POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ INFORMATYKI I TELEKOMUNIKACJI

METODY ANALIZY I EKSPLORACJI DANYCH

Wykład 3 - Statystyki opisowe

Wykład 3

DR INŻ. AGATA MIGALSKA

01

MIARY POŁOŻENIA

02

MIARY ZRÓŻNICOWANIA

03

MIARY KORELACJI

04

KURTOZA I SKOŚNOŚĆ

CEL I MOTYWACJA

STATYSTYKA OPISOWA

- Zajmuje się metodami opisu danych statystycznych uzyskanych podczas badania statystycznego.
- Pozwala na podsumowanie zbioru danych i wyciągnięcie podstawowych wniosków i uogólnień na temat zbioru.

STATYSTYKA OPISOWA

Jedna zmienna

- Obejmuje opisanie rozkładu pojedynczej zmiennej: jej tendencję centralną i rozproszenie.
- Kształt rozkładu można również opisać za pomocą wskaźników, takich jak skośność i kurtoza.
- Charakterystykę rozkładu zmiennej można również przedstawić w formie graficznej lub tabelarycznej, jako histogramu lub wykresu “łodyga z liśćmi”.

Wiele zmiennych

- Opis poszczególnych zmiennych (patrz “statystyka opisowa jednej zmiennej”)
- Graficzna reprezentacja za pomocą wykresów punktowych dla każdej pary zmiennych
- Współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi

01

MIARY POŁOŻENIA

MIARY POŁOŻENIA

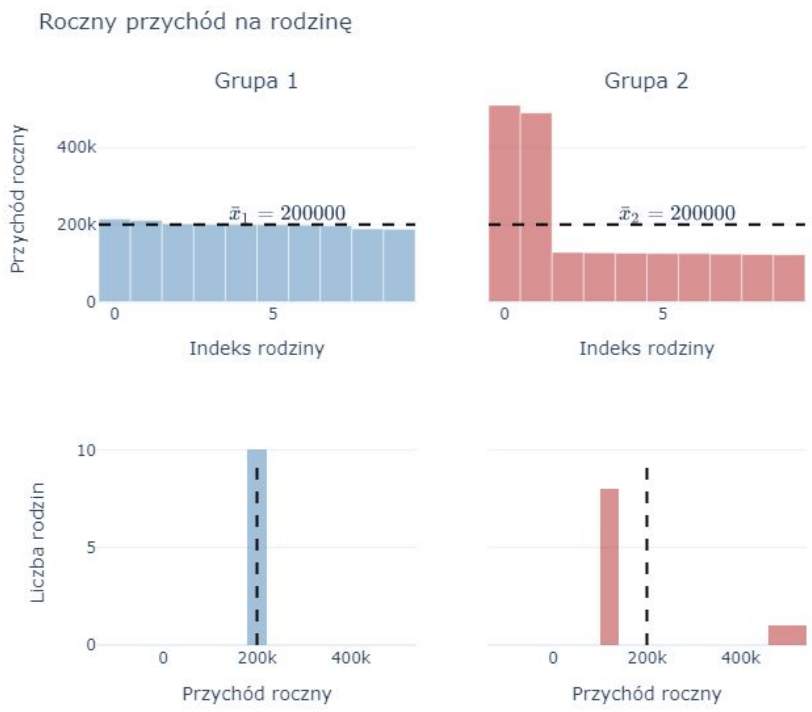
TENDENCJA CENTRALNA

- ŚREDNIA
- MEDIANA
- MODA

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

- Zbiór liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$
- N - liczność zbioru
- Średnia arytmetyczna

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$



ŚREDNIA GEOMETRYCZNA

- Zbiór liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$
- Wykorzystywana przede wszystkim wtedy, gdy ma się do czynienia z wielkościami zmieniającymi się w postępie geometrycznym, tzn. gdy kolejna wielkość w szeregu powstaje przez pomnożenie przez stały mnożnik wielkości bezpośrednio ją poprzedzającej.
    - gdy wartości zmiennej są wartościami względnymi (wskaźniki, współczynniki, etc)
- Znaczenie w:
    - ekonomii i inwestowaniu,
    - demografii.
- Nie zachowuje jednostek (patrz przykład w ocenami na następnym slajdzie)

$$\overline{x_G} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

$$\log \overline{x_G} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log x_i$$

ŚREDNIA GEOMETRYCZNA

- **Przykład:** współczynnik inflacji obliczany przez GUS
- **Przykład**: Rozważmy portfel akcji, który wzrasta ze $100 do $110 w pierwszym roku, następnie spada do $80 w drugim i wzrasta do $150w trzecim roku. Roczny zwrot z portfela wynosi: $((110/100)*(80/110)*(150/110))^{1/3}$ = 0,1447 = 14,47%.
- **Przykład:** Chcemy porównać oceny dwóch kawiarni z dwóch różnych źródeł. Problem polega na tym, że źródło 1 używa 5-gwiazdkowej skali, a źródło 2 używa 100-punktowej skali.
Która kawiarnia jest lepiej oceniana?

