1161 – Seçkin ARI | ari@sakarya.edu.tr

İşaret nedir?

Fiziksel bir sistemin davranışına ya da durumuna ilişkin bilgi taşıyan ve bir ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret diyoruz.

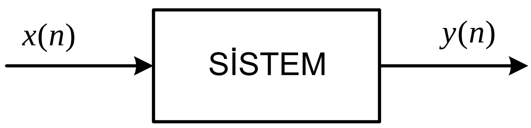
Örneğin: Fırın Sıcaklığını ayarlama; Giriş (voltaj değerini ayarlama) → Çıkış (çıkan sıcak hava), sensörler kullanılıyor, sensörlerin çıkışları sinyal olarak ifade ediliyor.

- ☐ Kararsız sistem (Sizin ayarladığınız değerlere ulaşmayabilir)
- ☐ Matematiksel yöntemin güvenirliği sağlaması gerekiyor.
- ☐ İşaretler zamanın bir fonksiyonudur

Örn.

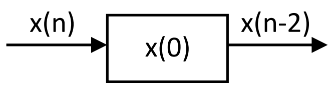
Arabaların hızlanması; arabanın hızı işaret

Su tankları; suyun akış hızı işaret



Sinyaller

1. Analog ve sayısal sinyaller
2. Gerçel ve karmaşık sinyaller
3. Gerekirci ve rassal sinyaller
4. Çift ve tek sinyaller
5. Periyodik ve periyodik olmayan sinyaller
6. Enerji ve Güç sinyalleri



$x[n]$ *veya* $x(n)$ **n:**zaman (tamsayı değerler alır)

$x[0]$ x dizisindeki 0.elemanı verir

$x[-1]$ -1 anındaki genlik değeri (herhangi sayısal bir değere sahip olabilir)

Time Shift (Öteleme)

$x[n] \rightarrow x[n-n_0] \quad n_0 > 0 \qquad x[n-8]$

$x[t] \rightarrow x[t-t_0] \quad t_0 < 0 \qquad t[t+5]$

$x(n-k)$ sağa öteleme/ Geçmiş hakkında bilgi

$x(n+k)$ sola öteleme / Gelecek hakkında bilgi

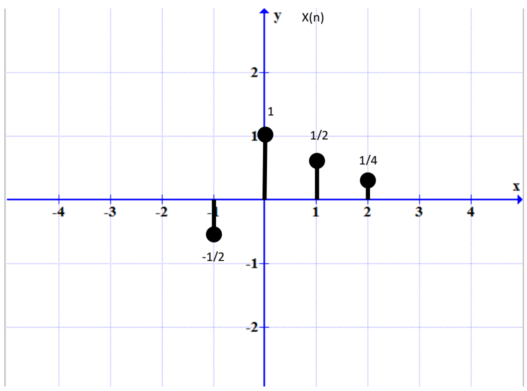
$x(-n)$ zaman ekseninde ters çevirme

Örnek

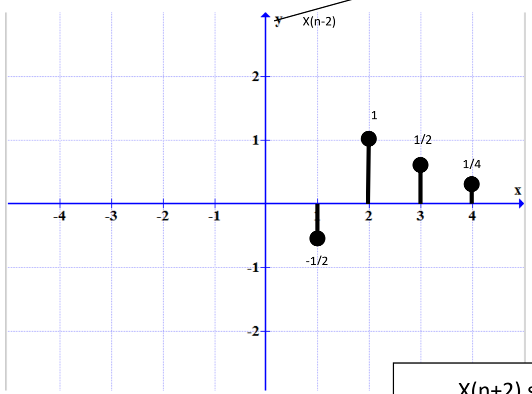
$x[n-8]$

$$n=0 \rightarrow x(-8)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$n=8 \rightarrow x(0)$$

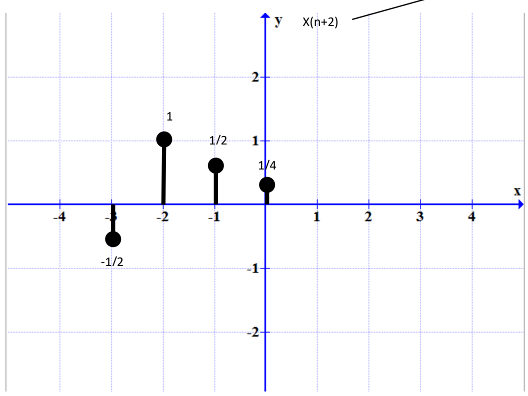
Örnek



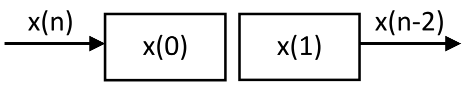
X(n-2) sağa öteleme yapar



X(n+2) sola öteleme yapar



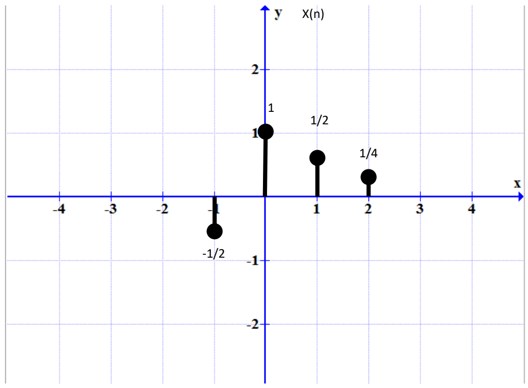
Fark denklemlerinde bu ötelemeler kullanılarak ifade edilir.

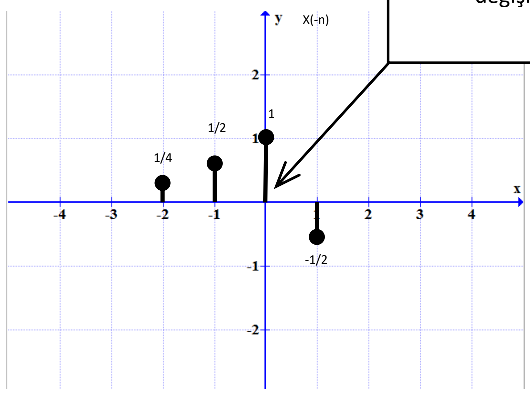


Bufferlama işlemi; İşaretin geçmiş değerlerine bu şekilde ulaşabiliriz

Time Reversal (Zamanı Ters Çevirme)

$$x[n] \qquad\qquad x[t]$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$x[-n] \qquad\qquad x[-t]$$





Burada 0 anında bir değişiklik yok!

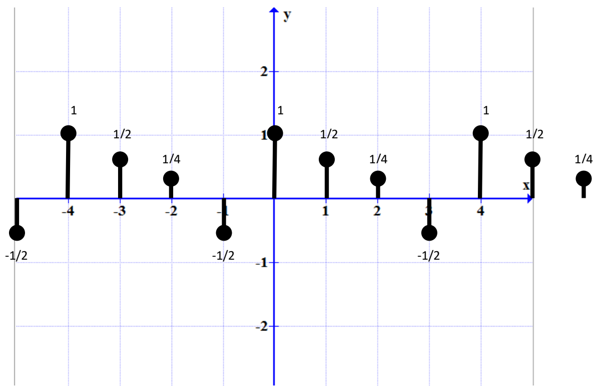
$$x[n] = x[-n] \qquad\qquad x[n-2] = x[-(n-2)] = x[-n+2]$$

Sola ötelemeye örnektir fakat –n olduğu için **sağa** ötelemedir!

İşaretin periyodik olması

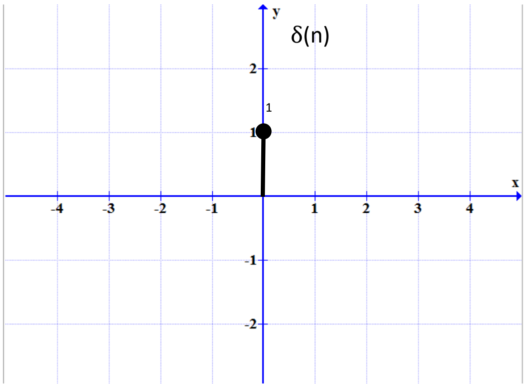
$$x[n] \quad = x[n+N]$$
$$x[0] \quad = x[N]$$
$$x[-1] \quad = x[N-1]$$

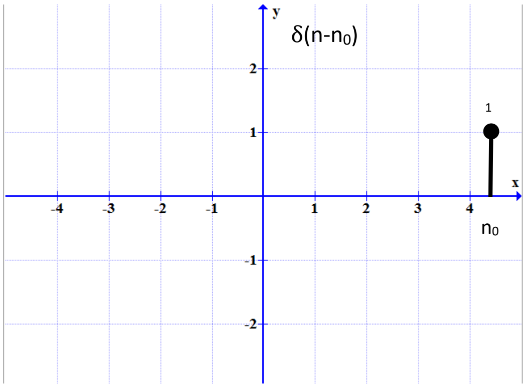
Bu koşul sağlanıyorsa; Ayrık işaretimizin periyodik olduğunu söylüyoruz ve N ile ifade ediyoruz
N tamsayı değerler alabiliyorsa periyodik.



Impulse işareti

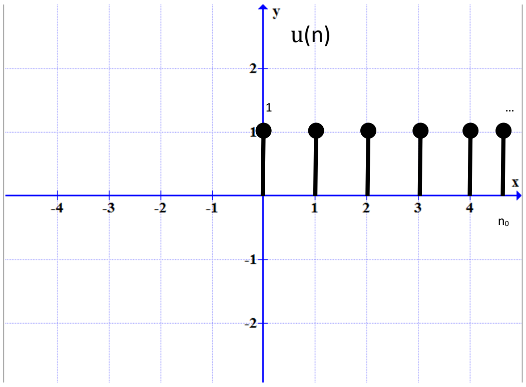
$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$

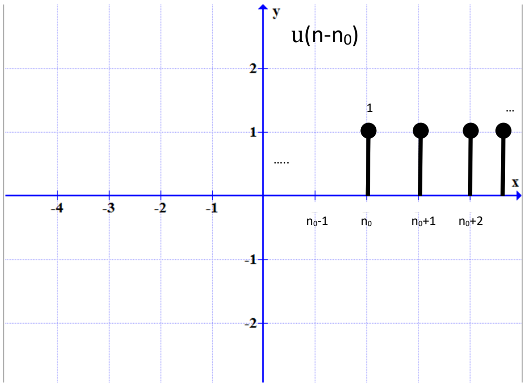




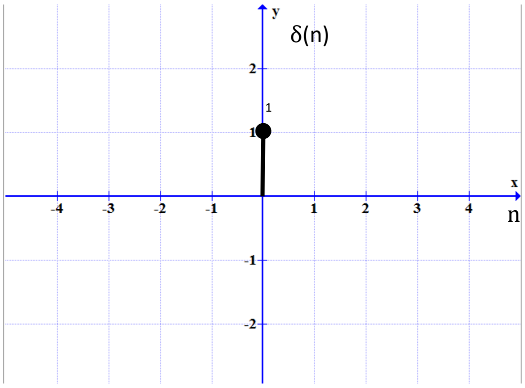
Birim basamak işareti

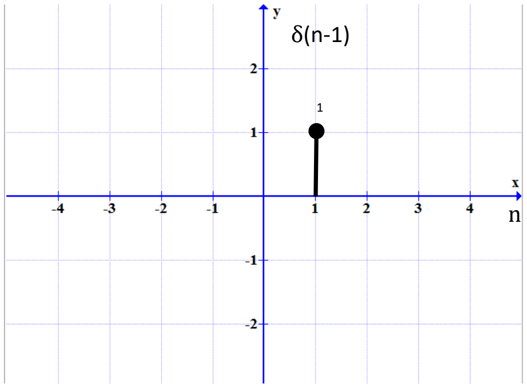
$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$

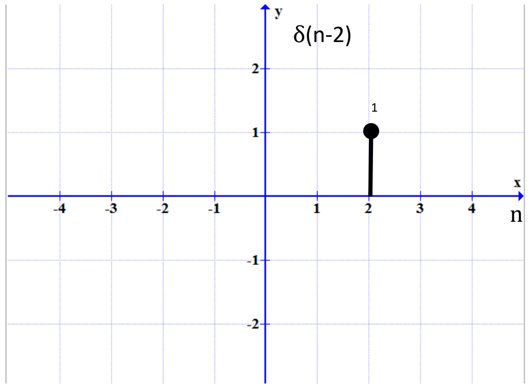


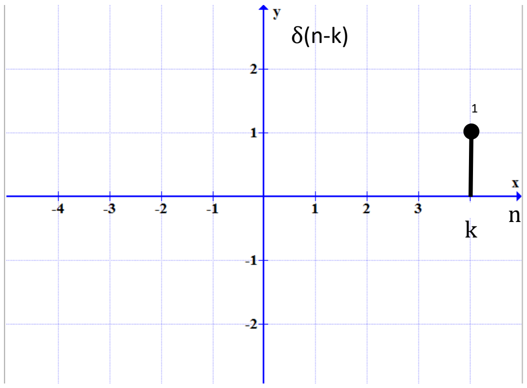


$\delta(n)$ *ve* $u(n)$ ***dönüşümleri***







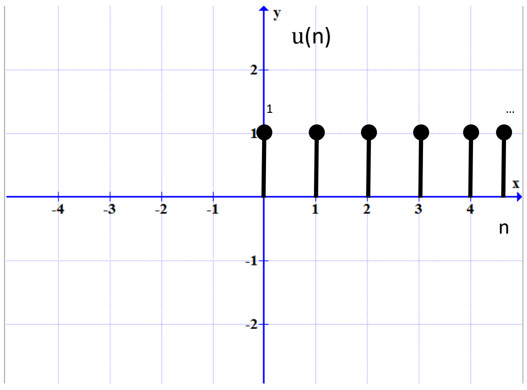


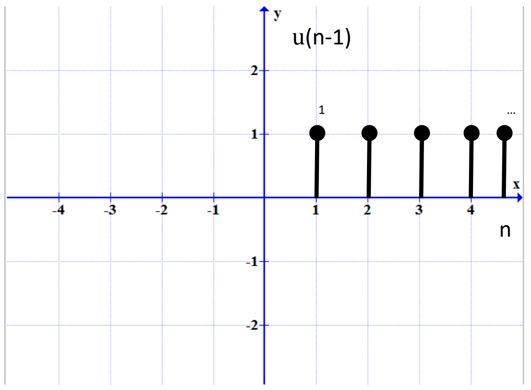
$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

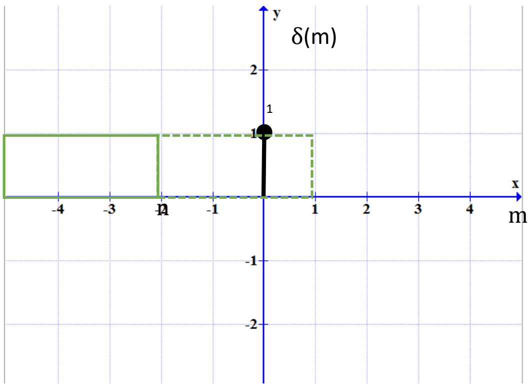
n ayrık, **t** analog ifade olduğunu gösteriyor

$$\delta[n]=u(n)-u(n-1)$$

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$







$$\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=0 \quad n<0$$

$$\sum_{m=-\infty}^{0}\delta[m]=1 \quad n=0$$

$$\sum_{m=-\infty}^{0}\delta[m]=1 \quad n>0$$

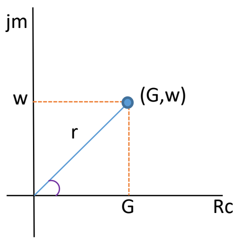
Üstel işaretler

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Karmaşık sayılar

$$Q + jw \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{Q^2 + w^2} \\ \tan(\theta) = \dfrac{w}{Q} \end{cases}$$

$$Q + jw \quad \Rightarrow \quad re^{j\theta}$$



r =Genlik

$$\sigma(sigma) = r.\cos\theta$$
$$w = r.\sin\theta$$
$$\sigma + jw = r(\cos\theta + j.\sin\theta) = r.e^{j\theta}$$

$$f(\theta) = \cos\theta + j.\sin\theta$$
$$f'(\theta) = -\sin\theta + j\cos\theta$$
$$f'(\theta) = j.f(\theta)$$

Üstel fonksiyonun türevi kendisinin j ile çarpımına eşit ise üsteldir.

