# シミュレーション勉強会

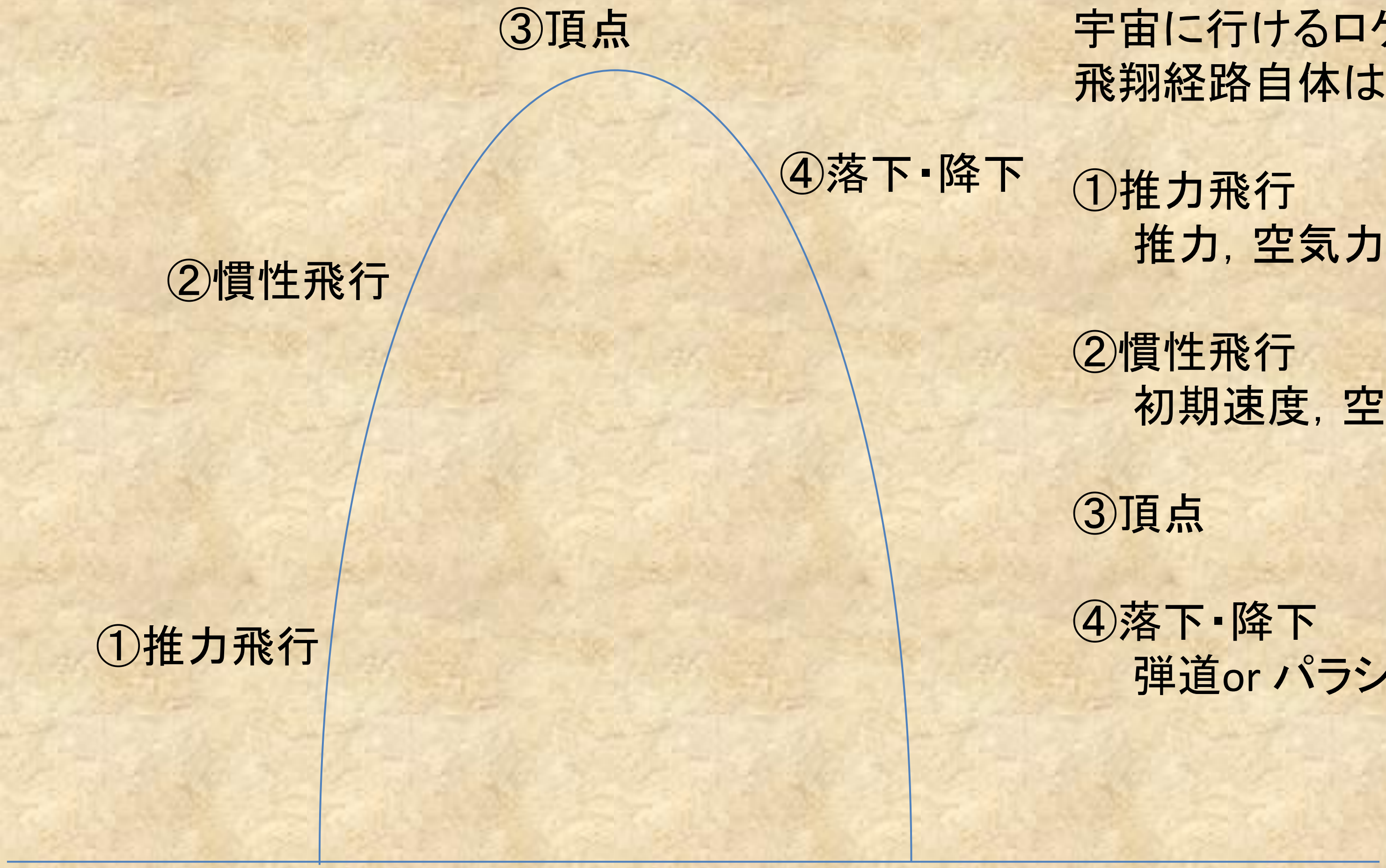
2013/12/23

東海大学学生ロケットプロジェクト　小黒純平

# 本日の全容

1. 一般的なロケットの運動方程式
2. 座標系
3. 計算の前提
4. 力（並進）運動方程式
    - 機体に加わる力（推力，空気力，重力）
    - 積分について
5. 回転の運動方程式
    - モーメント（空力，燃焼，減衰モーメント）
    - オイラーパラメータ
    - クォータニオンの微分方程式

# 1．ロケット運動方程式（飛翔経路）




宇宙に行けるロケットではないので
飛翔経路自体は難しくない．

①推力飛行
　推力，空気力と重力

②慣性飛行
　初期速度，空気力と重力

③頂点

④落下・降下
　弾道or パラシュートor減速機構

# 1．ロケット運動方程式その1

ロケット上昇の運動方程式
（ガス相対排出速度を**u**とおく．）

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}+\mathbf{u}\frac{dm}{dt}$$

直線運動とし，$v$方向を正とすると$-u$となり

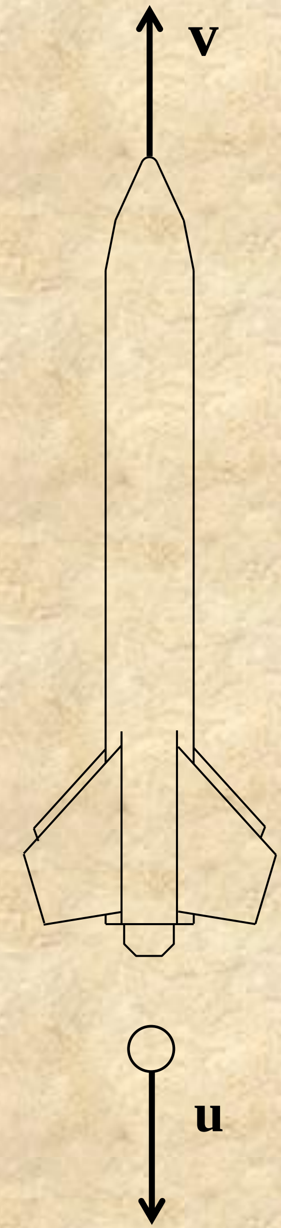
$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt}$$

$$dv=-u\frac{1}{m}dm$$

初期条件$v=v_0, m=m_0$として積分すると

$$v-v_0=-u\ln\frac{m}{m_0}$$

この式をツィオルコフスキーの式という．




出典:ロケット工学

# 1. ロケット運動方程式その2

$$\frac{du}{dt} = \frac{F}{m}\cos(\psi - \theta) - \frac{C_D}{2m}\rho u^2 A - g\sin\theta \qquad (4\text{–}15)$$

