

БГУИР

Кафедра ЭВМ

Отчет по лабораторной работе № 1

Тема: «Принятие решений в неструктурированных задачах на основе методов  
экспертного анализа»

Выполнил:

Проверил:

Минск 2024

## **1 ЦЕЛИ РАБОТЫ**

- изучение методов экспертного анализа, включая процедуры сбора экспертных оценок, их проверки и обработки;
- изучение возможностей применения методов экспертного анализа для поддержки принятия управленческих решений.

## **2 Общая характеристика и классификация методов экспертного анализа**

Все виды задач, связанных с принятием решений, в зависимости от возможностей математического описания (формализации) можно разделить на следующие виды:

- хорошо структурированные задачи - могут быть выражены формально (т.е. в виде уравнений, неравенств и т.д.). Такие задачи решаются на основе методов математического программирования, например, линейного программирования;
- неструктурированные задачи - описываются только на содержательном уровне (в словесной форме);
- слабоструктурированные задачи - содержат как количественные, так и качественные элементы.

Методы экспертного анализа (экспертных оценок) предназначены в основном для решения неструктурированных задач. Эти методы могут применяться и для решения задач других видов, если математическое описание (формализация) задачи невозможно или очень сложно.

Методы экспертного анализа представляют собой совокупность процедур, направленных на получение от специалиста (эксперта) информации, необходимой для принятия решения. Эти методы основаны на опыте, знаниях и интуиции специалистов-экспертов. Процесс принятия решения на основе этих методов не является строго формализованным и упорядоченным. Сам эксперт не всегда может четко объяснить процесс решения проблемы. Информация, полученная от экспертов, подвергается обработке на основе математических (статистических) методов.

Процесс принятия решения на основе методов экспертного анализа включает следующие основные этапы:

- определение цели экспертизы;
- формирование группы экспертов;
- разработка сценария и процедур экспертизы;
- сбор и анализ экспертной информации;
- проверка экспертной информации на непротиворечивость;
- обработка экспертной информации;
- анализ результатов экспертизы и принятие решения.

Классификация методов экспертного анализа приведена в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Классификация методов экспертного анализа

Признак для классификации	Виды методов экспертного анализа	Описание	Примеры
Количество участвующих экспертов	Индивидуальные	Решение принимается на основе суждений одного эксперта	Алгоритм Саати
	Коллективные	Решение принимается на основе суждений группы экспертов	Метод ранга, метод предпочтений, метод Дельфи, метод мозгового штурма
Количество этапов получения и обработки информации	Одноэтапные	Выполняется обработка информации, полученной от экспертов, и на ее основе принимается решение	Алгоритм парных сравнений для группы экспертов
	Многоэтапные	В случае существенного расхождения мнений экспертов производится их уточнение и согласование	Метод Дельфи
Результаты экспертизы	Методы выработки альтернатив	Результат – решение, подготовленное экспертами	Метод мозгового штурма
	Методы анализа альтернатив	Результат – выбор лучшего из решений, предложенных экспертам для анализа	Метод парных сравнений, метод ранга, метод предпочтений
	Методы прогнозирования	Результат – прогноз состояния некоторого объекта или процесса	Метод Дельфи

Методы экспертного анализа применяются для решения следующих задач:

- разработка и оценка экономических и технических проектов и программ (включая оценку их эффективности, стоимости, трудоемкости, сроков реализации и т.д.) и выбор лучших вариантов;
- оценка качества продукции и новой техники;
- научно-техническое и экономическое прогнозирование;
- перспективное и текущее планирование;
- классификация объектов по определенным признакам;
- выбор критериев в задачах многокритериального выбора решений и оценка важности этих критериев.

Ниже рассматривается реализация некоторых методов экспертных оценок и примеры их применения для принятия решений.

