信号与系统

信息学院　主干基础课

上节课内容要点回顾

* LTI 系统响应分量的不同分解方式：
  自由、强迫；暂态、稳态；零输入、零状态；

* LTI 系统的冲激响应与阶跃响应：
  两种响应的定义；
  求解方法；

* 卷积：
  卷积积分的定义及物理意义；
  卷积积分的运算方法及运算性质；
  系统的方框图法表示

关于添加u(t)的问题

对于方程：$\begin{cases} r'(t)+ar(t)=b \\ r(0^-)=0 \end{cases}$ 齐次解：$r_0(t)=ke^{-at}$ 特解：$r^*(t)=b/a$

这时满足初条件的完全解是：$r(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})$ 不用加u(t)因子就能够满足原方程；

而对于方程：$\begin{cases} r'(t)+ar(t)=bu(t) \\ r(0^-)=0 \end{cases}$ 齐次解、特解均与上面例子相同。这时满足初条件的完全解应当为：

$$r(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

代入方程验证一下会看到，等式左边没有出现冲激函数项的原因是在运算过程中 δ(t)的系数结果为0的缘故，正好使得等式两边关于奇异函数都平衡，而不是仅仅考虑u(t)项；

若做更进一步的讨论，其实这时采用完全解为：$r(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})$

也是可以的，因为代入方程验证一下会发现，在t=0处出现了 $b = bu(0)$

的情形，因此如果补充定义u(0)=1的话，也是可以勉强接受的。总之，是否人为添加u(t)，完全取决于代入方程验证后，是否在t>=0_的整个时间轴上满足原方程。

第二章　　连续时间系统的时域分析

§2.5　卷积　　（六、卷积运算举例）

§2.6　用微分方程分析法分析随机信号问题

六、卷积运算举例：

（1）用于推导线性系统稳定性的时域判别条件（稳定系统指若输入激励有界则响应亦有界）

线性系统的稳定性条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \le M < \infty$$

充分性：若满足该条件，则只要输入激励有界，输出响应亦有界：

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)e(t-\tau)|\,d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||e(t-\tau)|\,d\tau \le \int_{-\infty}^{\infty} k_1 |h(\tau)|\,d\tau = k_1\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

必要性：若系统不满足该条件，必存在有界激励使系统输出无界：

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

$$e(-t)=\mathrm{sgn}[h(t)]=\begin{cases}-1, & h(t)<0\\ 0, & h(t)=0\\ 1, & h(t)>0\end{cases}、r(0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

从稳定性角度看系统的激励响应关系……

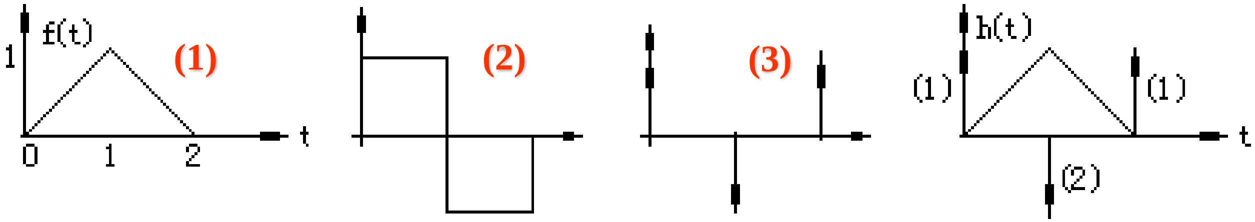
例：判断由下述激励响应关系所决定的系统是否是稳定的：

$$h(t)=\delta'(t)$$

$$\because \quad \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta'(t)|\,dt \;\longrightarrow\; \infty$$

$\therefore$ 系统不稳定

（2）已知LTI系统在e(t)=sintu(t)激励下的零状态响应f(t)如图：试求系统的冲激响应：



解：因为三角函数具有微分后函数形式不变（仍为三角函数）的特征，可利用这一特征和卷积运算的微分性质求解：

$$f(t) = \sin t u(t) * h(t) \qquad (1)$$

$$f'(t) = [\cos t u(t) + \sin t \delta(t)] * h(t) = \cos t u(t) * h(t) \qquad (2)$$

$$f''(t) = [-\sin t u(t) + \cos t \delta(t)] * h(t) = [\delta(t) - \sin t u(t)] * h(t) = h(t) - \sin t u(t) * h(t) \qquad (3)$$

(1)+(3): $h(t) = f(t) + f''(t)$ 结果如图。

（3）设RC环节的冲激响应为：h(t)=e^{-t}u(t) ，考察用n个相同的RC低通滤波器串联形成的级连系统的冲激响应。

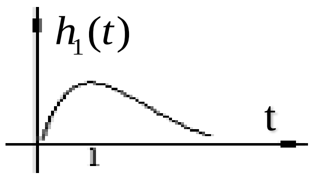
级连系统的合成冲激响应是各子系统的卷积，n个子系统的响应是其连续卷积：

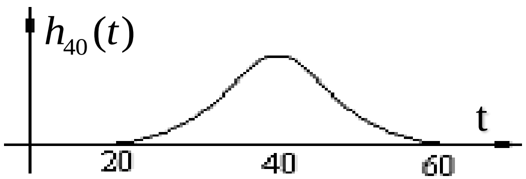
$$h_1(t) = te^{-t}u(t)$$

$$h_2(t) = \tfrac{1}{2}t^2e^{-t}u(t)$$

$$h_3(t) = \tfrac{1}{6}t^3e^{-t}u(t)$$

……





中心极限定理

$$h_n(t) = e^{-t}u(t) * e^{-t}u(t) * \ldots * e^{-t}u(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-t}u(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}}$$

一般情况下： $$h_n(t) = h(t) * h(t) * \ldots * h(t) \approx \frac{K}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{(t-m_n)^2}{2\sigma_n^2}}$$

能量信号间的卷积结果，比任一被卷积的信号都更平滑

（4）卷积积分涉及的主要应用：

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

求系统的零状态响应；

解卷积(或反卷积)问题；

系统求逆问题；

……

（5）卷积积分的收敛性问题：（卷积运算没有收敛性限制）

$$1*e^{-t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau=-e^{-\tau}\Big|_0^{\infty}=1$$

$$1*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)d\tau$$

$$u(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$u(t)*u(t)=t\cdot u(t)=R(t)$$

周期卷积：$r(t)=e(t)\otimes h(t)=\dfrac{1}{T}\int_0^T e(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 0\le t\le T$

$$r(t)=e(t)\otimes h(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

（6）卷积积分的 MATLAB 运算：

$f_1(t)=t\cdot u(t)$ 、 $f_2(t)=\begin{cases} t\cdot e^{-t} & t\ge 0 \\ e^{t} & t<0 \end{cases}$ 试求：$f_3(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$t_1=1:0.01:2;$