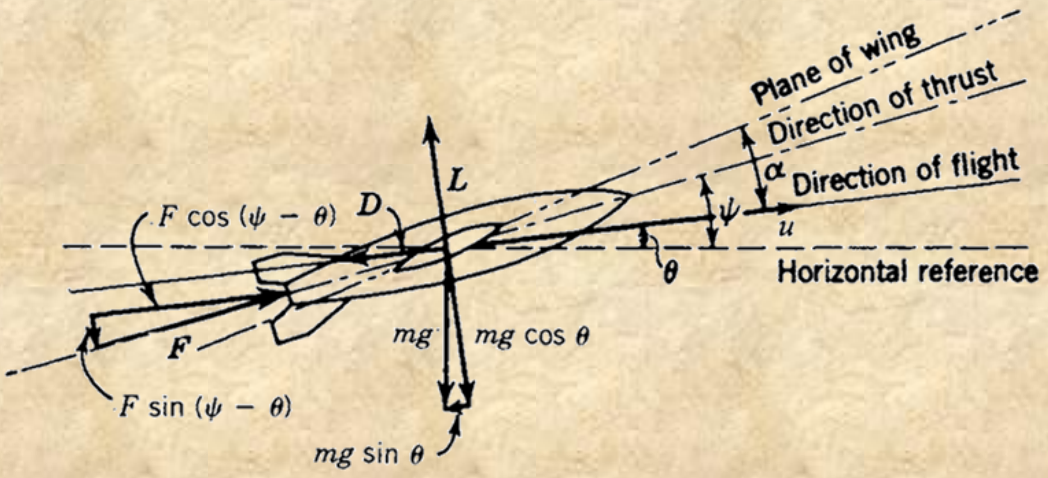
$$u\frac{d\theta}{dt} = \frac{F}{m}\sin(\psi - \theta) + \frac{C_L}{2m}\rho u^2 A - g\cos\theta \qquad (4\text{–}16)$$

$$F = c\dot{m} = cm_p/t_p \qquad (4\text{–}9)$$

$$L = C_L \tfrac{1}{2}\rho A u^2 \qquad (4\text{–}10)$$

$$D = C_D \tfrac{1}{2}\rho A u^2 \qquad (4\text{–}11)$$

$$g = g_0(R_0/R)^2 = g_0[R_0/(R_0 + h)]^2 \qquad (4\text{–}12)$$




| | | |
|---|---|---|
| $u$ : 速度 | $c$ : 有効排気速度 | $\theta$ : 飛翔経路角 |
| T：推力 | $\dot{m}$ ：質量流量 | $\psi$ : 推力軸 |
| L：揚力 | $m_p$: 推進剤質量 | $\alpha$ ：迎角 |
| D：抗力 | $t_p$ : 燃焼時間 | |
| $mg$ ：重力 | $\alpha$ ：迎角 | |

$R_0$ : 地球有効半径 6378.388 km
$g$ ：重力
$g0$: 半径$R_0$のときの重力加速度
$h$ ：高度

**FIGURE 4–4.** Two-dimensional free-body force diagram for flying vehicle with wings and fins.

出典:Rocket Propulsion Elements

# 1. 一般的なロケットの運動方程式

並進の運動方程式

（$m$ : 質量，$\mathbf{a}$ : 加速度ベクトル，$\mathbf{F}$ : 外力ベクトル）

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} - \mathbf{D} - m\mathbf{g}$$

(外力＝推力－空気力－重力）

回転の運動方程式

（$\mathbf{L}$ : 剛体の角運動力ベクトル，$\mathbf{M}$は質量中心周りに働く力のモーメント）

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

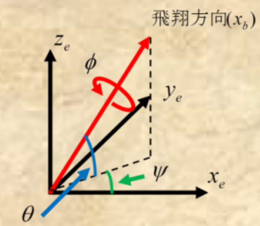
$$M = M_a + M_{ad} + M_j + M_T$$

全体のモーメント＝空力的モーメント＋空力減衰モーメント

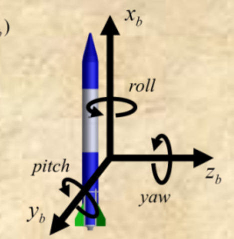
＋ジェットダンピングモーメント

＋推力軸ミスアライメント等のモーメント

# 2，座標系定義



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

座標系といってもたくさんある.

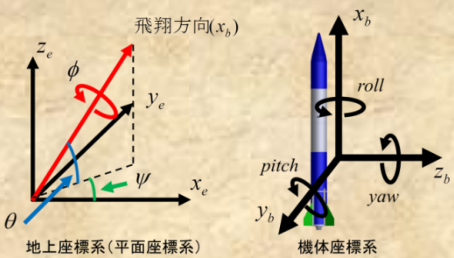
宇宙工学だと以下が一般的である.

- 局地座標系
  - 方位仰角座標系
  - 飛翔体座標系（飛翔体に固定された）
- 地心座標系
  - 赤経・赤緯座標系（他にも銀経銀緯座標系）
  - 緯度経度座標系　（WGS84準拠楕円体）
  - 軌道面座標系