	Źródło 1	Źródło 2
Kawiarnia 1	4.5	68
Kawiarnia 2	3	75

ŚREDNIA GEOMETRYCZNA

- **Przykład:** współczynnik inflacji obliczany przez GUS
- **Przykład**: Rozważmy portfel akcji, który wzrasta ze $100 do $110 w pierwszym roku, następnie spada do $80 w drugim i wzrasta do $150w trzecim roku. Roczny zwrot z portfela wynosi: $((110/100)*(80/110)*(150/110))^{1/3}$ = 0,1447 = 14,47%.
- **Przykład:** Chcemy porównać oceny dwóch kawiarni z dwóch różnych źródeł. Problem polega na tym, że źródło 1 używa 5-gwiazdkowej skali, a źródło 2 używa 100-punktowej skali.
  Która kawiarnia jest lepiej oceniana?

	Źródło 1	Źródło 2	Średnia geometryczna
Kawiarnia 1	4.5	68	$\sqrt{4.5 \cdot 68} = 17.5$
Kawiarnia 2	3	75	$\sqrt{3 \cdot 75} = 15$

ŚREDNIA HARMONICZNA

- Zbiór liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$
- Wykorzystywana przede wszystkim wtedy, gdy dane przedstawione są w postaci względnej:
  - prędkość przedstawiana w km/h lub m/s
  - pracochłonność w min/sztukę
  - spożycie w kg/osobę lub litrach/osobę
  - cena jednostkowa w zł/szt
  - czyli wartości cechy przedstawiamy w przeliczeniu na stałą jednostkę innej zmiennej.

$$\overline{x_H} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

ŚREDNIA HARMONICZNA

- **Przykład:** Rowerzysta jedzie do pracy godzinę z prędkością 20 km/h. Po pracy, zmęczony, wraca 2 godziny, ze średnią prędkością 10km/h. Jaka jest średnia prędkość rowerzysty?
  - Średnia arytmetyczna wynosi 15 km/h ale to by znaczyło, że na przejechanie 40km rowerzysta potrzebowałby 2h40, a wiemy, że jechał 3h.
  - Średnia harmoniczna wynosi $\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{10}} = \frac{40}{3} = 13.33$ km/h, co daje 3h na przejechanie 40km, czyli dokładnie tyle ile potrzebował nasz rowerzysta.
- **Przykład:** Dwa rezystory o oporze 40Ω i 60Ω połączone równolegle można zastąpić dwoma rezystorami o oporze $\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}} = \frac{2 \cdot 120}{5} = 48\ \Omega$ każdy.

Źródło: https://www.statystyczny.pl/dlaczego-fizyk-i-rowerzysta-powinni-znac-srednia-harmoniczna/