$f_1=t_1.*(t_1>0);$

$t_2=-1:0.01:2;$

$f_2=t_2.*\exp(-t_2).*(t_2>0)$

$\quad+\exp(t_2).*(t_2<0);$

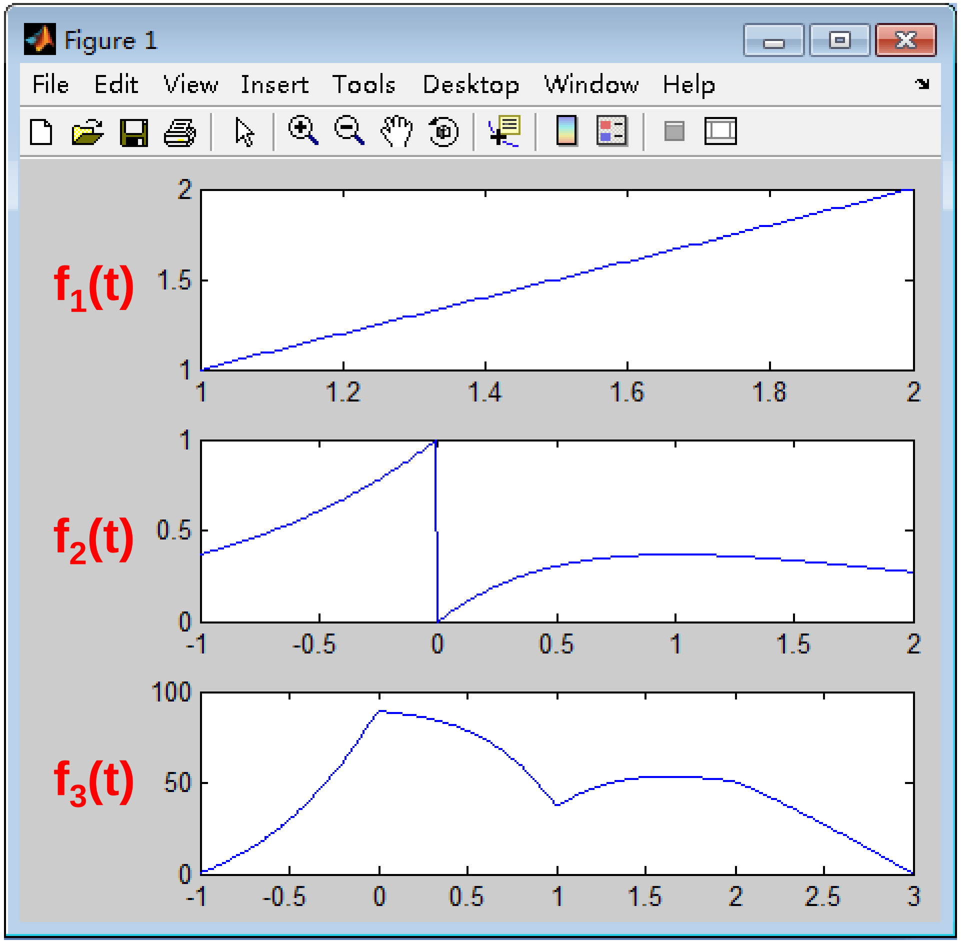
$t_3=-1:0.01:3;$

$c=conv(f_1,f_2);$

$subplot(3,1,1), plot(t_1, f_1);$

$subplot(3,1,2), plot(t_2, f_2);$

$subplot(3,1,3), plot(t_3, c);$



用微分方程分析法分析随机信号问题

定解问题为：
$$\begin{cases} a_n \dfrac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dfrac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = X(t) \\ \text{起始条件为零：} \ Y(0) = Y'(0) = \dots = Y^{(n-1)}(0) = 0 \\ \text{已知} \ E\{X(t)\} = m_X(t) \quad \text{求}: m_Y(t) \end{cases}$$

（1）求均值$m_Y(t)$：

对微分方程两端分别求期望：$E\left\{a_n \dfrac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dfrac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t)\right\} = E\{X(t)\}$

对起始条件等式两端求期望：$E\{Y(0)\} = E\{Y'(0)\} = \dots = E\{Y^{(n-1)}(0)\} = 0$

得到：
$$\begin{cases} a_n \dfrac{d^n m_Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1} m_Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dfrac{dm_Y(t)}{dt} + a_0 m_Y(t) = m_X(t) \\ m_Y(0) = m_Y'(0) = \dots = m_Y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

微分方程分析法：

定解问题为：
$$\begin{cases} a_n \dfrac{d^nY(t)}{dt^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\dfrac{dY(t)}{dt} + a_0Y(t) = X(t) \\ \text{起始条件为零：} \quad Y(0) = Y'(0) = \dots = Y^{(n-1)}(0) = 0 \\ \text{已知 } R_X(t_1,t_2) \quad \text{求：} \quad R_Y(t_1,t_2) \end{cases}$$

（2）求相关函数$R_Y(t_1,t_2)$：

方程式中令 $t=t_2$，再对微分方程两端分别乘以$X(t_1)$后求期望：

$$E\left\{a_nX(t_1)\frac{d^nY(t_2)}{dt_2^n} + \dots + a_1X(t_1)\frac{dY(t_2)}{dt_2} + a_0X(t_1)Y(t_2)\right\} = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$a_n\frac{\partial^n R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2^n} + \dots + a_1\frac{\partial^n R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2} + a_0R_{XY}(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2)$$

方程式中令 $t=t_1$，再对微分方程两端分别乘以$Y(t_2)$后求期望：

$$a_n\frac{\partial^n R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1^n} + \dots + a_1\frac{\partial^n R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1} + a_0R_Y(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2)$$

对起始条件式乘以$X(t_1)$后求期望：

$$R_{XY}(t_1,0) = \frac{\partial R_{XY}(t_1,0)}{\partial t_2} = \dots = \frac{\partial^{n-1}R_{XY}(t_1,0)}{\partial t_2} = 0$$

类似有：
$$R_Y(t_1,0) = \frac{\partial R_Y(0,t_2)}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial^{n-1}R_Y(0,t_2)}{\partial t_1} = 0$$

将原来关于线性系统激励响应关系的定解问题：

$$
\begin{cases}
a_n \dfrac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n\text{-}1} \dfrac{d^{n\text{-}1} Y(t)}{dt^{n\text{-}1}} + \ldots + a_1 \dfrac{dY(t)}{dt} + a_0 Y(t) = X(t) \\
\text{起始条件为零：} \quad Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n\text{-}1)}(0) = 0 \\
\text{已知 } R_X\left(t_1,t_2\right) \quad \text{求：} \quad R_Y\left(t_1,t_2\right)
\end{cases}
$$

转换为关于相关函数$\mathrm{R_Y}\left(\mathrm{t_1,t_2}\right)$的定解问题如下：

$$
\begin{cases}
a_n \dfrac{\partial^n R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2^n} + \ldots + a_1 \dfrac{\partial^n R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2} + a_0 R_{XY}(t_1,t_2) = R_X\left(t_1,t_2\right) \\
a_n \dfrac{\partial^n R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1^n} + \ldots + a_1 \dfrac{\partial^n R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1} + a_0 R_Y(t_1,t_2) = R_{XY}\left(t_1,t_2\right) \\
R_{XY}(t_1,0) = \dfrac{\partial R_{XY}(t_1,0)}{\partial t_2} = \ldots = \dfrac{\partial^{n-1} R_{XY}(t_1,0)}{\partial t_2} = 0 \\
R_Y(t_1,0) = \dfrac{\partial R_Y(0,t_2)}{\partial t_1} = \ldots = \dfrac{\partial^{n-1} R_Y(0,t_2)}{\partial t_1} = 0
\end{cases}
$$

例：给定微分方程定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt}+aY(t)=X(t) & a\text{为常数，}X(t)\text{为平稳随机过程，}E\{X(t)\}=\lambda, \\ Y(0)=0 & R_X(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau), \quad \text{试分析}Y(t)\text{的统计特性} \end{cases}$$

关于均值的定解问题：$\begin{cases} \dfrac{dm_Y(t)}{dt}+am_Y(t)=\lambda \\ m_Y(0)=0 \end{cases}$ 解为：$m_Y(t)=\dfrac{\lambda}{a}(1-e^{-at})$

关于相关函数的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2^n}+aR_{XY}(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau) \\ R_{XY}(t_1,0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1^n}+aR_Y(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2) \\ R_Y(0,t_2)=0 \end{cases}$$

联立可解得：$R_{XY}(t_1,t_2)=\dfrac{\lambda^2}{a}(1-e^{-at_2})+\lambda e^{-a(t_2-t_1)}$

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{a^2}(1-e^{-at_1})(1-e^{-at_2})+\frac{\lambda}{2a}e^{-a(t_2-t_1)(1-e^{-2at_1})}$$

第 五 讲

第三章 傅里叶分析

§3.1 周期信号的傅氏分析_傅里叶级数

3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数

3.1.2 指数形式的傅里叶级数

3.1.3 函数的对称性与傅氏级数系数的关系

3.1.4 周期信号的傅氏分析

3.1.5 例题

§3.1　周期信号的傅氏分析_傅里叶级数

从简谐波信号说起：

考察冲激响应为h(t)的系统对于简谐波信号 $e^{j\omega t}$ (−∞<t<+∞)的零状态响应：

$$r(t) = e^{j\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \cdot H(\omega)$$

3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数

给定完备正交函数集：

$$\{\cos n\omega_1 t,\ \ \sin n\omega_1 t\}\quad n=0.1.2\ldots\quad t_0 \le t \le t_0+T_1\quad (T_1=2\pi/\omega_1)$$

其正交性体现在：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega_1 t\cos m\omega_1 t dt=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{T_1}{2} & n=m\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega_1 t\sin m\omega_1 t dt=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{T_1}{2} & n=m\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega_1 t\sin m\omega_1 t dt=0$$