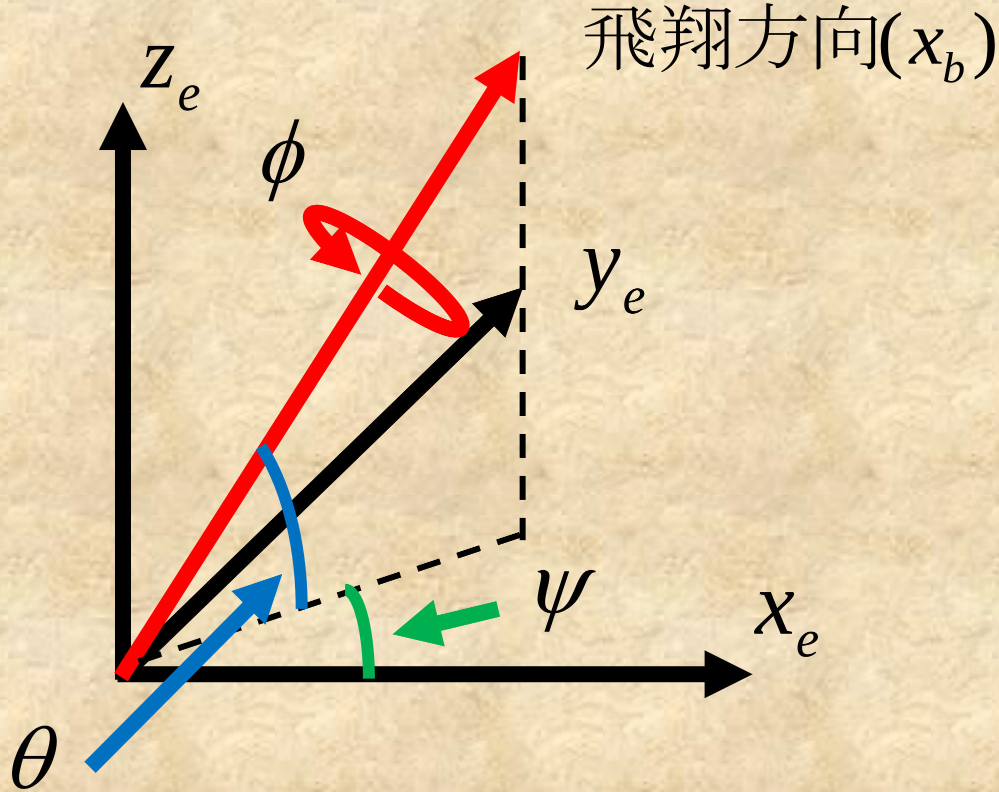
https://www.youtube.com/watch?v=Ni6G3SfJq4k

JAXAのGoogleEarth表示で機体姿勢を表しているのは
ENU（East,North,UP)座標系，東方向をX軸，北方向にY軸，天頂方向にZ軸の正をとる.

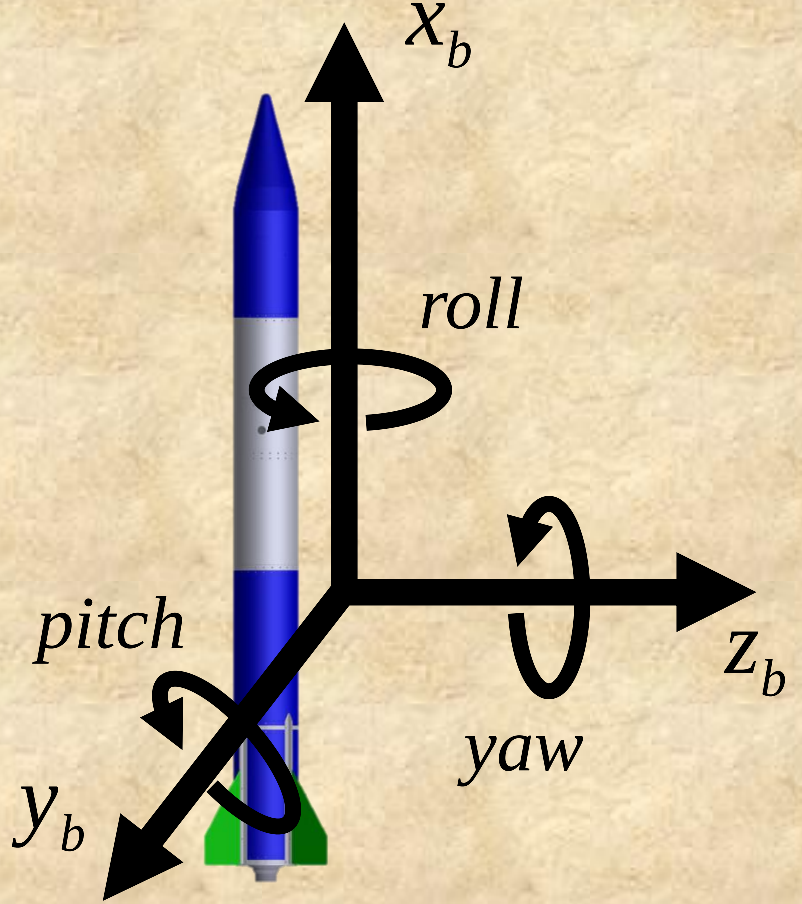
# 2，座標系定義




地上座標系(xe,ye,ze)と機体座標系(xb,yb,zb)を定義する.



