信号与系统

信息学院　主干基础课

上节课内容要点回顾

* 周期信号的傅里叶变换
* 抽样信号的傅里叶分析
* 某些通讯技术所基于的理论基础
* 傅里叶分析所存在的一些问题

第 七 讲

第四章　拉普拉斯变换及连续时间系统的s域分析

§4.1 拉氏变换的定义、收敛域

4.1.1　拉氏变换的导出

针对的问题：某些常用信号的傅里叶变换积分不收敛（变换式含奇异函数项）。

假定对于 f(t) 有：$\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \to \infty$

试考虑将基函数增加衰减因子：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

令：$\sigma+j\omega=s$ 定义单边拉氏正变换为：

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}u(t)]=F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

关于逆变换：

由于拉氏正变换可看作是f(t)e⁻σt的傅氏变换： $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\Im[f(t)e^{-\sigma t}]$

对上式作傅氏反变换： $\Im^{-1}[F(s)]=\Im^{-1}\{\Im[f(t)e^{-\sigma t}]\}=f(t)e^{-\sigma t}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{j\omega t}d\omega$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

令： $\sigma+j\omega=s \qquad d\omega=\dfrac{ds}{j} \qquad -\infty<\omega<\infty\Rightarrow\sigma-j\infty<s<\sigma+j\infty$

记作： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$\begin{cases}\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\[2ex]\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds\end{cases}$$

F(s): 象函数

4.1.2　拉氏变换的收敛性

具体考察一下衰减因子$e^{-\sigma t}$的引入使积分收敛性改善的程度：

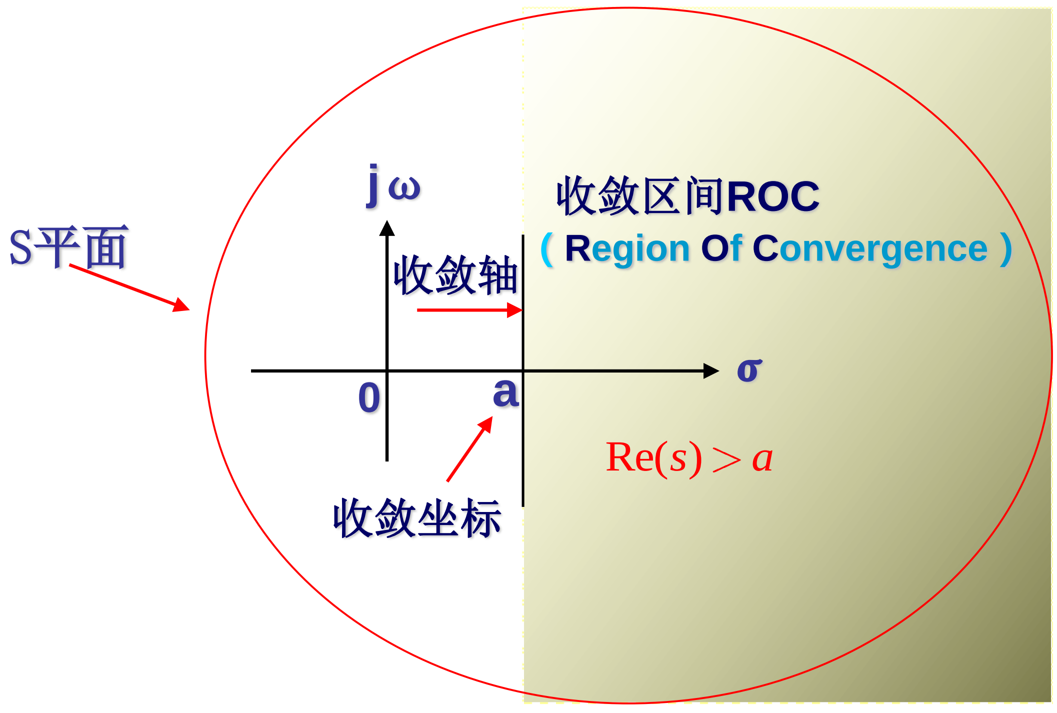
设对信号 $f(t)=e^{at}$ 求单边拉氏变换 ：

$$F(s)=\mathcal{L}[e^{at}]=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$$

$$\begin{cases} F(s)=\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a} \\ \mathrm{Re}(s)>a \end{cases}$$