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta \\ + \quad e^{-j\theta} &= \cos\theta - j\sin\theta \\ \hline e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2.\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta \\ - \quad e^{-j\theta} &= \cos\theta - j\sin\theta \\ \hline e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= 2j.\sin\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad toplama \\ \sin\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad çıkarma \end{aligned}}$$

Örnek $x(n) = e^{jw_0 n}$ bu işaret periyodik midir?

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n+N) \\ e^{jw_0 n} &= e^{jw_0(n+N)} \\ e^{jw_0 n} &= e^{jw_0 n} \cdot e^{jw_0 N} \\ 1 &= e^{jw_0 N} \end{aligned}$$

k için tam sayı değerler varsa periyodik

$$2\pi k = w_0 N$$

$$N = \frac{2\pi k}{w_0}$$

$$x(n) = e^{jw_0 n} = \cos(w_0 n) + j\sin(w_0 n)$$

İşaretimizin frekansı

Örnek $x(n) = e^{j\frac{\pi}{4}n}$ bu işaret periyodik midir?

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \cdot k = 8k$$

8 örnekte bir tekrar ediyor

$$x(0) = 1$$
$$x(8) = 1$$
$$x(16) = 1$$
$$\vdots$$

Periyodik

Örnek $x(n) = e^{j\frac{\pi}{8}n}$ dizisi periyodik midir?

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} \cdot k = 16k$$

Periyodik

Örnek $x(n) = e^{j\frac{n}{8}}$ bu işaret periyodik midir?

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{1}{8}} \cdot k = 16\pi k$$

Periyodik değil

Örnek $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{3}n)$ bu işaret periyodik midir?

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \cdot k = 3k$$

Periyodik

3 örnekte bir tekrar ediyor

$$x(0) = 1$$
$$x(1) = -\frac{1}{2}$$
$$x(2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x(3) = 1$$
$$\vdots$$

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$x_1(n) = N$$
$$x_2(n) = M$$

$$x(n) = x(n+L)$$

$$x_1(n) = x_1(n+mN)$$
$$x_2(n) = x_2(n+kM)$$

$$x_1(n) + x_2(n) = x_1(n+L) + x_2(n+L)$$

$$x_1(n+mN) + x_2(n+kM) = x_1(n+L) + x_2(n+L)$$

$$L = mN + kM$$

Örnek $x(n) = \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n)$ periyodik midir?

$$x(n) = \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n)$$

$$N = \frac{2\pi m}{w_0} = \frac{2\pi m}{\frac{\pi}{3}} = m.6$$

$$M = \frac{2\pi k}{w_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\pi}{4}} = k.8$$

$$L = mN + kM = m6 + k8 \qquad \textit{Periyodiktir.}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

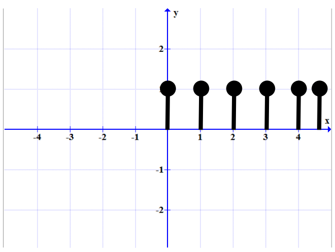
Örnek $x(n) = \cos^2(\frac{\pi}{8}n)$ periyodik midir?

$$x(n) = \cos^2(\frac{\pi}{8}n) \qquad = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4}n)}{2} \qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

Frekans

$$x(k) = 1 \qquad x(m) = 8$$
$$L = 1k = 8m = 8$$

Katsayı genliği değiştirir



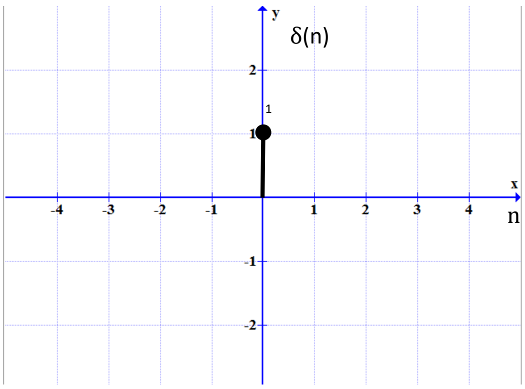
$$x(n) = x(n+N)$$
$$x(n) = x(n+1)$$

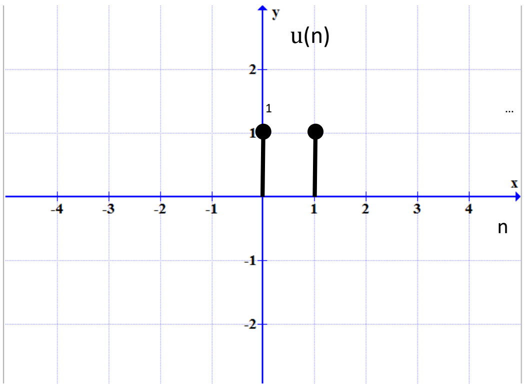
Ödev $x(n) = \cos(\frac{\pi}{8} n^2)$ periyodik midir? Cevap: Periyodiktir, 8

Ötelenmiş birim işaretlerin toplamı

$$\delta[n] = u(n) - u(n-1)$$

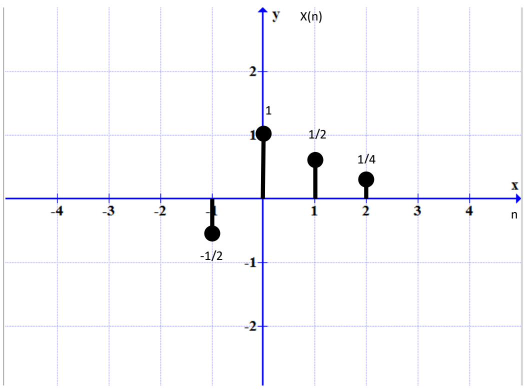
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$



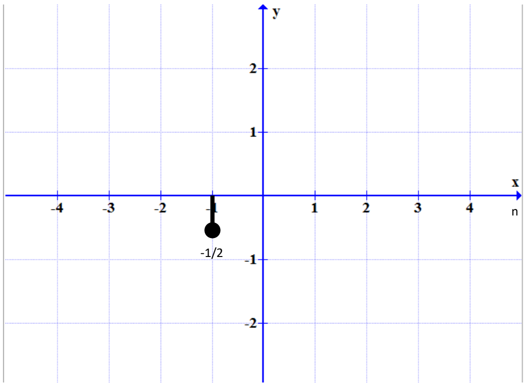


$$x(n) = ?$$

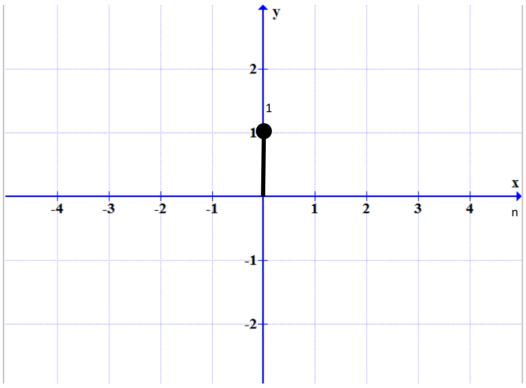
Örnek



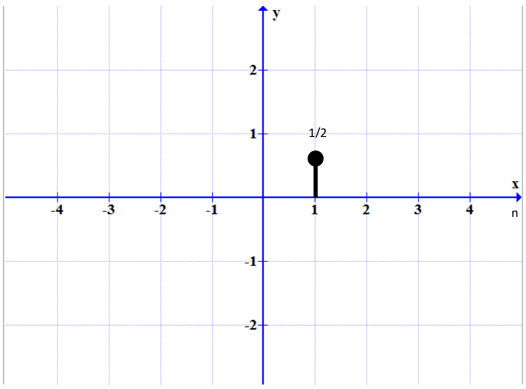
Çözüm



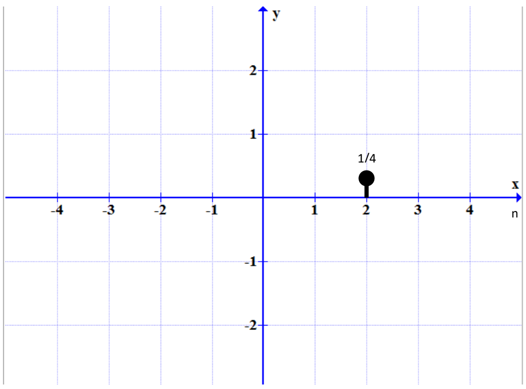
$$x(-1).\delta(n+1) = -\frac{1}{2}\delta(n+1)$$



$$x(0).\delta(n) = 1.\delta(n)$$



$$x(1).\delta(n-1) = \frac{1}{2}.\delta(n-1)$$



$$x(2).\delta(n-2) = \frac{1}{4}.\delta(n-2)$$

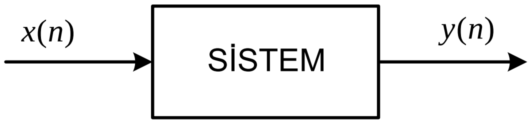
\+

$$x(-1).\delta(n+1) + x(0).\delta(n) + x(1).\delta(n-1) + x(2).\delta(n-2)$$

Genel İfade

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)$$

DOĞRUSAL ZAMANDA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER

Giriş  Çıkış

$$y(n) = T[x(n)]$$

Örnek Banka faizi hesaplayan sistem

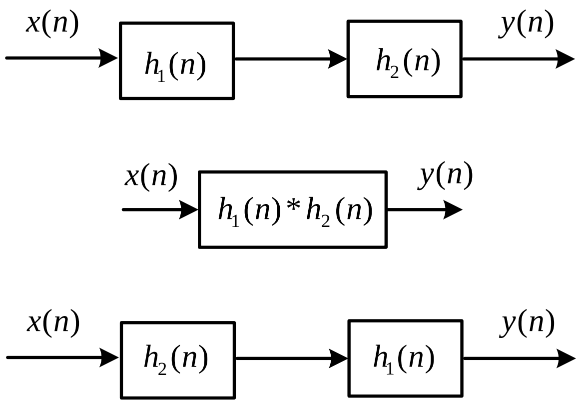
$$\left.\begin{aligned} y(n) &= 1.01\cdot y(n-1) + x[n] \\ y(n) - 1.01\cdot y(n-1) &= x[n] \end{aligned}\right\} y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

Örnek Fark denklemleri, Diferansiyel denklemler

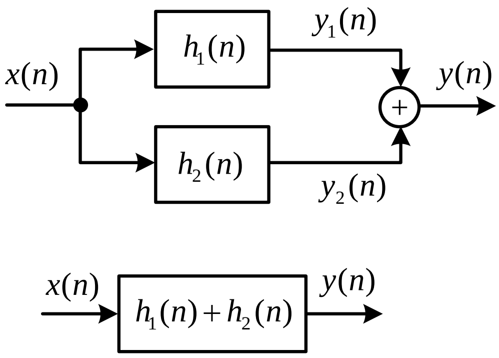
$$\begin{aligned} &x(0) = y(0) \\ &y(1) = y(0) + 0,01\cdot y(0) = y(0)\cdot 1,01 \\ &y(2) = y(1) + 0,01\cdot y(1) = y(1)\cdot 1,01 + x(2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &y(n) = y(x-1)\cdot 1,01 + x(n) \end{aligned}$$

Örnek Ses sistemleri

Seri bağlı sistem



Paralel bağlı sistem



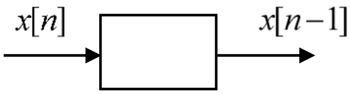
Ayrık zamanlı sistemler ve özellikleri

1. Hafızalı
2. Nedensel (Gerçeklenebilirlik)
3. Kararlılık
4. Zamanla değişmezlik
5. Doğrusallık

1. Hafızalı

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2$$

$$y(t) = Rx(t)$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(n) = x[n-1]$$

$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau)d\tau$$

Önceki değeri çıkışa gönderiyor.

Sistem (sola ve/veya sağa) ötelenmiş hallerden birine sahipse **<u>hafızalı</u>**dır.

2. Nedensel (Gerçeklenebilirlik)

x bilgisinin sadece geçmişteki bilgisine sahipsek; **n** ve/veya **(n-k)** gibi sağa ötelenmiş hallerinden biri ise **<u>nedensel</u>**, sistemin nedensel olması gerçeklenebilir olması demektir.

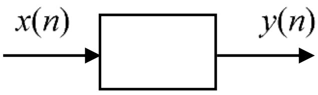
3. Kararlılık

Zaman ekseninde çıkış işareti belli bir sınır aralığında kalıyorsa; Girişse uygulanan işaretin genliği sınırlı bir aralıkta değişiyorsa, girişe uygulanan işaret ile sistem çıkışı da belirli bir aralıkta duruyorsa sistem **<u>kararlıdır</u>**.

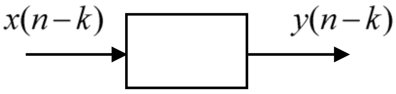
Örnek Banka faiz örneğinde sistem kararsızdır.Giren para max 1000 olsa bile çıkan hesaptaki para ∞'a gidebilir.

4. Zamanla değişmezlik

Giriş miktarına uygulanan öteleme sistemin çıkışında da aynı öteleniyorsa **<u>zamanla değişmez.</u>**



$$y(n) = T[x(n)]$$



$$x_1(n) = x(n-k)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = T[x(n-k)]$$

Koşul: $y_1(n) = y(n-k)$ olması gerekir.

Örnek: $y(n) = 8n\,x(n)$ sistemin özellikleri hakkında bilgi veriniz?

$$y(n) = 8n\,x(n)$$

$$T[x(n-k)] = 8n\,x(n-k)$$

$$x_1(n) = x(n-k)$$

$$\textit{eşit değil}\left\langle \begin{array}{l} y_1(n) = 8n\,x_1(n) = 8n\,x(n-k) \\ y(n-k) = 8(n-k)\,x(n-k) \end{array}\right.$$

- (n-k) yok Hafızalı Değil
- x(n) var Nedensel
- $y_1(n) \neq y(n-k)$ eşit olmadığı için; Zamanla değişmez değil (Sabit n var)
- Kararsız n ∞'a gidiyor

Örnek: $y(n) = T[x(n)] = x(n) + 4x(n-3)$ sistemin özellikleri hakkında bilgi veriniz?