设周期为T_1的信号$f(t)$ 可表示为：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

以$\cos k\omega_1 t$乘 $f(t)$ 且在$0\le t\le T_1$ 上积分：

$$\int_0^{T_1} f(t)\cos k\omega_1 t dt=a_k\frac{T_1}{2}\quad a_k=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos k\omega_1 t dt$$

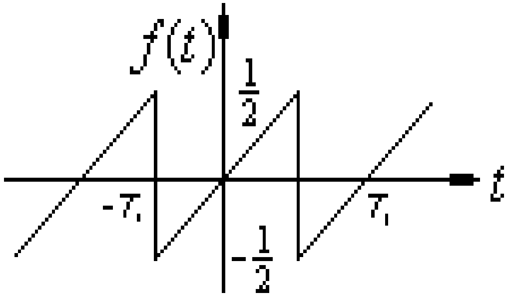
以 $\sin k\omega_1 t$ 乘 $f(t)$ 且在$0\le t\le T_1$ 上积分：

$$\int_0^{T_1} f(t)\sin k\omega_1 t dt=b_k\frac{T_1}{2}\quad b_k=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin k\omega_1 t dt$$

等号两端在 $0\le t\le T_1$ 上积分：

$$\int_0^{T_1} f(t)dt=a_0 T_1\qquad a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt$$

例：求锯齿波信号的傅里叶级数：



在一周期内函数可表为：

$$f(t) = t / T_1 \quad -\frac{T_1}{2} \le t \le \frac{T_1}{2}$$

$$a_0 = 0$$

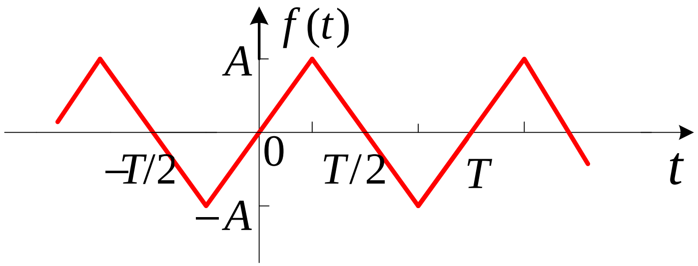
$$a_k = 0$$

$$b_k = \tfrac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} (t / T_1) \sin k\omega t dt = -(-1)^k \frac{1}{\pi k}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\pi n} \sin n\omega_1 t = \frac{1}{\pi} (\sin \omega_1 t - \tfrac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \tfrac{1}{3} \sin 3\omega_1 t ......)$$

基频分量　二次谐波分量

例：求三角波信号的傅氏级数



$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{4A}{T}t & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{4}\\[2ex] -\dfrac{4A}{T}t+2A & \dfrac{T}{4}\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2}\end{cases}$$

$$a_0=0$$

$$a_k=0$$

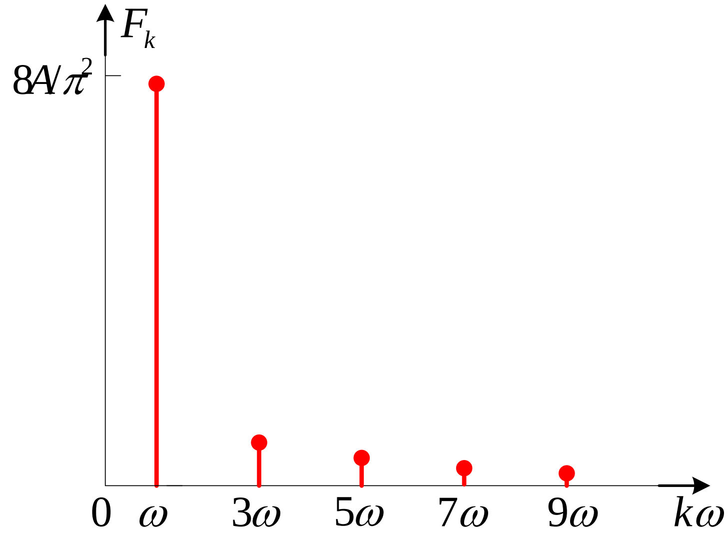
$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\frac{4A}{T}t\sin k\omega t dt-\frac{4}{T}\int_{T/4}^{T/2}\left(\frac{4A}{T}t-2A\right)\sin k\omega t dt$$

$$b_k=\begin{cases}\dfrac{8A}{k^2\pi^2} & k=1,5,9,\cdots\\[2ex] -\dfrac{8A}{k^2\pi^2} & k=3,7,11\cdots\end{cases}$$

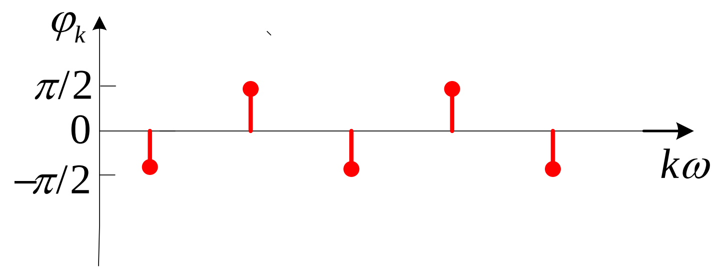
所求傅里叶级数

$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t-\frac{1}{7^2}\sin 7\omega t+\cdots\right)$$

