

# **Лабораторная работа №7**

**Математическое моделирование**

Ильинский Арсений Александрович

# Содержание

Цель работы	5
Задание	6
Теоретическое введение	7
Выполнение лабораторной работы	10
1. Моделирование и построение графиков . . . . .	10
1.1. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ . . . . .	10
1.2. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ . . . . .	12
1.3. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \approx \alpha_2(t)$	13
1.4. Сравнение эффективности платной рекламы и сарафанного радио . . . . .	15
Выводы	18
Контрольные вопросы	19
Список литературы	22

## Список иллюстраций

1	Рис. 1: График решения уравнения модели Мальтуса . . . . .	9
2	Рис. 2: График логистической кривой . . . . .	9
1	Рис. 3: График распространения информации о товаре . . . . .	11
2	Рис. 4: График распространения информации о товаре . . . . .	13
3	Рис. 5: График распространения информации о товаре . . . . .	15
4	Рис. 6: Сравнение эффективности . . . . .	17
1	Рис. 7: График решения уравнения модели Мальтуса . . . . .	20
2	Рис. 8: График логистической кривой . . . . .	21

## **Список таблиц**

## Цель работы

Рассмотреть простейшую модель «**эффективность рекламы**». Построить модель и визуализировать и анализировать графики эффективности распространения рекламы для трех случаев.

# Задание

## Вариант 46

29 января в городе открылся новый салон красоты. Полагаем, что на момент открытия о салоне знали  $N_0$  потенциальных клиентов. По маркетинговым исследованиям известно, что в районе проживают  $N$  потенциальных клиентов салона. Поэтому после открытия салона руководитель запускает активную рекламную компанию. После этого скорость изменения числа знающих о салоне пропорциональна как числу знающих о нем, так и числу не знающих о нем.

Постройте график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

1.  $\frac{dn}{dt} = (0.444 + 0.000055n(t))(N - n(t))$
2.  $\frac{dn}{dt} = (0.000065 + 0.433n(t))(N - n(t))$
3.  $\frac{dn}{dt} = (0.5\cos(12t) + 0.3\cos(13t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории  $N = 1950$ , в начальный момент о товаре знает 25 человек. Для случая 2 определите в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

# Теоретическое введение

Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар станет бесполезным.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени  $t$  из числа потенциальных покупателей  $N$  знает лишь  $n$  покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих.

Модель рекламной кампании описывается следующими величинами, считаем, что:

- $\frac{dn}{dt}$  — скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить.
- $t$  — время, прошедшее с начала рекламной кампании.
- $n(t)$  — число уже информированных клиентов.

Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, это описывается следующим образом:

$\alpha_1(t)(N - n(t))$ , где:

- $N$  — общее число потенциальных платежеспособных покупателей.
- $\alpha_1(t) > 0$  — характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени).

Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной:

$\alpha_2(t)n(t)(N - n(t))$  — эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре.

Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$\frac{dn}{dt} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t) * n(t))(N - n(t)) \quad (1)$$

- При  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$  получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. [-@fig:001]):