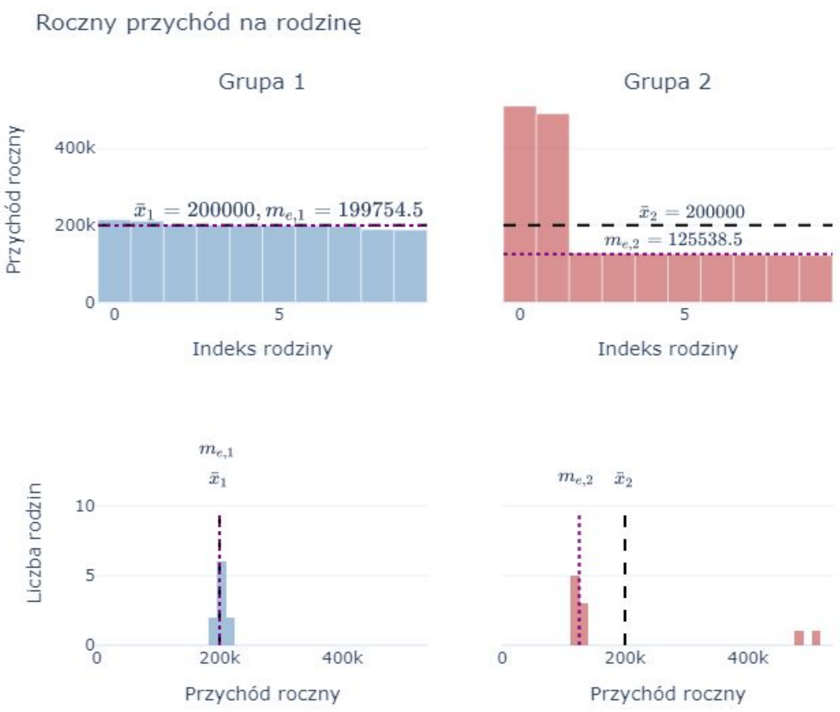
MEDIANA

- Zbiór liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$ uporządkowany od najmniejszej do największej
- N - liczność zbioru
- Mediana
  - Gdy N jest liczbą nieparzystą

    $$m_e = x_{\frac{N+1}{2}}$$

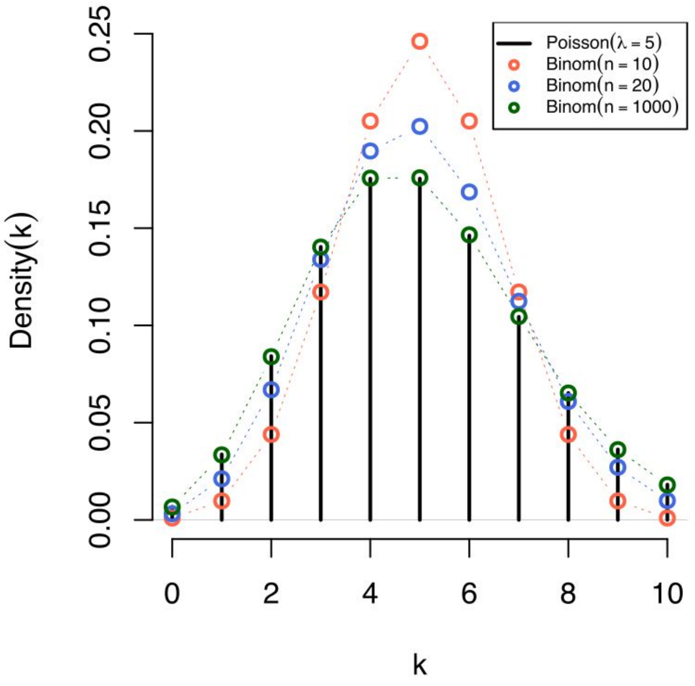
  - Gdy N jest liczbą parzystą,

$$m_e = \frac{x_{N/2} + x_{(N+1)/2}}{2}$$



MODA

- Inne nazwy: dominanta, wartość modalna, wartość najczęstsza
- Statystyka dla zmiennych o wartościach dyskretnych
- Modą nazywamy wartość najczęściej występującą w zbiorze danych tzn. wartość x, dla której funkcja masy prawdopodobieństwa osiąga wartość najwyższą