### 3 Методы парных сравнений. Метод Саати

Метод парных сравнений основан на попарном сравнении альтернатив. Для каждой пары альтернатив эксперт указывает, какая из альтернатив предпочтительнее (лучше, важнее и т.д.). Существует ряд алгоритмов, реализующих метод парных сравнений: они различаются по количеству используемых экспертных оценок (индивидуальные и коллективные оценки), по шкалам сравнения альтернатив и т.д. В данной работе рассматривается наиболее известный и получивший наибольшее практическое применение метод парных сравнений – метод Саати.

Метод Саати основан на сравнении альтернатив, выполняемом одним экспертом. Для каждой пары альтернатив эксперт указывает, в какой степени одна из них предпочтительнее другой.

Рассмотрим применение этого метода на следующем примере.

**Шаг 1.** Предприятие выбирает основной вид рекламы для новой продукции. Предлагаются четыре возможных вида: реклама на телевидении (обозначим ее как  $A_1$ ), на радио ( $A_2$ ), в газете ( $A_3$ ), на стендах ( $A_4$ ). Решение о выборе вида рекламы принимается на основе консультации с экспертом.

Решение на основе метода Саати принимается в следующем порядке.

Первым Экспертом заполняется матрица парных сравнений размером  $N \times N$ , где  $N$  – количество альтернатив. Матрица заполняется по правилам, приведенным в таблице 3.1.

Таблица 3.1 - Правила заполнения матрицы парных сравнений по методу Саати

$X_{ij}$	Значение
1	$i$ -я и $j$ -я альтернативы примерно равноценны

3	$i$ -я альтернатива немного предпочтительнее $j$ -й
5	$i$ -я альтернатива предпочтительнее $j$ -й
7	$i$ -я альтернатива значительно предпочтительнее $j$ -й
9	$i$ -я альтернатива явно предпочтительнее $j$ -й

Если  $i$ -я альтернатива менее предпочтительна, чем  $j$ -я, то указываются обратные оценки (1/3, 1/5, 1/7, 1/9). Могут использоваться промежуточные оценки (2, 4, 6, 8 и 1/2, 1/4, 1/6, 1/8); например, если  $i$ -я альтернатива совсем немного лучше  $j$ -й, то можно использовать оценку  $X_{ij}=2$  (тогда  $X_{ji}=1/2$ ). На главной диагонали ставятся единицы.

Пусть эксперт заполнил матрицу парных сравнений, как показано в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Матрица парных сравнений

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$A_1$	1	7	3	9
$A_2$	1/7	1	1/5	3
$A_3$	1/3	5	1	5
$A_4$	1/9	1/3	1/5	1

Здесь, например, элемент  $X_{14}=9$  означает, что реклама на телевидении, по мнению эксперта, явно более эффективна, чем реклама на стендах. Элемент  $X_{23}=1/5$  означает, что реклама на радио менее эффективна, чем реклама в газетах. Элемент  $X_{24}=3$  означает, что реклама на радио немного более эффективна, чем реклама на стендах.

**Шаг 2.** Находятся цены альтернатив - средние геометрические строк матрицы:

$$C_i = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^N X_{ij}}, \quad i=1, \dots, N,$$

Это означает, что элементы строки перемножаются, и из их произведения извлекается корень  $N$ -й степени.

Для данного примера:

$$C_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9} = 3,71, \quad C_2 = \sqrt[4]{(1/7) \cdot 1 \cdot (1/5) \cdot 3} = 0,54, \quad C_3 = 1,7, \quad C_4 = 0,29.$$

Примечание – Для упрощения расчетов в качестве цен альтернатив можно использовать суммы строк матрицы сравнений.

**Шаг 3.** Находится сумма цен альтернатив:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i .$$

В данном примере  $C = 3,71+0,54+1,7+0,29 = 6,24$ .

**Шаг 4.** Находятся веса альтернатив:

$$V_i = C_i/C, \quad i=1,...,N.$$

$$V_1 = 3,71/6,24 = 0,595; V_2 = 0,4/6,24 = 0,087; V_3 = 1,7/6,24 = 0,272; V_4 = 0,29/6,24 = 0,047.$$

Наиболее предпочтительной, по мнению эксперта, является альтернатива, имеющая максимальный вес.