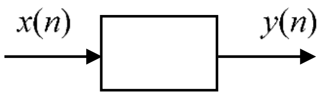
$$y(n) = T[x(n)] = x(n) + 4x(n-3)$$

$$x_1(n) = x(n-k)$$

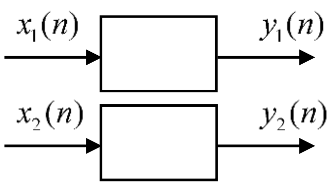
$$\textit{eşit}\left\langle \begin{array}{l} y_1(n) = x_1(n) + 4x_1(n-3) = x(n-k) + 4x(n-k-3) \\ y(n-k) = x(n-k) + 4x(n-k-3) \end{array}\right.$$

- (n-k) var Hafızalı
- x(n) ve x(n-k) var Nedensel
- $y_1(n) = y(n-k)$ eşit olduğu için Zamanla değişmez
- Kararlı n ∞'a gitmiyor

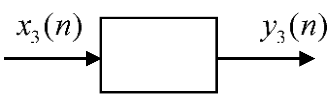
5. Doğrusallık



$$y(n) = T[x(n)]$$



$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$



$$y_3(n) = T[x_3(n)] = T[ax_1(n) + bx_2(n)]$$

$$T[x(n)] = y(n)$$
$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$
$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$
$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$
$$T[x_3(n)] = y_3(n)$$
$$y_3(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

Sistem Doğrusal ise;

$$y_3(n) \overset{?}{=} T[ax_1(n)] + T[bx_2(n)]$$

$$y_3(n) \overset{?}{=} aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

$$y_3(n) \overset{?}{=} ay_1(n) + by_2(n)$$

Bu eşitlik
Sağlanıyor ise sistem ***lineer (doğrusal)***
Sağlanmıyor ise ***nonlineer (doğrusal değil)***

Örnek: $y(n)=2\,x(n)+3=M$ sistemin özellikleri hakkında bilgi veriniz?

- (n-k) yok Hafızalı Değil
- x(n) var Nedensel
- $y_1(n)=y(n-k)$ eşit olduğu için; Zamanla değişmez (Sabit n yok)
- Kararlı n ∞'a gitmiyor
- $y_3(n)\neq T[x_3(n)]$ eşit olmadığı için; Doğrusal değil

$$y(n)=2\,x(n)+3=M$$

$$y(n-k)=T[x(n-k)]=2\,x(n-k)+3$$

$$eşit\left\langle \begin{array}{l} y_1(n)=2\,x_1(n)+3=2\,x(n-k)+3 \\ y(n-k)=2\,x(n-k)+3 \end{array}\right.$$

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=2x_1(n)+3$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=2x_2(n)+3$$

$$x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$
$$y_3(n)=T[x_3(n)]=2(ax_1(n)+bx_2(n))+3$$

$$T[x_3(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$
$$T[x_3(n)]=a(2x_1(n)+3)+b(2x_2(n)+3)$$

$$y_3(n)\overset{?}{=}T[x_3(n)]$$
$$2(ax_1(n)+bx_2(n))+3\neq a(2x_1(n)+3)+b(2x_2(n)+3)$$

Örnek: $y(t)=(x(t))^2$ doğrusal mı?

$$y_1(t)=T[x_1(t)]=(x_1(t))^2$$
$$y_2(t)=T[x_2(t)]=(x_2(t))^2$$

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$$
$$y_3(t)=T[x_3(t)]=(ax_1(t)+bx_2(t))^2$$

$$T[x_3(t)]=aT[x_1(t)]+bT[x_2(t)]$$
$$T[x_3(t)]=a(x_1(t))^2+b(x_2(t))^2$$
$$y_3(t)\overset{?}{=}T[x_3(t)]$$
$$(ax_1(t)+bx_2(t))^2\overset{?}{=}a(x_1(t))^2+b(x_2(t))^2$$
$$a^2y_1(t)+b^2y_2(t)+2aby_1(t)y_2(t)\neq ay_1(t)+by_2(t)$$

Örnek: $y(n)=T[x(n)]=n^2x(n+2)$ doğrusal mı?

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=n^2x_1(n+2)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=n^2x_2(n+2)$$

$$x_3(n+2)=ax_1(n+2)+bx_2(n+2)$$
$$y_3(n)=T[x_3(n)]=n^2(ax_1(n+2)+bx_2(n+2))$$

$$T[x_3(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$
$$T[x_3(n)]=a(n^2x_1(n+2))+b(n^2x_2(n+2))$$
$$y_3(n)\overset{?}{=}T[x_3(n)]$$
$$n^2(ax_1(n+2)+bx_2(n+2))\overset{?}{=}a(n^2x_1(n+2))+b(n^2x_2(n+2))$$
$$ay_1(n)+by_2(n)=ay_1(n)+by_2(n)$$

- (n+k) var Hafızalı
- x(n) ve/veya x(n-k) yok Nedensel değil
- $y_1(n)=y(n-k)$ eşit olduğu için; Zamanla değişmez değil (Sabit n var)
- Kararlı değil n ∞'a gidiyor
- $y_3(n)=T[x_3(n)]$ eşit olduğu için; Doğrusal

Örnek: $y(n)=6\,x^2(n-3)$ sistemin özellikleri hakkında bilgi veriniz?

- (n-k) var Hafızalı
- x(n-k) var Nedensel
- $y_1(n)=y(n-k)$ eşit olduğu için; Zamanla değişmez (Sabit n yok)
- Kararlı n ∞'a gitmiyor
- $y_3(n)\neq T[x_3(n)]$ eşit olmadığı için; Doğrusal değil

$$y(n)=6\,x^2(n-3)$$

$$x_1(n)=x(n-k)$$
$$y(n-k)=T[x(n-k)]=6\,x^2(n-k-3)$$

$$eşit\left\langle\begin{array}{l} y_1(n)=6\,x^2(n-k-3) \\ y(n-k)=6\,x^2(n-k-3)\end{array}\right.$$

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=6\,x_1^{\,2}(n-3)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=6\,x_2^{\,2}(n-3)$$

$$x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$
$$y_3(n)=T[x_3(n)]=6(ax_1(n-3)+bx_2(n-3))^2$$

$$T[x_3(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$
$$T[x_3(n)]=a6(x_1^{\,2}(n-3))+b6(x_2^{\,2}(n-3))$$

$$y_3(n)\overset{?}{=}T[x_3(n)]$$
$$6(ax_1(n-3)+bx_2(n-3))^2\overset{?}{=}a6(x_1^{\,2}(n-3))+b6(x_2^{\,2}(n-3))$$
$$6(ax_1(n-3)+bx_2(n-3))^2\neq ay_1(n)+by_2(n)$$

Örnek: $y(t)=x(-t+1)$ sistemin özellikleri hakkında bilgi veriniz?

DOĞRUSAL **Z**AMANLA **D**EĞİŞMEZ SİSTEM **(DZD)**

$y(n) = T[x(n)]$

$h(n) = T[\delta(n)]$

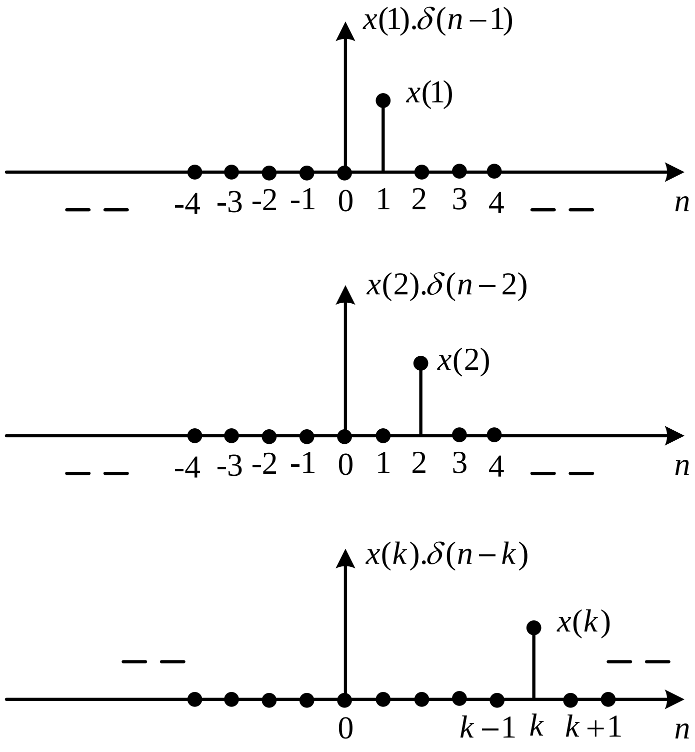
Giriş birim impuls dizisi $\delta(n)$ ise, buna karşı düşen sistem çıkışı impuls cevabı olarak adlandırılır ve $h(n)$ ile gösterilir. Ayrık zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış bağıntısını, birim impuls cevabı yardımıyla belirlemede ilk adım, önceki bölümde verilmiş olan denklemin bir daha yazılmasıdır.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)$$

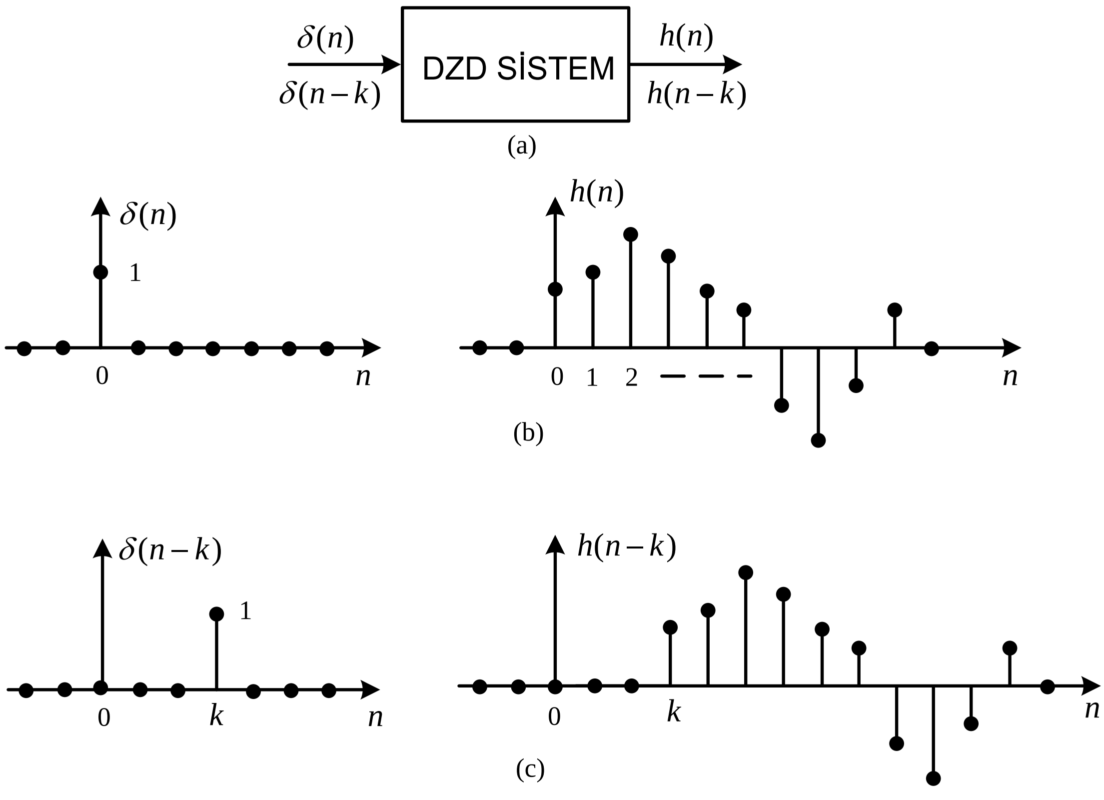
$$y(n) = T\left[x(n)\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).T\left[\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

Konvalisyon Toplamı

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$



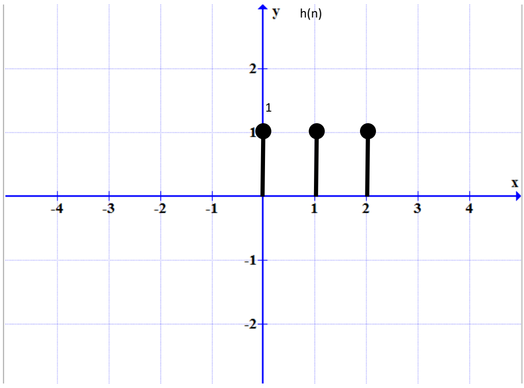
$x(n)$ dizisinin impuls bileşenleri ile gösterilmesi

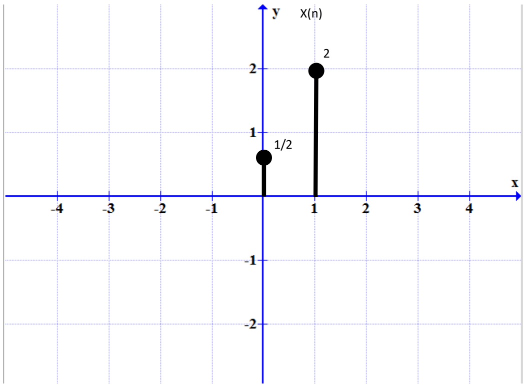


Zamanla değişmeme kriteri, (a) DZD sistemin ötelenmiş birim impuls cevabı, (b) $\delta(n)$ için DZD sistemin cevabı, (c) $\delta(n-k)$ için aynı sistemin cevabı

Örnek $x(n)$, birim impuls cevabı $h(n)$ olarak verilen DZD bir sisteme giriş olarak uygulanmaktadır.

