

# 第十一章 反馈系统

# 课程内容

- 第十一章 反馈系统
  - 反馈系统的基本特性及应用
  - 系统的根轨迹分析方法概念，原理
  - 奈奎斯特稳定性判据原理

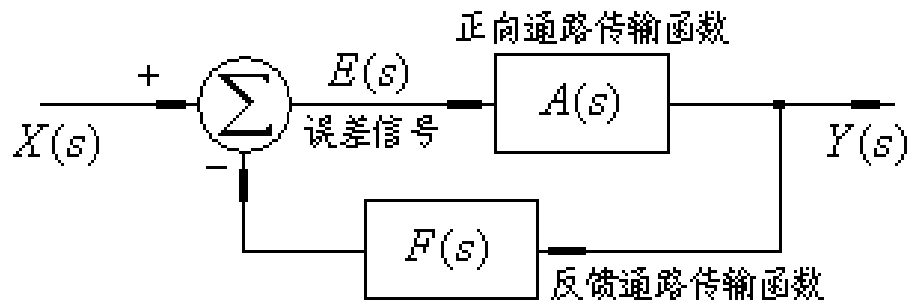
# 第十一章 反馈系统

- § 11.1 反馈系统的基本特性及应用
- § 11.2 系统的根轨迹分析
- § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

# § 11.1 反馈系统的基本特性及应用

利用负反馈技术可以使放大器的许多性能得到改善  
而正反馈又是振荡器电路必不可少的基本工作条件

## 反馈系统的基本模型



$$Y(s) = A(s)E(s) = A(s)[X(s) - F(s)Y(s)]$$

解出  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)}{1 + F(s)A(s)}$

反馈系统许多重要分析都依据如下前提

当环路增益远大于 1 时，反馈系统的传输函数与正向通路的传输函数无关

$$|F(s)A(s)| \gg 1 \quad H(s) \approx \frac{1}{F(s)}$$

# § 11.1 反馈系统的基本特性及应用

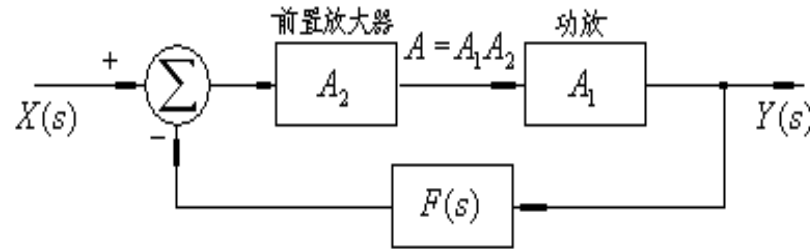
## 1、改善放大器的灵敏度

这里“灵敏度 $S$ ”的定义是  $S = \frac{\text{整个系统增益的相对变化}}{\text{指定元件特性的相对变化}} = \frac{\frac{\Delta H}{H}}{\frac{\Delta A}{A}}$

灵敏度反映的是系统特性变化的不稳定性

设计一增益为10的功放电路，但可被选用的功放模块的性能随环境变化大：环境变化时增益可能下降为5。若直接采用这功放模块，其灵敏度 $S = 1$

$$S = \frac{\frac{\Delta H}{H}}{\frac{\Delta A}{A}} = \frac{\frac{\Delta A}{A}}{\frac{\Delta A}{A}} = \frac{10 - 5}{10 - 5} = \frac{0.5}{0.5} = 1$$



如果在系统中增加一前置放大器  $A_2 = 100$ （这种小功率放大器很便宜），且引入简单电阻分压式反馈  $F = 0.1$ ，则该系统的增益及灵敏度分别为

其中 
$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{H_{10} - H_5}{H_{10}} = \frac{\frac{100 \times 10}{1+100 \times 10 \times 0.1} - \frac{100 \times 5}{1+100 \times 5 \times 0.1}}{\frac{100 \times 10}{1+100 \times 10 \times 0.1}} = \frac{9.9 - 9.8}{9.9} = 0.01$$