Таким образом, по мнению эксперта, наиболее эффективной является реклама на телевидении; следующая за ней - реклама в газетах, менее эффективна реклама на радио, наименее эффективна реклама на стендах.

**Проверка экспертных оценок на непротиворечивость.** Проверка позволяет выявить ошибки, которые мог допустить эксперт при заполнении матрицы парных сравнений. Ошибки (противоречия) могут быть следующими: например, эксперт указывает, что альтернатива  $A_1$  хуже, чем  $A_2$ , а альтернатива  $A_2$  хуже, чем  $A_3$ ; но при этом эксперт указывает также, что  $A_1$  лучше, чем  $A_3$ . Пример матрицы парных сравнений, содержащей такую ошибку, приведен в таблице 3.3. Возможны также ошибки следующего вида: эксперт указывает, что альтернатива  $A_1$  *значительно* хуже, чем  $A_2$ , а альтернатива  $A_2$  *значительно* хуже, чем  $A_3$ , но при этом эксперт указывает также, что  $A_1$  лишь *немного* хуже, чем  $A_3$ . Пример матрицы парных сравнений с такой ошибкой приведен в таблице 3.4.

Таблица 3.3 – Первый пример ошибки в заполнении матрицы парных сравнений

	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$A_1$	1	1/3	2
$A_2$	3	1	1/5
$A_3$	1/2	5	1

Таблица 3.4 – Второй пример ошибки в заполнении матрицы парных сравнений

	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$A_1$	1	1/7	1/3
$A_2$	7	1	1/6
$A_3$	3	6	1

Рассмотрим проверку на непротиворечивость для задачи о выборе вида рекламы.

**Шаг 1.** Находятся суммы столбцов матрицы парных сравнений:

$$R_j = \sum_{i=1}^N X_{ij}, \quad j=1, \dots, N.$$

$$R_1 = (1+1/7+1/3+1/9) = 1,588; R_2 = 13,333; R_3 = 4,4; R_4 = 18.$$

**Шаг 2.** Рассчитывается вспомогательная величина  $\lambda$  путем суммирования произведений сумм столбцов матрицы на веса альтернатив:

$$\lambda = \sum_{j=1}^N R_j \cdot V_j.$$

$$\lambda = 1,588 \cdot 0,594 + 13,333 \cdot 0,087 + 4,4 \cdot 0,272 + 18 \cdot 0,047 = 4,07.$$

**Шаг 3.** Находится величина, называемая индексом согласованности (*ИС*):

$$ИС = (\lambda - N) / (N - 1).$$

$$\text{Для данного примера } ИС = (4,07 - 4) / (4 - 1) = 0,023.$$

**Шаг 4.** В зависимости от размерности матрицы парных сравнений находится величина случайной согласованности (*СлС*). Значения *СлС* приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Величины случайной согласованности

Размерность матрицы	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>СлС</i>	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В данном примере (для  $N=4$ )  $СлС=0,90$ .

**Шаг 5.** Находится отношение согласованности:

$$ОС = ИС / СлС.$$

Если отношение согласованности превышает 0,2, то требуется уточнение матрицы парных сравнений.

В данном примере  $ОС = 0,023/0,9 = 0,024$ . Таким образом, уточнение экспертных оценок в данном случае не требуется.

## 4 Метод предпочтений

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов (независимо от других) выполняет ранжирование альтернатив, т.е. указывает, какая из альтернатив, по его мнению, является лучшей, какая - следующей за ней, и т.д.

Рассмотрим этот метод на следующем примере.

**Пример 2** – В ходе разработки плана мероприятий по повышению эффективности производства возникает задача определения степени влияния различных факторов на производительность труда. Требуется оценить влияние на рост производительности труда следующих факторов:

- уровень профессиональной подготовки рабочих;
- соблюдение технологической дисциплины;
- эффективность материальных стимулов;
- эффективность организации соревнования;
- технологическое перевооружение.

Оценка влияния факторов на производительность труда выполняется четырьмя экспертами - ведущими специалистами предприятия.

Обозначим указанные выше факторы как  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  соответственно.