Çıkış dizisini bulunuz? $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

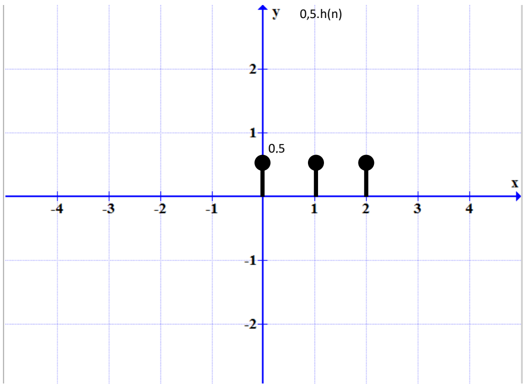


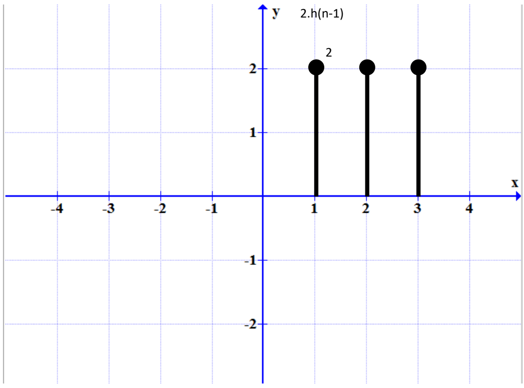


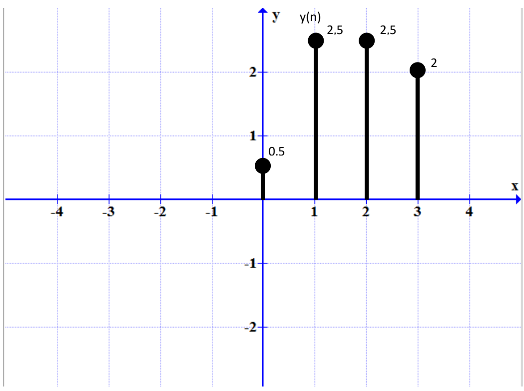
Çözüm

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(n)=x[0]h[n-0]+x[1]h[n-1]=0,5h(n)+2h(n-1)$$





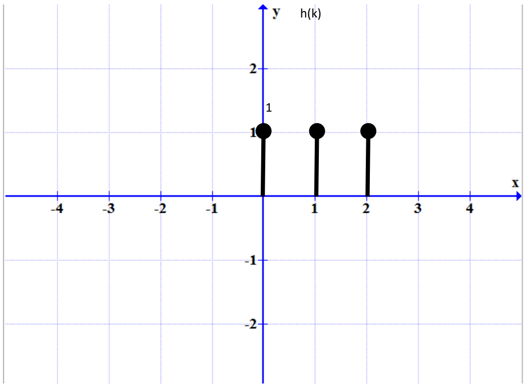


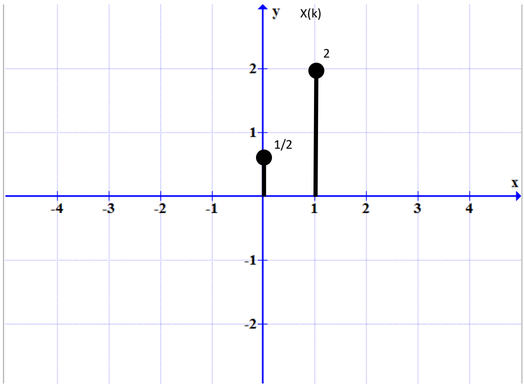
∞'a gidiyorsa;

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

k'lı ifadeye dönüştürüp topluyoruz

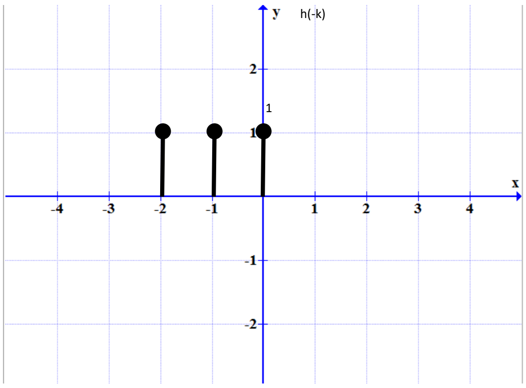
Örnek $x(n)$, $h(n)$ olarak verilen DZD bir sisteme giriş olarak uygulanmaktadır. Çıkış dizisini bulunuz? $y(n) = ?$

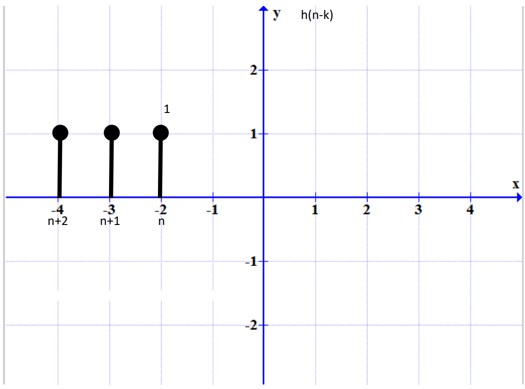




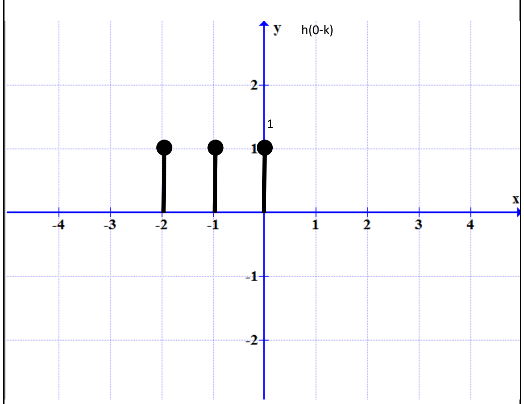
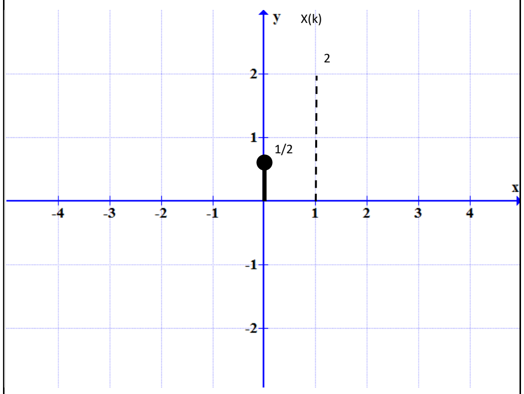
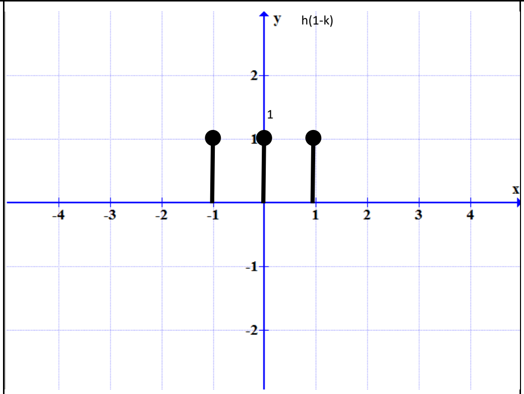
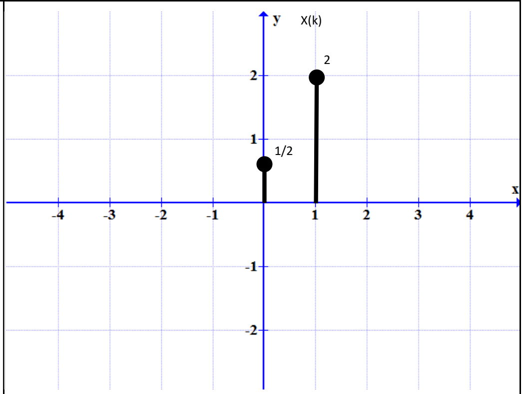
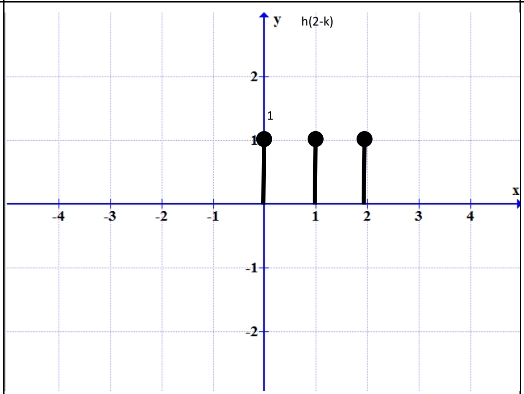
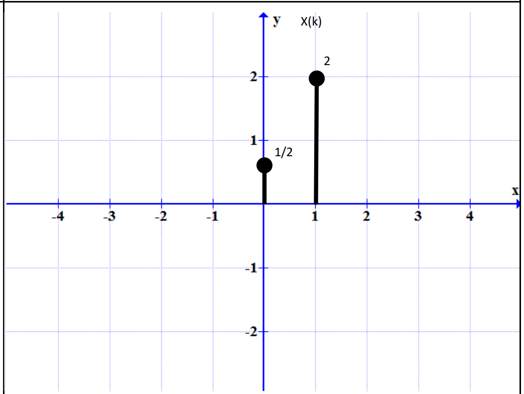
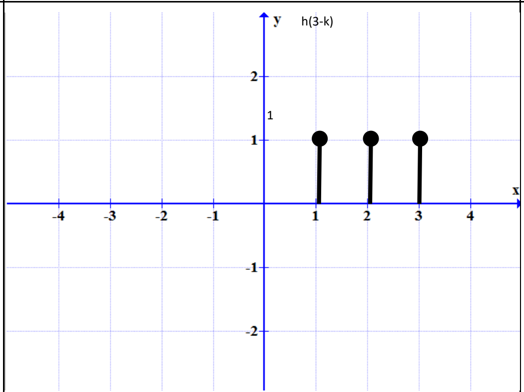
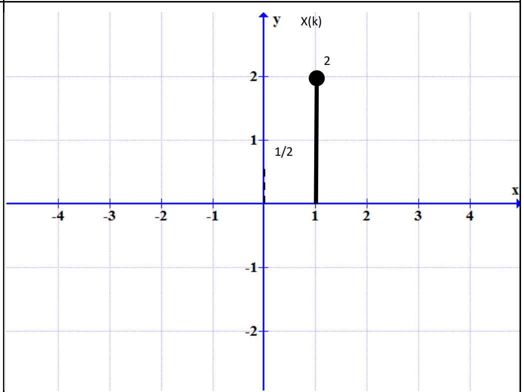
Çözüm

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$





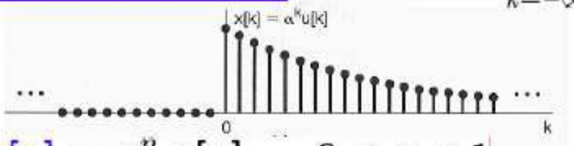
$n < 0$	Hiç örtüşme yok $y(n) = 0$
$n = 0$	$y(0) = 0,5 + 0 = 0,5$
$n = 1$	$y(1) = 0,5 + 2 = 2,5$
$n = 2$	$y(2) = 0,5 + 2 = 2,5$
$n = 3$	$y(3) = 0 + 2 = 2$
$n \geq 4$	Hiç örtüşme yok $y(n) = 0$

<table>
<tr><td>$n<0$</td><td>Hiç örtüşme yok</td><td>$y(n)=0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$n=0$</td><td></td><td>$y(0)$=0,5
çarp</td><td></td></tr>
<tr><td>$n=1$</td><td></td><td>$y(1)$=0,5+2
çarp</td><td></td></tr>
<tr><td>$n=2$</td><td></td><td>$y(2)$=0,5+2
çarp</td><td></td></tr>
<tr><td>$n=3$</td><td></td><td>$y(3)$=0+2
çarp</td><td></td></tr>
<tr><td>$n\geq 4$</td><td>Hiç örtüşme yok</td><td>$y(n)=0$</td><td></td></tr>
</table>

Örnek Chapter2.pdf/Example2.3

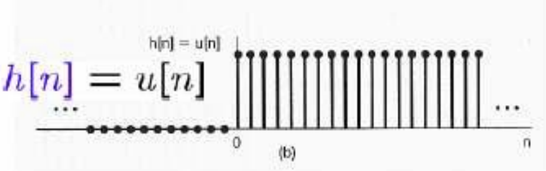
▪ Example 2.3:

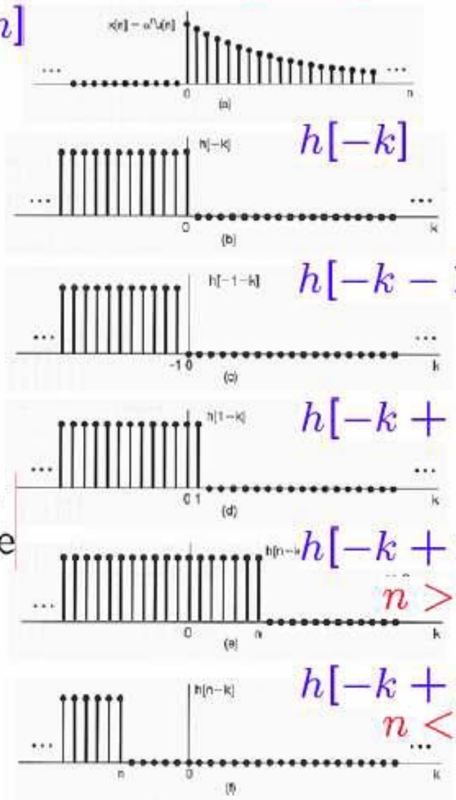
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$



$$x[n] = \alpha^n\, u[n], \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$h[n] = u[n]$$





$x[n]$, $h[-k]$, $h[-k-1]$, $h[-k+1]$, $h[-k+n]$ $n>0$, $h[-k+n]$ $n<0$

for $n < 0$, $\quad x[k]\, h[n-k] = 0 \;\Rightarrow\; y[n] = 0$

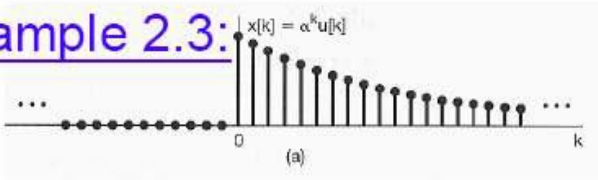
for $n \geq 0$, $\quad x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

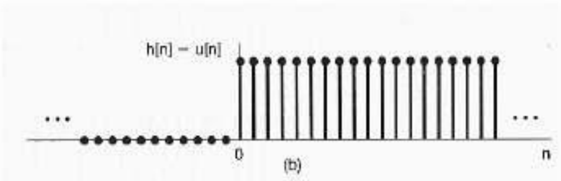
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

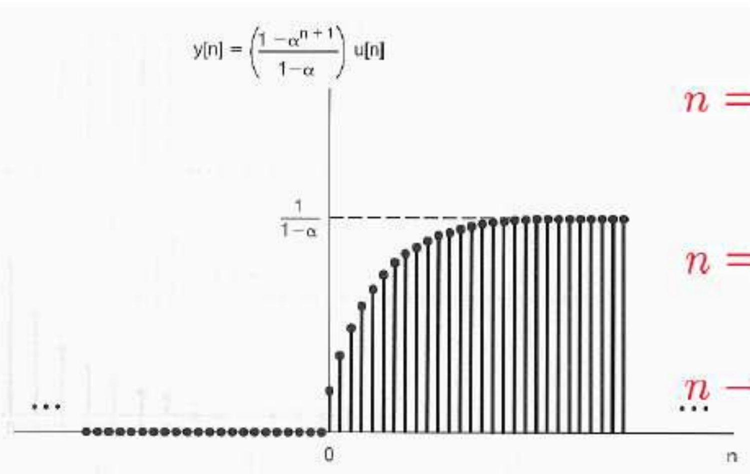
for all n, $\quad y[n] = \left(\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right) u[n]$

▪ Example 2.3:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$







$$\alpha = \frac{7}{8}$$

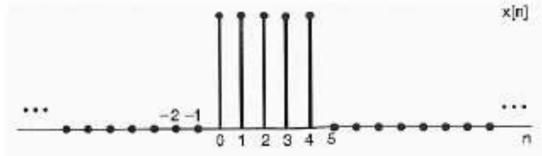
$n = 0 \quad y[0] = \dfrac{1-\frac{7}{8}}{1-\frac{7}{8}} = 1$

$n = 1 \quad y[1] = \dfrac{1-(\frac{7}{8})^2}{1-\frac{7}{8}} = \dfrac{15}{8}$

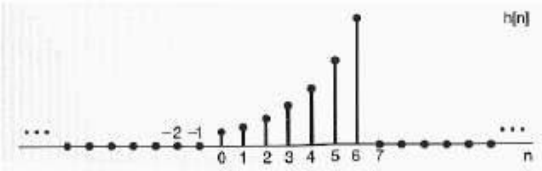
$n \to \infty \quad y[n] = \dfrac{1-0}{1-\frac{7}{8}} = 8$