KWANTYLE

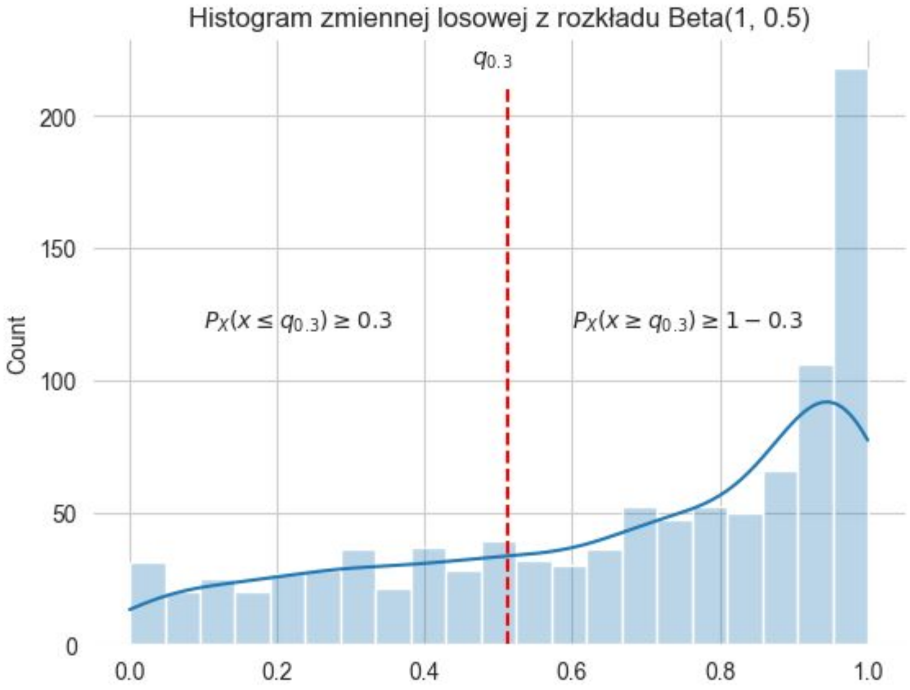
Kwantylem rzędu *p*,

gdzie 0 <= p <= 1, w rozkładzie empirycznym P_X zmiennej losowej X nazywamy każdą liczbę x_p, dla której spełnione są nierówności

$$P_X((-\infty, q_p]) \geq p$$

oraz

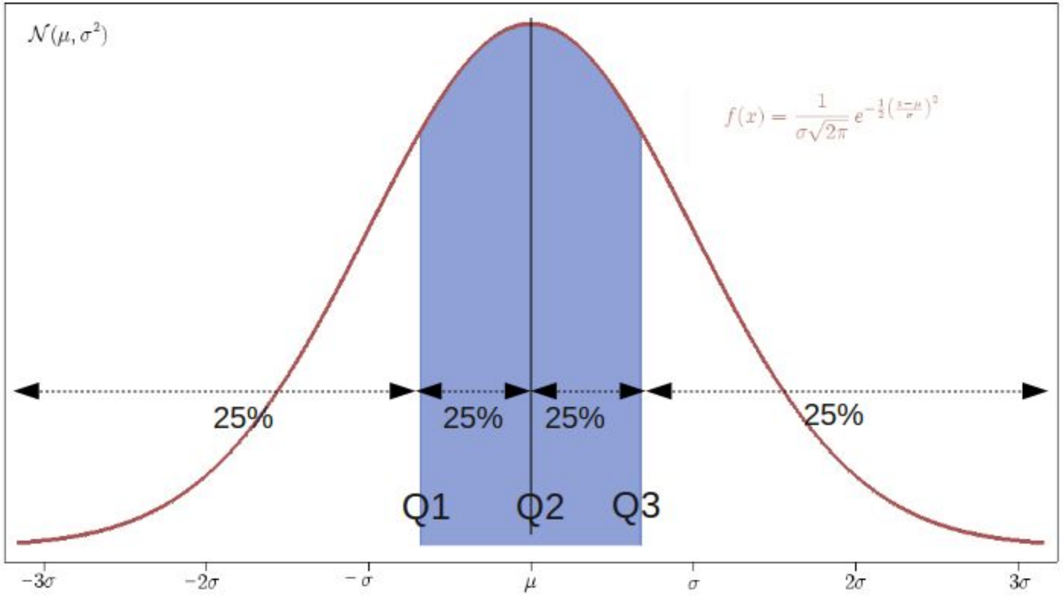
$$P_X([q_p, \infty)) \geq 1 - p$$



KWARTYLE

Kwantyle dzielące obserwacje na (mniej więcej) równe ćwiartki (kwarty):

- Q1 - kwantyl rzędu ¼ (0.25) = dolny kwartyl
- Q2 - kwantyl rzędu ½ (0.5) = mediana
- Q3 - kwantyl rzędu ¾ (0.75) = górny kwartyl



02

MIARY ZRÓŻNICOWANIA

ROZSTĘP

$$R = X_{\max} - X_{min}$$

Przykład: W Irkucku amplituda średnich temperatur powietrza wynosi 38,4˚C - średnia miesięczna temperatura powietrza jest najwyższa w lipcu i wynosi +17,5˚C, a najniższa temperatura w styczniu wynosi -20,9˚C.

$$R = X_{max} - X_{min} = 17.5^{o}C - (- 20.9^{o}C) = \mathbf{38.4^{o}C}$$

Przykład: „Ceny tej książki wahają się od 20 do 25 złotych. Oznacza to różnicę aż 5 zł na sztuce.” (wartość minimalna, wartość maksymalna, rozstęp)

Przykład: Widełki płacowe

ODCHYLENIE STANDARDOWE

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- **Odchylenie standardowe** mówi o tym, o ile średnio odchylają się wartości badanej cechy od średniej arytmetycznej.
- Odchylenie standardowe liczymy, żeby stwierdzić, czy w naszej populacji jednostki są podobne ze względu na badaną cechę, czy znacznie różnią się między sobą.

