1. Birim darbe cevabı h(n) = u(n) olarak verilen sistemin $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$ işaretine olan cevabı y(n)'yi konvolüsyon ile bulunuz.

$y(n) = x(n) \oplus h(n) = x(n) \oplus u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)u(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k-1) =>$

(toplam işareti içinde ilk yazdıktan sonra u(k) sadece (0, +∞) aralığında 1 değerini alacağı için kalan durumlarda değer 0 olur bu nedenle toplama katılmalarına gerek yoktur sınırları tekrar ayarladığımda u(k) terimi artık sonucu etkilemeyeceği için ifadeyi basitleştirmek amacıyla çıkartıyorum ve x(n – k) ifadesini açıyorum)

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (2^n - 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =>$

$y(n) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases} => y(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n-1)$

(u(n – k – 1) k = n değerinden başlayarak 0 değerini alacağı için toplama işleminin üst sınırı n–1 olarak değişir daha sonra işlemi basitleştirmek için toplam sembolüne bağlı olmayan terimleri sembolün dışına alarak tekrar düzenleniyor toplam kurallarına göre toplam sembolünün sonucunu yazmamın ardından temel işlemleri kullanarak sonuca ulaşılıyor x(n) işareti n ≥ 1 durumunda değer alabildiği için bu durum y(n) içinde geçerli olacaktır)

2. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulun.

$y_t = y_d + y_z =>$ (toplam çözüm doğal ve zorlanmış çözümün toplamı şeklinde bulunur)

$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n)$ ve $y_d(n) = \lambda^n =>$ (bu nedenle öncelikle y'li ifadeleri bir tarafta x'li ifadeleri diğer tarafta toplayarak sistemi düzenlemeliyim ve doğal çözüm için bir varsayılan değer vermeliyim)

$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = 0 => \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 => (\lambda - 1)^2 = 0 =>$ (y(n) için verdiğin varsayılan değeri yerine yazarak bu değerin köklerini bulmalıyım bu nedenle 0'a eşitliyorum)

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 => y_d(n) = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = c_1 1^n + c_2 n 1^n = c_1 + c_2 n$ (bulduğum kökleri yerine yazıyorum burada çakışık kök bulduğum için çakışık olan her bir diğer köke n çarpanı ekledim ve elimdeki 2 kökte birbirine eşit olduğu için direk λ diye belirttim eğer farklı olan bir veya daha fazla kök olsaydı numaralar kullanacaktım)

$n = 0 => y(0) - 2y(-1) + y(-2) = 0 => y(0) - 2.1 + 0 = 0 => y(0) = 2 = c_1 + c_2.0 = c_1 =>$(başlangıç koşullarını kullanabilmek için n yerine 0 değerini veriyorum ve doğal çözüm nedeniyle x(n) yerine 0 değerini veriyorum)

$n = 1 => y(1) - 2y(0) + y(-1) = 0 => y(1) - 2.2 + 1 = 0 => y(1) = 3 = 2 + c_2.1 => c_2 = 1 =>$ (başlangıç koşullarını ve bir önceki işlemlerde bulduğum n = 0 daki değeri kullanabilmek için n yerine 1 değerini veriyorum böylece doğal çözümümdeki bilinmeyenleri bulmuş oluyorum)

$y_d(n) = 2 + n$ (bulduğum bilinmeyenleri yerine yazdığımda doğal çözümün son hali)

$y_z(n) = c_3 + c_4 n + y_ö(n) =>$ (zorlanmış çözüm genel olarak doğal çözüm ile aynı tipte olur sadece fazladan özel çözüm eklenir ve bu özel çözüm x(n) değerine göre verilir)

$y_ö(n) = Kn^2u(n) =>$ (x(n) = u(n) yani Au(n) tipinde ve A = 1 olduğu için özel çözüm Ku(n) tipinde olur ayrıca 1 yani A katsayısı λ köklerinde olduğu için tekrar sayısı kadar n ile çarpılır)

$Kn^2u(n) - 2K(n-1)^2u(n-1) + K(n-2)^2u(n-2) = u(n) => \mathrm{n} \geq 2 =>$ (tüm terimleri kullanabilmek için u değerlerinin 1 olduğu aralığı düşünüyorum)

$Kn^2 - 2K(n-1)^2 + K(n-2)^2 = 1 => Kn^2 - 2Kn^2 + 4Kn - 2K + Kn^2 - 4Kn + 4K = 2K = 1 => K = \frac{1}{2} =>$

$y_ö(n) = \frac{1}{2}n^2u(n) => y_z(n) = c_3 + c_4 n + \frac{1}{2}n^2u(n) =>$

$n = 0 => y(0) - 2y(-1) + y(-2) = x(0) =>$ (bu aşamada başlangıç koşullarının değerini 0 kabul edeceğim için direk çözüme geçiyorum)