Örnek Chapter2.pdf/Example 2.4

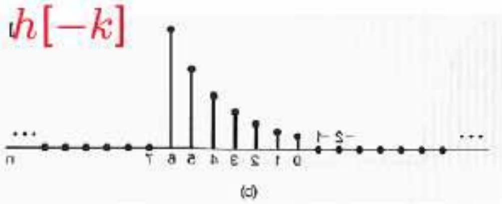
▪ Example 2.4:



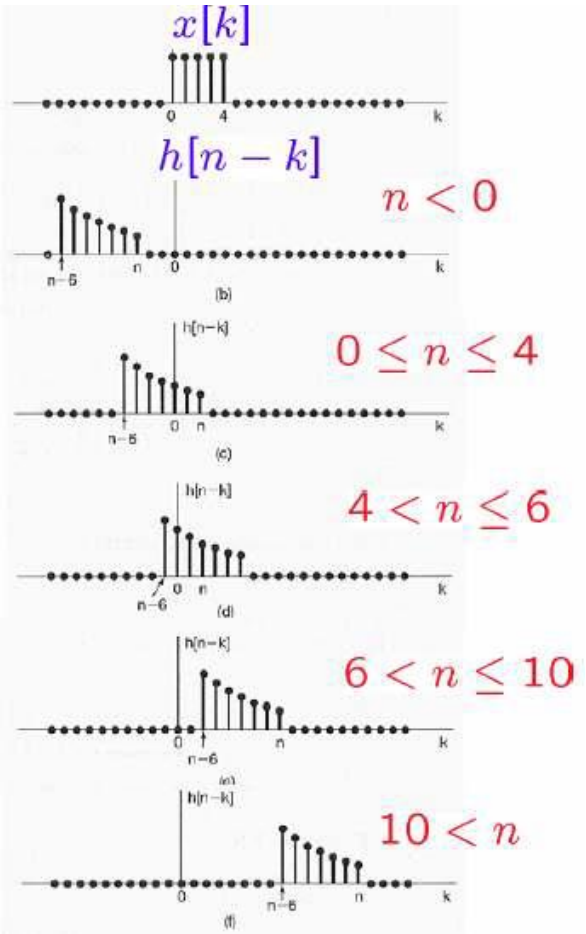
$x[n] = 1,\ 0 \le n \le 4$

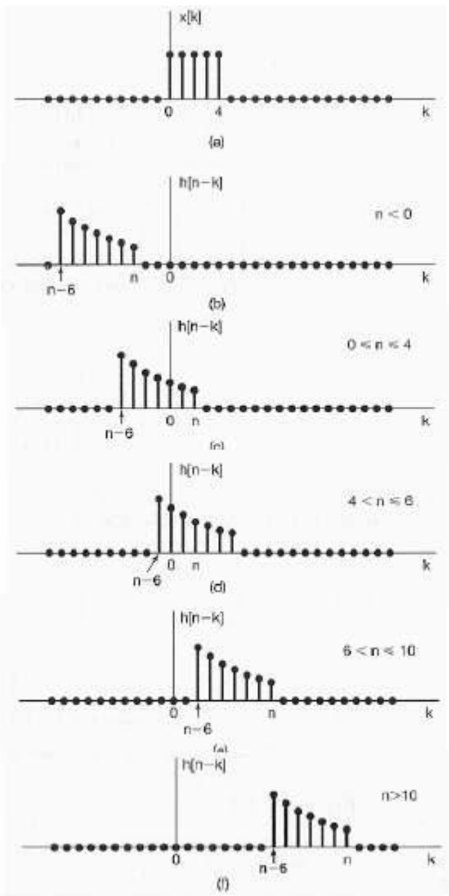


$h[n] = \alpha^n,\ 0 \le n \le 6$



$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$





$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

for $n < 0$, $x[k]\,h[n-k] = 0 \ \Rightarrow\ y[n] = 0$

for $0 \le n \le 4$, $x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

for $4 < n \le 6$, $x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

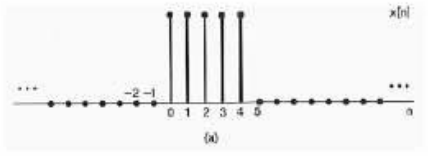
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

for $6 < n \le 10$, $x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \le k \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

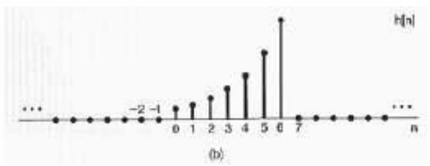
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

for $n > 10$, $y[n] = 0$

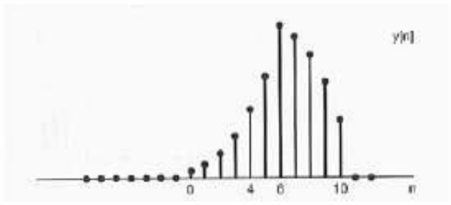
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$



$$x[n] = 1,\ 0 \le n \le 4$$



$$h[n] = \alpha^n,\ 0 \le n \le 6$$



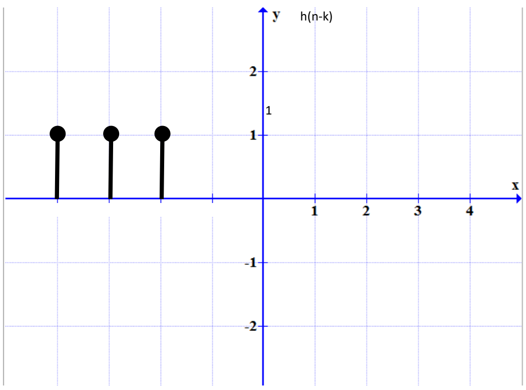
$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \le n \le 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \le 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, & 6 < n \le 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

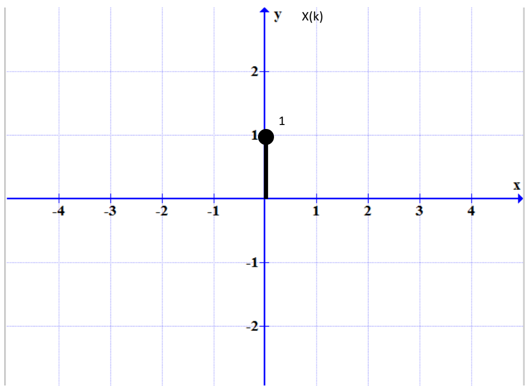
Örnek $\sum x(k).h(n-k) = x(n)*h(n)$

$$x(n) \to \boxed{h(n)} \to x(n)*h(n)$$

$x(n) = \delta(n)$

$y(n) = ?$





Çözüm

$x(n) = \delta(n)$

$y(n) = x(n)*h(n) = \delta(n)*h(n) = h(n)$

$y(n) = u(n)$

$n<0$	$y(n)=0$
$n=0$	$y(0)=1$
$n=1$	$y(1)=1$
$n=2$	$y(2)=1$
$\vdots$	
$n=\infty$	$y(n)=1$

Örnek $\sum x(k).h(n-k) = x(n)*h(n)$

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow x(n)*h(n)$$

$x(n) = \delta(n-1)$

$y(n) = ?$

Konvalisyon:

$y(n) = \delta(n-1)*h(n) = h(n-1)$

$y(n) = \delta(n-2)*x(n) = x(n-2)$

$y(n) = \delta(n+1)*x(n) = x(n+1)$

$y(n) = \delta(n+k)*x(n) = x(n+k)$

Çözüm

$x(n) = \delta(n-1)$

$y(n) = x(n)*h(n) = \delta(n-1)*h(n)$

$y(n) = u(n-1) = h(n-1)$

Birim gecikme elemanı;

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow x(n-1)$$

Birim gecikme elemanı

$$z^{-1}$$

$$Z^{-1}$$

$x(n-1) = x(n)*h(n)$

$x(n-1) = x(n)*\delta(n-1)$

$x(n-1) = x(n)*z^{-1}$

Örnek

$x(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

$h(n) = \delta(n-2) + \delta(n+2)$

$y(n) = ?$

Çözüm

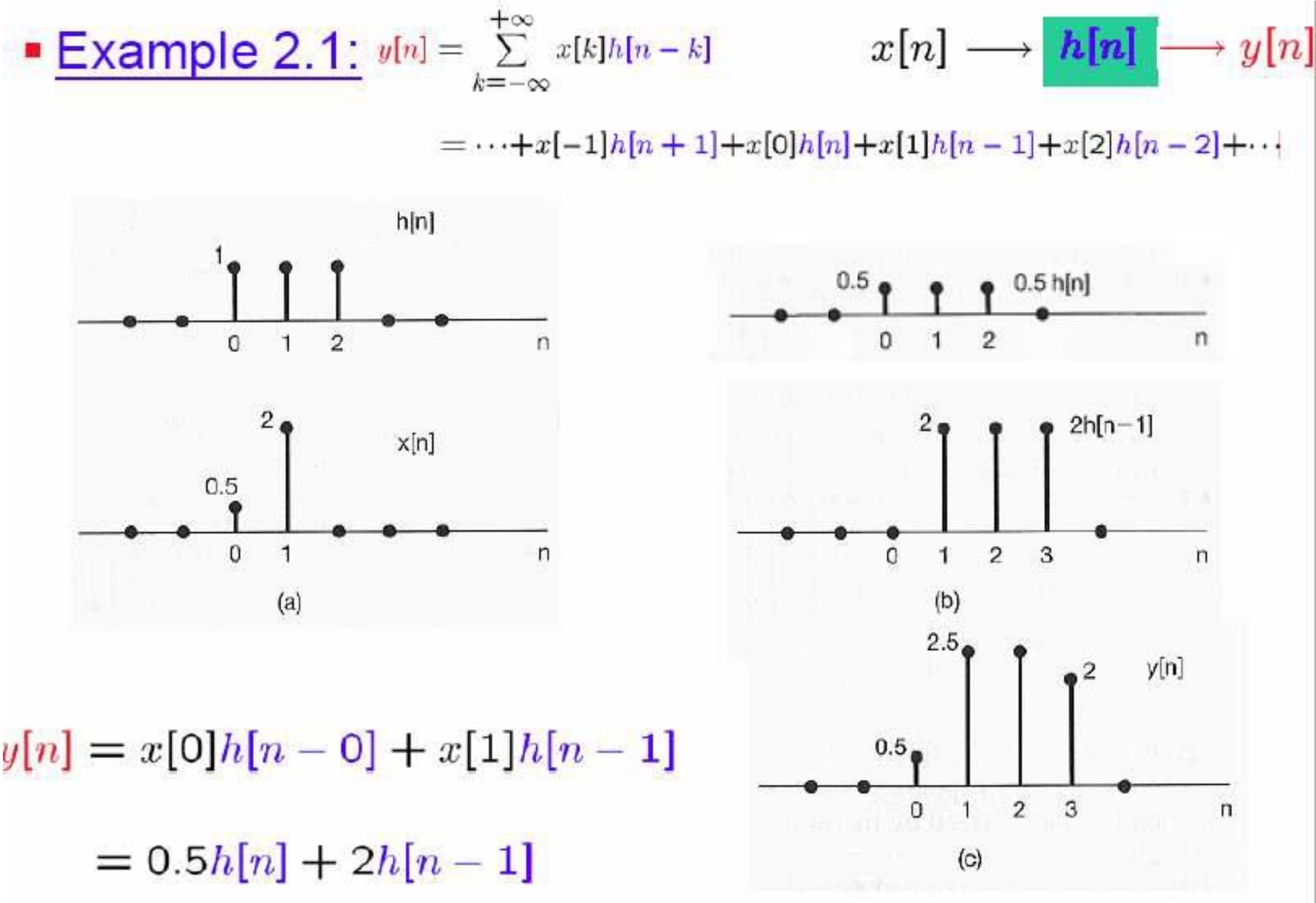
$y(n) = x(n)*h(n)$

$y(n) = h(n)*x(n)$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n)*h(n) \\ &= [\delta(n) + \delta(n-2)]*h(n) \\ &= \underbrace{\delta(n)*h(n)}_{h(n)} + \underbrace{\delta(n-2)*h(n)}_{h(n-2)} \\ &= \delta(n-2) + \delta(n+2) + \delta((n-2)-2) + \delta((n-2)+2) \\ &= \delta(n-2) + \delta(n+2) + \delta(n-4) + \delta(n) \end{aligned}$$

Örnek Chapter2.pdf/Example2.1

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$
$$x(n) = 0,5\,\delta(n) + 2\,\delta(n-1)$$
$$y(n) = ?$$



$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$
$$x(n) = 0,5\,\delta(n) + 2\,\delta(n-1)$$

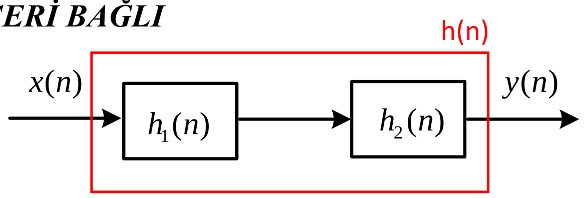
$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) \\
&= x(n) * [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)] \\
&= \underbrace{x(n) * \delta(n)}_{x(n)} + \underbrace{x(n) * \delta(n-1)}_{x(n-1)} + \underbrace{x(n) * \delta(n-2)}_{x(n-2)} \\
&= x(n) + x(n-1) + x(n-2) \\
&= 0,5\,\delta(n) + 2\,\delta(n-1) + 0,5\,\delta(n-1) + 2\,\delta(n-2) + 0,5\,\delta(n-2) + 2\,\delta(n-3) \\
&= 0,5\,\delta(n) + 2,5\,\delta(n-1) + 2,5\,\delta(n-2) + 2\,\delta(n-3)
\end{aligned}$$

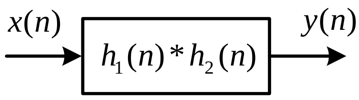
Ödev

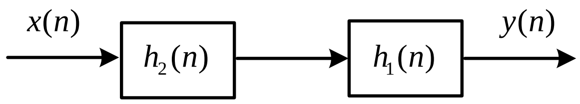
$$h(n) = \alpha^n \qquad 0 \le n \le 4$$
$$x(n) = 1 \qquad 0 \le n \le 6$$

olduğunda $y(n) = ?$

SERİ BAĞLI







$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum x(k).h(n-k)$$

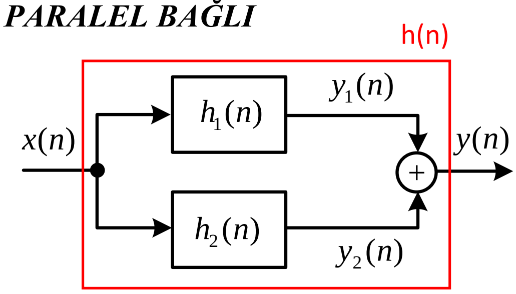
$$= x(t) * h(t) = \sum x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