Степень влияния факторов на производительность труда оценивается по методу предпочтений в следующем порядке.

**Шаг 1.** Каждому эксперту предлагается выполнить ранжирование альтернатив по предпочтению. В данном примере каждый эксперт присваивает номер 1 фактору, который (по его мнению) оказывает наибольшее влияние на рост производительности труда; 2 - следующему по важности фактору, и т.д. Оценки, указанные экспертами, сводятся в таблицу (матрицу) размером  $M \times N$ , где  $M$  - количество экспертов,  $N$  - количество альтернатив (в данном примере - количество факторов роста производительности труда). Обозначим эти оценки как  $X_{ij}$ ,  $i=1,...,M$ ,  $j=1,...,N$ .

Пусть, например, экспертами составлена матрица оценок, приведенная в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)				
	A1	A2	A3	A4	A5
1	2	1	3	5	4
2	2	3	1	5	4
3	1	3	2	5	4
4	2	1	4	5	3



Здесь, например, первый эксперт считает, что наибольшее влияние на рост производительности труда может оказать соблюдение технологической дисциплины; следующий по важности фактор - уровень профессиональной подготовки рабочих, затем - эффективность материальных стимулов, технологическое перевооружение, эффективность организации соревнования. Второй эксперт считает самым важным фактором эффективность материальных стимулов; следующий по важности фактор - уровень профессиональной подготовки рабочих, затем - соблюдение технологической дисциплины, технологическое перевооружение, эффективность организации соревнования.

**Шаг 2.** Производится преобразование матрицы оценок по формуле:  

$$B_{ij} = N - X_{ij}, \quad i=1, \dots, M, j=1, \dots, N.$$

Это означает, что каждая экспертная оценка вычитается из количества альтернатив.

Для данного примера получена матрица, приведенная в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)				
	A1	A2	A3	A4	A5
1	3	4	2	0	1
2	3	2	4	0	1
3	4	2	3	0	1
4	3	4	1	0	2

Например,  $B_{12} = 5 - X_{12} = 5 - 1 = 4$ .

**Шаг 3.** Находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C_j = \sum_{i=1}^M B_{ij}, \quad j=1, \dots, N.$$

В данном примере  $C_1=3+3+4+3=13$ ;  $C_2=4+2+2+4=12$ ;  $C_3=10$ ;  $C_4=0$ ;  $C_5=5$ .

**Шаг 4.** Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^N C_j.$$

В данном примере  $C = 13+12+10+0+5 = 40$ .

**Шаг 5.** Находятся веса альтернатив:

$$V_j = C_j/C, \quad j=1,...,N.$$

В данном примере  $V_1=13/40=0,325$ ;  $V_2=12/40=0,3$ ;  $V_3=10/40=0,25$ ;  $V_4=0/40=0$ ;  $V_5=5/40=0,125$ .

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).

В данном примере самым важным фактором, влияющим на производительность труда, является уровень профессиональной подготовки рабочих); следующий по важности фактор - соблюдение технологической дисциплины; следующий по важности - эффективность материальных стимулов; еще менее важный - технологическое перевооружение; наименее важный фактор - эффективность организации соревнования.

**Проверка согласованности экспертных оценок.** Проверка согласованности необходима, чтобы выяснить, не было ли резких различий в суждениях экспертов. Если мнения экспертов резко различаются, то следует выявить причины таких различий и, возможно, уточнить некоторые оценки.

Для проверки согласованности мнений экспертов вычисляется величина, называемая коэффициентом конкордации ( $W$ ). Ее расчет выполняется в следующем порядке.

**Шаг 1.** Находятся суммы оценок, указанных экспертами для каждой из альтернатив:

$$S_j = \sum_{i=1}^M X_{ij}, \quad j=1,...,N.$$

В рассматриваемом примере  $S_1 = 2+2+1+2 = 7$ ;  $S_2 = 1+3+3+1 = 8$ ;  $S_3 = 10$ ;  $S_4 = 20$ ;  $S_5 = 15$ .