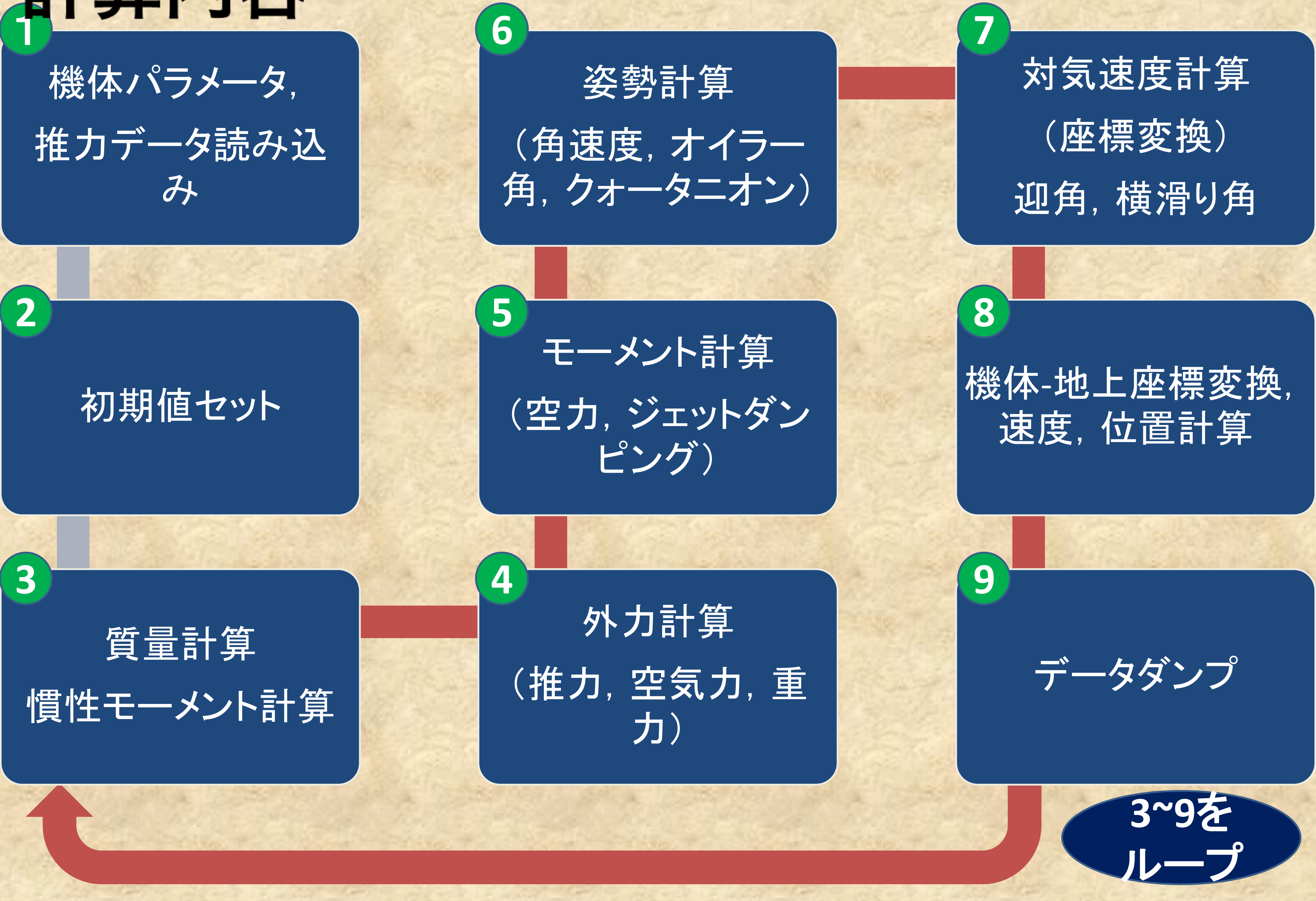

地上座標系（平面座標系）




機体座標系

（回転方向は右ねじ）

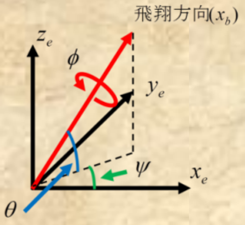
# 計算内容


1
機体パラメータ，
推力データ読み込み
2
初期値セット
3
質量計算
慣性モーメント計算
4
外力計算
（推力，空気力，重力）
5
モーメント計算
（空力，ジェットダンピング）
6
姿勢計算
（角速度，オイラー角，クォータニオン）
7
対気速度計算
（座標変換）
迎角，横滑り角
8
機体-地上座標変換，
速度，位置計算
9
データダンプ
3~9を
ループ

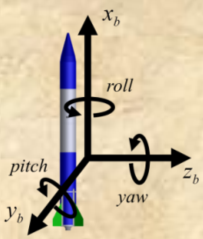
# 計算内容

- ロケット（剛体）は合成重心周りの並進・回転運動を行う.
- 地上座標系は高度をz軸にした右手系平面座標系を用いる．また機体座標系も右手系座標であるが，機軸をx軸としている．（飛行機の文化）
- 空気力が合成圧力中心に加わることで，重心周りにモーメントが発生し，同時に減衰モーメントも発生する.
- 大気モデル：標準大気モデル（1976 standard atmosphere）
- 推力は機軸方向のみ加わる．また，推進薬起因のジェットダンピングモーメントが発生する.
- 回転運動計算はクォータニオンを用いる．（表示はオイラー角Pitch，Roll，Yaw）クォータニオンは角速度から微分方程式を4次ルンゲクッタ法で解く.
- 空力係数（$C_D$，$C_{n\alpha}$，$C_{mq}$など）は理論計算（Barrowman法，apparent mass法）と風洞試験にて求める.
- パラシュートの降下速度は本来なら気圧，気温，空気密度（高度）に依存するが一定とする.
- 推力データはサンプリング間隔10 ms以下のものを使用すること.
- 加速度から速度，位置にする積分は逐次計算で台形積分を用いる.

# 計算内容




地上座標系（平面座標系）




機体座標系

## 座標系定義

地上座標系($x_e, y_e, z_e$)と機体座標系($x_b, y_b, z_b$)との座標変換行列を定義する.

地上座標系$\rightarrow$機体座標系変換行列

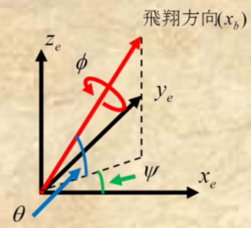
$$[C]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta\\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

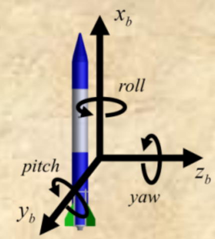
機体座標系$\rightarrow$地上座標系変換行列

$$[C]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\theta\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi\\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

## 座標変換

地上座標系(xe,ye,ze)と機体座標系(xb,yb,zb)との座標変換行列を定義する.

クオータニオン定義

$$\vec{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_1 \sin\frac{\Theta}{2} \\ e_2 \sin\frac{\Theta}{2} \\ e_3 \sin\frac{\Theta}{2} \\ \cos\frac{\Theta}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vec{q}_v \\ \\ q_s \end{bmatrix}$$

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}\left(C_{11}+C_{22}+C_{33}-1\right)$$

$$\Theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(C_{11}+C_{22}+C_{33}-1\right)\right)$$

$$e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{2\sin\Theta}\begin{bmatrix} C_{23}-C_{32} \\ C_{31}-C_{13} \\ C_{12}-C_{21} \end{bmatrix}$$

ただし，$q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2=1$

地上座標系$\rightarrow$機体座標系変換行列

$$[C]=C(q_1,q_2,q_3,q_4)$$

$$[C]=\begin{bmatrix} q_1{}^2-q_2{}^2-q_3{}^2+q_4{}^2 & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4) \\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & q_2{}^2-q_3{}^2-q_1{}^2+q_4{}^2 & 2(q_2q_3+q_1q_4) \\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_1q_4) & q_3{}^2-q_1{}^2-q_2{}^2+q_4{}^2 \end{bmatrix}$$