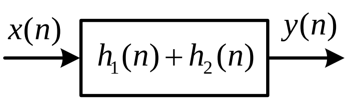
$$= x(n) * h(n)$$

$$y_1(n) = x_1(n) * h_1(n)$$

$$y(n) = y_1(n) + h_2(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n)$$

PARALEL BAĞLI



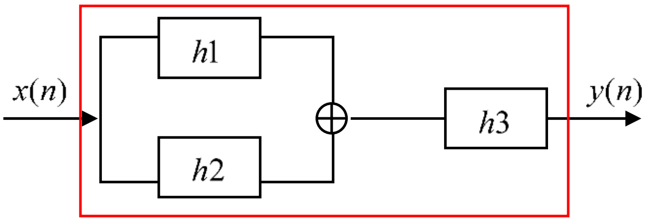


$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

$$= x(n) * (h_1 + h_2)$$

Çıkışta yapılan işleme göre burası değişir. Bu örnek te +

Örnek



$$h(n) = (h1 + h2) * h3$$

$$\begin{cases} h_1(n) = \delta(n-1) \\ h_2(n) = \delta(n-2) + \delta(n) \\ h_3(n) = \delta(n+1) \end{cases}$$

$$h(n) = ?$$

Çözüm

$$\begin{aligned} h(n) &= (h_1 + h_2) * h_3(n) \\ &= (h_1 + h_2) * \delta(n+1) \\ &= h_1\ \delta(n+1) + h_2\ \delta(n+1) \\ &= h_1(n+1) + h_2(n+1) \\ &= \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n+1) \end{aligned}$$

 # Sistemin impuls cevabına bakarak <u>hafızalı olup olmadığını</u> nasıl çözeriz

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] \\ &= x(n) * h(n) \\ &= h(n) * x(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned}$$

$$\ldots + (h-1)x(n+1) + h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \ldots$$

Hafızalı olma şartı;

$$h(n) = 0 \qquad n \neq 0$$

$$h(n) = \delta(n-1)$$

Sistemin impuls cevabına bakarak <u>nedensel olup olmadığını</u> nasıl çözeriz

Nedensel olma şartı;

$$h(n) = 0 \qquad n < 0$$

$h(n) = \delta(n-1)$ Nedensel

$h(n) = 3\delta(n-1)$ Nedensel

Sistemin impuls cevabına bakarak <u>Kararlı olup olmadığını</u> nasıl çözeriz

Tanım uyarınca her sınırlı giriş işareti yine sınırlı bir çıkış sağlıyorsa, DZD sistem kararlıdır.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Örnek

$n<0$ şartını $u(n)$ sağlıyor

$h(n)=a^n u(n)$ nedenseldir

$h(n)=a^n u(n)$ hafızalıdır

DZD sistemin impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$$h(n)=a^n u(n)$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=0}^{\infty}|a|^k$ elde edilir. Eğer $|a|<1$ ise toplamı yakınsar. Buradan aşağıdaki sonuca gelinir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|h(k)|=\frac{1}{1-|a|}$$

O halde sistem kararlıdır. Ancak $|a|\geq 1$ olursa bu toplam yakınsamaz ve sistem kararsız olur.

Örnek

DZD sistemin impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$$h(n)=\delta(n-n_0)$$

$h(n)=\delta(n-n_0)$ kararlı $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\delta(n-n_0)|=1$

$h(n)=u(n)$ kararsız $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|u(n)|\to\infty$

$$h(n)=\delta(n-n_0)\begin{cases} n=0 & \text{Hafızasız} \\ n\neq 0 & \text{Hafızalı} \end{cases}$$

$$h(n)=\delta(n-n_0)\begin{cases} n_0<0 & \text{Nedensel değil} \\ n_0>0 & \text{Nedensel} \end{cases}$$

BLOK DİYAGRAMLAR

Fark Denklemleri

$h(n)$ ***FIR*** *sınırlı sayıda toplama, çıkarma*

IIR *sonsuz sayıda* *//*

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$ a_k, b_k *sabit sayılar*

$\delta(n-1) = z^{-1}$

Sistemin Cevabının hesaplanması

$\sum b_k y(n-k) = \sum a_k x(n-k)$ başlangıç değerleri veriliyor

$\left.\begin{matrix} y(-1) \\ y(-2) \end{matrix}\right\}$ 2.dereceden denklem ise 2 giriş işareti verilir.

$x(n)$

$y(n) = ?$

Doğal Çözüm

Girişi işareti $x(n) = 0$ kabul edilir

$y(-1)$ *ve* $y(-2)$ verilenler kullanılarak sistemin doğal çözümü $y_d(n)$ bulunur

$y(n) = \lambda^n$ fark denkleminde yerine yazılır, kökler bulunur

Zorlanmış Çözüm

Doğal çözümün tam tersi

Başlangıç koşulları $y(-1) = 0$ *ve* $y(-2) = 0$ kabul edilir.

Verilen giriş işaretine $x(n)$ göre (***bkz sf 30*** Tablo) sistemin zorlanmış çözümü $y_z(n)$ bulunur

Özel Çözüm

$y(n)=\lambda^n$ kabul edilir. Doğal çözümde fark denklemine yazılır

n tane kök bulunur; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots$

$$y_d(n)=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+\quad\cdots\quad+c_N\lambda_N^n$$

Başlangıç koşulları 0 kabul ediliyor. Başlangıç koşullarıyla c leri buluyoruz

$$y(n)=\sum x(n-k)+\sum b_k y(n-k) \qquad \underbrace{y(0), y(1)}_{\substack{\text{2.dereceden ise} \\ \text{ikisi kullanılıyor}}}, y(2)$$

$$y(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)=\sum x(n-k)$$

$$\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}=0$$

$$\lambda^{n-2}\underbrace{(\lambda^2+b_1\lambda^n+b_2)}_{\lambda_1 \text{ ve } \lambda_2 \text{ kökler}}=0$$

Katlı kök varsa

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n=y_d(n)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad c_1\lambda_1^n+c_2n\lambda_1^n=y_d(n)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 \qquad c_1\lambda_1^n+c_2n\lambda_1^n+c_3n^2\lambda_1^n=y_d(n)$$

$$0 \to y(0)+b_1y(0-1)+b_2y(0-2)=y(0)+b_1y(-1)+b_2y(-2)=0 \to y(0)$$
$$+\ 1 \to y(1)+b_1y(1-1)+b_2y(1-2)=y(1)+b_1y(0)+b_2y(-1)=0 \to y(1)$$

c_1 ve c_2 bulunur

$x(n)$	$y_{Ö}(n)$
$Au(n)$	$Ku(n)$
$AM^n u(n)$	$KM^n u(n)$
An^m	$K_0n^m+K_1n^{m-1}+\cdots+K_m$
$A\cos(u(n))$ $A\sin(u(n))$	$K_0\cos(\omega_0 n)+K_1\sin(\omega_0 n)$

$$y_z(n)=y_d(n)+y_{Ö}(n)$$

$$Toplam\ çözüm=y_d(n)+y_z(n)$$

Örnek

$$y(-1) = 2$$
$$y(-2) = 2$$
$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n)$$
$$y_d(n) = ?$$

Çözüm

$$y(n) = \lambda^n$$

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n)$$
$$\underbrace{\lambda^n - 2\lambda^{n-1} - 3\lambda^{n-2}}_{\lambda_1=-1 \text{ ve } \lambda_2=3} = 0$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^{\ n} + c_2\lambda_2^{\ n}$$
$$= c_1(-1)^n + c_2(3)^n$$
$$= 1(-1)^n + 9(3)^n$$
$$= (-1)^n + (3)^{n+2}$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^{\ n} + c_2\lambda_2^{\ n} = c_1(-1)^n + c_2(3)^n$$

$y(0)$ *ve* $y(1)$ kullanılarak c_1 ve c_2 bulunur

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n)$$

$$0 \rightarrow y(0) - 2y(-1) - 3y(-2) = 0$$
$$1 \rightarrow y(1) - 2y(0) - 3y(-1) = 0$$

$$y(0) - 2.2 - 3.2 = 0$$
$$y(0) = 10 = c_1 + c_2$$

$$y(1) - 2.10 - 3.2 = 0$$
$$y(1) = 26 = -c_1 + 3c_2$$

$$10 = c_1 + c_2$$
$$26 = -c_1 + 3c_2$$

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 9$$

Örnek

$y(n) + ay(n-1) = x(n)$ doğal ve homojen çözümünü bulunuz?

Çözüm

$$y(n) = \lambda^n$$

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)$$
$$\underbrace{\lambda^n + a\lambda^{n-1}}_{\lambda_1=-a} = 0$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^{\ n}$$
$$= c_1(-a)^n$$
$$= -ay(-1)(-a)^n$$
$$= \left(-a\right)^{n+1} y(-1)$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^{\ n} = c_1(-a)^n$$

$y(0)$ kullanılarak c_1 bulunur

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)$$

$$0 \rightarrow y(0) + ay(-1) = 0$$
$$1 \rightarrow y(1) + ay(0) = 0$$

$$y(0) + ay(-1) = 0$$
$$y(0) = -ay(-1) = c_1$$

$$c_1 = -ay(-1)$$

Örnek

$$\begin{aligned} &y(-2)=0, \quad y(-1)=5 \\ &y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n) \end{aligned}$$ doğal çözümünü bulunuz?

Çözüm

$$y(n)=\lambda^n$$

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)=x(n)$$

$$\underbrace{\lambda^n-3\lambda^{n-1}-4\lambda^{n-2}}_{\lambda_1=4 \quad \lambda_2=-1}=0$$

$$\begin{aligned} y_d(n) &= c_1\lambda_1^{\,n}+c_2\lambda_2^{\,n} \\ &=16.4^n+-1.(-1)^n \\ &=4^{n+2}+(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$y_d(n)=c_1\lambda_1^{\,n}+c_2\lambda_2^{\,n}=c_1(4)^n+c_2(-1)^n$$

$y(0)$ *ve* $y(1)$ kullanılarak c_1 ve c_2 bulunur

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)$$

$$\begin{aligned} &0 \rightarrow y(0)-3y(-1)-4y(-2)=0 \\ &1 \rightarrow y(1)-3y(0)-4y(-1)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y(0)-3y(-1)-4y(-2)=0 \\ &y(0)=3.5+4.0=15=c_1+c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y(1)-3y(0)-4y(-1)=0 \\ &y(1)=3.15+4.5=65=4c_1-c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &15=c_1+c_2 \\ &65=4c_1-c_2 \\ &c_1=16 \\ &c_2=-1 \end{aligned}$$

Örnek (Özel Çözüm)

$y(-2)=0, \quad y(-1)=5$ *verilmiş fakat zorlanmış çözümde başlangıç koşulları 0 kabul ediliyor*

$$\begin{aligned} y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)&=x(n) \\ Ku(n)-3Ku(n-1)-4Ku(n-2)&=Au(n) \\ K-3K-4K&=A \end{aligned}$$

$$Tam\ Çözüm\ \ yada\ Toplam\ Çözüm = y_d + y_ö$$

Örnek

$y(n)-2y(n-1)-3y(n-2)=x(n)$ fark denkleminin Özel ve Zorlanmış çözümünü bulunuz?

Çözüm

$$y(n)-2y(n-1)-3y(n-2)=x(n)$$

Doğal Çözümü daha önce hesaplamıştık (bkz.)

$$y_d(n)=(-1)^n+9(3)^n$$
$$y_z(n)=y_d(n)+y_{Ö}(n)$$
$$y_z(n)=c_3(-1)^n+c_4(3)^n+y_{Ö}(n)$$

$x(n)=10u(n)$ //Giriş İşareti

$$y_{Ö}(n)=Ku(n)$$

$$y(n)-2y(n-1)-3y(n-2)=x(n)$$

$$Ku(n)-2Ku(n-1)-3Ku\underbrace{(n-2)}_{\substack{\text{En fazla ötelenen}\\ n>2 \text{ durumlar için}}}=10u(n)$$

$$K-2K-3K=10$$
$$-4K=10$$
$$K=-\frac{5}{2}$$

$$y_z(n)=c_3(-1)^n+c_4(3)^n-\frac{5}{2}u(n)$$

Başlangıç koşulları 0

$n=0$

$$y(0)-\underbrace{\cancel{y(-1)}}_{0}-3\underbrace{\cancel{y(-2)}}_{0}=x(0)$$
$$y(0)=x(0)$$
$$y(0)=10$$
$$10=c_3+c_4-\frac{5}{2}$$

$n=0$

$$y(1)-\underset{10}{y(0)}-3\underbrace{\cancel{y(-1)}}_{0}=x(1)$$
$$y(1)-10=x(1)$$
$$y(1)=x(1)+10$$
$$y(1)=20+10$$
$$y(1)=30$$
$$30=-c_3+3c_4-\frac{5}{2}$$

$$10=c_3+c_4-\frac{5}{2}$$
$$30=-c_3+3c_4-\frac{5}{2}$$
$$c_3=0,875$$
$$c_4=11,125$$

$$y_z(n)=0,875\,(-1)^n+11,125\,(3)^n-2,5\,u(n)$$

Örnek

$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n) \qquad n\geq 0 \qquad x(n)=2^n u(n) \qquad y_{Ö}(n)=?$

Çözüm

$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n) \qquad x(n)$ yalnız bırak

$y_z(n)=K2^n u(n)$

$$y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)$$

$$K2^n u(n)-\frac{5}{6}K2^n u(n-1)+\frac{1}{6}K2^n u(n-2)=2^n \cancel{u(n)}$$

$$K2^n-\frac{5}{6}K2^{n-1}+\frac{1}{6}K2^{n-2}=2^n$$

$$2^{n-2}(K2^2-\frac{5}{6}K2^1+\frac{1}{6}K)=2^n$$

$$K2^2-\frac{5}{6}K2^1+\frac{1}{6}K=4$$

$$\boxed{K=\frac{8}{5}}$$

Örnek

$y(n)+ay(n-1)=x(n) \qquad n\geq 0 \qquad x(n)=u(n) \qquad y_d(n)=? \qquad y_{Ö}(n)=? \qquad y_z(n)=?$

Çözüm

$y(n)+ay(n-1)=x(n)$

Tek kök olduğu için;

$y_d(n)=c_1\lambda^n$

$\lambda^n+a\lambda^{n-1}=0$

$\lambda^{n-1}(\lambda+a)=0$

$\lambda_1=-a$

$y_d(n)=c_1(-a)^n$

$y(0)+ay(-1)=x(0)$

$y(0)+ay(-1)=0$

$y(0)=-ay(-1)$

$-ay(-1)=c_1$

$y_d(n)=-ay(-1)(-a)^n$

$x(n)=u(n)$

$y_{Ö}(n)=Ku(n)$

$Ku(n)+aKu(n-1)=u(n)$

$K+aK=1$

$K=\frac{1}{1+a}$

$y_z(n)=c_2\lambda_1+y_{Ö}(n)$

$=c_2(-a)^n+\frac{1}{1+a}u(n)$

n=0 $\quad y(0)+a\,\cancel{y(-1)}=x(0)$

$y_z(0)=c_2(-a)^0+\frac{1}{1+a}u(0)$

$y_z(n)=\frac{a}{a+1}(-a)^n+\frac{1}{1+a}u(n)$

$\boxed{\begin{array}{l} y(0)=x(0) \\ x(0)=u(n) \\ x(0)=u(0) \\ x(0)=1 \end{array}}$

$\boxed{c2=\frac{a}{a+1}}$

Toplam Çözüm$=y_d(n)+y_z(n)$

$$=-ay(-1)(-a)^n+\frac{a}{a+1}(-a)^n+\frac{1}{1+a}u(n)=[\frac{a}{a+1}-ay(-1)](-a)^n+\frac{1}{1+a}u(n)$$

Örnek

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

$y(-1) = y(-2) = 0 \qquad x(n) = 4^n u(n)$ toplam çözümü bulunuz?