振幅频谱图：



相位频谱图：



傅里叶级数理论首先需解决的基本问题：

（Fourier级数的存在性、收敛性、唯一性问题）

周期信号f(t)满足什么条件，其Fourier级数才存在？

当满足这些条件时，其Fourier级数收敛么？

若Fourier级数收敛了，是否对所有的t，该级数都能收敛到f(t)？

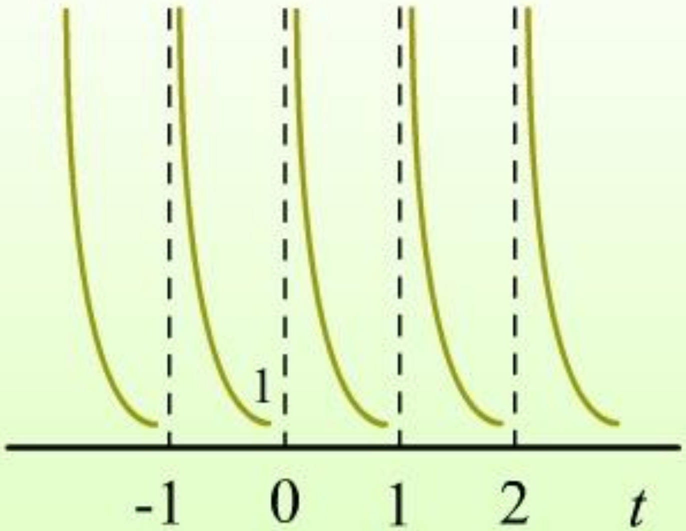
狄氏(Dirichlet)条件(充分条件)：

（1）在一周期内的间断点的数目为有限个；

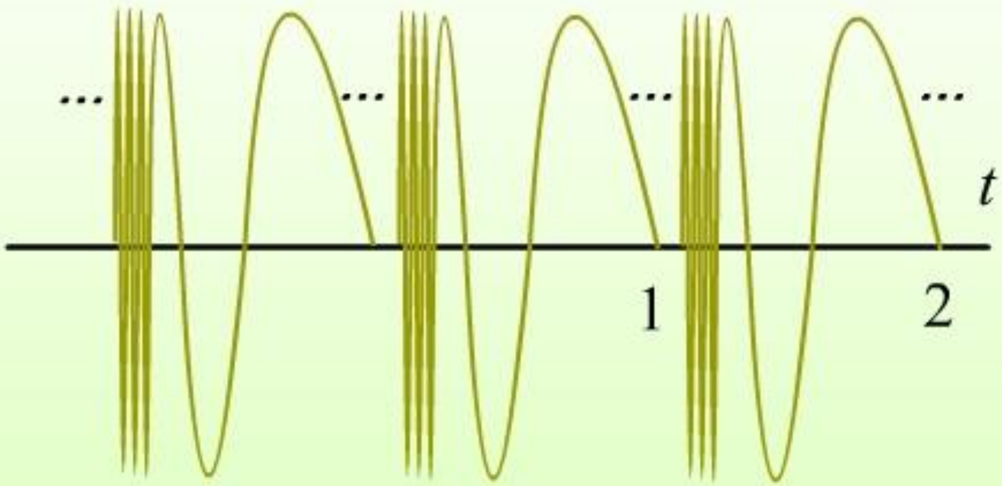
（2）在一周期内的极值点的数目为有限个；

（3）在一周期内信号是绝对可积的。

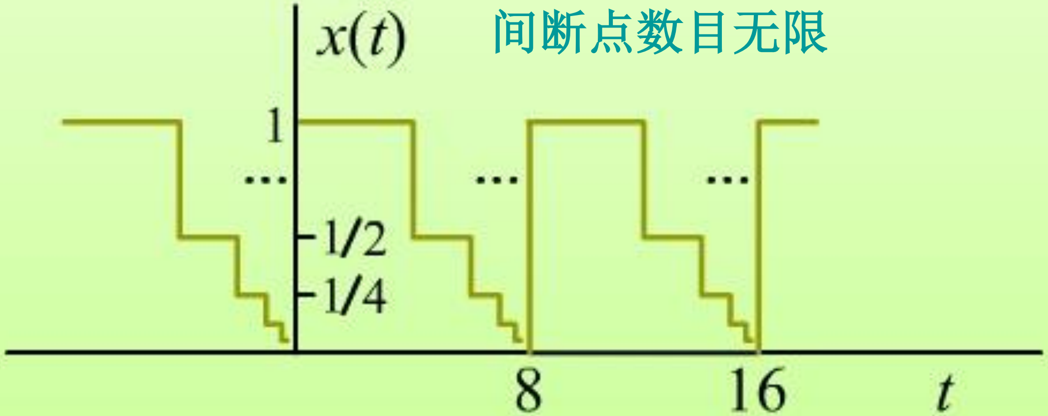
不绝对可积



极值点数目无限

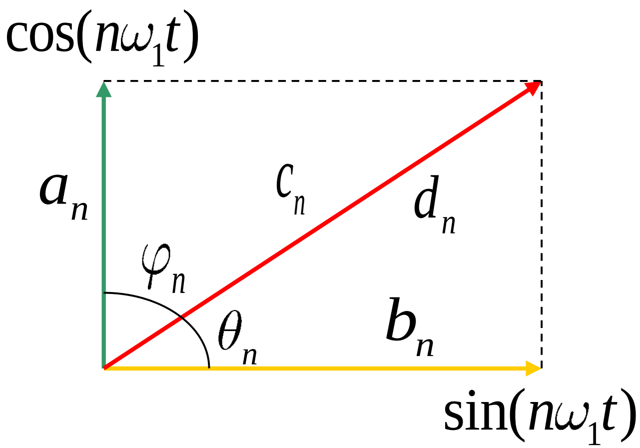


间断点数目无限



三角傅里叶级数的同频率合成：

设： $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(n\omega_1 t+\theta_n)$



从 cos 的角度看 c_n 落后 a_n 有 φ_n： $\varphi_n=-tg^{-1}\frac{b_n}{a_n}$

从 sin 的角度看 d_n 超前 b_n 有 θ_n： $\theta_n=tg^{-1}\frac{a_n}{b_n}$

且两者都有： $c_0=d_0=a_0$ $c_n=d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$$c_n=c_n(n\omega_1) \qquad \varphi_n=\varphi_n(n\omega_1)$$

分别表示分量的幅度分布特性和相位分布特性，称为幅度频谱和相位频谱，这种表示方式也被称为“傅里叶级数的极点形式”。

3.1.2 指数形式的傅里叶级数

$\{e^{jn\omega_1 t}\}$ $n=0.\pm1.\pm2\ldots$ 在 $0\le t\le T$ 上构成完备正交函数集

其正交性表现为： $\int_0^T e^{jn\omega_1 t}e^{-jm\omega_1 t}dt=\begin{cases}0 & n\ne m\\ T_1 & n=m\end{cases}$

设：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$ .... (1)

根据复变函数的正交条件：$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt=0$

以 $e^{-jk\omega_1 t}$ 乘以(1)式两端，且在 $0\le t\le T$ 上积分：

$$\int_0^{T_1} f(t)e^{-jk\omega_1 t}dt=F_kT_1 \qquad F_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$$

指数形式与三角级数形式傅里叶级数系数间的关系

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=1}^{\infty}F_{-n} e^{-jn\omega_1 t}$$

$$f(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(F_n+F_{-n})\cos n\omega_1 t+j(F_n-F_{-n})\sin n\omega_1 t]$$

根据傅里叶级数的唯一性性质：$F_0=a_0$、$(F_n+F_{-n})=a_n$、 $j(F_n-F_{-n})=b_n$

因此两种级数在本质上完全一致，借助于欧拉公式 $e^{-j\omega_1 t}=\cos k\omega_1 t-j\sin k\omega_1 t$

可将两种展开式联系起来：

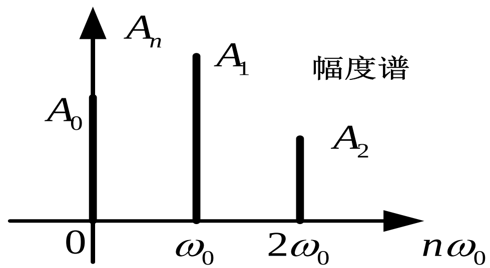
$$F_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)e^{-jk\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)[\cos k\omega_1 t-j\sin k\omega_1 t]dt=\frac{a_k}{2}-j\frac{b_k}{2}$$

$$|F_k|=\tfrac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2}=\tfrac{1}{2}c_k$$

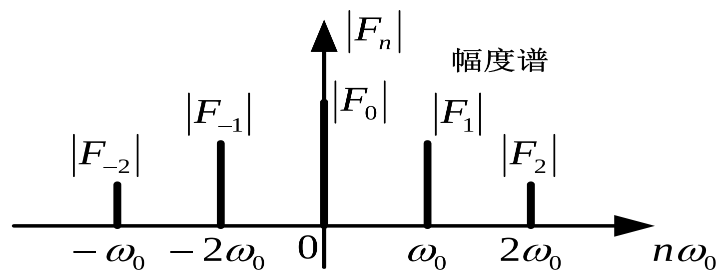
周期信号的频谱图表示

$$f(t)=A_0+A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)$$

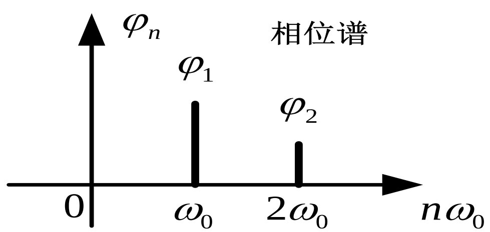
$$=F_0+F_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+F_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+F_{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}+F_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}$$



(a)

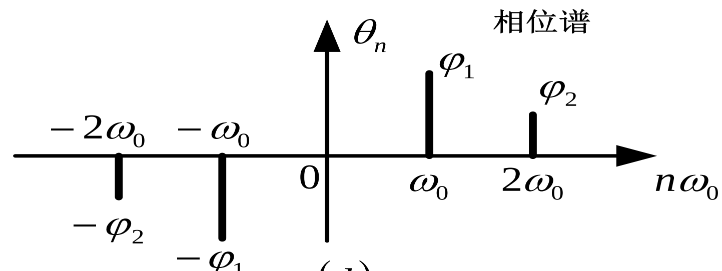


(c)



(b)

单边谱



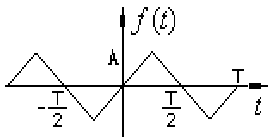
(d)

双边谱

信号总功率是各分量功率之和： $p=\sum_{n=-N}^{N}|F_n|^2=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{N}|F_n|^2=A_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}A_n^2$

3.1.3 函数的对称性与傅氏级数系数的关系

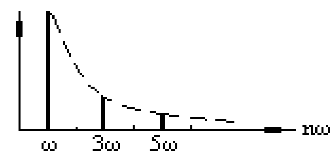
（1）信号为奇函数：$f(t)=-f(-t)$



$$a_0=a_n=0 \quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt=\frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(t)\sin n\omega t dt$$

在 $-\frac{T}{4}\le t\le\frac{T}{4}$ 区间有 $f(t)=\frac{4A}{T}t$ $\quad\therefore b_n=\frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}(\frac{4A}{T}t)\sin n\omega t\mathrm{dt}=\frac{8A}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$