WARIANCJA

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

- Wartość wariancji jest wyrażona w kwadracie jednostki
  - wariancję średniego wzrostu mamy w metrach kwadratowych,
  - wariancja średniego zużycia długopisów podana jest w... długopisach kwadratowych.
- Dużo wygodniej jest wyciągnąć z tej wartości pierwiastek i operować wskaźnikiem, który ma taką samą jednostkę jak analizowana cecha (czyli odchyleniem standardowym).

ODCHYLENIE BEZWZGLĘDNE

- Miary zróżnicowania odporne na obserwacje odstające
- Ten sam symbol (MAD) często stosowany do obu miar, powodując konfuzję
- **Mediana odchylenia bezwzględnego wokół mediany**

$$MAD_e = m_e(|x_i - m_e(x)|)$$

  - miara sugerowana we współczesnej literaturze do wyznaczania obserwacji odstających
  - teoretycznie może być wokół średniej, ale rzadko stosowana
- **Średnie odchylenie bezwzględne wokół średniej / mediany**

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - m(x)|}{N}$$

  - “klasyczna” wersja
  - m(x) to średnia arytmetyczna lub mediana.

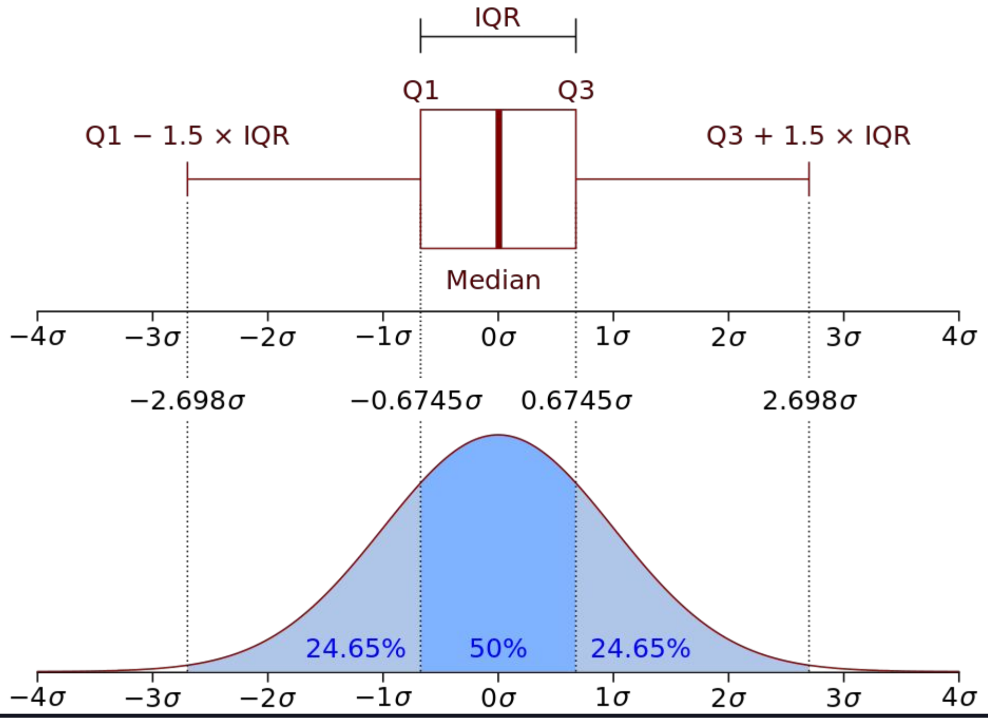
Leys, C.; et al. (2013). "Detecting outliers: Do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median" (PDF). *Journal of Experimental Social Psychology*. **49** (4): 764–766. doi:10.1016/j.jesp.2013.03.013.

ROZSTĘP KWARTYLNY = ĆWIARTKOWY

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

- Jest to miara, która sporo mówi o populacji, gdyż w tych granicach mieści się 50% badanych obiektów.
- Im większy rozstęp kwartylny, tym bardziej zróżnicowana jest cecha statystyczna.