花很小代价就使其灵敏度改善 50 倍

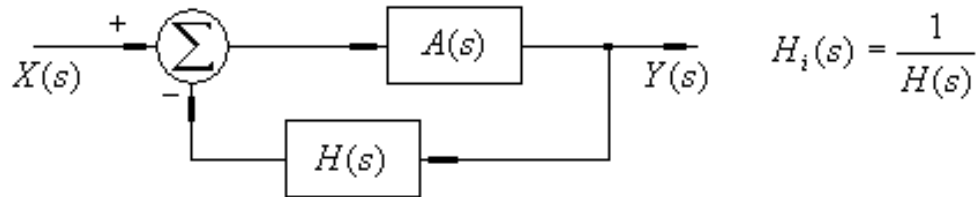
# § 11.1 反馈系统的基本特性及应用

## 2、逆系统 $H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$ 的设计

对于这类问题可以充分利用当环路增益远大于1时，反馈系统的传输函数与正向通路的传输函数无关这一特点

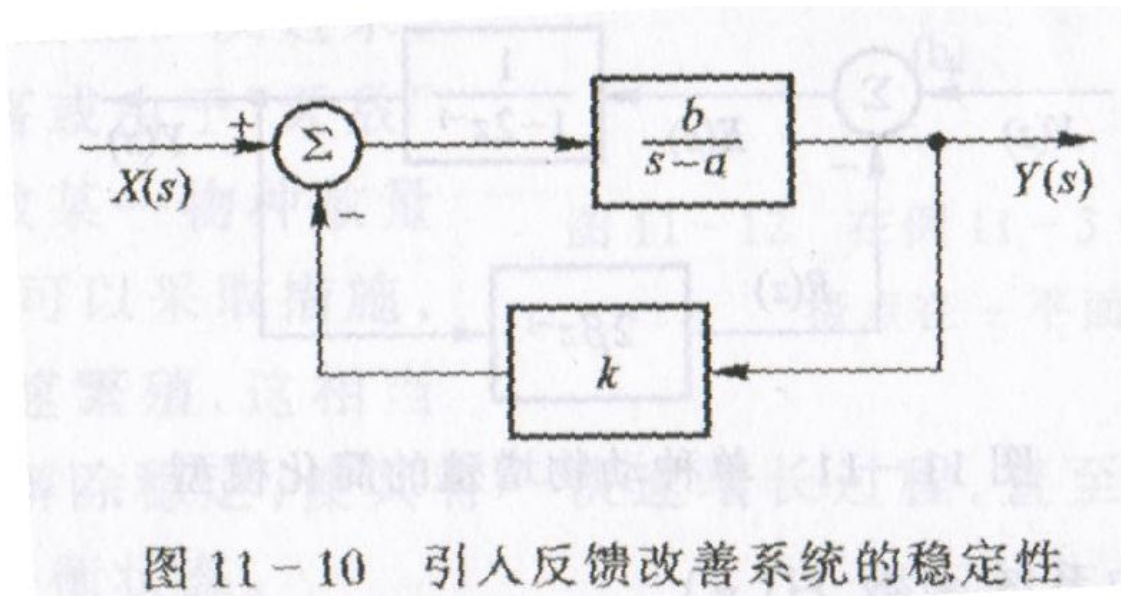
因为这时  $H(s) \approx \frac{1}{F(s)}$

把与原系统同样的结构做到反馈回路中  
在正向通路加放大器  $A(s)$  以确保环路增益  $\gg 1$  条件



# § 11.1 反馈系统的基本特性及应用

## 3、改善系统稳定性



$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F(s)} = \frac{b}{s - a + kb}$$

可将  $s$  平面右半平面的极点移到左半平面

## § 11.2 系统的根轨迹分析

若已知反馈系统极零点位置，就能了解反馈系统的各种特征

另一方面，常希望了解若改变系统某些参数，对系统极、零点有何影响？

系统某些参数连续改变可导致极、零点位置连续改变，对这种位置连续改变将其称之为“根轨迹”

想深入分析反馈系统，对其进行根轨迹分析是一种重要的方法。

这一章仅分析当反馈系统的增益变化时它的极点变化情况

方法1：从解析运算入手，取不同系统增益值，求解它所对应的极点，这样做运算繁琐

方法2：根据一些绘图规则定性描绘根轨迹的分析方法——根轨迹法



## § 11.2 系统的根轨迹分析

### 一、根轨迹的模量条件和幅角条件

将反馈系统传输函数  $H(s) = \frac{A(s)}{1 + F(s)A(s)}$

分母多项式 (如果它可以表示成多项式) 称为该系统的“特征方程”