$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-......)$$



$$F_n=\frac{a_n}{2}-j\frac{b_n}{2}=-j\frac{b_n}{2}$$

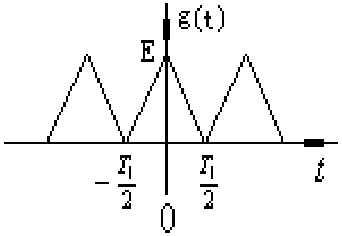
本题不仅只有奇分量且只有奇次谐波，这是由 $f(t\pm\frac{T}{2})=-f(t)$ 特征所决定的。

当信号具有 $f(t)=-f(-t)$ $f(t\pm\frac{T}{2})=-f(t)$ 双重对称性时，就有：

$$a_0=a_n=0 \quad b_n=\frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\sin n\omega t$$

（2） 信号为偶函数： $f(t)=f(-t)$

$$g(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}[\cos\omega t+\frac{1}{9}\cos 3\omega t+\frac{1}{25}\cos 5\omega t+\dots]$$



对于周期函数的偶函数而言，它不仅对称于纵轴，而且对称于所有t=T/2的纵坐标线；

三角傅里叶展开式中仅含有余弦项：

$$b_n=0 \qquad a_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt \qquad a_0=\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt$$

对于指数傅里叶展开式而言： $F_n=\frac{a_n}{2}-j\frac{b_n}{2}=\frac{a_n}{2}$

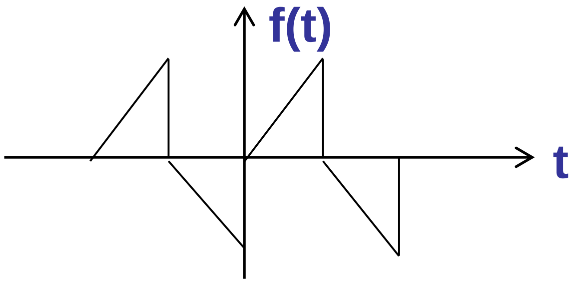
级数系数为实数，由于相频特性取值只有0和π，幅频、相频特性可由同一图形表示。

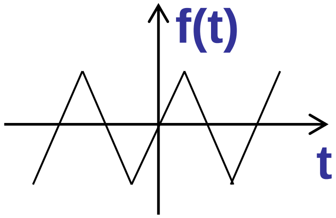
本例图形只是前例图形的简单变换，即两信号间有如下关系：

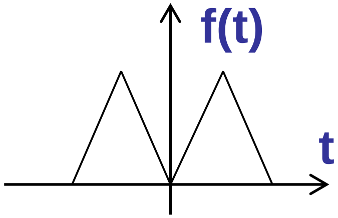
$g(t)=\frac{E}{2}+f(t+\frac{T}{4})$ $\mathrm{T}_1=2\mathrm{T}$ $E=2A$ 可以直接进行变换得出级数展开的结果。

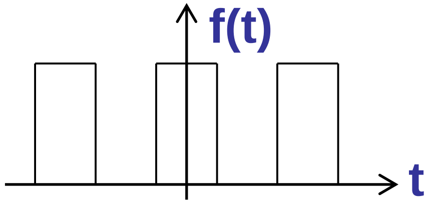
此例说明：信号的时域位移使其傅氏级数仅发生相位特性的变化，幅频特性不变。

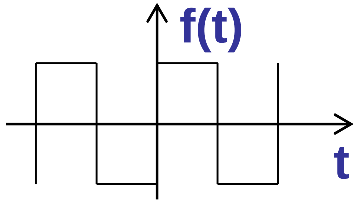
(3) 关于具有半周期翻转对称特征类型信号的频谱特点： $f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$

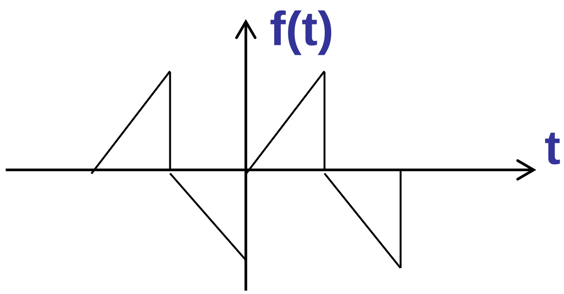












$$f(t) = -f(t \pm \tfrac{T_1}{2})$$

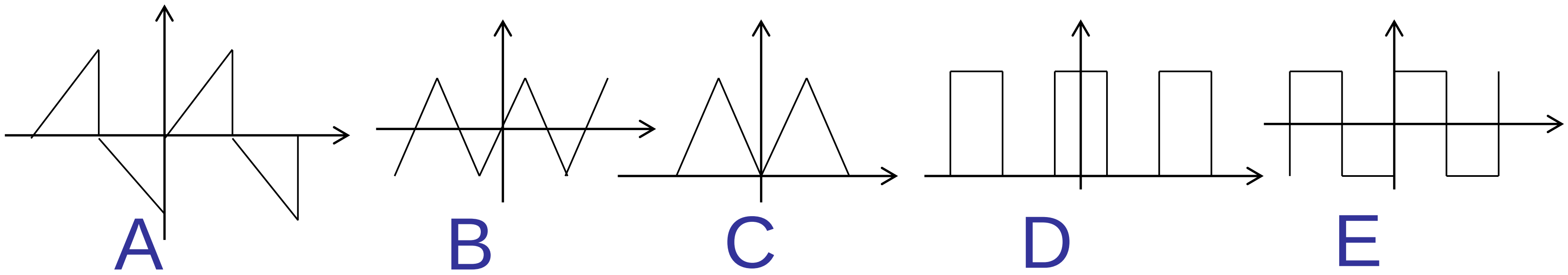
$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt + \frac{2}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}}^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt$$

在第二项中令： $t = \tau + \frac{T_1}{2} \quad dt = d\tau$

$$\frac{2}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}}^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(\tau + \tfrac{T_1}{2})\cos n\omega_1 (\tau + \tfrac{T_1}{2}) d\tau$$

$$= -\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(\tau)\cos(n\omega_1 \tau + n\pi) d\tau$$

$f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$ **此类信号仅含奇次谐波！**



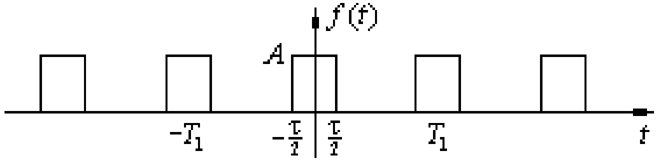
A：含有基波及奇次谐波的正弦、余弦项

B、E：仅含基波及奇次谐波的正弦项

C、D：仅含直流、基波及奇次谐波的余弦项

“B,C”; “D,E”：其间仅是位移差异，频谱无实质不同

3.1.4 周期信号的傅氏分析



$$a_0 = \frac{A\tau}{T_1} \qquad a_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{n\pi}\sin\frac{n\omega_1\tau}{2} \qquad b_n = 0$$

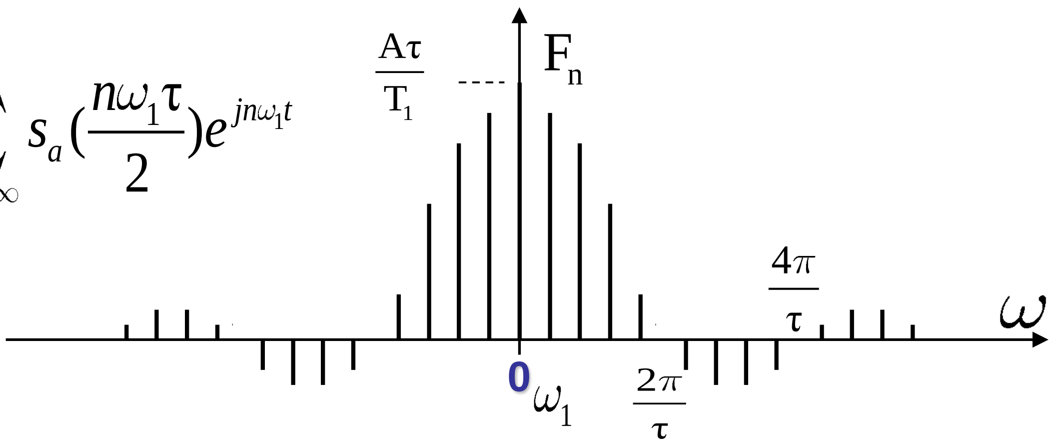
常写成抽样函数的形式：$s_a(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad a_n = \frac{2A\tau}{T_1} s_a(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\tau}{T_1} s_a(\frac{n\omega_1\tau}{2})\cos(n\omega_1 t)$$

$$F_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} = \frac{a_n}{2} = \frac{A\tau}{T_1} s_a(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(\frac{n\omega_1\tau}{2}) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$