$c_3 = 1 =>$ (n yerine 0 değerini yazdığımda x(0) = u(0) = 1 gelir ve y(0) içinde n çarpanı olan tüm terimler yok olur geriye sadece c_3 kalır)

$n = 1 => y(1) - 2y(0) + y(-1) = x(1) =>$ (bu aşamada sadece y(–1) başlangıç koşulu 0 olarak alınır y(0) yerine bir önceki işlemde bulduğumuz değer yazılır)

$y(1) = 1 + 2.1 = 3 => 1 + c_4.1 + \frac{1}{2}1^2 = c_4 + \frac{3}{2} = 3 => c_4 = \frac{3}{2} =>$

$y_z(n) = 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2u(n) =>$

$y_t = 2 + n + 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2u(n) = (3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n)$

3. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = y(n-1) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ başlangıç koşulu ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulun.

$y_t = y_d + y_z$ => (toplam çözüm doğal ve zorlanmış çözümün toplamı şeklinde bulunur)

$y(n) - y(n-1) = x(n)\ ve\ y_d(n) = \lambda^n$ => (bu nedenle öncelikle y'li ifadeleri bir tarafta x'li ifadeleri diğer tarafta toplayarak sistemi düzenlemeliyim ve doğal çözüm için bir varsayılan değer vermeliyim)

$\lambda^n - \lambda^{n-1} = 0 => \lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0 => \lambda - 1 = 0$ => (y(n) için verdiğin varsayılan değeri yerine yazarak bu değerin kökünü bulmalıyım bu nedenle 0'a eşitliyorum)

$\lambda = 1 => y_d(n) = c_1\lambda^n = c_1 1^n = c_1$ (bulduğum kökü yerine yazıyorum)

$n = 0 => y(0) - y(-1) = 0 => y(0) - 1 = 0 => y(0) = 1 = c_1$ =>(başlangıç koşulunu kullanabilmek için n yerine 0 değerini veriyorum ve doğal çözüm nedeniyle x(n) yerine 0 değerini veriyorum)

$y_d(n) = 1$ (bulduğum bilinmeyenleri yerine yazdığımda doğal çözümün son hali)

$y_z(n) = c_2 + y_ö(n)$ => (zorlanmış çözüm genel olarak doğal çözüm ile aynı tipte olur sadece fazladan özel çözüm eklenir ve bu özel çözüm x(n) değerine göre verilir)

$y_ö(n) = Knu(n)$ => (x(n) = u(n) yani Au(n) tipinde ve A = 1 olduğu için özel çözüm Ku(n) tipinde olur ayrıca 1 yani A katsayısı λ köküne eşit olduğu için n ile çarpılır)

$Knu(n) - K(n-1)u(n-1) = u(n) => \mathrm{n} \geq 1$ => (tüm terimleri kullanabilmek için u değerlerinin 1 olduğu aralığı düşünüyorum)

$Kn - K(n-1) = 1 => Kn - Kn + K = K = 1 =>$

$K = 1 =>$

$y_ö(n) = nu(n) => y_z(n) = c_2 + nu(n) =>$

$n = 0 => y(0) - y(-1) = x(0)$ => (bu aşamada başlangıç koşulunun değerini 0 kabul edeceğim için direk çözüme geçiyorum)

$c_2 = 1$ => (n yerine 0 değerini yazdığımda x(0) = u(0) = 1 gelir ve y(0) içinde n ifadesi olmadığı için değeri değişmeden yazılır yani sadece c_3 kalır)

$y_z(n) = 1 + nu(n) =>$

$y_t = 1 + 1 + nu(n) = (2 + n)u(n)$

4. $x(n) = \begin{cases} n & , 0 \leq n \leq N-1 \\ N & , N \leq n \end{cases}$ olarak veriliyorsa $X(z)$' yi bulun.

$x(n) = n\big(u(n) - u(n-N)\big) + Nu(n-N)$ => (verilen aralıkları sağlayan sistem)

$x(n) = nu(n) - nu(n-N) + Nu(n-N)$ => (Z dönüşümü için dağılma yapıyorum)

$x(n) = nu(n) - (n-N)u(n-N) =>$

(Z dönüşümünü basitleştirmek için aynı u terimini kullanan terimleri birleştiriyorum)

$$x_1(n) = u(n) => X_1(Z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} =>$$

$$x_2(n) = nu(n) => X_2(Z) = -z\frac{d}{dZ}X_1(Z) = -z\frac{d}{dZ}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} =>$$

$$x_3(n) = (n-N)u(n-N) => X_3(Z) = z^{-N}X_2(Z) = \frac{z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} =>$$

$$X(Z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z^{-1} - z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2} \qquad |Z| > 1$$