并将其用有理式表出  $1 + F(s)A(s) = 0$

$$F(s)A(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}$$
$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^n |s - p_k|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} = \frac{\prod_{k=1}^n M_k}{\prod_{i=1}^m N_i} \quad \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{k=1}^n \theta_k = r\pi \begin{cases} K > 0 & r \text{ odd} \\ K < 0 & r \text{ even} \end{cases}$$

其中系数  $K$  为分子多项式和分母多项式最高幂次项的系数之比, 若  $K > 0$  则  $r$  为奇数、 $K < 0$  则  $r$  为偶数, 以模量和幅角各自相对应后得到

这是据极点矢量推出的关系式, 故极点位置坐标 (根轨迹) 必满足这一关系。这一关系即为根轨迹的模量条件和幅角条件。

为方便分析, 一般假定  $K$  在  $(0 \sim +\infty)$  变化, 因而上式中的幅角总和总是  $180^\circ$  的奇数倍。

# § 11.2 系统的根轨迹分析

## 二、根轨迹绘图规则：

上述模量条件和幅角条件的作用仅在于可以从中引出简单定性绘制根轨迹图的规则，绘图规则共有以下8条

(1)、根轨迹始于开环系统函数  $A(s)F(s)$  的极点；止于  $A(s)F(s)$  的零点(零点包含无穷远零点)。从模量条件分析，这一条是显然的。

(2)、根轨迹共有  $n$  条分支。

(3)、根轨迹于  $s$  平面实轴呈镜像对称。

因特征方程是有理多项式，所以极、零点必是共轭对称的，进而根轨迹也必是共轭对称的。

(4)、实轴上若其右边  $A(s)F(s)$  的极零点总和为奇数，则此段实轴是根轨迹的一部分。从幅角条件分析，相对于实轴上的根轨迹的某点来说，那些共轭极、零点的幅角之和为  $2\pi$ ，而实轴左边的极、零点的幅角均为零，那么只有满足这一条幅角条件才成立。

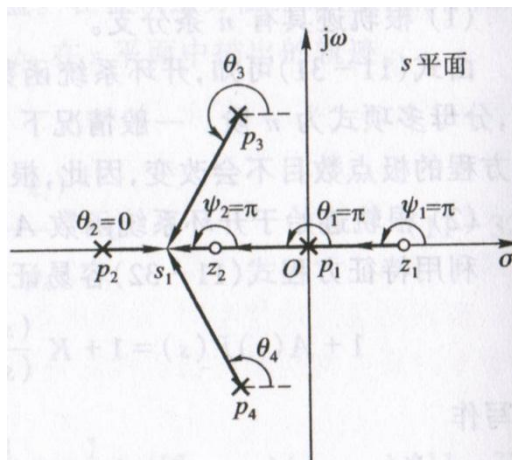


图 11-18 检验实轴上的  $s_1$  点  
是否在根轨迹上

(5)、两支根轨迹的交点坐标 $s_0$ 满足方程： $\frac{d}{ds}[A(s)F(s)] = 0$

说明：设根轨迹的交点为 $s_0$ ，则此交点必是特征方程的重根，因而特征方程可被写成

$$1 + F(s)A(s) = g(s)(s - s_0)^2 = 0$$

当 $s = s_0$ 时，有  $1 + F(s)A(s) = g(s_0)(s - s_0)^2 = 0$

为求出 $s_0$ 的坐标让特征方程对 $s$ 求导后即可得到 $s = s_0$ 。

综合上述过程就是本规则的结论——交点坐标 $s_0$ 满足： $\frac{d}{ds}[1 + F(s)A(s)] = \frac{d}{ds}[F(s)A(s)] = 0$

(6)、根轨迹与虚轴的交点取决于特征方程  $1 + F(j\omega)A(j\omega) = 0$

从上述方程出发，令实部虚部分别为零并解出 $\omega$ 值即可。

此时所对应的 $K$ 值即是划分该系统工作于稳态或非稳态的临界值。

(7)、 $K \rightarrow +\infty$ 时，除 $m$ 个根轨迹分支止于 $A(s)F(s)$ 的零点外，另有 $n-m$ 个分支沿各自渐进线趋向无穷远处的零点。渐进线与实轴的交角为： $l\pi/(n-m)$ ， $l=1,3,5\dots$ 共 $n-m$ 个正奇数。 $K \rightarrow \infty$ 的原因有两种，