**Шаг 2.** Находится вспомогательная величина  $A$ :

$$A = M(N+1)/2.$$

Для данного примера  $A = 4(5+1)/2 = 12$ .

**Шаг 3.** Находится вспомогательная величина  $S$ :

$$S = \sum_{j=1}^N (S_j - A)^2.$$

Для рассматриваемого примера:

$$S = (7-12)^2 + (8-12)^2 + (10-12)^2 + (20-12)^2 + (15-12)^2 = 118.$$

**Шаг 4.** Находится коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12 \cdot S}{M^2 \cdot N \cdot (N^2 - 1)}.$$

При  $W \geq 0,5$  степень согласованности экспертных оценок может считаться достаточной. При  $W < 0,5$  требуется уточнение и согласование экспертных оценок.

В данном примере  $W = 12 \cdot 118 / (16 \cdot 5 \cdot 24) = 0,7375$ . Таким образом, уточнение экспертных оценок не требуется. Мнения экспертов в отношении влияния рассматриваемых факторов на производительность труда достаточно близки друг к другу.

## 5 Метод ранга

Метод основан на балльных оценках альтернатив, указываемых несколькими экспертами. Каждый из экспертов (независимо от других) оценивает альтернативы по некоторой шкале (обычно - 10-балльной). Чем более предпочтительной (по мнению эксперта) является альтернатива, тем более высокий балл для нее указывается.

**Пример 3** – Рассмотрим применение метода ранга для решения задачи, приведенной в примере 2 (оценка влияния факторов на производительность труда).

**Шаг 1.** Каждый эксперт указывает оценки альтернатив по 10-балльной шкале. Оценки, указанные экспертами, сводятся в матрицу размером  $M \times N$ , где  $M$  - число экспертов,  $N$  - число альтернатив. Обозначим эти оценки как  $X_{ij}$ ,  $i=1, \dots, M$ ,  $j=1, \dots, N$ .

Пусть в рассматриваемом примере получены экспертные оценки, приведенные в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Матрица экспертных оценок для метода ранга

Эксперты	Альтернативы (факторы)				
	A1	A2	A3	A4	A5
1	10	10	7	2	6
2	10	9	10	4	6
3	10	8	10	3	7
4	9	10	6	2	9

Здесь, например, первый эксперт считает, что наибольшее влияние на производительность труда оказывает уровень профессиональной подготовки рабочих и соблюдение технологической дисциплины; менее важный фактор - эффективность материальных стимулов, еще немного менее важный - технологическое перевооружение; значительно менее важный фактор - эффективность организации соревнования.

**Шаг 2.** Находятся суммарные оценки альтернатив всеми экспертами:

$$C_j = \sum_{i=1}^M X_{ij}, \quad j=1, \dots, N.$$

В данном примере  $C_1=10+10+10+9=39$ ;  $C_2=10+9+8+10=37$ ;  $C_3=33$ ;  $C_4=11$ ;  $C_5=28$ .

**Шаг 3.** Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^N C_j.$$

В примере  $C = 39+37+33+11+28 = 148$ .

**Шаг 4.** Находятся веса альтернатив:

$$V_j = C_j/C, \quad j=1, \dots, N.$$

Наиболее предпочтительной, по мнению экспертов, является альтернатива, имеющая максимальный вес.

В данном примере  $V_1 = 39/148 = 0,26$ ;  $V_2 = 37/148 = 0,25$ ;  $V_3 = 33/148 = 0,22$ ;  $V_4 = 11/148 = 0,07$ ;  $V_5 = 28/148 = 0,19$ . Таким образом, наиболее важным фактором, влияющим на производительность труда, признается уровень профессиональной подготовки рабочих; следующий по важности фактор (очень близкий к первому) - соблюдение технологической дисциплины; немного менее важный фактор - эффективность материальных стимулов; еще немного менее важный - технологическое перевооружение. Наименее важным фактором (существенно менее важным по сравнению с другими) оказывается эффективность организации соревнования.