POWTÓRKA: WYKRES PUDEŁKOWY



03

MIARY KORELACJI

KORELACJA

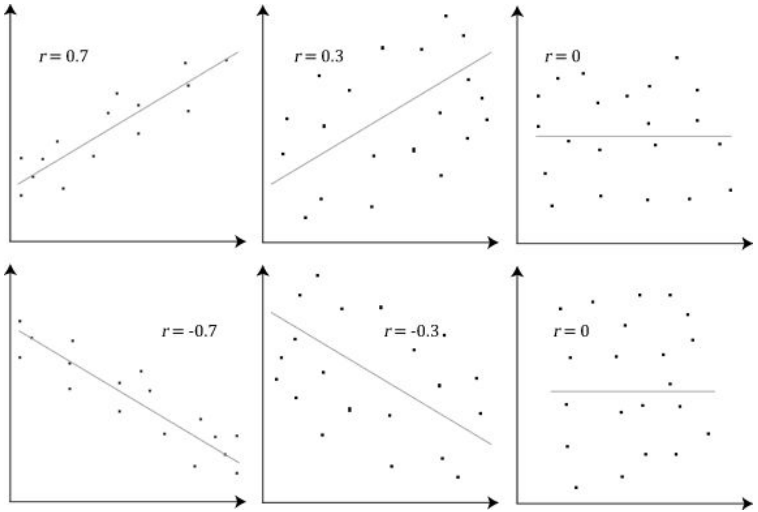
- Mierzy siłę powiązania między dwiema zmiennymi i kierunek związku.
- Wartość współczynnika korelacji waha się od +1 do -1.
  - Wartość ± 1 wskazuje na doskonały stopień powiązania między tymi dwiema zmiennymi.
  - Wraz ze zbliżaniem się wartości współczynnika korelacji do zera, związek między dwiema zmiennymi będzie słabszy.
  - Kierunek zależności wskazuje znak współczynnika;
    - znak + oznacza pozytywną relację,
    - znak – negatywną relację.

WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI PEARSONA

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\sum (X-\bar{X})^2 \sum (Y-\bar{Y})^2}}$$

Założenia:

- Każda obserwacja powinna mieć parę wartości.
- Zmienne są ciągłe.
- Brak wartości odstających.
- Zakłada liniowość i homoskedastyczność (wszystkie zmienne losowe w tym ciągu posiadają tę samą, skończoną wariancję).



WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI PEARSONA

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(R(x_i) - \overline{R(x)}\right)\left(R(y_i) - \overline{R(y)}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(R(x_i) - \overline{R(x)}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(R(y_i) - \overline{R(y)}\right)^2}}$$

$$= 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N}\left(R(x_i) - R(y_i)\right)^2}{N(N^2-1)}$$

Założenia:

- Pary obserwacji są niezależne.
- Dwie zmienne powinny być mierzone na skali porządkowej, interwałowej lub ilorazowej.
- Zakłada, że istnieje monotoniczna zależność między tymi dwiema zmiennymi.

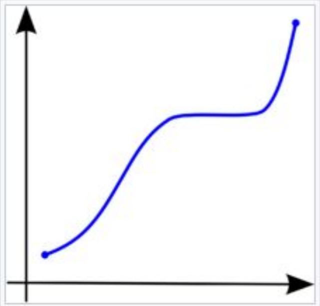


Figure 1. A monotonically increasing function.

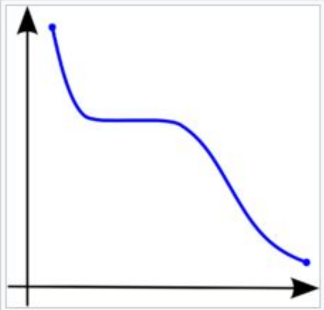


Figure 2. A monotonically decreasing function

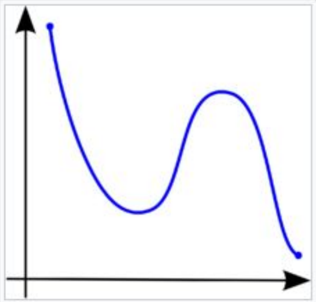


Figure 3. A function that is not monotonic

WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI KENDALLA

$$\tau = \frac{n_c - n_d}{n_c + n_d}$$

n_c - liczba par zgodnych,
n_d - liczba par niezgodnych.