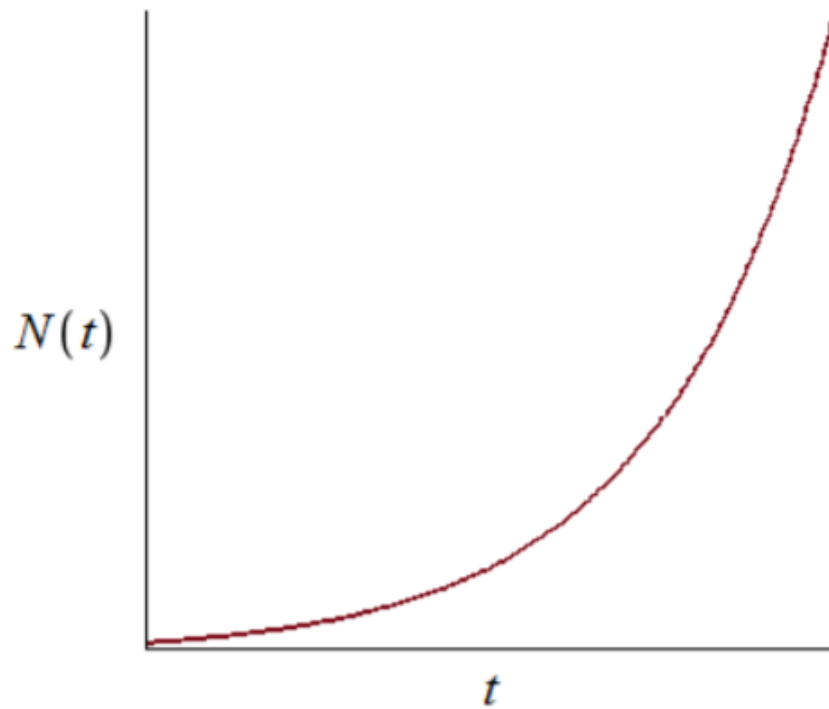


Рис. 1: Рис. 1: График решения уравнения модели Мальтуса

- В обратном случае, при  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$  получаем уравнение логистической кривой (рис. [-@fig:002]):

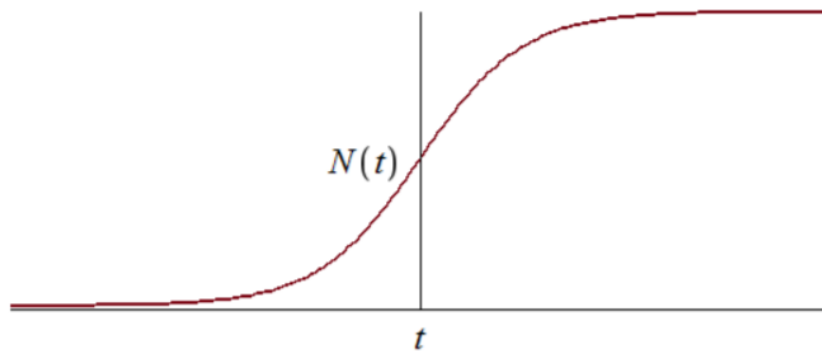


Рис. 2: Рис. 2: График логистической кривой

# Выполнение лабораторной работы

## 1. Моделирование и построение графиков

### 1.1. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$

1. Модель:

$$\frac{dn}{dt} = (0.444 + 0.000055n(t))(N - n(t)), \text{ где:}$$

- $\alpha_1(t) = 0.444$
- $\alpha_2(t) = 0.000055$

2. Код программы с комментариями:

```
// Модель эффективность рекламы
// случай: эффективность рекламы при a1>>a2

model lab7_1
    constant Real N = 1950; // общее число потенциальных
                             // платежеспособных покупателей

    Real a1; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от затрат
    Real a2; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от сарафанного радио
    Real n; // число информированных клиентов
```

```
initial equation
```

```
a1 = 0.444; // начальное значение a1(0)  
a2 = 0.000055; // начальное значение a2(0)  
n = 25; // начальное значение n(0)
```

```
equation
```

```
a1 = 0.444; // задание функции a1(t)  
a2 = 0.000055; // задание функции a2(t)  
der(n) = (a1+a2*n)*(N-n); // скорость изменения со временем  
// числа потребителей, узнавших о  
// товаре и готовых его купить
```

```
end lab7_1;
```

### 3. График распространения рекламы (рис. [-@fig:003]):

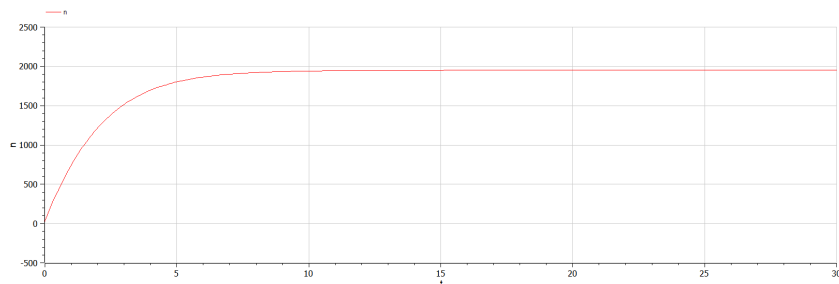


Рис. 1: Рис. 3: График распространения информации о товаре

*Пояснение:* график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио, — по горизонтальной оси значения  $t$  (времени), по вертикальной  $n(t)$  (число информированных клиентов), с коэффициентами интенсивности рекламной компании  $\alpha_1(t) = 0.444$  и  $\alpha_2(t) = 0.000055$ .