Çözüm

$$y(n) = \lambda^n \qquad \begin{aligned} &\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0 \\ &\lambda^{n-2}(\underbrace{\lambda^2 - 3\lambda - 4}_{\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=4}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_d(n) &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \\ &= c_1(-1)^n + c_2(4)^n \end{aligned}$$

$$y_d(0) \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$
$$y_d(1) \Rightarrow -c_1 + 4c_2 = 0$$
$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0$$

Başlangıç koşulları 0 olduğu için $y_d(n) = 0$ olur

n=0 $\quad y(0) - 3y(-1) - 4y(-2) = 0 \qquad y(0) = 0$

n=1 $\quad y(1) - 3y(0) - 4y(-1) = 0 \qquad y(1) = 0$

$$y_z(n) = c_3(-1)^n + c_4 4^n + y_{Ö}(n)$$

$$y_{Ö}(n) = K4^n u(n)$$

Bu şekilde bir durumla karşılaşırsak katlı kök olduğunu anlıyoruz

$y_{Ö}(n) = K4^n u(n)$ yerine

$y_{Ö}(n) = Kn4^n u(n)$ kullanıyoruz

λ_1, λ_2 kökler için $\quad \cancel{c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n}$

$\qquad\qquad c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_2^n$

$y_{Ö}(n) = Kn4^n u(n)$ Fark denkleminde yerine yazıyoruz

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

$$Kn4^n u(n) - K(n-1)4^{n-1}u(n) - 4K(n-2)\underbrace{4^{n-2}}_{ortak\ parantez} u(n) = 4^n u(n) + 2.\underbrace{4^{n-1}}_{ortak\ parantez} u(n-1)$$

$$\cancel{4^{n-2}}(16Kn - 12K(n-1) - 4K(n-2)) = \cancel{4^{n-1}}^{4}(4+2)$$
$$16Kn - 12Kn - 12K - 4Kn - 8K) = 24$$
$$20K = 24$$

$$K = \frac{6}{5}$$

$$y_{Ö}(n) = K4^n u(n) = \frac{6}{5}4^n u(n)$$

$$y_z(n) = y_d(n) + y_{Ö}(n) = c_3(-1)^n + c_4 4^n + \frac{6}{5}n4^n u(n)$$

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

$$\left.\begin{aligned} &y(0) - 3y(-1) - 4y(-2) = x(0) + 2x(-1) \Rightarrow y(0) = 1 = c_3 + c_4 + 0 \\ &y(1) - 3y(0) - 4y(-1) = x(1) + 2x(0) \Rightarrow y(1) = 9 = -c_3 + 4c_4 + \frac{24}{5} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_3 &= -\frac{1}{25} \\ c_4 &= \frac{26}{25} \end{aligned}$$

$$y_T(n) = y_d(n) + y_{Ö}(n) = [-\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n4^n]u(n)$$

Örnek

$y(n)+0,5y(n-1)=x(n) \qquad n\geq 0$

$y(-1)=2 \qquad x(n)=u(n)$ toplam çözümü bulunuz?

Çözüm

$$y(n)=\lambda^n \qquad \begin{aligned} y(n)+0,5y(n-1)&=x(n)\\ \lambda^n+0,5\lambda^{n-1}&=0\\ \lambda^{n-1}\underbrace{(\lambda+0,5)}_{\lambda_1=0,5}&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_d(n)&=c_1\lambda^n\\ y(0)-0,5y(-1)&=0\\ y(0)&=-1\\ -1&=c_1 \end{aligned} \qquad y_d(n)=c_1\lambda^n=-1(-\frac{1}{2})^n$$

$$\begin{aligned} y_z(n)&=y_d(n)+y_{Ö}(n)\\ &=c_2\lambda^n+Ku(n)\\ &=(-\frac{1}{2})^n+Ku(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n)+0,5y(n-1)&=x(n)\\ Ku(n)+\frac{1}{2}Ku(n-1)&=u(n)\\ K+\frac{1}{2}K&=1\\ K&=\frac{2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y(0)+0,5\underbrace{\cancel{y(-1)}}_{2}&=x(0)\\ y(0)=1&=c_2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$y_z(n)=y_d(n)+y_ö(n)=\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}u(n)$$

$$\begin{aligned} y_T(n)&=y_d(n)+y_z(n)\\ &=-(-\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}u(n)\\ &=-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}u(n) \end{aligned}$$

 # Birim impuls cevabının hesaplanması

$x(n) = \delta(n)$ uygulanarak elde edilen zorlanmış çözümdür.

$n > 0$ olduğunda $x(n) = 0$ olacağından $y_{Ö}(n) = 0$ olur

Birim impuls cevabı sadece $y_d(n)$ ve **0** başlangıç koşulları kullanılarak bulunur.

Örnek $y(n) + 0,5y(n-1) = x(n)$ fark denkleminin birim impuls cevabını hesaplayınız?

Çözüm

$$x(n) = \delta(n)$$
$$y(n) = h(n)$$

$$y(n) + 0,5y(n-1) = x(n)$$
$$h(n) + 0,5h(n-1) = \delta(n)$$
$$h(0) + 0,5\underbrace{h(-1)}_{0 \text{ kabul edilir}} = \delta(0)$$
$$h(0) = 1 = c_1$$

$$y_d(n) = c1(-\frac{1}{2})^n = h(n)$$
$$h(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$$

Örnek $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$ fark denkleminin birim impuls cevabını hesaplayınız $h(n) = ?$

Çözüm

$$x(n) = \delta(n)$$
$$y(n) = h(n)$$

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$
$$h(n) - 3h(n-1) - 4h(n-2) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$$
$$h(0) - 3h(-1) - 4h(-2) = \delta(0) + 2\delta(-1)$$
$$h(0) = 1 = c_1(-1)^0 + c_2(4)^0$$
$$h(1) - 3h(0) - 4h(-1) = \delta(1) + 2\delta(0)$$
$$h(1) = 5 = c_1(-1)^1 + c_2 1(4)^1$$

$$1 = c_1 + c_2$$
$$5 = -c_1 + 4c_2$$
$$c_1 = \frac{6}{5} \quad c_2 = \frac{-1}{5}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= y_d(n) \\ &= (c_1(-1)^n + c_2(4)^n)u(n) \\ &= (\frac{-1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}(4)^n)u(n) \end{aligned}$$

Durum Değişkenleri

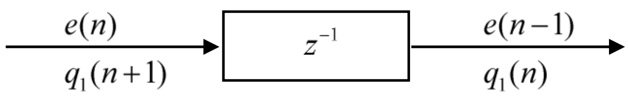
Sistemin içerisindeki değişkenler

Bizim müdahale edemediğimiz değişkenler

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k)$$
$$= \frac{1}{2} y(n-1)$$
$$= x(n) + 2x(n-1)$$

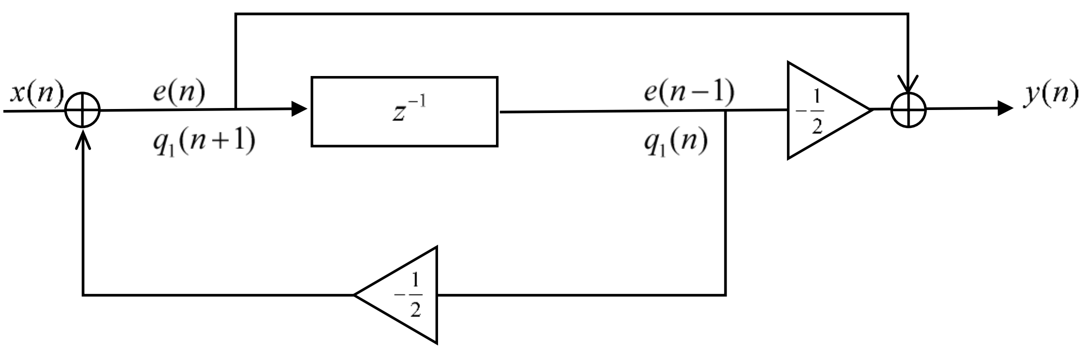
İşlem adımları;

1. Fark denkleminin $y(n)$ gördüğümüz yere $e(n)$ yazıyoruz
2. Eşitliğin sağ tarafında ne yazdığından bağımsız olarak (ne olursa olsun) $x(n)$ yazıyoruz
   $e(n) + 2e(n-1) = x(n)$
   $$e(n) = x(n) - \frac{1}{2} e(n-1)$$
3. Sistemin derecesi ne ise durum değişkenlerinin derecesi de o olur. Bu örnekte 1 değişken var (1.dereceden)
   $q_1(n) = e(n-1)$ ***// Durum değişkenleri***



$q_1(n+1)$ $\quad$ // $q_1(n)$ kullanarak yazıyoruz

$$q_1(n+1) = e(n)$$
$$= x(n) - \frac{1}{2} q_1(n)$$



$$y(n) = e(n)$$
$$= x(n) - \frac{1}{2} q_1(n)$$

Durum değişkenleri yöntemi

Fark denklemiyle modellenen nedensel süzgeçlerin iç değişkenlerinin durumunu belirlemek için durum değişkenleri yaklaşımı kullanılır. Sistemin tüm durum değişkenleri durum vektörü adı verilen bir vektörle gösterilir. Durum değişkenleri N nci dereceden fark denklemini N adet birinci dereceden sisteme dönüştürerek elde edilir. Bu amaçla, aşağıdaki N nci dereceden fark denklemini ele alalım.

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}a_k.x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}b_k.y(n-k)$$

Bu süzgeci birbirine seri bağlanmış iki süzgece ayırabiliriz.

$$\omega(n)=x(n)-\sum_{k=1}^{N}b_k.\omega(n-k) \qquad\qquad y(n)=\sum_{k=0}^{N}a_k.\omega(n-k)$$

Bu ifadeleri yeniden düzenlenmek suretiyle fark denklemi elde edilir.

$q_1(n)$, $q_2(n)$, ….. , $q_N(n)$ durum değişkenleri de aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
&q_1(n)=\omega(n-N)\\
&q_2(n)=\omega(n-N+1)\\
&\vdots\\
&q_{N-1}(n)=\omega(n-2)\\
&q_N(n)=\omega(n-1)
\end{aligned}$$

denklemlerinden durum değişkenleri arasındaki ilişki yazılabilir.

$$\begin{aligned}
&q_1(n+1)=\omega(n-N+1)=q_2(n)\\
&q_2(n+1)=\omega(n-N+2)=q_3(n)\\
&\vdots\\
&q_{N-1}(n+1)=\omega(n-1)=q_N(n)\\
&q_N(n+1)=\omega(n)=x(n)-b_1\omega(n-1)-b_2\omega(n-2)-\ldots\ldots-b_N\omega(n-N)\\
&\qquad\qquad\;=x(n)-b_1q_N(n)-b_2q_{N-1}(n)-\ldots\ldots-b_Nq_1(n)
\end{aligned}$$

Bu matrisleri denklem formunda gösterebiliriz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n+1)\\ q_2(n+1)\\ \vdots\\ q_{N-1}(n+1)\\ q_N(n+1)\end{bmatrix}}_{q(n+1)}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-b_N&-b_{N-1}&-b_{N-2}&\cdots&-b_2&-b_1\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n)\\ q_2(n)\\ \vdots\\ q_{N-1}(n)\\ q_N(n)\end{bmatrix}}_{q(n)}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{B}\cdot x(n)$$

$\omega(n)$ değişkeni yok edilebilir.

$$
\begin{aligned}
y(n) &= a_0 . \left[x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k . \omega(n-k) \right] + \sum_{k=1}^{N} a_k . \omega(n-k) \\
&= a_0 x(n) + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k - a_0 b_k \right] \omega(n-k)
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki katsayıları tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_N - a_0 b_N \\
c_2 &= a_{N-1} - a_0 b_{N-1} \\
&\vdots \\
c_{N-1} &= a_2 - a_0 b_2 \\
c_N &= a_1 - a_0 b_1
\end{aligned}
$$

çıkış ifadesi,

$$
y(n) = a_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + c_3 q_3(n) + \ldots\ldots + c_{N-1} q_{N-1}(n) + c_N q_N(n)
$$

veya

$$
y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{[a_0]}_{d} x(n)
$$

olarak yazılabilir. Girişine $x(n)$ işareti uygulanan doğrusal bir sistemin çıkışı $y(n)$ olduğuna göre, durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

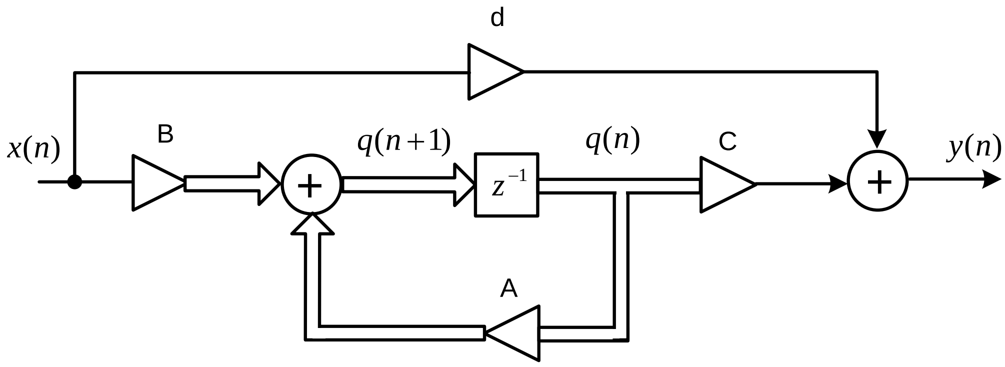
$$
q(n+1) = Aq(n) + Bx(n)
$$

$$
y(n) = Cq(n) + dx(n)
$$

A sistem matrisi, B kontrol vektörü, C gözlem vektörü ve d geçiş katsayısı olarak kullanılır. A matrisi N nci dereceden bir kare matristir. B ve C vektörleri N boyutludur. $q(n)$ ise durum değişkenleri içeren durum vektörüdür.

$$
q(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) & q_2(n) & \cdots & q_N(n) \end{bmatrix}^T
$$

Şekilde durum değişkenlerine ilişkin blok diyagramı gösterilimi verilmiştir. Burada çift çizgiler vektör işaretleri göstermektedir.