Założenia (takie same jak dla Spearmana):

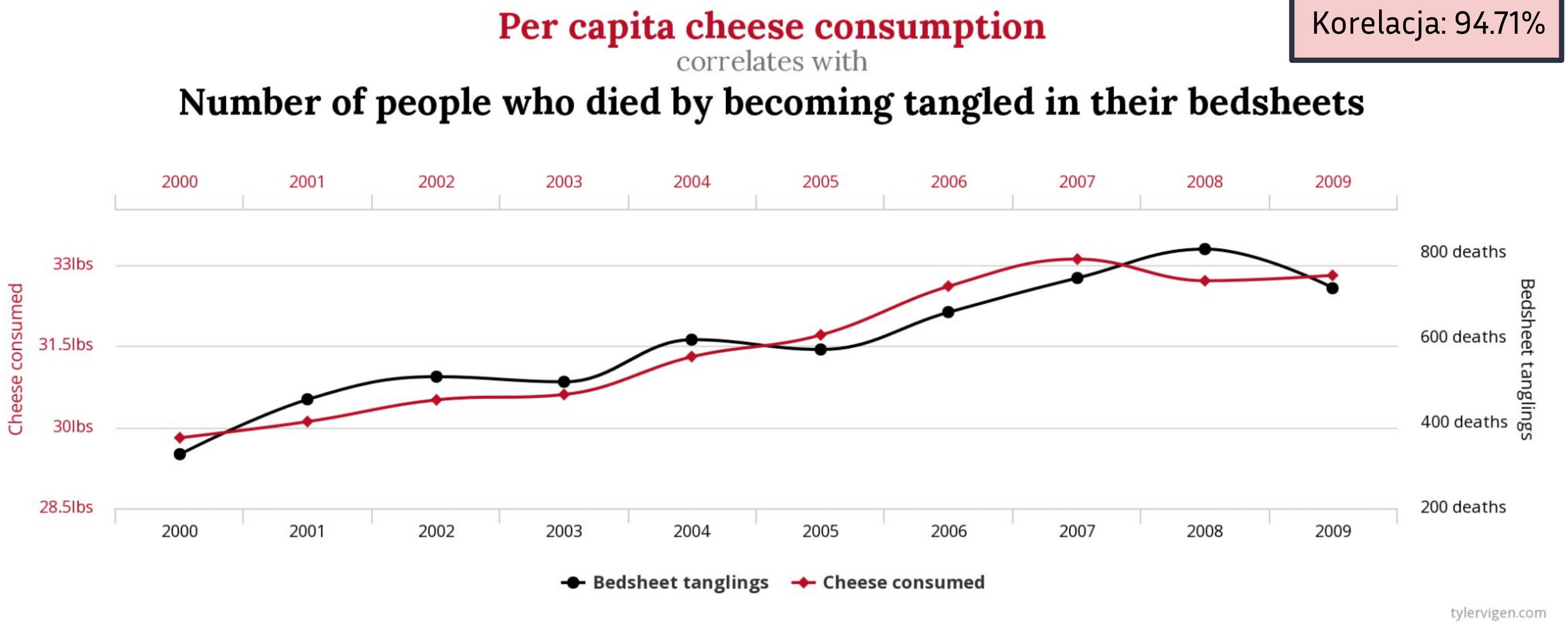
- Pary obserwacji są niezależne.
- Dwie zmienne powinny być mierzone na skali porządkowej, interwałowej lub ilorazowej.
- Zakłada, że istnieje monotoniczna zależność między tymi dwiema zmiennymi.

KTÓRY WSPÓŁCZYNNIK WYBRAĆ?

- Pearson vs Spearman vs Kendall
    - Korelacje nieparametryczne mają mniejszą moc, ponieważ w swoich obliczeniach wykorzystują mniej informacji. W przypadku korelacji Pearsona wykorzystuje się informacje o średniej i odchyleniu od średniej, natomiast korelacje nieparametryczne wykorzystują jedynie informacje porządkowe i wyniki par.
        - wybieramy najmocniejszy możliwy współczynnik w danej sytuacji
    - Współczynniki korelacji mierzą tylko relacje liniowe (Pearson) lub monotoniczne (Spearman i Kendall).
- Spearman vs Kendall
    - Współczynnik korelacji Kendalla jest bardziej odporny na małe liczności próbek oraz na obserwacje odstające niż współczynnik korelacji Spearmana.