## 1.2. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$

1. Модель:

$$\frac{dn}{dt} = (0.000065 + 0.433n(t))(N - n(t)), \text{ где:}$$

- $\alpha_1(t) = 0.000065$
- $\alpha_2(t) = 0.433$

2. Код программы с комментариями:

```
// Модель эффективность рекламы
// случай: эффективность рекламы при a1<<a2

model lab7_2
    constant Real N = 1950; // общее число потенциальных
                             // платежеспособных покупателей

    Real a1; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от затрат
    Real a2; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от сарафанного радио
    Real n; // число информированных клиентов

    initial equation
        a1 = 0.000065; // начальное значение a1(0)
        a2 = 0.433; // начальное значение a2(0)
        n = 25; // начальное значение n(0)

    equation
        a1 = 0.000065; // задание функции a1(t)
        a2 = 0.433; // задание функции a2(t)
        der(n) = (a1+a2*n)*(N-n); // скорость изменения со временем
```

```
// числа потребителей, узнавших о
// товаре и готовых его купить
```

```
end lab7_2;
```

### 3. График распространения рекламы (рис. [-@fig:004]):

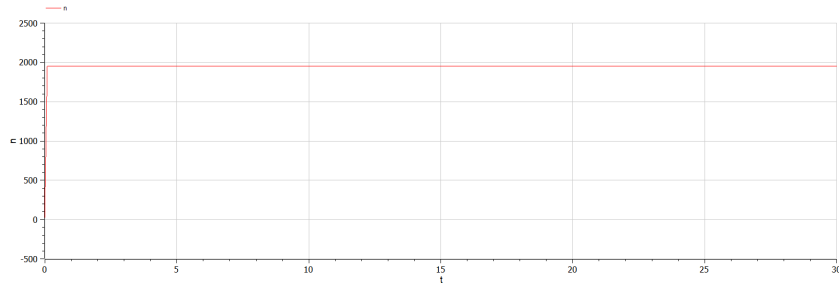


Рис. 2: Рис. 4: График распространения информации о товаре

*Пояснение:* график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио, — по горизонтальной оси значения  $t$  (времени), по вертикальной  $n(t)$  (число информированных клиентов), с коэффициентами интенсивности рекламной компании  $\alpha_1(t) = 0.000065$  и  $\alpha_2(t) = 0.433$ .

### 4. Поиск момента времени, в который скорость распространения рекламы будет максимальна:

*Ответ:* в момент времени  $t = 0.1$  скорость распространения рекламы  $n(t)$  будет иметь максимальное значение, т.е.  $n(0.1) = N = 1950$  (где  $N$  — общее число потенциальных платежеспособных покупателей).

## 1.3. Случай: эффективность рекламной компании при $\alpha_1(t) \approx \alpha_2(t)$

### 1. Модель:

$$\frac{dn}{dt} = (0.5\cos(12t) + 0.3\cos(13t)n(t))(N - n(t)), \text{ где:}$$

- $\alpha_1(t) = 0.5\cos(12t)$
- $\alpha_2(t) = 0.3\cos(13t)$

2. Код программы с комментариями:

```
// Модель эффективность рекламы
// случай: эффективность рекламы при  $a_1 \approx a_2$ 

model lab7_3
    constant Real N = 1950; // общее число потенциальных
                            // платежеспособных покупателей

    Real a1; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от затрат
    Real a2; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от сарафанного радио
    Real n; // число информированных клиентов

    initial equation
        a1 = 0.5; // начальное значение  $a_1(0)$ 
        a2 = 0.3; // начальное значение  $a_2(0)$ 
        n = 25; // начальное значение  $n(0)$ 

    equation
        a1 = 0.5*cos(12*time); // задание функции  $a_1(t)$ 
        a2 = 0.3*cos(13*time); // задание функции  $a_2(t)$ 
        der(n) = (a1+a2*n)*(N-n); // скорость изменения со временем
                                   // числа потребителей, узнавших о
                                   // товаре и готовых его купить

end lab7_3;
```