从特征方程看

一是  $s \rightarrow z_i$

另一原因是当 $n > m$ 时，当  $s \rightarrow \infty$  时也有  $K \rightarrow \infty$  即：当  $s \rightarrow \infty$  时

$$-K = \frac{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} \approx s^{n-m} \quad (\rightarrow \infty)$$

(8)、渐进线交汇于实轴上的点称为渐进线的重心，其坐标为：

$$\sigma_0 = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m}$$

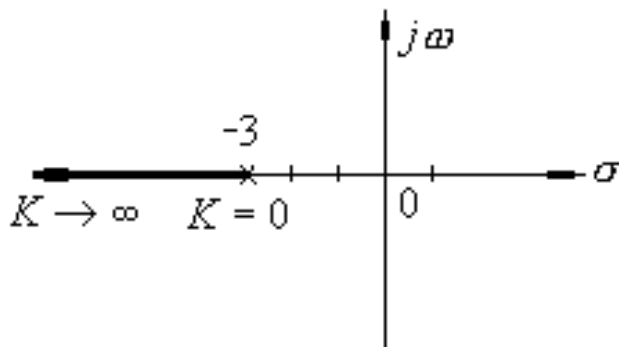
这一规则的证明请看教材

## § 11.2 系统的根轨迹分析

例：设系统开环传输函数为  $A(s)F(s) = \frac{K}{s+3}$  求其根轨迹。

根据规则（2）：根轨迹始于开环系统函数  $A(s)F(s)$  的极点、止于  $A(s)F(s)$  的零点(零点包含无穷远零点)；

根据规则（4）：实轴上若其右边  $A(s)F(s)$  的极零点总和为奇数，则此段实轴是根轨迹的一部分。



仅根据上述两条规则即可画出轨迹图

## § 11.2 系统的根轨迹分析

例(11-7): 求第四章例(4-26)系统的根轨迹, 其开环传输函数为  $A(s)F(s) = \frac{K}{(s+2)(s-1)}$

1、分析根轨迹的起、止点:

此系统有2个极点, 没有有限零点, 因此其根轨迹由起自  $s = -2$ 、 $s = 1$  而分别都终止于无穷远点的两条分支组成。

2、分析根轨迹在实轴上的部分:

根据规则(4), 本题在实轴上2极点之间的部分必是根轨迹的一段。

3、分析根轨迹在实轴上的交点坐标:

交点坐标满足方程:  $\frac{d}{ds}[A(s)F(s)] = \frac{d}{ds} \frac{K}{(s+2)(s-1)} = \frac{-(2s+1)K}{(s+2)^2(s-1)^2} = 0$

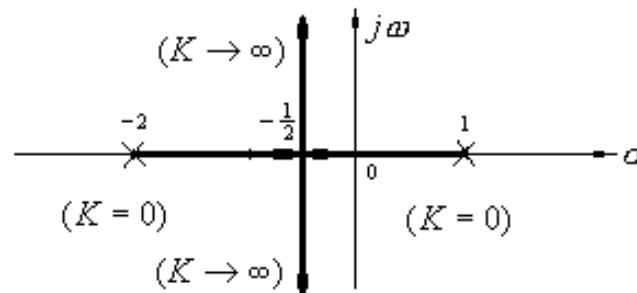
解出:  $s = -\frac{1}{2}$

4、根据规则(7), 渐进线与实轴的交角为:  $\varphi_1 = \frac{l\pi}{n-m} = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

5、根据规则(8), 渐进线交汇于实轴上的点的坐标为:

$$\sigma_0 = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} = \frac{(-2 + 1) - 0}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