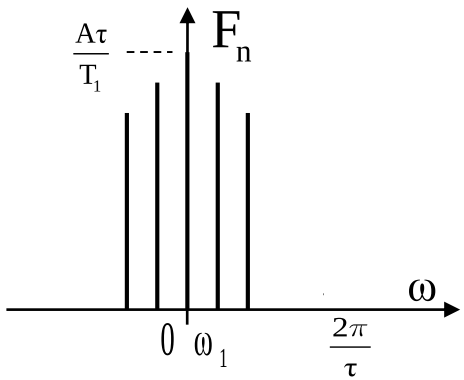
周期信号的频谱一般具有以下特性：

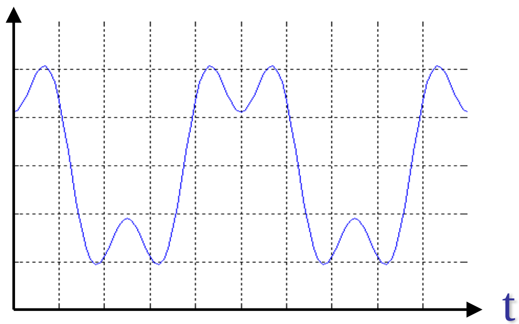
离散性： 谱线间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ ；

谐波性： 由各次谐波分量叠加构成，各次谐波分量的幅度正比于 $A\tau/T_1$；

收敛性： 谱线的幅度按 F_n 所决定的包络曲线变化，主要能量集中在第一包络内。

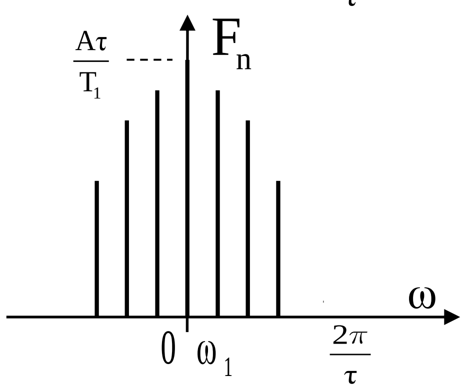
周期信号f(t)与其傅氏级数在能量上相等：$\overline{f^2(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$

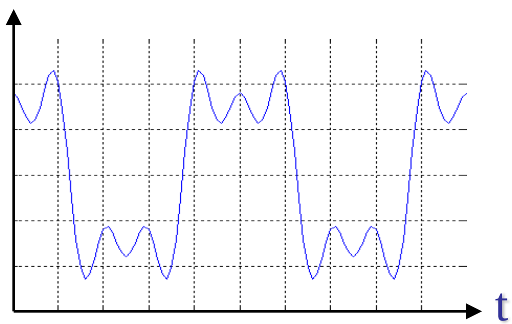




设： $f_N(t) = \frac{A\tau}{T_1} \sum_{k=-N}^{N} s_a\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) e^{jk\omega_1 t}$

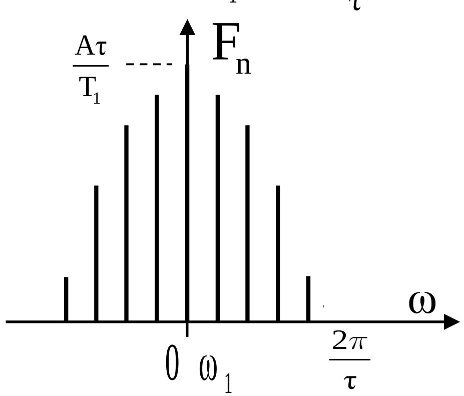
$$\Delta\varepsilon = \overline{f^2(t)} - \overline{f_1^2(t)} \approx 0.05\mathrm{A}^2$$

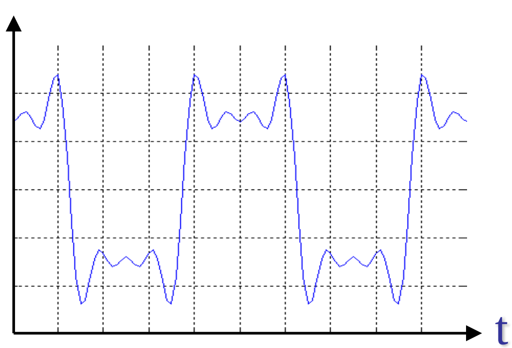




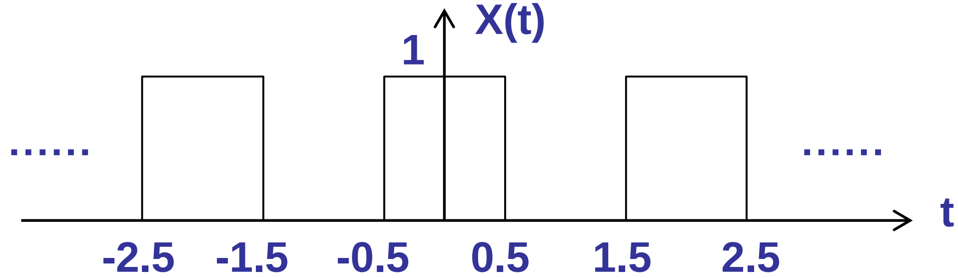
$$\Delta\varepsilon = \overline{f^2(t)} - \overline{f_3^2(t)} \approx 0.02\mathrm{A}^2$$

$$\Delta\varepsilon = \overline{f^2(t)} - \overline{f_5^2(t)} \approx 0.015\mathrm{A}^2$$