Şekil Durum değişkenleri yöntemiyle modellenen süzgecin blok diyagramı

Örnek Sayısal bir süzgeç aşağıdaki fark denklemiyle tanımlansın:

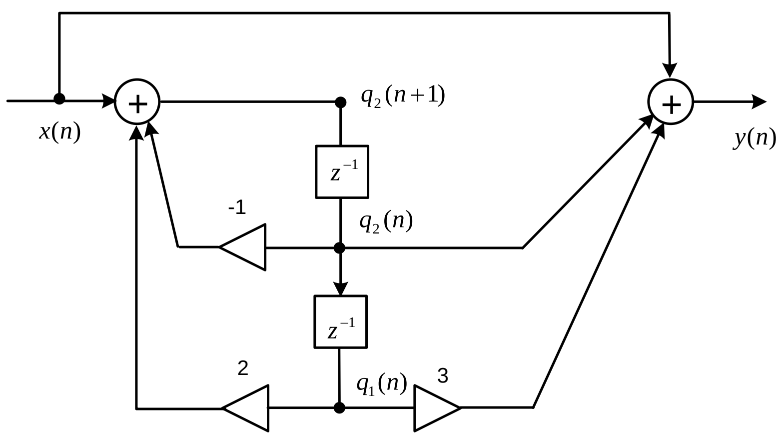
$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2)$$

Yukarıdaki denkleminden $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ olarak belirlendiğinden, bu süzgeç durum değişkenleri yöntemi ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(n) \qquad \begin{aligned} c_1 &= a_2 - a_0 b_2 = 1 - 1(-2) = 3 \\ c_2 &= a_1 - a_0 b_1 = 2 - 1.1 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde çıkış, durum değişkenleri ve giriş cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$y(n) = [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$



Şekil Örnek 2.11 deki sayısal süzgecin durum denklemleri cinsinden blok diyagramı

Örnek

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1) \quad \text{durum değişkenleri?}$$

A,B,C,D bulunduğunda çözüm bulunmuş olur

Çözüm

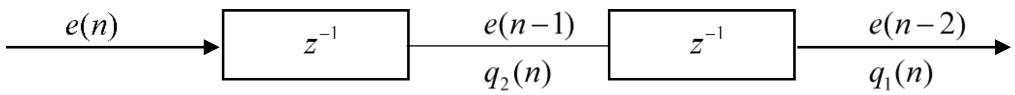
$$\underset{b0}{1}\, y(n)-\underset{b1}{3}\, y(n-1)-\underset{b2}{4}\, y(n-2)=\underset{a0}{1}\, x(n)+\underset{a1}{2}\, x(n-1)$$

2. Dereceden sistem

$$e(n)-3e(n-1)-4e(n-2)=x(n)$$

Durum değişkenleri;

$$q_1(n)=e(n-2) \qquad \alpha(n)=\begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix}$$
$$q_2(n)=e(n-1)$$



Durum denklemleri;

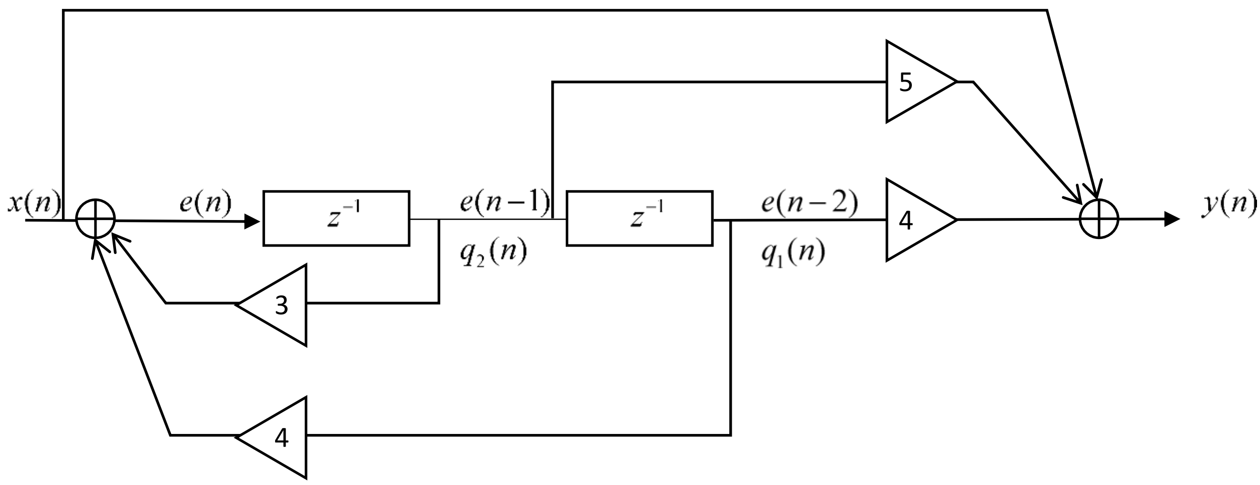
$$q_1(n+1)=e(n-1)=q_2(n)$$
$$q_2(n+1)=e(n)=x(n)+3q_2(n)+4q_1(n)$$

1.denklemdeki q katsayıları

X(n)'nin katsayısı

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ \hline \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \boxed{3} \end{array}}_{A} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \underset{B}{\begin{array}{c} x_n \\ \hline \boxed{0} \\ 1 \end{array}}\, x(n)$$

2.denklemdeki q katsayıları



$$y(n)=e(n)+2e(n-1)$$
$$=\underbrace{x(n)+3e(n-1)+4e(n-2)}_{e(n)}+2e(n-1)$$
$$=x(n)+5e(n-1)+4e(n-2)$$
$$=x(n)+5q_2(n)+4q_1(n)$$

$$y(n)=\underbrace{\begin{bmatrix} \overset{q_1}{4} & \overset{q_2}{5} \end{bmatrix}}_{\substack{C \\ \text{katsayılar } y(n)\text{'de}}} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \underset{\substack{D \\ \text{katsayılar } y(n)\text{'de}}}{\begin{bmatrix} \overset{x_n}{1} \end{bmatrix}} \quad x(n)$$

Z Dönüşümü

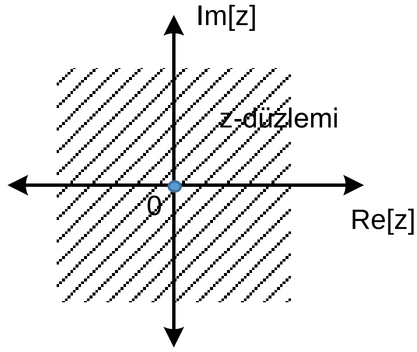
z bir karmaşık sayı

$\sigma + j\omega = re^{j\theta}$

$$x(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Örnek Sınırlı eleman varsa/Sağ taraflı dizi $x(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\0}}{1},\underset{\substack{\perp\\1}}{2},\underset{\substack{\perp\\2}}{5},\underset{\substack{\perp\\3}}{7},\underset{\substack{\perp\\4}}{0},\underset{\substack{\perp\\5}}{1}\right\}$ $x(z)=?$

Çözüm



$$x(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+x(4)z^{-4}+x(5)z^{-5}$$
$$=1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+0z^{-4}+1z^{-5}$$

Yakınsama Bölgesi

$z\neq 0$ 'da karmaşık sayıları içerisinde barındıran bölge

$z\neq 0$ 'da ∞'a gider, bu hariç her yer YB (Yakınsama bölgesi)

Örnek Sınırlı eleman varsa/Sol taraflı dizi $x(n)=\left\{\underset{\substack{\perp\\-5}}{1},\underset{\substack{\perp\\-4}}{2},\underset{\substack{\perp\\-3}}{5},\underset{\substack{\perp\\-2}}{7},\underset{\substack{\perp\\-1}}{0},\underset{\substack{\uparrow\\0}}{1}\right\}$ $x(z)=?$

Çözüm

$$x(z)=x(0)z^{0}+x(-1)z^{1}+x(-2)z^{2}+x(-3)z^{3}+x(-4)z^{4}+x(-5)z^{5}$$
$$=1z^{0}+0z^{1}+7z^{2}+5z^{3}+2z^{4}+1z^{5}$$
$$=1+7z^{2}+5z^{3}+2z^{4}+z^{5}$$

Yakınsama Bölgesi (YB)

$z\neq\infty$ olduğu yerlerde YB (Yakınsama bölgesi)

Örnek $x(n)=\left\{\underset{\substack{\perp\\-2}}{1},\underset{\substack{\perp\\-1}}{2},\underset{\substack{\uparrow\\0}}{5},\underset{\substack{\perp\\1}}{7},\underset{\substack{\perp\\2}}{0},\underset{\substack{\perp\\3}}{1}\right\}$ $x(z)=?$

Çözüm

$$x(z)=x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}$$
$$=1z^{2}+2z^{1}+5z^{0}+7z^{-1}+0z^{-2}+1z^{-3}$$
$$=z^{2}+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$$

Yakınsama Bölgesi (YB)

$z\neq\infty \;\cap\; z\neq 0$ olduğu yerlerde YB (Yakınsama bölgesi)

Örnek

$x(n) = \delta(n) \quad x(z) = ? \qquad YB = ?$

Çözüm

$x(n) = \left\{ \underset{0}{\underset{\uparrow}{1}} \right\} \qquad x(z) = 1 \qquad YB = \text{Tüm karmaşık düzlem}$

Örnek

$x(n) = \delta(n-2) \qquad x(z) = ? \qquad YB = ?$

Çözüm

$x(n) = \left\{ \underset{2}{\underset{\uparrow}{1}} \right\} \qquad x(z) = 1z^{-2} \qquad YB \quad n \neq 0 \quad 0'dan \text{ farklı tüm karmaşık düzlem}$

Örnek

$x(n) = \delta(n+2) \qquad x(z) = ? \qquad YB = ?$

Çözüm

$x(n) = \left\{ \underset{-2}{\underset{\uparrow}{1}} \right\} \qquad x(z) = 1z^{2} \qquad YB \quad n \neq \infty$

Örnek

$x(n) = \alpha^n u(n) \qquad x(z) = ? \qquad YB = ?$

Çözüm

$$\begin{aligned} x(n) &= \alpha^n u(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n \qquad YB \quad \left|\alpha z^{-1}\right| < 1 \qquad |z| > |\infty| \\ &= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \end{aligned}$$

Örnek

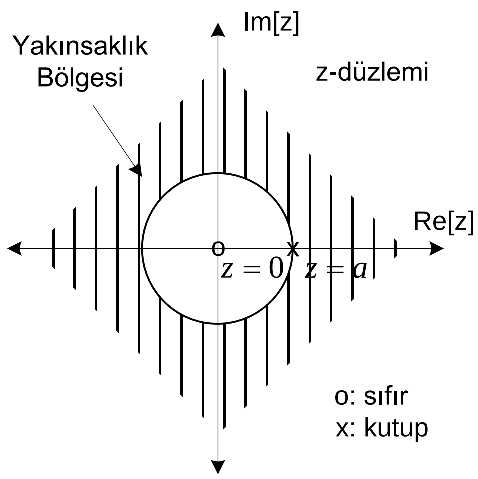
Sağ taraflı üstel $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için z -dönüşümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a.z^{-1})^n$$

Burada $\left|a.z^{-1}\right| < 1$ için seri yakınsak olur ve z -dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$X(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$\left|a.z^{-1}\right| < 1$ koşulundan $|z| > |a|$ yazılabilir. Yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında kalan bölgedir. $X(z)$ nin $z = 0$ da bir sıfırı ve $z = a$ da bir kutbu vardır.



Şekil $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Örnek

Sol taraflı bir diziye örnek olarak aşağıdaki diziyi ele alalım.

$$x(n)=\begin{cases} 0, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} \leq -1 \quad \text{için} \end{cases}$$

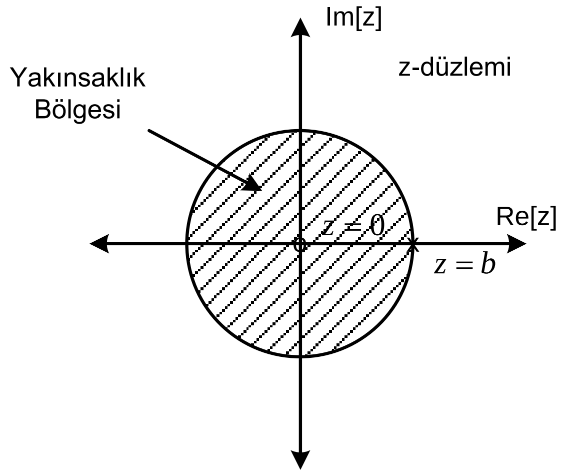
$x(n)$ nin z -dönüşümü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n}.z^n = 1-\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}.z^n = 1-\sum_{n=0}^{\infty}(b^{-1}.z)^n$$

Eğer $\left|b^{-1}.z\right|<1$ veya $\left|z\right|<b$ ise (6.12) deki seri yakınsar.

$$X(z)=1-\frac{1}{1-b^{-1}.z}=\frac{-b^{-1}.z}{1-b^{-1}.z}=\frac{z}{-b+z}=\frac{z}{z-b}$$

Yakınsaklık bölgesi b yarıçaplı dairenin içinde kalan alandır.



Şekil $x(n)=-b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

<u>Açıklama</u> Son iki örnekteki dizilere ait z -dönüşümlerinin incelenmesinden, sadece z -dönüşümünün sıfırları ve kutupları yardımıyla dizileri belirlemenin mümkün olmadığı görülmektedir. Gerçekten $a=b$ olması halinde, sağ ve sol taraflı dizilerin z -dönüşümleri aynı olmaktadır. Farklı olan özellik ise yakınsaklık bölgeleridir. O halde, diziyi belirlerken z -dönüşümünün yanı sıra yakınsaklık bölgesi de verilmelidir. Dizinin sağ veya sol taraflı olarak belirtilmesi durumunda da yakınsaklık bölgesi dolaylı olarak verilmiş olur.

Örnek

İki taraflı diziye örnek olarak

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

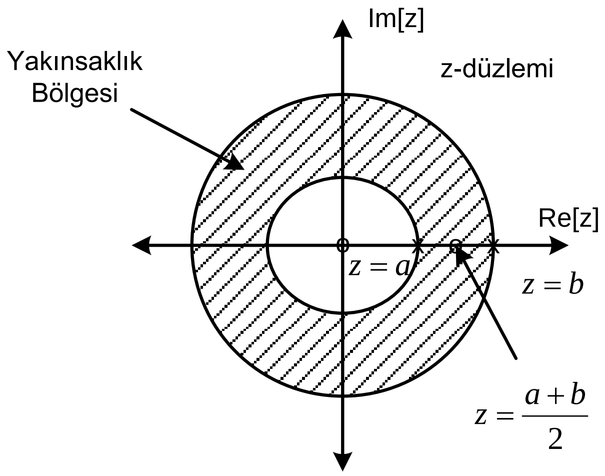
dizisinin z -dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n}$$

$\left|a.z^{-1}\right| < 1$ ve $\left|b^{-1}.z\right| < 1$ koşullarının sağlanması durumunda,

$$X(z) = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a).(z-b)}$$

şeklinde yazılabilir. Yakınsaklık bölgesi şekildeki gibi yarıçapları a ve b olan halka içindedir. Yani, $|a| < |b|$ ise, $|a| < |z| < |b|$ yakınsaklık bölgesidir.



Şekil $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Standart z -Dönüşümleri

Dizi	z -Dönüşümü	Yakınsaklık Aralığı
$\delta(n)$	1	Tüm z
$\delta(n-m)$, $m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert>0$, yani $z=0$ hariç tüm z
$\delta(n+m)$, $m>0$	z^{m}	$\lvert z\rvert<\infty$, yani $z=\infty$ hariç tüm z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$u(n)\cos n\theta$	$\frac{1-z^{-1}\cos\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$u(n)\sin n\theta$	$\frac{z^{-1}\sin\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$u(n)r^n\cos n\theta$	$\frac{1-rz^{-1}\cos\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$
$u(n)r^n\sin n\theta$	$\frac{rz^{-1}\sin\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$