综合上述分析有根轨迹图



## § 11.2 系统的根轨迹分析

从上述两个简单例题可以看出，作根轨迹图的主要步骤：

- 1、从开环极点确定起点、分析根轨迹在实轴上的部分、分析根轨迹的交点、
- 2、分析根轨迹的渐进线，从而最后完成连接。简单看看例(11-8)也如是。

实际作图中不涉及对给定系统求解其对应的模量和幅角，这两个条件的作用只是为了引出作图规则而已。

有了根轨迹图，可以了解系统各种工作状态，知道如何调整系统参数来改变系统的稳定性。

关于离散系统的根轨迹图的绘制方法与连续系统的绘制方法非常类似

# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

回顾讨论系统稳定性问题时曾得出结论：

稳定系统要求其系统函数不含右半平面的极点

奈奎斯特于1932年提出了稳定准则，这一准则以正弦输入量的开环稳态响应曲线为基础。

奈奎斯特稳定性判据方法中的三个关键概念：

复轨迹图，围线映射，奈奎斯特图

# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

## 一 复轨迹图

将系统函数  $H(s)$  分别用其实部和虚部表示, 可构造一个与复平面  $s$  具有映射关系的平面

$$H(s) = u(s) + jv(s) = \operatorname{Re}[H(s)] + j\operatorname{Im}[H(s)]$$

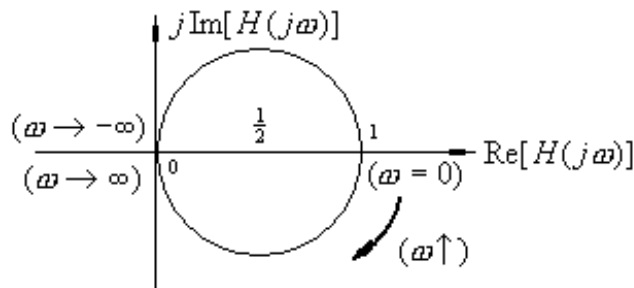
$s$  平面上的每一点都在  $H(s)$  上具有对应的映射点,  $s$  平面上的虚轴被映射为  $H(s)$  平面上的一条曲线

将这条映射在  $H(s)$  平面上的曲线称为系统函数的**复轨迹**

RC积分电路所决定的系统函数:  $H(s) = \frac{1}{1+s}$

将  $s$  平面上的虚轴映射为:  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$

令  $\omega$  从  $-\infty$  变至  $+\infty$  (具体可取  $\omega = -\infty$ 、 $\omega = -1$ 、 $\omega = 0$ 、 $\omega = 1$ 、 $\omega = +\infty$ ) 可绘出RC积分电路的复轨迹图



也可将  $H(s)$  表示为模与辐角的形式来绘出复轨迹图:

$$H(s) = |H(s)| e^{j\phi(s)} \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

由系统频率特性可知

若冲激响应是实函数, 系统的幅频特性是  $\omega$  的偶函数、相频特性是  $\omega$  的奇函数

这导致复轨迹图类似根轨迹图, 也是一个对称于实轴的图形, 即  $\omega$  从  $-\infty$  变至  $0$  的图形与它从  $0$  变至  $+\infty$  的图形彼此对称于实轴

因此绘制复轨迹图时只需画出其中的一半, 另一半根据对称性求出



# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

## 二、围线映射

稳定性分析总是围绕系统函数的极点，而极点来自系统的特征多项式（系统函数分母多项式），为描述方便，用  $G(s)$  来表示反馈系统的特征多项式可以写成

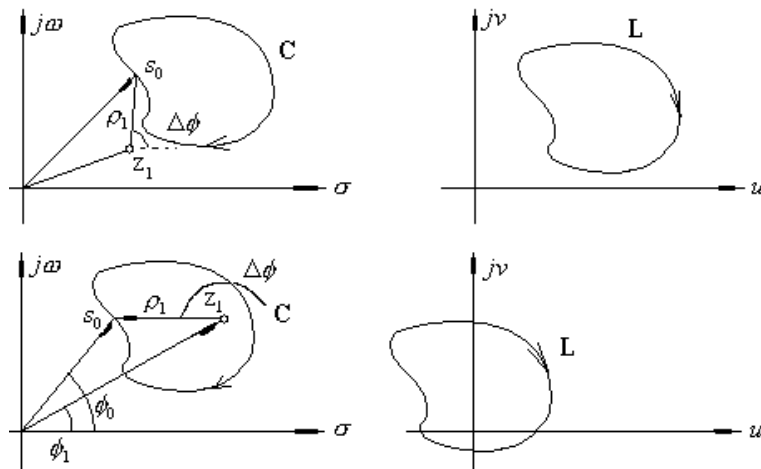
$$G(s) = K \frac{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m}{\rho_a \rho_b \cdots \rho_n} e^{j[(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m) - (\phi_a + \phi_b + \cdots + \phi_n)]} = u(s) + jv(s)$$