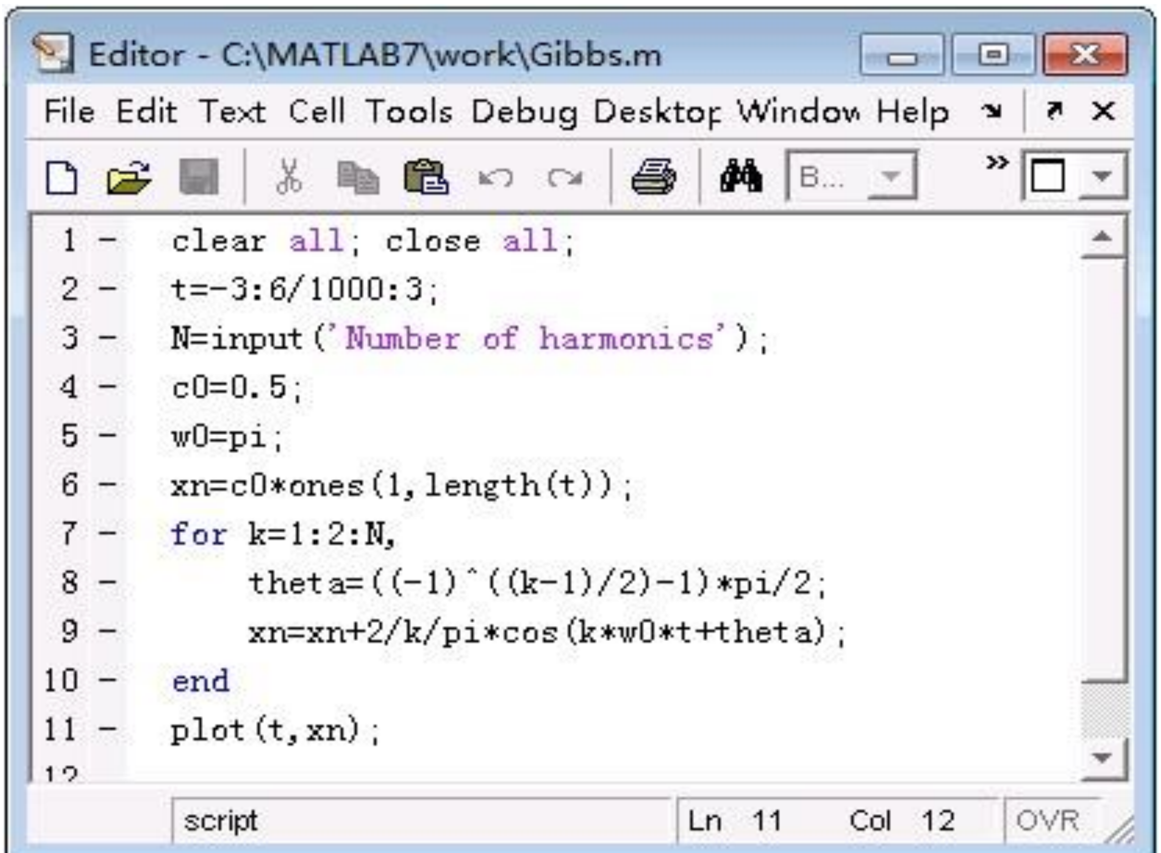




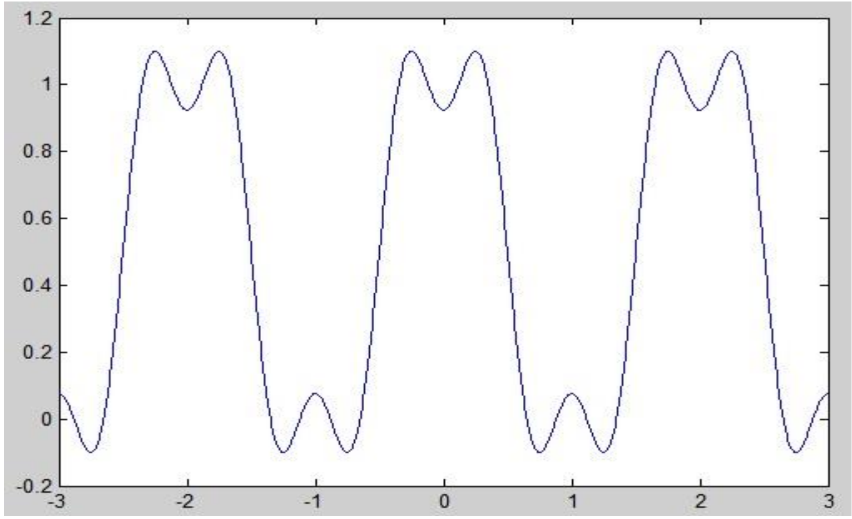
$$\Delta\varepsilon = \overline{f^2(t)} - \overline{f_7^2(t)} \approx 0.013\mathrm{A}^2$$



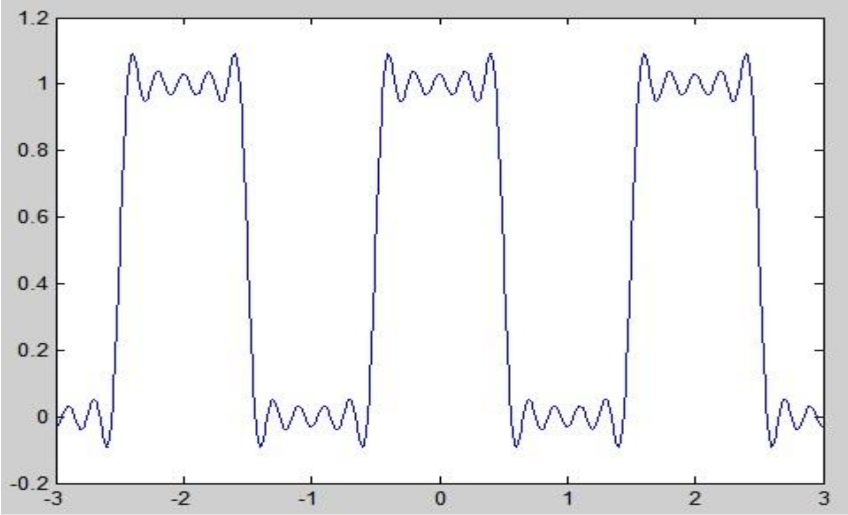
$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ odd}}^{N} \frac{2}{k\pi}\cos(k\pi t + [(-1)^{(k-1)/2} - 1]\frac{\pi}{2}) \qquad x(t) = \lim_{N\to\infty} x_N(t)$$



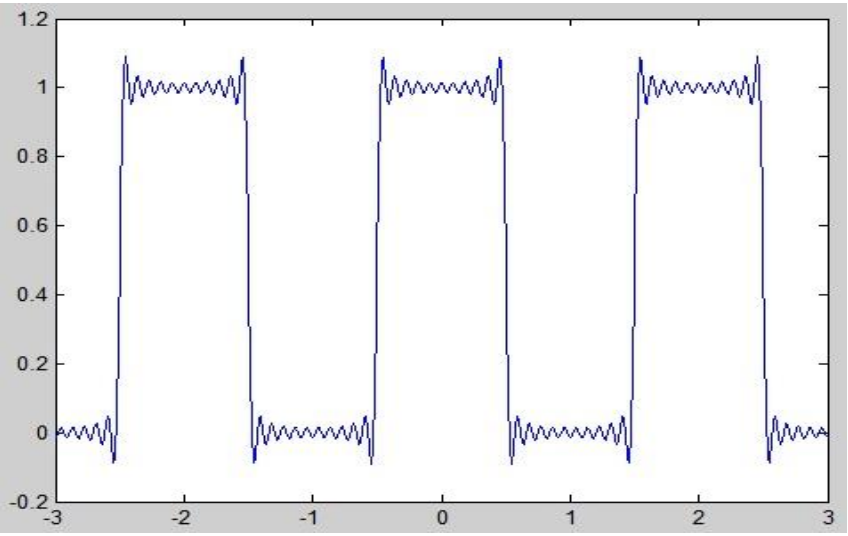
Gibbs 现象



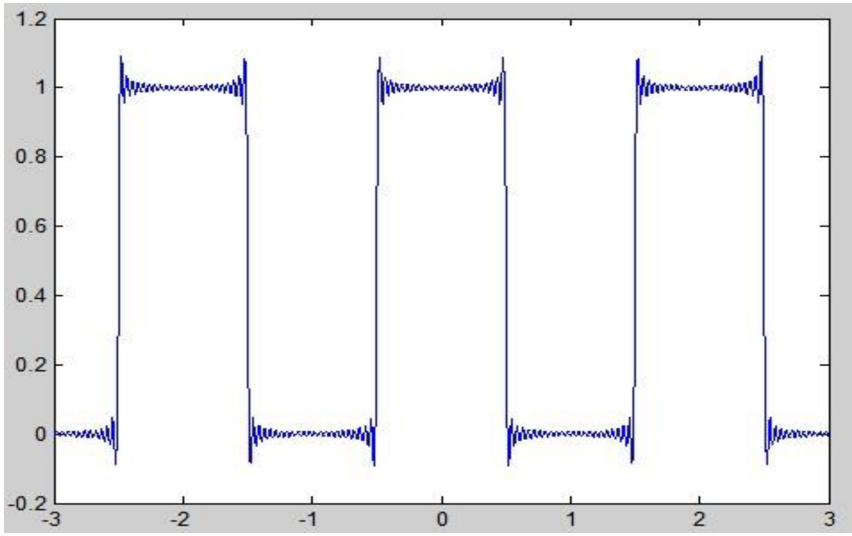
N=3



N=9



N=21



N=45

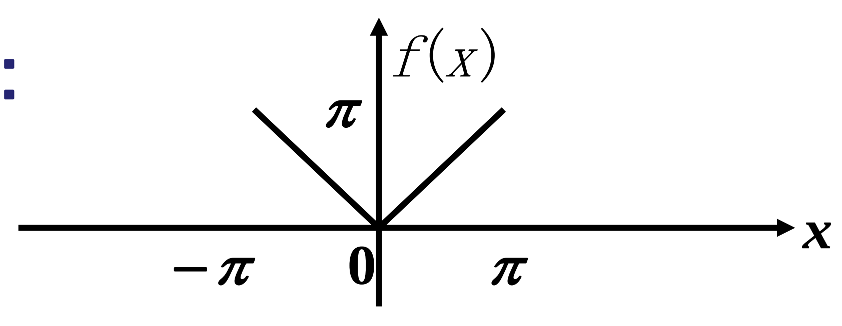
非周期函数的傅氏级数展开问题：

对于非周期函数f(x)，若其仅在区间$[x_1, x_2]$上有定义，且满足狄氏充分条件，也可展开成傅氏级数。

具体作法：将函数做周期性偶或奇延拓

$$(T = x_2 - x_1) \quad F_T(x+T) = f(x) \quad (x_1, x_2)$$

例：



例： 试求函数 $f(x)\begin{cases} =x & x\geq 0 \\ =-x & x<0 \end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数。