收敛区间ROC （Region Of Convergence）

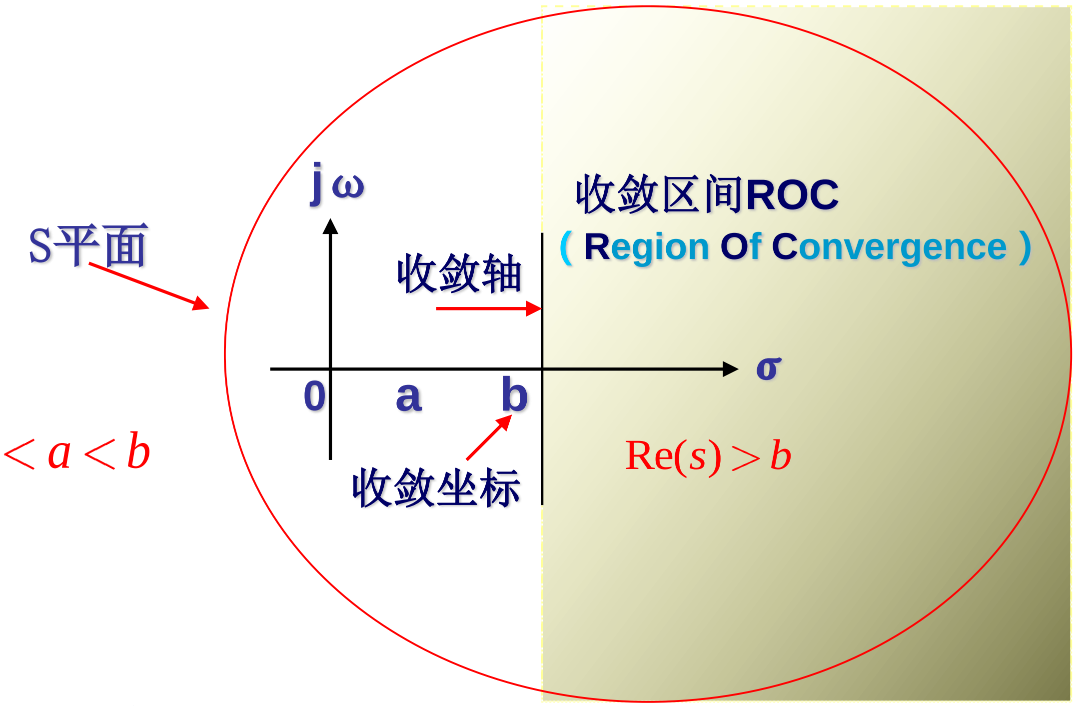
收敛区间指在S平面上使等式：$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt<\infty$ 成立的全部区域：



$$\begin{cases} F(s)=\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a} \\ ROC: \ \ \mathrm{Re}(s)>a \end{cases}$$

设：

$$\begin{cases} F(s)=\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad 0<a<b \\ ROC: \ \mathrm{Re}(s)>b \end{cases}$$



对单边拉氏变换而言：

有理式象函数的ROC内不包含任何F(s)的奇异点

ROC或者是被奇异点所界定、或者延伸到无穷远

ROC总是位于F(s)在s平面上最右边奇异点的右侧

拉氏变换存在定理（充分条件）

如果 f(t) 在 t⩾0 的任意区间上分段连续，当 t 趋于∞时

对于某个实数 $\sigma_0<\infty$存在极限：

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma_0 t} = 0$$

则在区域 Re(s)＞σ_0 内，积分 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

绝对且一致收敛，F(s)是收敛域内的解析函数。

常把满足关系式： $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma_0 t} = 0$ **的函数**f(t)**称为“指数阶函数”。**

讨论几个典型信号的收敛区间：

$$f_1(t)=e^{-at}u(t) \qquad a>0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}e^{-\sigma_0 t}=\lim_{t\to\infty} e^{-(a+\sigma)t}=0 \qquad a+\sigma>0 \qquad \therefore \sigma>-a$$

$$f_2(t)=A[u(t)-u(t-\tau)]$$

有限时间信号，收敛区间为全平面

$$\because \lim_{t\to\infty} f_2(t)=0 \quad \therefore \lim_{t\to\infty} A[u(t)-u(t-\tau)]e^{-\sigma_0 t}=\lim_{t\to\infty} 0\cdot e^{-\sigma t}=0 \qquad \sigma>-\infty$$

$$f_3(t)=e^{t^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2}e^{-\sigma_0 t}=\lim_{t\to\infty} e^{t(t-\sigma)}\geq 1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma\to+\infty$$

4.1.4 常见信号的拉氏变换

1. 幂函数：t^n

判断其变换是否存在：$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma_0 t} = \lim_{t\to\infty} t^n e^{-\sigma_0 t} = 0$$

因为：$\sigma_0 = 0^+$ 所以：ROC：$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 = 0$

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = -\frac{1}{s} t^n e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} dt^n$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty n t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

令 n=1 有：$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[u(t)]$$

2. 阶跃函数

$$\begin{cases} \pounds[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \\ ROC: \mathrm{Re}(s) > 0 \end{cases}$$