**Проверка согласованности экспертных оценок.** Как и для метода предпочтений, проверка согласованности экспертных оценок требуется для выявления существенных различий в мнениях экспертов и определения причин таких различий. Для этого рассчитываются дисперсии (оценки разброса) оценок для каждого эксперта и для каждой альтернативы. Расчет выполняется в следующем порядке.

**Шаг 1.** Находятся средние оценки каждой альтернативы:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_{ij}, \quad j=1, \dots, N.$$

В данном примере  $\bar{X}_1 = 39/4 = 9,75$ ;  $\bar{X}_2 = 37/4 = 9,25$ ;  $\bar{X}_3 = 33/4 = 8,25$ ;  $\bar{X}_4 = 11/4 = 2,75$ ;  $\bar{X}_5 = 28/4 = 7$ .

**Шаг 2.** Находятся дисперсии оценок каждого эксперта:

$$D_{\text{э}i} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \quad i=1, \dots, M.$$

Эта величина показывает отклонение оценок, указанных  $i$ -м экспертом для альтернатив, от средних оценок этих альтернатив. Чем больше эта величина, тем больше *отличие мнения  $i$ -го эксперта от остальных экспертов*.

В данном примере:

$$D_{\alpha 1} = \frac{1}{4} ((10-9,75)^2 + (10-9,25)^2 + (7-8,25)^2 + (2-2,75)^2 + (6-7)^2) = 0,94.$$

$$D_{\alpha 2} = \frac{1}{4} ((10-9,75)^2 + (9-9,25)^2 + (10-8,25)^2 + (4-2,75)^2 + (6-7)^2) = 1,44.$$

$$D_{\alpha 3} = 1,19; D_{\alpha 4} = 2,69.$$

**Шаг 3.** Находятся дисперсии оценок каждой альтернативы:

$$D_{aj} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \quad j=1, \dots, N.$$

Эта величина показывает различие оценок, указанных экспертами для  $j$ -й альтернативы. Чем больше эта величина, тем больше *расхождение мнений экспертов в отношении данной альтернативы*.

В данном примере:

$$D_{a1} = \frac{1}{3} ((10-9,75)^2 + (10-9,75)^2 + (10-9,75)^2 + (9-9,75)^2) = 0,25.$$

$$D_{a2} = \frac{1}{3} ((10-9,25)^2 + (9-9,25)^2 + (8-9,25)^2 + (10-9,25)^2) = 0,917.$$

$$D_{a3} = 4,25; D_{a4} = 0,917; D_{a5} = 2.$$

Если величина  $D_{\alpha i}$  оказывается большой (оценки  $i$ -го эксперта сильно отличаются от оценок, указанных другими экспертами), то  $i$ -му эксперту предлагается обосновать свои оценки. Если большой оказывается величина  $D_{aj}$  (оценки  $j$ -й альтернативы у экспертов сильно отличаются), то следует проанализировать причины таких расхождений.

В данном примере, возможно, следует предложить обосновать свои оценки четвертому эксперту. Кроме того, следует обратить внимание на разброс оценок третьей альтернативы.

## 6 Порядок выполнения работы

- 1 Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
- 2 Получить задание на лабораторную работу (см. приложение А).
- 3 На основе оценок **первого** эксперта найти веса вариантов решения, используя алгоритм Саати. Выполнить проверку экспертных оценок на непротиворечивость.

4 Выбрать рациональное решение, используя метод предпочтений. Выполнить проверку экспертных оценок на согласованность. При выявлении

несогласованности экспертных оценок указать ее причины, т.е. указать, для каких альтернатив имеются существенные различия в указанных экспертами оценках, или какие эксперты указали оценки, существенно отличающиеся от оценок других экспертов.

**5** Выбрать рациональное решение, используя метод ранга. Выполнить проверку экспертных оценок на согласованность. При выявлении несогласованности экспертных оценок указать ее причины (аналогично тому, как указано для метода предпочтений).