5. $x(n) = (-1)^n(2)^{-n}u(n)$ işaretinin z-dönüşümünü bulun.

$$x(n) = (-1)^n(\frac{1}{2})^n u(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n) => X(Z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |Z| > \left|-\frac{1}{2}\right| => |Z| > \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} x(n) = a^n u(n) => X(Z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}} \quad |Z| > |a| \\ x(n) = -a^n u(-n-1) => X(Z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}} \quad |Z| < |a| \end{array} \right)$$

6. Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + (2)^n u(-n-1)$ işaretine olan cevabı $y(n) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ olduğu veriliyorsa.

a. Sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$' yi yakınsama bölgesi ile bulun.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right)}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-\ 2z^{-1}}} = 5\,\frac{\frac{1-\ \frac{2}{3}z^{-1} - 1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\ \frac{2}{3}z^{-1}\right)}}{\frac{1-\ 2z^{-1} - 1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-\ 2z^{-1})}} = 5\,\frac{\frac{-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}}}{\frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{1-\ 2z^{-1}}} =$$

$$\frac{\frac{1}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\ 2z^{-1}}} = \frac{1-\ 2z^{-1}}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}} \qquad |Z| > \left|\frac{2}{3}\right| => \ |Z| > \frac{2}{3}$$

$$\left(y(n) = x(n) \oplus h(n) \quad => Y(Z) = X(Z).H(Z) => H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}\right)$$

b. Sistemin birim darbe cevabı $h(n)$'yi yazın.

$$H(Z) = \frac{1-\ 2z^{-1}}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}} \ \ ve\ |Z| > \frac{2}{3} => H(Z) = \frac{1}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}} - \frac{2z^{-1}}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}} =>$$

$$h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u(n) - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} u(n-1)\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u(n) - 2.\left(\frac{3}{2}\right) u(n-1)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n (u(n) - 3u(n-1))$$

$$\left(X(Z) = \frac{z^{-k}}{1-az^{-1}} \quad |Z| > |a| => x(n) = \ a^{n-k}u(n-k)\right)$$

c. Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazın.

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1-\ 2z^{-1}}{1-\ \frac{2}{3}z^{-1}} => \ Y(Z)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right) = \ X(Z)(1-\ 2z^{-1}) => \ Y(Z) - \frac{2}{3}z^{-1}Y(Z) = \ X(Z) -\ 2z^{-1}X(Z) =>$$

$$y(n) - \frac{2}{3}y(n-1) = \ x(n) - 2x(n-1)$$

7. Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin $x(n) = u(n)$ işaretine olan cevabı $y(n) = nu(n)$ olduğu veriliyorsa.

a. Sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$' yi yakınsama bölgesi ile bulun.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{-z\frac{d}{dZ}\frac{1}{1-z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{z.z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad |Z| > |1| => \ |Z| > 1$$

$$\left(x(n) = na^n u(n) \quad => X(Z) = \ -z\frac{d}{dZ}\frac{1}{1-az^{-1}}\right)$$

b. Sistemin birim darbe cevabı $h(n)$'yi yazın.

$$H(Z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \ \ ve\ |Z| > 1 => h(n) = \ u(n-1)$$

c. Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazın.

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} => \ Y(Z)(1-z^{-1}) = \ X(Z)z^{-1} => \ Y(Z) -\ z^{-1}Y(Z) = \ X(Z)z^{-1} => y(n) - y(n-1) = x(n-1)$$

8. $y(n) = ay(n-1) + bx(n-1)$ fark denklemine ait sistemin birim darbe cevabının $\sum_n h(n) = 1$ eşitliğini sağlaması için b'nın a cinsinden karşılığını yazınız.

$$y(n) - ay(n-1) = bx(n-1) => Y(Z) - az^{-1}Y(Z) = bz^{-1}X(Z) => Y(Z)(1-az^{-1}) = \ bz^{-1}X(Z) =>$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} => h(n) = b.a^{n-1}u(n-1)$$

9. Giriş işaretinin z dönüşümü $\frac{1}{5} < |z| < 3$ yakınsama bölgesi ile $X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)(1+3z^{-1})}$ ve sistemin transfer fonksiyonu $|z| > \frac{1}{3}$ yakınsama bölgesi ile $H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$ olarak veriliyorsa. Çıkış işaretinin z dönüşümünü $Y(z)$ yakınsama bölgesi ile birlikte belirleyin.

$$Y(z) = X(Z)H(Z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)(1+3z^{-1})} \cdot \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad |Z| > \frac{1}{3}$$