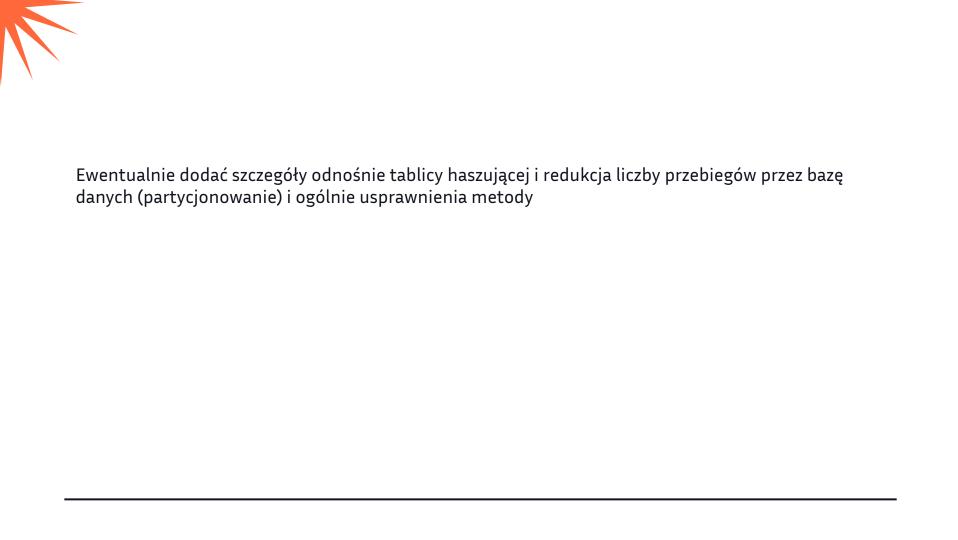
- Jednowymiarowe reguły asocjacyjne
  - o wszystkie elementy są w jednym wymiarze, np. w wymiarze "produkt"
    - kupuje(X, "mleko") → kupuje(X, "chleb")
- Wielowymiarowe reguły asocjacyjne
  - o n≥2 wymiarów
    - wiek(X, "18-25") ∧ zawód(X, "student") → kupuje(X, "coca-cola")
    - wiek(X, "18-25")  $\land$  kupuje(X, "popcorn")  $\rightarrow$  kupuje(X, "coca-cola")
- Przekształcenia zmiennych
  - Zmienne kategoryczne binaryzujemy
    - stan\_cywilny = {panna, kawaler, zamężna, żonaty, ...} → dla każdej kategorii tworzymy zmienną binarną stan\_cywilny = panna, stan\_cywilny = kawaler, itd.
  - Zmienne ciągłe przekształcamy do kategorii, a następnie binaryzujemy.
    - Przekształcenie do kategorii: binning, klasteryzacja.

#### NEGATYWNE ASOCJACJE

- parówki ∧ piwo → musztarda ∧ ¬czerwone\_wino
- szalik\_drużyny\_A → ¬szalik\_drużyny\_B
- Definicja 1: Wzorce negatywne zawierają co najmniej jeden zbiór negatywny (w poprzedniku lub w następniku).
- Definicja 2: Wzorce negatywnie skorelowane.
  - Reguła X → Y o negatywnej korelacji zbiorów X i Y ma de facto charakter "wiedzy negatywnej", tzn. wystąpienie zbioru X w koszyku klienta zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia zbioru Y w tym samym koszyku.
- Problem odkrywania wiedzy negatywnej jest trudniejszy od odkrywania wiedzy pozytywnej.
  - Liczba odkrywanych reguł negatywnych w zbiorze danych jest wielokrotnie większa niż liczba reguł pozytywnych.
  - "Ludzie, którzy kupują chleb w supermarkecie, nie kupują lodówki".
    - Należy określić podzbiór reguł negatywnych, który będzie interesujący.

### DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ





### ZBIORY DOMKNIĘTE I ZBIORY MAKSYMALNE

Wyrażanie wzorców w formie skompresowanej: Wzorce zamknięte

Jak poradzić sobie z takim wyzwaniem?

Rozwiązanie 1: Zamknięte formacje: Formacja (zestaw pozycji) X jest zamknięta, jeśli X występuje często i nie istnieje super-wzorzec Y zawierający X, z takim samym wsparciem jak X

Zamknięty wzór to bezstratna kompresja częstego wzoru

Zmniejszono liczbę wzorów, ale nie traci się informacji pomocniczych

Rozwiązanie 2: Maksymalne wzorce: Wzorzec X jest wzorcem maksymalnym, jeśli X jest częsty i nie istnieje żaden częsty superwzorzec Y zawierający X.

Różnica od zamkniętych wzorców?

Nie przejmuj się prawdziwym wsparciem wzorców podrzędnych wzorca maksymalnego

Max-pattern to kompresja stratna

Wiemy tylko, że wzór jest częsty, ale nie znamy już prawdziwego wsparcia

W wielu zastosowaniach eksploracja zamkniętych wzorców jest bardziej pożądana niż eksploracja maksymalnych wzorców.

### CLOSET+

- Wydajny algorytm eksploracji zbiorów domkniętych oparty na FP-Growth.
- Przykład: Jeżeli Y pojawia się zawsze wtedy, gdy X, to Y jest łączone z X.
  - Mając
    - d-proj. db: {acef, acf} -> acfd-proj. db: {e}
  - otrzymujemy
    - acfd: 2