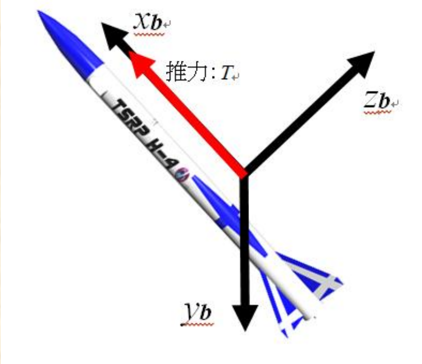
機体座標系$\rightarrow$地上座標系変換行列

$$[C]^{-1}=\begin{bmatrix} q_1{}^2-q_2{}^2-q_3{}^2+q_4{}^2 & 2(q_1q_2-q_3q_4) & 2(q_1q_3+q_2q_4) \\ 2(q_1q_2+q_3q_4) & q_2{}^2-q_3{}^2-q_1{}^2+q_4{}^2 & 2(q_2q_3-q_1q_4) \\ 2(q_1q_3-q_2q_4) & 2(q_2q_3+q_1q_4) & q_3{}^2-q_1{}^2-q_2{}^2+q_4{}^2 \end{bmatrix}$$

# 計算内容

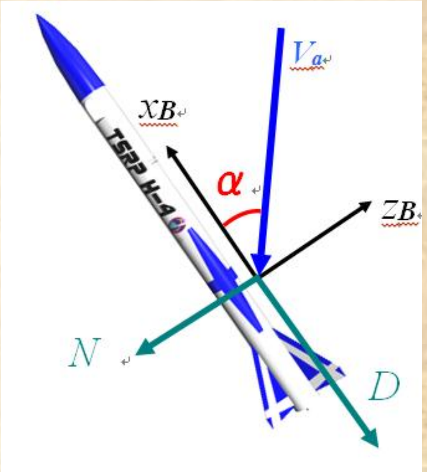
運動方程式

　飛翔経路は各時間点における速度を積分していくことにより求められる．ニュートンの運動方程式で機体に加わる力を定義する．以下は機体座標系における運動方程式である．




$$\begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A_{xb} \\ A_{yb} \\ A_{zb} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} F_{xb} = T - D \\ F_{yb} = -N \\ F_{zb} = -Y \end{cases}$$

機体に加わる力は機軸正方向に推力，負方向に空気力として抗力，機軸と垂直方向に空気力として法線力N，Yが負方向に加わるとする．地上座標系から－Z向きに重力が機体に加わる．



# 計算内容

前の式を加速度の式に変形する.

$$\begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A_{xb} \\ A_{yb} \\ A_{zb} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} F_{xb} = T - D \\ F_{yb} = -N \\ F_{zb} = -Y \end{cases}$$

$[C_{BE}]^{-1}$ は機体座標系から地上座標系に変換する座標変換行列

$$\begin{bmatrix} A_{xe} \\ A_{ye} \\ A_{ze} \end{bmatrix} = [C_{BE}]^{-1} \begin{bmatrix} F_{xb}/m \\ F_{yb}/m \\ F_{zb}/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{xe} \\ A_{ye} \\ A_{ze} \end{bmatrix} = [C_{BE}]^{-1} \begin{bmatrix} (T - D)/m \\ -N/m \\ -Y/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

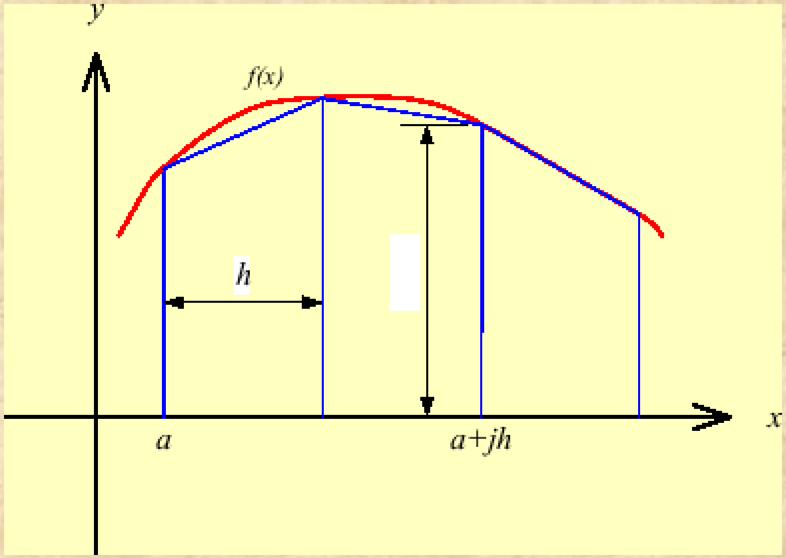
# 積分に関して（少しコラム）

- 種類
  - ニュートンコーツ法
    - 矩形積分
    - 台形積分
    - シンプソン積分
  - ガウス法
  - ニューマークベータ法

→興味がある人は調べてみてください.
ここでは台形積分を使います.

# 積分に関して

- 台形積分
  - 名の通り積分面積を台形に区切って積分を行う数値積分法
  - 区切る区間を小さくすれば誤差が小さくなる.



# 計算内容

次に空気力の定義する.

１，対気速度算出

対地速度V（Vx,Vy,Vz）から風速Vew（Vewx, Vewy,Vewz）を減算し，地上座標系における風を機体座標系に変換する.

$$\begin{bmatrix} V_{axb} \\ V_{ayb} \\ V_{azb} \end{bmatrix} = \left[C_{EB}\right] \begin{bmatrix} V_x - V_{ewx} \\ V_y - V_{ewx} \\ V_z - V_{ewx} \end{bmatrix}$$

$$V_{ab} = \sqrt{{V_{axb}}^2 + {V_{ayb}}^2 + {V_{azb}}^2}$$

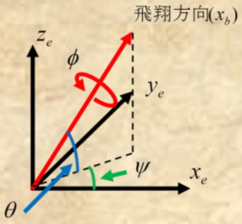
２，空気力定義

動圧 $\frac{1}{2}\rho {V_a}^2$ と断面積Aと空力係数，迎角$\alpha$，横滑り角$\beta$で構成される

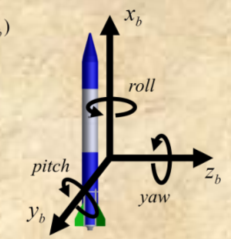
$$\begin{cases} D = \dfrac{1}{2}\rho {V_a}^2 C_D A \\ N = \dfrac{1}{2}\rho {V_a}^2 \sin\alpha \, C_{N\alpha} A \\ Y = \dfrac{1}{2}\rho {V_a}^2 \sin\beta \ \ C_{N\beta} A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{V_{az}}{V_a}\right) \\ \beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{V_{ay}}{V_a}\right) \end{cases}$$