设 $f(\mathrm{x})$ 在$[-\pi，\pi]$上可表为： $f(\mathrm{x})=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$

将上式两端分别乘以 $\cos(nx)$ 并积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\cos(nx)dx$$

可得到： $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

将上式两端分别乘以 $\sin(nx)$ 并积分：

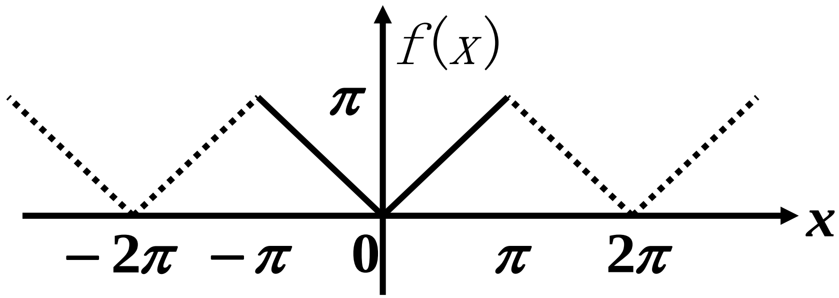
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\sin(nx)dx$$

可得到： $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$

综上，可将 $f(\mathrm{x})$ 的傅里叶级数改写为： $f(\mathrm{x})=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=01}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx、\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx、\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

例： 试求函数 $f(x)\begin{cases} =x & x\ge 0 \\ =-x & x<0 \end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数。



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\qquad(-\pi\le x\le\pi)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\qquad(-\pi\le x\le\pi)$$

利用傅氏展开式求级数之和

$$\because \quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=0, \dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$

设：$\sigma=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots,$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots(=\frac{\pi^2}{8}),$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}\cdots,$$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\cdots$$

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots (= \frac{\pi^2}{8}),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} \cdots,$$

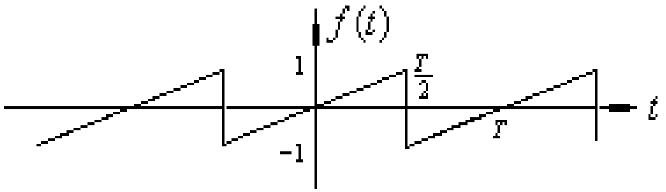
$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \cdots$$

$$\because \quad 4\sigma_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \qquad \therefore \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$$

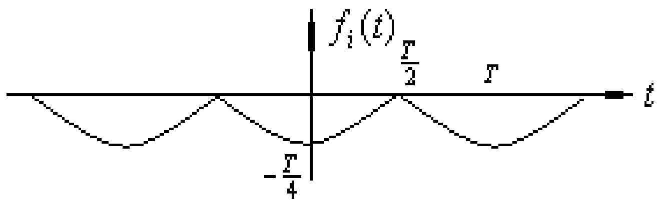
$$\sigma = 4\sigma_2 = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sigma_3 = 2\sigma_1 - \sigma = \frac{\pi^2}{12}$$

例题： 设信号在一周期内的表达式： $f(t)=\frac{2t}{T}\quad(-\frac{T}{2}\le t<\frac{T}{2})$

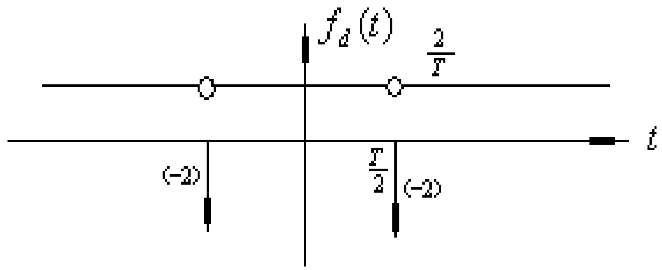
奇函数的偶分量为零， $b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2t}{T}\sin n\omega t dt=-(-1)^n\frac{2}{n\pi}$



$$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega t$$

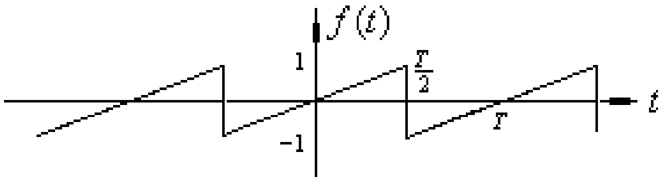


$$f_i(t)=-\frac{T}{6}+\frac{T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\omega t$$

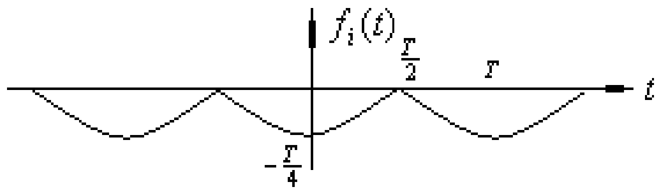


$$f_d(t)=\frac{4}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos n\omega t$$

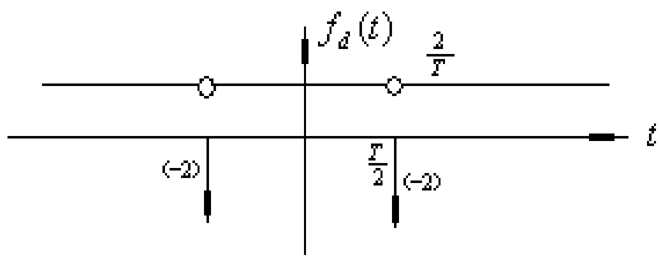
从此例中得到的启示 ……



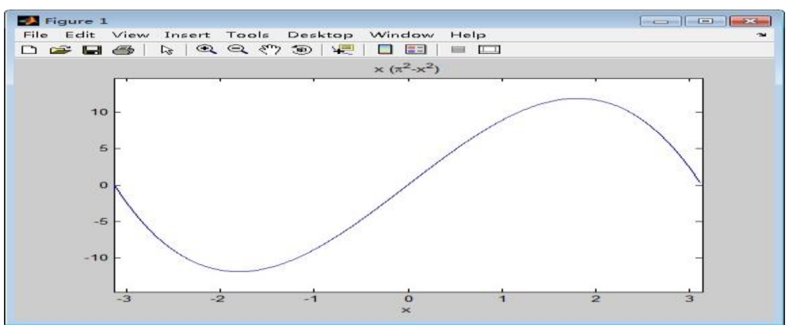
$$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega t$$



$$f_i(t)=-\frac{T}{6}+\frac{T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\omega t$$

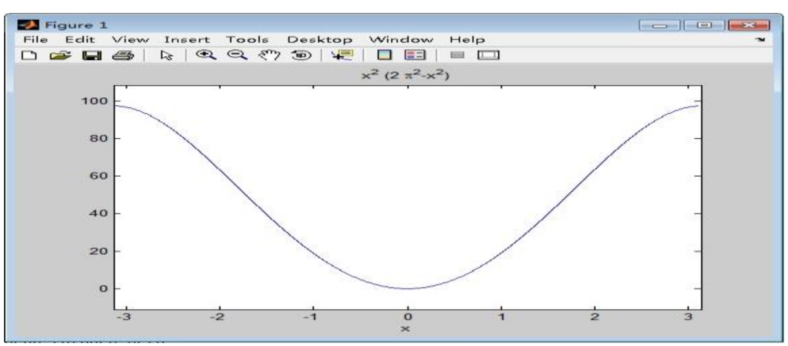


$$f_d(t)=\frac{4}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos n\omega t$$



$$f_a(t)=\omega t\cdot[\pi^2-(\omega t)^2],\quad -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$$

$$f_a(t)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin n\omega t$$



$$f_b(t)=(\omega t)^2\cdot[2\pi^2-(\omega t)^2],\quad -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$$

$$f_b(t)=\frac{7\pi^4}{15}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos n\omega t$$

习　题：

3-4，3-7，3-10，3-11

谢谢同学们！