### 3. График распространения рекламы (рис. [-@fig:005]):

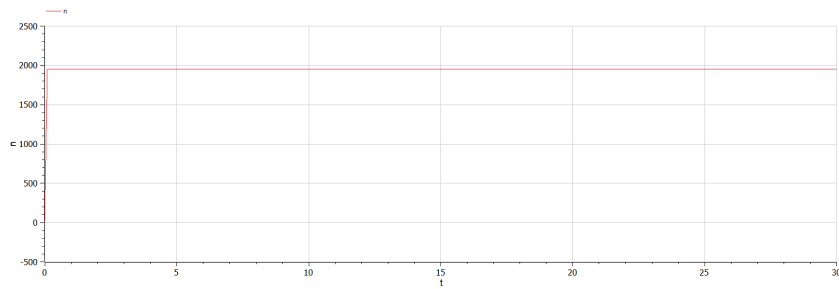


Рис. 3: Рис. 5: График распространения информации о товаре

*Пояснение:* график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио, — по горизонтальной оси значения  $t$  (времени), по вертикальной  $n(t)$  (число информированных клиентов), с коэффициентами интенсивности рекламной компании  $\alpha_1(t) = 0.5\cos(12t)$  и  $\alpha_2(t) = 0.3\cos(13t)$ .

## 1.4. Сравнение эффективности платной рекламы и сарафанного радио

### 1. Модель:

- эффективность платной рекламы:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_1(t)(N - n(t))$$

- эффективность сарафанного радио:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_2(t)(N - n(t))$$

### 2. Код программы с комментариями:

```
// Модель эффективность рекламы
// сравнение эффективности платной рекламы и
// сарафанного радио
```

```

model lab7_4
    constant Real N = 1950; // общее число потенциальных
                            // платежеспособных покупателей

    Real a1; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от затрат
    Real a2; // интенсивность рекламной компании, зависящая
              // от сарафанного радио
    Real n; // число информированных клиентов
    Real k; // число информированных клиентов

    initial equation
        a1 = 0.1; // начальное значение a1(0)
        a2 = 0.1; // начальное значение a2(0)
        n = 25; // начальное значение n(0)
        k = 25; // начальное значение k(0)

    equation
        a1 = 0.1; // задание функции a1(t)
        a2 = 0.1; // задание функции a2(t)
        der(n) = a1*(N-n); // эффективность платной рекламы
        der(k) = a2*k*(N-k); // эффективность сарафанного радио

end lab7_4;

```

3. График распространения рекламы (рис. [-@fig:006]):



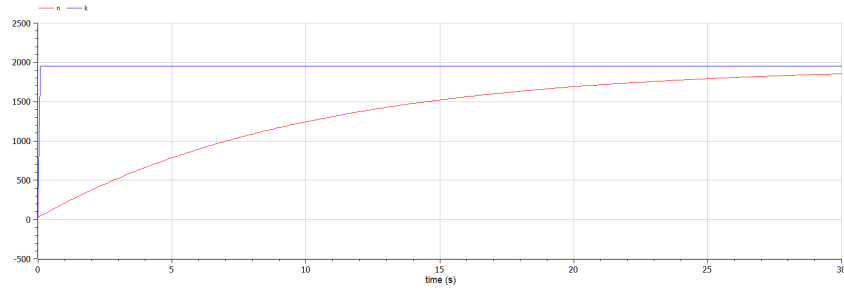


Рис. 4: Рис. 6: Сравнение эффективности

*Пояснение:* таким образом, мы можем наблюдать, что эффективность сарафанного радио выше (т.е. максимальное значение  $N$  (общее число потенциальных платежеспособных покупателей) достигается быстрее), чем эффективность платной рекламы, — по горизонтальной оси значения  $t$  (времени), по вертикальной  $n(t)$  (число информированных клиентов с учетом вклада только платной рекламы) и  $k(t)$  (число информированных клиентов с учетом, что информация о товаре распространяется только путем «сарафанного радио»), с коэффициентами интенсивности рекламной компании  $\alpha_1(t) = 0.1$  и  $\alpha_2(t) = 0.1$ , где:

- красный — значения  $n(t)$ .
- синий — значения  $k(t)$ .

## Выводы

Благодаря данной лабораторной работе познакомился с простейшей **модель «эффективность рекламы»**, а именно научился:

- строить модель.
- строить график распространения рекламы.

И как видно по графикам трех случаев и сравнения эффективности, в данной модели сарафанное радио работает намного лучше, т.к. намного больше людей узнает о продукте именно благодаря ему.