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

## 質量計算

$m(t)$ : 時間$t$における機体質量，kg

$m_0$ : 全備機体質量，kg

$m_s$ : 機体乾燥質量，kg

$m_{p0}$ : 初期推進薬質量，kg

$m_p(t)$ : 時間$t$における推進薬質量，kg

$m_{f0}$ : 初期酸化剤質量，kg

$m_o(t)$ : 時間$t$における酸化剤質量，kg

$m_{o0}$ : 初期燃料質量，kg

$m_p(t)$ : 時間$t$における燃料質量，$kg$

$\dot{m}_f$ : 酸化剤質量流量，$kg/s$

$\dot{m}_o$ : 燃料質量流量，$kg/s$

$\dot{m}_p(t)$ : 時間$t$における推進剤質量流量，$kg/s$

$\overline{Isp}$ : 平均比推力，$s$

$g$ : 重力加速度，$m/s^2$

$T(t)$ : 時間$t$における推力，$N$

$$m(t) = m_s + m_p(t) \qquad \because m_p(t) = m_f(t) + m_o(t)$$

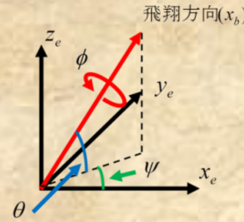
$$m_f(t) = m_{f0} - \dot{m}_f(t) * t, \quad m_o(t) = m_{o0} - \dot{m}_o(t) * t$$

$$\rightarrow m_p(t) = m_{p0} - \dot{m}_p(t) * t$$

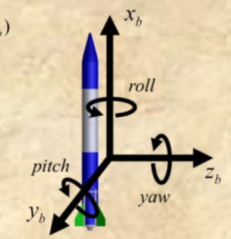
$$\therefore m(t) = m_s + \left\{ m_{p0} - \dot{m}_p(t) * t \right\} \qquad \because \dot{m}_p(t) = \frac{T(t)}{\overline{Isp} * g}, \quad \text{又は}\dot{m}_p(t) = \text{任意}$$

$$(t = 0 \text{なら} m(0) = m_0 = m_s + m_{p0})$$

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

## 慣性モーメント・重心位置計算

$I_p(t)$ : 時間$t$における推進剤重心周りPitch慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$I_{p0}$ : 初期推進剤重心周りPitch慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$I_s(t)$ : 時間$t$における機体重心周りPitch慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$I_{s0}$ : 初期機体重心周りPitch慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$I_r(t)$ : 時間$t$における機体重心周りRoll慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$I_{r0}$ : 初期機体重心周りRoll慣性モーメント，$\mathrm{kg \cdot m^2}$

$$\left.\begin{array}{r} l_{CG}(t): \text{時間}t\text{における全機重心位置，m} \\ l_{CGp}(t): \text{時間}t\text{における推進剤重心位置，m} \\ l_{CGf}(t): \text{時間}t\text{における燃料重心位置，m} \\ l_{CGo}(t): \text{時間}t\text{における酸化剤重心位置，m} \end{array}\right\} \text{ノーズコーン先端からの長さ}$$

推進剤重心周りPitch慣性モーメント

$$I_p(t) = I_{p_0} \cdot \frac{\dot{m}_p(t) * t}{m_p(t)}$$

機体重心周りPitch慣性モーメント

$$I_s(t) = I_{s0} \cdot \frac{m(t)}{m_0(t)}$$

機体重心周りRoll慣性モーメント

$$I_r(t) = I_{s0} \cdot \frac{m(t)}{m_0(t)}$$

時間tにおける全機重心周りPitch慣性モーメント

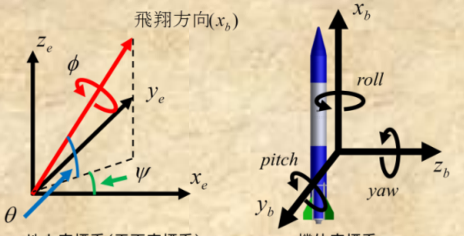
$$I(t) = I_s + I_p(t) + + \frac{m_p(t) \cdot m_s}{m(t)} \cdot \left(l_{CGp}(t) - l_{CGs}\right)^2$$

時間tにおける機体重心位置（ノーズ先端から）

$$l_{CG}(t) = \frac{m_p(t) \cdot l_{CGp}(t) + m_s \cdot l_{CGs}}{m(t)}$$

$$l_{CGp}(t) = \frac{m_f(t) \cdot l_{CGf}(t) + m_o(t) \cdot l_{CGo}}{m_p(t)}$$

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）　機体座標系

## 姿勢計算

オイラーの運動方程式

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

$\omega$で回転している座標系から見ると，

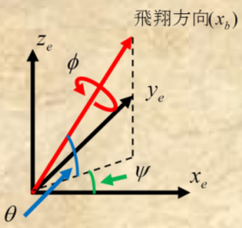
角運動量$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$を引き起こすようなトルクが見かけ上

外部から働いており，以下のように示せる

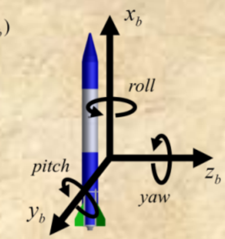
$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

# 計算内容

## 姿勢計算




地上座標系（平面座標系）




機体座標系

角運動量は剛体の慣性テンソル

(直交座標軸が慣性主軸に一致しているとする)

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

を用いて

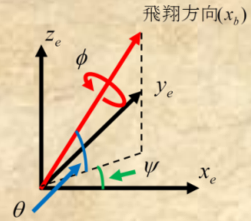
$$H = I \cdot \omega$$

$$= \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x\omega_x \\ I_y\omega_x \\ I_z\omega_x \end{bmatrix}$$

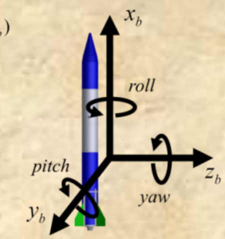
と書ける.

# 計算内容

## 姿勢計算



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

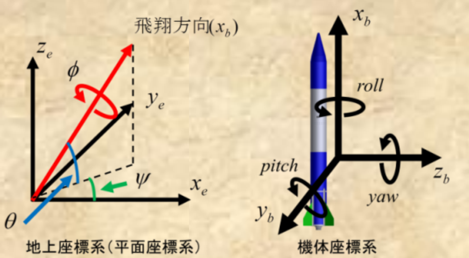
$$\begin{cases} \omega = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \\ H = I \cdot \omega = \begin{bmatrix} I_x\omega_x & I_y\omega_y & I_z\omega_z \end{bmatrix} \\ M = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x = M_x + (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ I_y\dot{\omega}_y = M_y + (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ I_z\dot{\omega}_z = M_z + (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{cases}$$

オイラーの運動方程式 $\begin{cases} M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_x = M_x / I_x \\ \dot{\omega}_y = \{(I_z - I_x)\omega_z\omega_x + M_y\} / I_y \\ \dot{\omega}_z = \{(I_x - I_y)\omega_x\omega_y + M_z\} / I_z \end{cases}$

*機体は軸対称なので$I_z = I_y$とする.