3. 冲激函数、冲激偶函数

$$\begin{cases} \pounds[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \\ ROC:\ \ \mathrm{Re}(s) > -\infty \end{cases}$$

$$\pounds[\delta'(t)] = \int_0^{\infty} \delta'(t) e^{-st} dt$$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0) = -(e^{-st})'\Big|_{t=0} = s \\ ROC:\ \ \mathrm{Re}(s) > -\infty \end{cases}$$

单边拉式变换积分限的确定

$$u(t) \to \frac{1}{s}$$

$$\int_0^{\infty} \cdot$$

积分限一律认为是从0^-开始

$$\operatorname{sgn}(t) \to \frac{1}{s}$$

普通函数、有界函数的拉式变换为真分式

奇异函数的拉式变换为多项式

§4.2　拉氏变换的基本性质

一、 线性性质：

若：$\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$、 $\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$

则有：$\mathcal{L}[k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)]=k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$ k_1、k_2为常数

注意线性组合后变换式的收敛区间与组合前的收敛区间的关系

是否总是有： 如果： $ROC_1=R_1 \quad ROC_2=R_2$

则： $ROC_{\sum}=R_1\cap R_2$

不具一般性！

例：

$f_1(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow F_1(s)=\frac{1}{(s+1)}$ $\quad ROC:\ \mathrm{Re}(s)>-1$

$f_2(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)\leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\quad ROC:\ \mathrm{Re}(s)>-1$

$f_1(t)-f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)-F_2(s)=\frac{1}{(s+2)}$ $\quad ROC:\ \mathrm{Re}(s)>-2$

二、 原函数的微积分性质：

若： $\pounds[f(t)] = F(s)$

则有： $\pounds[\frac{d}{dt} f(t)] = sF(s) - f(0^-)$

$$\pounds[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

注意比较傅氏变换的积分性质：$\Im[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

此外，应用时还应注意微积分后函数的收敛区间是否发生了改变。

收敛区间：求导有可能扩大（消除奇异点）

积分可能缩小

令： $f(t)=g'(t)$

代入一阶微分性质： $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)]=sF(s)-f(0^-)$

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}g'(t)]=s\mathcal{L}[g'(t)]-g'(0^-)$$

即得到二阶微分性质： $\mathcal{L}[g''(t)]=s[sG(s)-g(0^-)]-g'(0^-)$

类似可推得 n 阶微分性质： $\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n}f(t)]=s^n\mathrm{F}(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0^-)$

例 设： $f(t)=\cos\omega t$ 试求其拉氏变换

因为： $f(0)=1 \quad f'(0)=0 \quad f''(t)=-\omega^2\cos\omega t=-\omega^2 f(t)$

根据二阶导数性质： $\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)]=-\omega^2F(s)=s^2F(s)-s$$

可解出： $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

对微分性质： $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$ 等号两边对s求导：

左边： $\int_0^{\infty} -t \cdot f'(t)e^{-st}dt = -t \cdot f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} (=0) + \int_0^{\infty} f(t)d(t \cdot e^{-st})$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - s\int_0^{\infty} t \cdot f(t)e^{-st}dt$$

右边： $= F(s) + sF'(s)$

综合起来就是：性质三、象函数的微分性质：

若： $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则： $\mathcal{L}[-t \cdot f(t)] = F'(s)$

一般情况下有： $\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(s)$

例： 试求函数的拉氏变换 $f(t) = t\cos\omega t$

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[\cos\omega t] = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

对微分性质： $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$ **左边作分时间段积分：**

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} f'(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

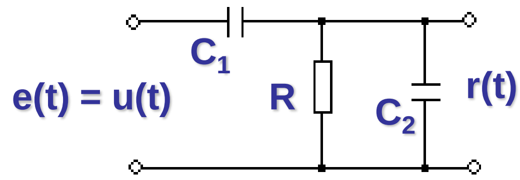
$$= f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$$

即： $f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s)$

令s→∞得到： **性质四：初值定理：** $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

令s→0 得到： **性质五：终值定理：** $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

例题：试求系统零状态响应的初始值和稳态值。



在第二章中曾导出过其微分方程：$r'(t)+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}r(t)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\delta(t)$

对其作拉氏变换：$s\cdot R(s)+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}R(s)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$

可解出：$R(s)=\dfrac{\frac{C_1}{C_1+C_2}}{s+\frac{1}{R(C_1+C_2)}}$

系统零状态响应的初、稳态值：

$$r(0^+)=\lim_{s\to\infty}sR(s)=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

$$r(\infty)=\lim_{s\to 0}sR(s)=0$$

例题：试求下述变换函数F(s)的初始值f(0+)

$$F(s)=\frac{1}{s+2} \qquad f(0^{+})=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+2}=1 \qquad \frac{1}{s+2}\leftrightarrow e^{-2t}$$

$$F(s)=\frac{s+3}{s+2} \qquad f(0^{+})=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+3)}{s+2}\to\infty$$

