Лабораторная работа №6

Математическое моделирование

Ильинский Арсений Александрович

Содержание

List of Figures

List of Tables

Цель работы

Рассмотреть простейшую **модель эпидемии**. Построить модель и визуализировать график изменения числа особей.

Задание

Вариант 46

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $(N = 6730)$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 46$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 8$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$.
2. если $I(0) > I^*$.

Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы:

- **Первая группа** — это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$.
- **Вторая группа** — это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$.
- **Третья группа** — это здоровые особи с иммунитетом к болезни, обозначим их $R(t)$.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{ds}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(t) > I^* \\ 0, \text{ если } I(t) \leq I^* \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} -\alpha S - \beta I, \text{ если } I(t) > I^* \\ -\beta I, \text{ если } I(t) \leq I^* \end{cases} \qquad (2)$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \qquad (3)$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно.

Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:

- $I(0) \leq I^*$.
- $I(0) > I^*$.

Выполнение лабораторной работы

1. Моделирование и построение графиков

1.1. Случай: больные особи изолированы и не заражают здоровых

1. Условие:

   $I(0) \leq I^*$

   В этом случае значения $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ изменяются по следующим законам:

   - Из (1):

     $\frac{dS}{dt} = 0$

   - Из (2):

     $\frac{dI}{dt} = -\beta * I$

   - Из (3):

     $\frac{dR}{dt} = \beta * I$

2. Код программы с комментариями:

   ```
   // Задача об эпидемии
   // 1-ый случай: все больные изолированы и не заражают
                 // здоровых

   model lab6_1
   ```

```
  constant Real a = 0.01; // коэффициент заболеваемости
  constant Real b = 0.02; // коэффициент выздоровления
  constant Real N = 6730; // количество особей

  Real S; // 1ая группа - восприимчивые к болезни, но
          // пока здоровые особи
  Real I; // 2ая группа - число инфицированных особей,
          // которые также при этом являются
          // распространителями инфекции
  Real R; // 3ая группа - это здоровые особи с иммунитетом
          // к болезни

initial equation
  S = N-I-R; // начальное значение S(0)
  I = 46; // начальное значение I(0)
  R = 8; // начальное значение R(0)

equation
  der(S)=0; // скорость изменения числа S(t)
  der(I)=-b*I; // скорость изменения числа I(t)
  der(R)=b*I; // скорость изменения числа R(t)

end lab6_1;
```

3. График изменения числа людей в каждой из трех групп (рис. [-@fig:001]):

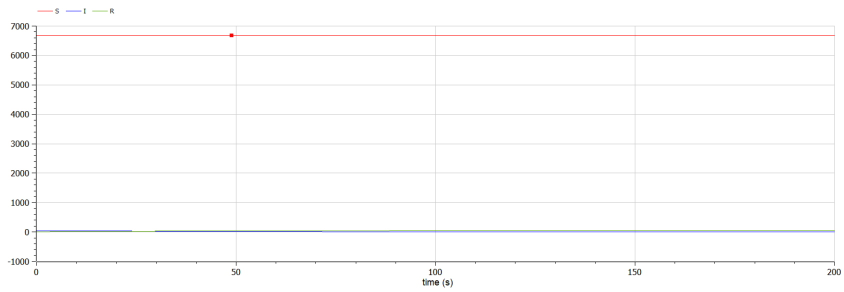

Figure 1: Рис. 1: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп

Пояснение: динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) \leq I^*$, с начальными условиями $S(0) = N - I - R = 6676$, $I(0) = 46$, $R(0) = 8$ и коэффициентами $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, — по горизонтальной оси значения t (времени), по вертикальной $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, где:

- красный — первая группа $S(t)$, т.е. восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи.
- синий — вторая группа $I(t)$, т.е. инфицированные особи, которые также при этом являются распространителями инфекции.
- зеленый — третья группа $R(t)$, т.е. здоровые особи с иммунитетом к болезни.

1.2. Случай: инфицированные способны заражать восприимчивых к болезни особей

1. Условие:

   $I(0) > I^*$

   В этом случае значения $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ изменяются по следующим законам:

   - Из (1):

     $\frac{dS}{dt} = -\alpha * S$

- Из (2):

  $\frac{dI}{dt} = \alpha * S - \beta * I$

- Из (3):

  $\frac{dR}{dt} = \beta * I$

2. Код программы с комментариями:

```
// Задача об эпидемии
// 2-ой случай: инфицирование способны заражать восприимчивых
              //к болезни особей

model lab6_2
  constant Real a = 0.01; // коэффициент заболеваемости
  constant Real b = 0.02; // коэффициент выздоровления
  constant Real N = 6730; // количество особей

  Real S; // 1ая группа - восприимчивые к болезни, но
          // пока здоровые особи
  Real I; // 2ая группа - число инфицированных особей,
          // которые также при этом являются
          // распространителями инфекции
  Real R; // 3ая группа - это здоровые особи с иммунитетом
          // к болезни

initial equation
  S = N-I-R; // начальное значение S(0)
  I = 46; // начальное значение I(0)
  R = 8; // начальное значение R(0)

equation
```

```
    der(S)=-a*S; // скорость изменения числа S(t)
    der(I)=a*S-b*I; // скорость изменения числа I(t)
    der(R)=b*I; // скорость изменения числа R(t)

  end lab6_2;
```

3. График изменения числа людей в каждой из трех групп (рис. [-@fig:002]):

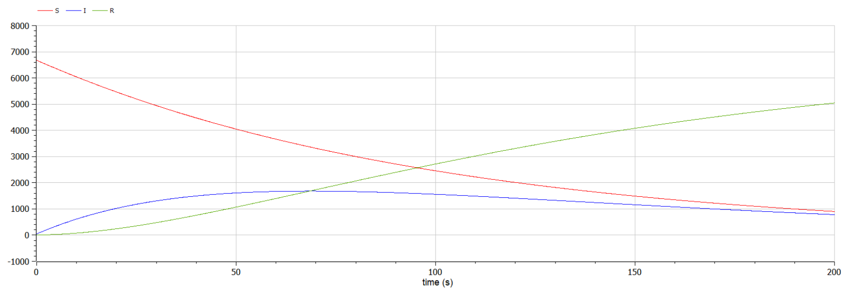

Figure 2: Рис. 2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп

Пояснение: динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) > I^*$, с начальными условиями $S(0) = N - I - R = 6676$, $I(0) = 46$, $R(0) = 8$ и коэффициентами $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, — по горизонтальной оси значения t (времени), по вертикальной $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, где:

- красный — первая группа $S(t)$, т.е. восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи.
- синий — вторая группа $I(t)$, т.е. инфицированные особи, которые также при этом являются распространителями инфекции.
- зеленый — третья группа $R(t)$, т.е. здоровые особи с иммунитетом к болезни.

Выводы

Благодаря данной лабораторной работе познакомился с простейшей **моделью эпидемии**, а именно научился:

- строить модель.
- строить график изменения числа особей.

Список литературы

- Кулябов Д.С. *Лабораторная работа №6*
- Кулябов Д.С. *Задания к лабораторной работе №6 (по вариантам)*