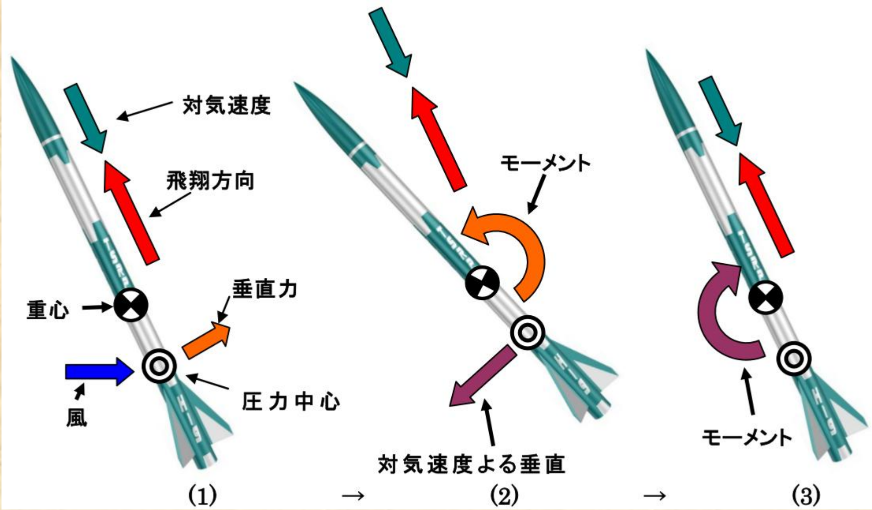
# 計算内容




## 姿勢計算　モーメント

### 空力モーメント

$$
\begin{cases}
M_{ax} = M_{FM} \\
M_{ay} = -(l_{cp} - l_{cg})N \\
M_{az} = (l_{cp} - l_{cg})Y
\end{cases}
$$

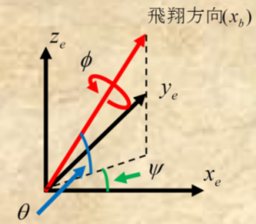



### 空力減衰モーメント

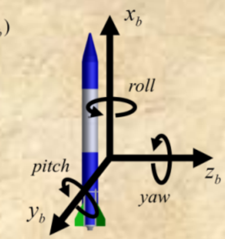
$$
\begin{cases}
K_{ax} = \dfrac{1}{2}\rho V_a{}^2 S \dfrac{d^2}{2V_a} C_{lp}\omega_x \\
K_{ay} = \dfrac{1}{2}\rho V_a{}^2 S \dfrac{l^2}{2V_a} C_{mq}\omega_y \\
K_{az} = \dfrac{1}{2}\rho V_a{}^2 S \dfrac{l^2}{2V_a} C_{nr}\omega_z
\end{cases}
$$

$C_{lp}$,　$C_{mq}$,$C_{nr}$ : 減衰モーメント安定微係数, −（$<0$）
$d$ : 機体直径，m

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）



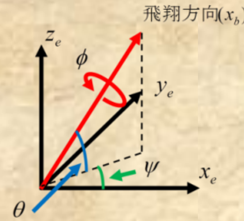
機体座標系

## 姿勢計算　モーメント

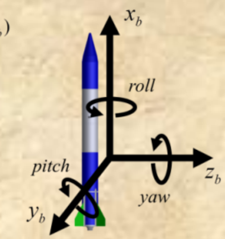
### ジェットダンピングモーメント

$$
\begin{cases}
K_{jx} = -\left( \dfrac{I_{px}}{m_p} - (l - l_{cgp})^2 \right) \dot{m}_p \omega_x \\
K_{jy} = -\left[ \dfrac{I_{py}}{m_p} + (l_{cg} - l_{cgp})^2 - (l - l_{cgp})^2 \right] \dot{m}_p \omega_y \\
K_{jz} = -\left[ \dfrac{I_{pz}}{m_p} + (l_{cg} - l_{cgp})^2 - (l - l_{cgp})^2 \right] \dot{m}_p \omega_z
\end{cases}
$$

＊燃焼速度が軸方向に一定であると仮定する．



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

# 計算内容

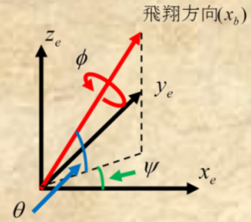
## 姿勢計算　モーメント

### 全体のモーメント

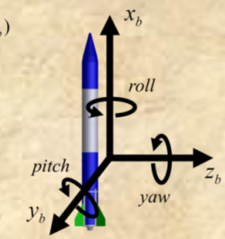
$$\begin{cases} M_x = M_{ax} + K_{ax} + K_{jx} \\ M_y = M_{ay} + K_{ay} + K_{jy} \\ M_z = M_{az} + K_{az} + K_{jz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \dfrac{\left(M_{ax} + K_{ax} + K_{jx}\right) - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z}{I_x} \\ \dot{\omega}_y = \dfrac{\left(M_{ay} + K_{ay} + K_{jy}\right) - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x}{I_y} \\ \dot{\omega}_z = \dfrac{\left(M_{az} + K_{az} + K_{jz}\right) - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y}{I_z} \end{cases}$$

# 計算内容



地上座標系（平面座標系）



機体座標系

## 姿勢計算　モーメント

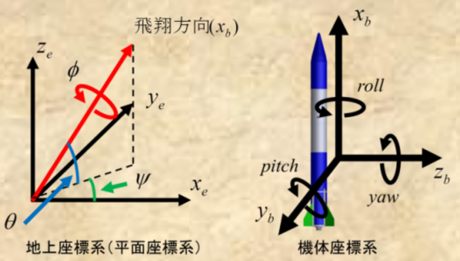
### 角速度のクォータニオン表記

$$
\begin{cases}
\omega_x = 2\left(\dot{q}_1 q_4 + \dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2 - \dot{q}_4 q_1\right) \\
\omega_y = 2\left(\dot{q}_2 q_4 + \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_4 q_2\right) \\
\omega_z = 2\left(\dot{q}_3 q_4 + \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_4 q_1\right)
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}
= \frac{1}{2}
\begin{bmatrix}
q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\
q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\
-q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\
-q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \end{bmatrix}
= \frac{1}{2}
\begin{bmatrix}
0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\
-\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\
\omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\
-\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}
$$