## **7 Выполнение работы**

### **Вариант А.1**

Негосударственному предприятию требуется в короткие сроки получить дополнительную денежную сумму. Для этого имеются следующие возможности: 1) банковский кредит ( $A_1$ ); 2) сдача части производственных помещений в аренду ( $A_2$ ); 3) продажа части производственных помещений ( $A_3$ ); 4) продажа части акций предприятия ( $A_4$ ).

Выбор одного из способов производится с участием трех экспертов. Мнения экспертов следующие:

– первый эксперт: лучший способ - аренда, немного хуже - банковский кредит, еще хуже - продажа части акций, намного хуже - продажа помещений.

– второй эксперт: лучший способ - банковский кредит, хуже - аренда, примерно такой же (немного хуже) - продажа акций, намного хуже - продажа помещений;

– третий эксперт: лучший способ - банковский кредит, немного хуже - аренда, значительно хуже - продажа помещений, еще хуже - продажа части акций.

Следовательно,  $A_2$  – лучший способ;  $A_1$  – немного хуже;  $A_4$  – еще хуже;  $A_3$  – намного хуже.

Пусть эксперт заполнил матрицу парных сравнений. Тогда она бы выглядела следующим образом:

Таблица 7.1 - Матрица парных сравнений

$A$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$A_1$	1	1/3	6	5
$A_2$	3	1	8	7
$A_3$	1/6	1/8	1	1/2
$A_4$	1/5	1/7	2	1

Следующим шагом находим цены альтернатив – средние геометрические строк матрицы:

$$C_1 = \sqrt[4]{1 * \frac{1}{3} * 6 * 5} = 1,77;$$

$$C_2 = \sqrt[4]{3 * 1 * 8 * 7} = 3,60;$$

$$C_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{6} * \frac{1}{8} * 1 * \frac{1}{2}} = 0,32;$$

$$C_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{5} * \frac{1}{7} * 2 * 1} = 0,49.$$

Теперь находим сумму цен альтернатив:

$$C = 1,77 + 3,60 + 0,32 + 0,49 = 6,18.$$

Находим веса альтернатив:

$$V_1 = 1,77 / 6,18 = 0,29;$$

$$V_2 = 3,60 / 6,18 = 0,58;$$

$$V_3 = 0,32 / 6,18 = 0,05;$$

$$V_4 = 0,49 / 6,18 = 0,08.$$

После нахождения веса альтернатив произведем проверку на непротиворечивость. Для этого сперва, найдем сумму столбцов матрицы парных спариваний:

$$R_1 = (1 + 3 + 1/6 + 1/5) = 4,36;$$

$$R_2 = (1/3 + 1 + 1/8 + 1/7) = 1,46;$$

$$R_3 = (6 + 8 + 1 + 2) = 17;$$

$$R_4 = (5 + 7 + 1/2 + 1) = 13,5.$$

Рассчитаем вспомогательную величину  $\lambda$  путем суммирования произведений сумм столбцов матрицы на веса альтернатив:

$$\lambda = 4,36 \cdot 0,29 + 1,46 \cdot 0,58 + 17 \cdot 0,05 + 13,5 \cdot 0,08 = 1,26 + 0,85 + 0,85 + 1,08 = 4,04.$$

Найдем величину, которую называют индексом согласования (ИС):

$$ИС = (4,04 - 4) / (4 - 1) = 0,01.$$

Теперь найдем отношение согласованности:

$$ОС = 0,01 / 0,90 = 0,011.$$

В данном примере  $OC = 0,011$ . Таким образом, уточнение экспертных оценок в данном случае не требуется.

Составляем новую таблицу экспертных оценок для метода предпочтений.

Таблица 7.2 – Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)			
	A1	A2	A3	A4
1	2	1	4	3
2	1	2	4	3
3	1	2	3	4

Произведем преобразование матрицы оценок.

