

EXERCISES

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงคำนวณผลบวกต่อไปนี้

a. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$

b. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$

c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

d. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

f. $\sum_{j=1}^n 3^{j+1}$

g. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$

h. $\sum_{i=1}^n 1/i(i+1)$

a.) Solⁿ: จาก $\left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2$
 จะได้ $\left(\frac{999+1}{2}\right)^2 = (500)^2$
 $= 250000$ #

f.) Solⁿ: $\sum_{j=1}^n 3^{j+1}$ เป็นอนุกรม $3^{1+1} + 3^{2+1} + 3^{3+1} \dots 3^{n+1}$
 จะได้ว่า $a_1 = 9, a_n = 3^{n+1}, r = 3, i = j+1$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} ; r \neq 1$$

$$= \frac{9 - (3^{n+1})(3)}{1 - 3}$$

$$= \frac{9 - 3^{n+2}}{-2} = \frac{3^{n+2} - 9}{2} \quad \#$$

b.) Solⁿ: $a_n = 1024, a_1 = 2, r = 2$
 หา n จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$
 $1024 = 2(2)^{n-1}$
 $2^{10} = 2^n$
 $\therefore n = 10$
 c.) Solⁿ: $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = (n+1) - 3 + 1$
 $= n - 1$ #

g.) Solⁿ: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j$
 $= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$
 $= \frac{n^2(n+1)^2}{2} \quad \#$

d.) Solⁿ: $\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(n+1+3)(n+1-3+1)}{2}$
 $= \frac{(n+4)(n-1)}{2} \quad \#$

e.) Solⁿ: $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$
 $= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$
 $= \frac{n(n^2-1)}{3} \quad \#$

h.) Solⁿ: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$
 $= \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$
 $= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \#$

2. จงหา ORDER OF GROWTH ของผลบวกต่อไปนี้

a. $\sum_{i=0}^{n-1} (i^2+1)^2$

b. $\sum_{i=2}^{n-1} \lg i^2$

c. $\sum_{i=1}^n (i+1)2^{i-1}$

d. $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$

$$\begin{aligned}
 a.) \text{ Soln: } &= \sum_{i=0}^{n-1} (i^2+1)^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (i^4 + 2i^2 + 1) \\
 &= \Theta(n^5) + \Theta(n^3) + \Theta(n) \\
 &\in \Theta(n^5) \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b.) \text{ Soln: } &= \sum_{i=2}^{n-1} \lg i^2 \\
 &= \sum_{i=2}^{n-1} 2 \lg i \\
 &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \lg i - 2 \lg n \\
 &= 2 \Theta(n \lg n) - \Theta(\lg n) \\
 &\in \Theta(n \lg n) \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c.) \text{ Soln: } &\sum_{i=1}^n (i+1) 2^{i-1} = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} i + \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = \frac{2^n}{2} \\
 &= \frac{(n-1)2^{n+1} + 2}{2} + \frac{2^{n+1} - 1}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= n \cdot 2^n \in \Theta(n \cdot 2^n) \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d.) \text{ Soln } &\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i^2 + \frac{(i-1)i}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)(n)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} n(n-1)(2n-1-1) \\
 &= \frac{1}{2} n(n-1)^2 \\
 &\in \Theta(n^3) \#
 \end{aligned}$$

3. พิจารณาอัลกอริทึมต่อไปนี้

ALGORITHM *Mystery(n)*

//Input: A nonnegative integer n

$S \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$S \leftarrow S + i * i$

return S

- อัลกอริทึมนี้คำนวณค่าอะไร $S(n) = \sum_{i=1}^n i^2$
- Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานคืออะไร $n(n+1)(2n+1)/6$
- Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานที่ใช้มีจำนวนกี่ครั้ง $\sum_{i=1}^n 2 = 2n$
- อะไรคือประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพ Efficiency Class ของอัลกอริทึมนี้ $\Theta(n) : linear$
- แนะนำวิธีพัฒนาอัลกอริทึมนี้ให้ดีขึ้น และระบุประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพนั้น

Algorithm : Modified - Mystery (n)

Input : A nonnegative integer n

$S \leftarrow (n * (n+1) * (2n+1)) / 6$

return S

||

$\in \Theta(1)$ Constant

4. พิจารณาอัลกอริทึมต่อไปนี้

ALGORITHM *Secret*($A[0..n-1]$)
 //Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers
 $minval \leftarrow A[0]; maxval \leftarrow A[0]$
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
 if $A[i] < minval$
 $minval \leftarrow A[i]$
 if $A[i] > maxval$
 $maxval \leftarrow A[i]$
return $maxval - minval$

- อัลกอริทึมนี้คำนวณค่าอะไร ผลต่าง ของ ค่า max และ min ใน อาร์เรย์
- Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานคืออะไร การเปรียบเทียบค่า และการลบ
- Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานที่ใช้มีจำนวนกี่ครั้ง $\sum_{i=1}^{n-1} 2 = 2(n-1)$ ครั้ง
- อะไรคือประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพ Efficiency Class ของอัลกอริทึมนี้ $\Theta(n)$: Linear
- แนะนำวิธีพัฒนาอัลกอริทึมนี้ให้ดีขึ้น และระบุประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพนั้น

Algorithm : Modified *Secret* ($A[0..n-1]$)

Input : An array $A[0..n-1]$ of n real numbers

Output : Difference of max and min value in array

$max \leftarrow A[0]$

$min \leftarrow A[1]$

$i \leftarrow 1$

while $i < n-1$ **do**

if $A[i] < A[i+1]$ **then**

if $max < A[i+1]$ **then**

$max \leftarrow A[i+1]$

if $min > A[i]$ **then**

$min \leftarrow A[i]$

else

if $max < A[i+1]$ **then**

$max \leftarrow A[i]$

if $min > A[i]$ **then**

$min \leftarrow A[i+1]$

$i \leftarrow i+2$

4 **return** $max - min$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} 3 = \frac{3}{2} (n-1) < 2(n-1)$$

$\in \Theta(n)$ Constant

5. พิจารณาอัลกอริทึมต่อไปนี้

ALGORITHM *Enigma*($A[0..n-1, 0..n-1]$)

//Input: A matrix $A[0..n-1, 0..n-1]$ of real numbers

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**

for $j \leftarrow i+1$ **to** $n-1$ **do**

if $A[i, j] \neq A[j, i]$

return false

return true

- อัลกอริทึมนี้คำนวณค่าอะไร เช็ค ความ สมมาตร 700 เมทริกซ์
 - Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานคืออะไร การ เปรียบเทียบ
 - Basic Operation ตัวปฏิบัติการพื้นฐานที่ใช้มีจำนวนกี่ครั้ง
$$\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = (n-1)^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$
 - อะไรคือประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพ Efficiency Class ของอัลกอริทึมนี้ $\Theta(n^2)$: exponential
 - แนะนำวิธีพัฒนาอัลกอริทึมนี้ให้ดีขึ้น และระบุประเภทชั้นของการวัดประสิทธิภาพนั้น
- # อัลกอริทึมนี้ ดีสุดแล้ว