出典:NAL TM-636 クォータニオンとオイラー角によるキネマティックス表現の比較について

# 計算内容 まとめ




## 並進の運動方程式

$$\begin{bmatrix} F_{xb}(t) \\ F_{yb}(t) \\ F_{zb}(t) \end{bmatrix} = m(t) \begin{bmatrix} A_{xb}(t) \\ A_{yb}(t) \\ A_{zb}(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} F_{xb}(t) = T(t) - D(t) \\ F_{yb}(t) = -N(t) \\ F_{zb}(t) = -Y(t) \end{cases} , \qquad \begin{bmatrix} A_{xe}(t) \\ A_{ye}(t) \\ A_{ze}(t) \end{bmatrix} = [C_{BE}(t)]^{-1} \begin{bmatrix} (T(t) - D(t))/m(t) \\ -N(t)/m(t) \\ -Y(t)/m(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \rho V_a{}^2 C_D A \\ N = \frac{1}{2} \rho V_a{}^2 \sin\alpha \, C_{N\alpha} A \\ Y = \frac{1}{2} \rho V_a{}^2 \sin\beta \ C_{N\beta} A \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{V_{az}}{V_a}\right) \\ \beta = \sin^{-1}\left(\frac{V_{ay}}{V_a}\right) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} V_{axb} \\ V_{ayb} \\ V_{azb} \end{bmatrix} = [C_{EB}] \begin{bmatrix} V_x - V_{ewx} \\ V_y - V_{ewx} \\ V_z - V_{ewx} \end{bmatrix}$$

$$V_{ab} = \sqrt{V_{axb}{}^2 + V_{ayb}{}^2 + V_{azb}{}^2}$$

$$m(t) = m_s + \{m_{p0} - \dot{m}_p(t) * t\} \qquad \because \dot{m}_p(t) = \frac{T(t)}{Isp * g}$$

$$I_p(t) = I_{p0} \cdot \frac{\dot{m}_p(t) * t}{m_p(t)}, I_s(t) = I_{s0} \cdot \frac{m(t)}{m_0(t)}, I_r(t) = I_{s0} \cdot \frac{m(t)}{m_0(t)}$$

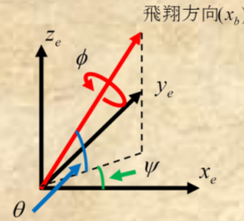
$$I(t) = I_s + I_p(t) + + \frac{m_p(t) \cdot m_s}{m(t)} \cdot (l_{CGp}(t) - l_{CGs})^2, l_{CG}(t) = \frac{m_p(t) \cdot l_{CGp}(t) + m_s \cdot l_{CGs}}{m(t)}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = M_x / I_x \\ \dot{\omega}_y = \{(I_z - I_x)\omega_z\omega_x + M_y\} / I_y \\ \dot{\omega}_z = \{(I_x - I_y)\omega_x\omega_y + M_z\} / I_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\omega}_x = M_x / I_x \\ \dot{\omega}_y = \{(I_z - I_x)\omega_z\omega_x + M_y\} / I_y \\ \dot{\omega}_z = \{(I_x - I_y)\omega_x\omega_y + M_z\} / I_z \end{cases}$$

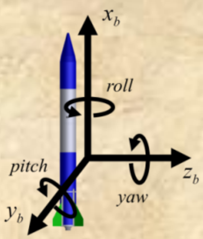
＊機体は軸対称なので$I_z = I_y$とする.

$$M_{ax} = M_{FM}$$

# 計算内容 まとめ



地上座標系(平面座標系)



機体座標系

## 回転の運動方程式

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

微分方程式なのでルンゲクッタ法などで解く

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x(t) = M_x(t)/I_x \\ \dot{\omega}_y(t) = \{(I_z(t) - I_x(t))\omega_z(t)\omega_x(t) + M_y(t)\}/I_y(t) \\ \dot{\omega}_z(t) = \{(I_x(t) - I_y(t))\omega_x(t)\omega_y(t) + M_z(t)\}/I_z(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

角速度を用いてクォータニオンを求める

$$\begin{cases} M_x(t) = M_{ax}(t) + K_{ax}(t) + K_{jx}(t) \\ M_y(t) = M_{ay}(t) + K_{ay}(t) + K_{jy}(t) \\ M_z(t) = M_{az}(t) + K_{az}(t) + K_{jz}(t) \end{cases}$$

クォータニオンから座標変換行列を生成する
座標変換行列を使って，対地加速度を求め，積分し，
速度，位置を求める．

$$\begin{cases} M_{ax}(t) = M_{FM}(t) \\ M_{ay}(t) = -(l_{cp}(t) - l_{cg}(t))N(t), \\ M_{az}(t) = (l_{cp}(t) - l_{cg}(t))Y(t) \end{cases} \begin{cases} K_{ax}(t) = {}^1\!/_2\,\rho(t)V_a^{\,2}(t)S\dfrac{d^2}{2V_a(t)}C_{lp}\omega_x(t) \\ K_{ay}(t) = {}^1\!/_2\,\rho(t)V_a^{\,2}(t)S\dfrac{l^2}{2V_a(t)}C_{mq}\omega_y(t), \\ K_{az}(t) = \dfrac{1}{2}\rho(t)V_a^{\,2}(t)S\dfrac{l^2}{2V_a(t)}C_{nr}\omega_z(t) \end{cases} \begin{cases} K_{jx}(t) = -\left(\dfrac{I_{px}(t)}{m_p(t)} - (l - l_{cgp}(t))^2\right)\dot{m}_p(t)\omega_x(t) \\ K_{jy}(t) = -\left[\dfrac{I_{py}(t)}{m_p(t)} + (l_{cg}(t) - l_{cgp}(t))^2 - (l - l_{cgp}(t))^2\right]\dot{m}_p(t)\omega_y(t) \\ K_{jz}(t) = -\left[\dfrac{I_{pz}(t)}{m_p(t)} + (l_{cg}(t) - l_{cgp}(t))^2 - (l - l_{cgp}(t))^2\right]\dot{m}_p(t)\omega_z(t) \end{cases}$$