其中： $u(s) = \text{Re}[G(s)]$        $v(s) = \text{Im}[G(s)]$

$s$ 平面与 $G(s)$ 平面间映射关系

$s$ 平面零点映射为 $G(s)$ 平面的坐标原点、 $s$ 平面的极点映射为 $G(s)$ 平面的无穷远点

选  $s$  平面上一观察点  $s_0$ ，如果  $s_0$  在  $s$  平面沿顺时针方向走出一封闭曲线  $C$ ，则  $s_0$  在  $G(s)$  平面也将映射出一曲线  $L$ 。



# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

研究这两条曲线之间的内在联系

(1) 当围线 $C$ 内不包含极、零点时, 矢量  $s_0 - z_1 = \rho_1 e^{j\Delta\phi}$

绕围线一周引起辐角变化总量为零, 因而  $G(s)$  总的辐角变化量也为零, 因  $s$  平面的零点映射为  $G(s)$  平面的坐标原点、极点映射为  $G(s)$  平面的无穷远点, 所以曲线 $L$ 也将既不包含原点也不包含无穷远点。

(2) 围线 $C$ 内包含零点但不包含极点时, 矢量  $s_0 - z_1 = \rho_1 e^{j\Delta\phi}$

绕围线一周引起的辐角变化总量为 $-2\pi$ , 这导致在 $G(s)$ 平面上的曲线 $L$ 将绕原点一周; 因为在 $s$ 平面沿围线 $C$ 顺时方向行走时零点在右边, 为使 $G(s)$ 平面上的映射关系一致, 曲线 $L$ 的方向也应当是顺时方向的。由于每一个 $C$ 内零点都引起的辐角变化 $-2\pi$ , 而 $C$ 外极、零点都不贡献, 因此 $G(s)$ 总的辐角变化量为 $-2k\pi$ ,  $k$ 为 $C$ 内零点数。 $G(s)$ 平面上的曲线 $L$ 也将绕原点 $k$ 周。

(3) 围线 $C$ 内包含极点但不包含零时, 与对零点的类似, 只是极点因子出现在 $G(s)$ 的分母上, 因而结论与上述零点的除方向相反外其它都一样。即: 若 $C$ 内有一极点则 $G(s)$ 平面上曲线 $L$ 将逆时针绕原点1周。也可以这样来解释: 在 $s$ 平面沿围线 $C$ 顺时方向行走时极点在右边, 为使 $G(s)$ 平面上的映射关系一致, 无穷远点也应当是在曲线 $L$ 的右边, 因而方向就是逆顺时方向的。

(4) 围线 $C$ 内既包含零点也包含极点时, 综合上述分析,  $G(s)$ 平面上的曲线 $L$ 将绕原点 $R$ 周:  $R = Z - P$  其中 $Z$ 为 $C$ 内零点数、 $P$ 为 $C$ 内极点数。

上述映射理论是奈奎斯特准则的核心。

# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

## 三、奈奎斯特图

在 $s$ 平面设定一个由虚轴及一个半径无穷大包含整个右半平面的特定围线 $C$ 。这个围线 $C$ 将在 $G(s)$ 平面映射出曲线 $L$ ，对于给定的系统函数

$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F(s)} = \frac{A(s)}{G(s)}$$

可以绘制 $G(s)$ 的围线映射图，如果曲线 $L$ 以顺时针方向绕过原点，则该系统不稳定。它意味着 $G(s)$ 有右半平面零点即 $H(s)$ 的右半平面极点。

考察上述 $s$ 平面上的大围线 $C$ 与 $G(s)$ 的关系，从 $G(s)$ 的表达式看：

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

假定上式满足： $n \geq m$  (这是应用Nyquist准则的前提，也是多数反馈系统所满足的情形) 当 $s \rightarrow \infty$ 时 $G(s)$ 等于零或常数，这说明在大围线 $C$ 中半径无穷大的曲线不对围线 $L$ 有影响引起围线 $L$ 变化全部因素都仅取决于虚轴，即在绘制映射围线 $L$ 时，只需要在虚轴上令： $-j\infty \rightarrow s = j\omega \rightarrow +j\infty$ ，在此范围内即可映射出全部围线 $L$ 。