Таблица 7.3 – Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)			
	A1	A2	A3	A4
1	2	3	0	1
2	3	2	0	1
3	3	2	2	0

Найдем сумму преобразованных оценок:

$$C_1 = 2+3+3 = 8;$$

$$C_2 = 3+2+2 = 7;$$

$$C_3 = 0+0+2 = 2;$$

$$C_4 = 1+1+0 = 2.$$

Найдем сумму всех оценок:

$$C = 8+7+2+2 = 19.$$

Теперь найдем веса альтернатив:

$$V_1 = 8/19 = 0,42;$$

$$V_2 = 7/19 = 0,36;$$

$$V_3 = 2/19 = 0,11;$$

$$V_4 = 2/19 = 0,11.$$

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).



В данном примере самым важным действием, влияющим на получение дополнительной денежной суммы, является – банковский кредит, следующее действие по важности – сдача производственных помещений в аренду; после него следует – продажа части производственных помещений; а затем следует – продажа части акций предприятий.

Далее выполним проверку экспертных оценок на согласованность. Для этого найдем сумму оценок, указанных экспертами для каждой из альтернатив:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2+1+1 = 4; \\ S_2 &= 1+2+2 = 5; \\ S_3 &= 4+4+3 = 11; \\ S_4 &= 3+3+4 = 10. \end{aligned}$$

Найдем вспомогательную величину А:

$$A = 3(4+1)/2 = 7,5.$$

Найдем вспомогательную величину S:

$$S = (4-7,5)^2 + (5-7,5)^2 + (11-7,5)^2 + (10-7,5)^2 = 37.$$

Теперь требуется найти коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12 \cdot 37}{9 \cdot 4 \cdot 15} = 0,82.$$

Так как  $W \geq 0,5$  степень согласованности экспертных оценок может считаться достаточной.

Чтобы выбрать рациональное решение воспользуемся методом ранга. Для этого построим матрицу экспертных оценок для метода ранга, исходя из сказанного ранее экспертами:

Таблица 1.8 – Матрица экспертных оценок для метода ранга

Эксперты	Альтернативы (факторы)			
	A1	A2	A3	A4
1	8	10	3	4
2	10	8	7	3
3	10	9	6	5

Следующим шагом для нас является нахождение суммарных оценок альтернатив всеми экспертами:

$$C_1 = 8+10+10 = 28;$$

$$C_2 = 10+8+9 = 27;$$

$$C_3 = 3+7+6 = 16;$$

$$C_4 = 4+3+5 = 12.$$

Теперь найдем сумму всех оценок:

$$C = 28+27+16+12 = 83.$$

Найдем веса альтернатив:

$$V_1 = 28/83 = 0,34;$$

$$V_2 = 27/83 = 0,33;$$

$$V_3 = 16/83 = 0,20;$$

$$V_4 = 12/83 = 0,14.$$

Выполним проверку согласованности экспертных оценок. Для этого сперва найдем средние оценки каждой альтернативы:

$$\bar{X}_1 = 28/3 = 9,33;$$

$$\bar{X}_2 = 27/3 = 9,00;$$

$$\bar{X}_3 = 16/3 = 5,33;$$

$$\bar{X}_4 = 12/3 = 4,00.$$

Сейчас можем найти дисперсии оценок каждого эксперта:

$$D_{\alpha 1} = \frac{1}{3} ((8-9,33)^2 + (10-9)^2 + (3-5,33)^2 + (4-4)^2) = 2,73;$$

$$D_{\alpha 2} = \frac{1}{3} ((10-9,33)^2 + (8-9)^2 + (7-5,33)^2 + (3-4)^2) = 1,75;$$

$$D_{\alpha 3} = \frac{1}{3} ((10-9,33)^2 + (9-9)^2 + (6-5,33)^2 + (5-4)^2) = 0,63.$$

После нахождения дисперсии оценок каждого эксперта, найдем сумму оценок каждой альтернативы:

$$D_{a1} = \frac{1}{2} ((8-9,33)^2 + (10-9,33)^2 + (10-9,33)^2) = 1,33;$$

$$D_{a2} = \frac{1}{2} ((10-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2) = 1;$$

$$D_{a3} = \frac{1}{2} ((3-5,33)^2 + (7-5,33)^2 + (6-5,33)^2) = 4,33;$$

$$D_{a4} = \frac{1}{2} ((4-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2) = 1.$$