FAŁSZYWE KORELACJE

Korelacja: 94.71%

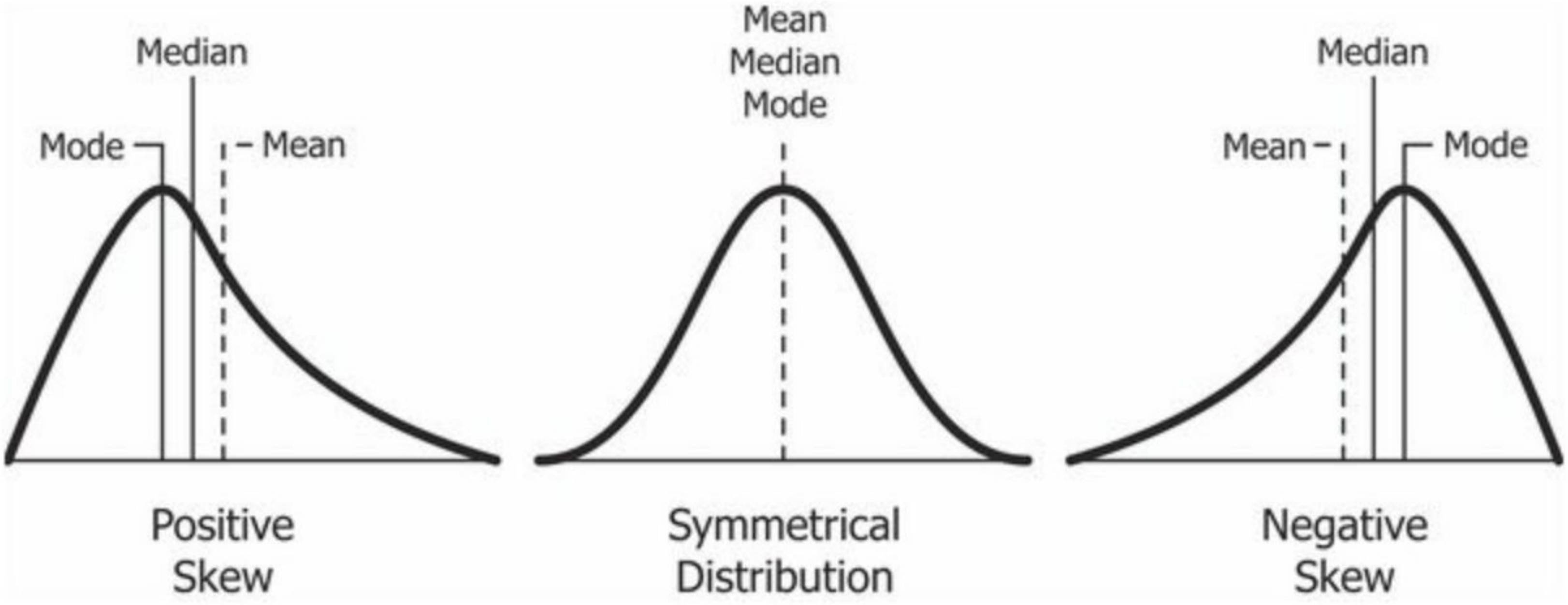


http://www.tylervigen.com/spurious-correlations

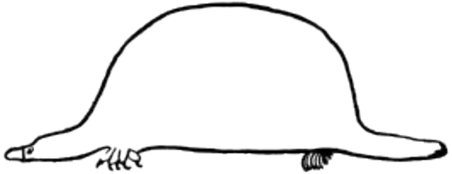
03

KURTOZA I SKOŚNOŚĆ

SKOŚNOŚĆ

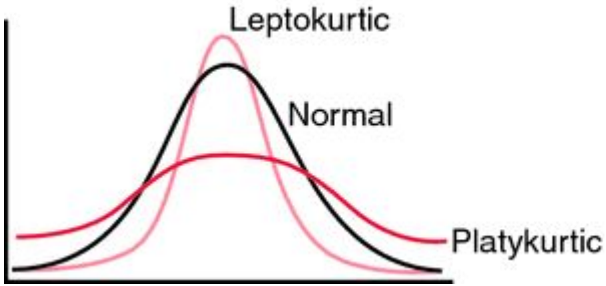

Median
Mode
Mean
Positive Skew
Mean
Median
Mode
Symmetrical Distribution
Median
Mean
Mode
Negative Skew

KURTOZA



ang. platykurtic platypus

ang. leptokurtic lepping kangaroos



- **mezokurtyczne** (K = 0) – intensywność wartości skrajnych jest podobna do intensywności wartości skrajnych rozkładu normalnego (dla którego kurtoza wynosi dokładnie 0)
- **leptokurtyczne** (K > 0) – intensywność wartości skrajnych jest większa niż dla rozkładu normalnego („ogony“ rozkładu są „grubsze“)
- **platykurtyczne** (K < 0) – intensywność wartości skrajnych jest mniejsza niż w przypadku rozkładu normalnego („ogony“ rozkładu są „węższe“).

THANKS!

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