# Контрольные вопросы

1. Записать модель Мальтуса (дать пояснение, где используется данная модель):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN, \text{ где:}$$

- $N$  — исходная численность населения.
- $r$  — коэффициент пропорциональности, для которого  $r = b - d$ , где:
  - $b$  — коэффициент рождаемости.
  - $d$  — коэффициент смертности.
- $t$  — время.

Модель используется в экологии для расчета изменения популяции особей животных.

2. Записать уравнение логистической кривой (дать пояснение, что описывает данное уравнение):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP(1 - \frac{P}{K}), \text{ где:}$$

- $r$  — характеризует скорость роста (размножения).
- $K$  — поддерживающая ёмкость среды (то есть, максимально возможная численность популяции).

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях.

- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

3. На что влияет коэффициент  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  в модели распространения рекламы:

- $\alpha_1(t)$  — интенсивность рекламной кампании, зависящая от затрат.
- $\alpha_2(t)$  — интенсивность рекламной кампании, зависящая от сарафанного радио.

4. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ :

При  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$  получается модель типа модели Мальтуса (рис. -@fig:007):

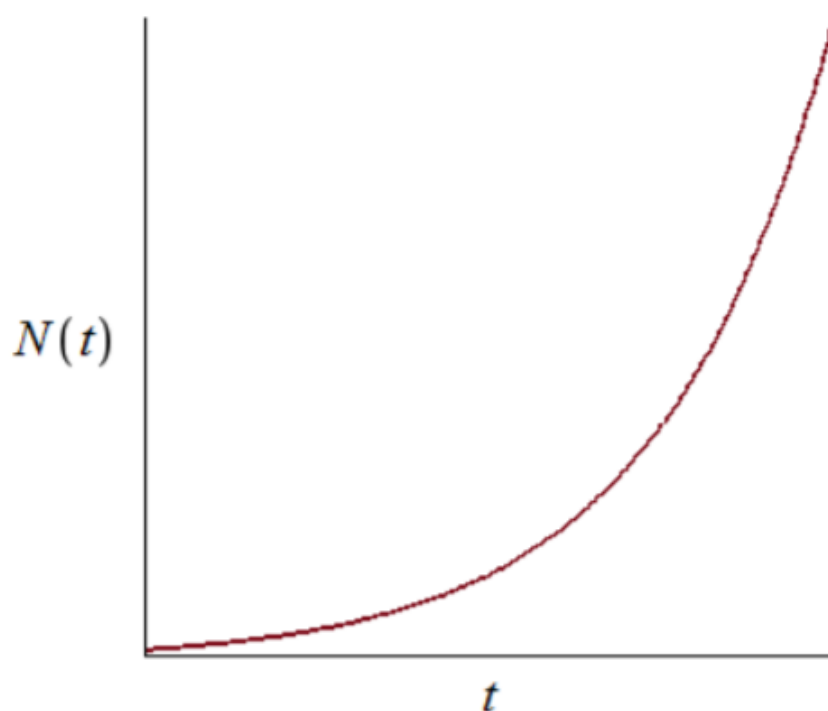


Рис. 1: Рис. 7: График решения уравнения модели Мальтуса

5. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ :

При  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$  получаем уравнение логистической кривой (рис. -@fig:008):

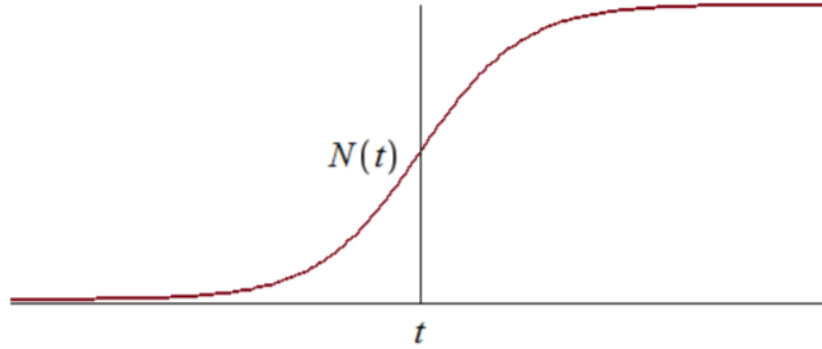


Рис. 2: Рис. 8: График логистической кривой

## Список литературы

- Кулябов Д.С. *Лабораторная работа №7*
- Кулябов Д.С. *Задания к лабораторной работе №7 ( по вариантам )*