上述方法在具体应用上可以将将在 $G(s)$ 平面得出的结论移植到 $A(s)F(s)$ 平面上，因为 $A(s)F(s) = G(s) - 1$ ，对于具有反馈环路的系统而言， $A(s)F(s)$ 是其开环传输函数，所以判定系统稳定与否的方法可以被叙述为：

在虚轴上令： $-j\infty \rightarrow s = j\omega \rightarrow +j\infty$ ，在此范围内映射出开环传输轨迹围线 $L'$ ，如果 $L'$ 以顺时针方向绕过 $(-1, j0)$ 点，则该系统不稳定。

采用开环传输轨迹分析方法的一个最大好处就是它可以通过实验的方法来完成。

通常把 $A(s)F(s)$ 平面上的开环传输轨迹称为奈奎斯特图

# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

## 四、奈奎斯特判据的应用

方法在具体应用上需要说明：决定系统开环传输轨迹环绕 $(-1, j0)$ 点次数的因素是 $R=Z-P$ ，即与零点个数和极点个数都有关。

实际应用时要确定究竟存在多少极点并不是件容易的事情。

在一般情况下系统的开环传输特性在多数情况下是稳定的，因而其开环传输函数 $A(s)F(s)$ 在虚轴及右半平面无极点，所以我们不必考虑极点因素。

在具体应用上只要开环传输轨迹以顺时针方向绕过 $(-1, j0)$ 点即可判断系统不稳定。

# § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

例题：给定开环传输函数为： $A(s)F(s) = \frac{K_0}{(1 + \frac{s}{\omega_0})^3}$  讨论稳定系统的 $K_0$ 值。

其开环频响特性为： $A(j\omega)F(j\omega) = \frac{K_0}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^3} = \frac{K_0}{[1 + \frac{\omega}{\omega_0}]^{\frac{3}{2}}} e^{j3 \arctan \frac{\omega}{\omega_0}}$

$\omega = 0$ 时： $A(j0)F(j0) = K_0$  且辐角为零；

还可根据上式从一些特殊 $\omega$ 值求出其对应模和辐角，也可指定一些特殊辐角，然后根据

$$\phi = 3 \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

解出  $\omega$  值再确定其所对应的模，然后均匀连接这些特征点即可完成轨迹曲线

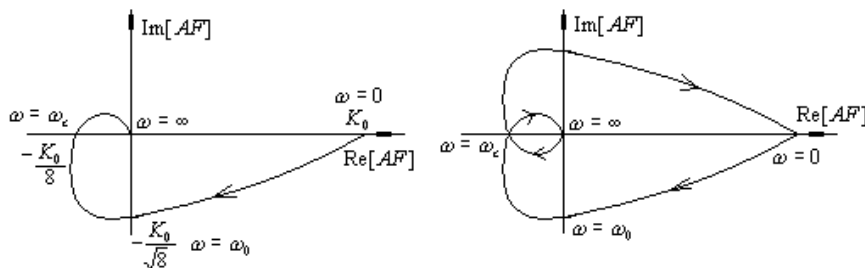
如：取  $\omega = \omega_0$  则  $A(j\omega_0)F(j\omega_0) = \frac{K_0}{(1 + j)^3} = \frac{K_0}{\sqrt{8}} e^{j\frac{3\pi}{2}}$  再取  $\phi = 3 \arctan \frac{\omega_c}{\omega_0} = \pi$  解出  $\frac{\omega_c}{\omega_0} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$|A(j\omega_c)F(j\omega_c)| = \frac{K_0}{[1 + \frac{\omega_c}{\omega_0}]^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_0}{[1 + (\sqrt{3})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_0}{8}$  再取  $\omega = \infty$  则  $A(j\infty)F(j\infty) = 0$

如果要保持系统稳定，上述轨迹曲线应不包含点

$(-1, j0)$ ，而该图左边的边界为  $\omega = \omega_c$  时的值  $-\frac{K_0}{8}$

因此要求  $K_0 < 8$



再对称性地绘出另一半即可。

对于离散系统的分析类似。

## § 11.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

# 习题

11-1, 11-12, 11-13, 11-15, 11-20