?

$$f(t)=\delta(t)+e^{-2t} \qquad f(0^{+})=1$$

初值定理推导未考虑奇异函数在0点的影响
（F(s)应为普通有界函数的象函数）

应提出真分式，再求极限

例题：试求下列函数的稳态值。

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+a} = \begin{cases} 0 & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$$

$$F_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

终值定理应用：s→0点应在收敛区间内

$$F_2(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

特例： $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ 可用终值定理

$$F_3(s) = \frac{n\,!}{s^{n+1}}$$

$\frac{1}{s^n} \quad (n \leq 1)$ 终值定理都适用

$$F_4(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$\frac{1}{s^n} \quad (n > 1)$ 终值定理都不适用

六．时域平移：

若：$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$

则：$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$

例：求f(t)的拉氏变换：$f(t)=t\cdot u(t-1)$

$$f(t)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}=(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})e^{-s}$$

求拉氏反变换时：当遇到因子 $e^{-s\tau}$、$1-e^{-s\tau}$ 时注意性质的应用：

$$F(s)=\frac{s(1-e^{-s\tau})}{s^2+\omega^2}$$

意味着：$F_1(s)(1-e^{-s\tau})\leftrightarrow f_1(t)-f_1(t-\tau)u(t-\tau)$

$$F_1(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\leftrightarrow f_1(t)=\cos\omega t$$

$$f(t)=\cos\omega t-\cos\omega(t-\tau)u(t-\tau)$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

平移性质常用于求周期信号的拉氏变换：

设：$f_1(t)$**为周期信号的第一个周期内的波形，则：**

$$f_T(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \ldots$$

$$F_T(s) = F_1(s) + F_1(s)e^{-sT} + F_1(s)e^{-2sT} + \ldots = F_1(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots)$$

$$F_T(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

收敛条件为：$|e^{-sT}| < 1 \Rightarrow ROC: \ \mathrm{Re}(s) > 0$　　　具备一般性！

例如对于单位周期梳状函数的拉氏变换：

$$\delta_{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

§4.3 拉氏逆变换

　　用求反变换积分的方法虽从理论上可行，但实用起来并不方便，由于常见拉氏变换函数多数情况下是有理式的形式，因而在实际应用中总是先将变换式分解为简单有理分式后再查表…

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+..+a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1}+..+b_0}=\frac{a_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

名词定义：

零点：F(s)的分子多项式A(s)的根z_i；

极点：F(s)的分母多项式B(s)的根p_j；

$$\lim_{s\to z_i}F(s)=0 \quad \lim_{s-p_j}F(s)\to\infty$$

按照极点类型的不同，讨论部分分式法常见的三种情况的处理：

1. 极点为实数单根：

（1）n>m，F(s)为真分式： $F(s)=\dfrac{k_1}{s-p_1}+\ldots+\dfrac{k_n}{s-p_n}$

例： $$\frac{s+4}{s^2-5s+6}=\frac{s+4}{(s-2)(s-3)}=\frac{k_1}{s-2}+\frac{k_2}{s-3}$$

$$k_1=(s-2)F(s)\Big|_{s=2}=\frac{s+4}{s-3}\Big|_{s=2}=-6$$

`

$$k_2=(s-3)F(s)\Big|_{s=3}=\frac{s+4}{s-2}\Big|_{s=3}=7$$

$$\begin{cases} f(t)=7e^{3t}-6e^{2t} \quad t\geq 0 \\ ROC: \ \mathrm{Re}(s)>3 \end{cases}$$

（2）n<m，F(s)为假分式，用长除法将其变为真分式与多项式之和。

2、极点为共轭复根：

F(s)为实系数函数，若有复数极点必成共轭对形式出现。原则上共轭极点并非重根，按实数单根的方式处理也可行，但利用某些已知变换函数的形式求反变换较为方便：

$$F(s)=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

利用：$\cos\omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

以及平移性质：$\pounds[f(t)e^{-\alpha t}]=F(s+\alpha)$

$$e^{-\alpha t}\cos\omega t \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \qquad e^{-\alpha t}\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$F(s)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\begin{cases} f(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ ROC: \quad \mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{2} \end{cases}$$

3、多重极点：

举例：$$F(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}=\frac{k_1}{(s+1)^3}+\frac{k_2}{(s+1)^2}+\frac{k_3}{(s+1)}+\frac{k_4}{s}$$

两边同乘以（s+1）^{3}：$$F(s)(s+1)^3=\frac{s-2}{s}=k_1+(s+1)k_2+(s+1)^2k_3+(s+1)^3\frac{k_4}{s}$$

令s=−1　k_1=3 、$k_4=sF(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s-2}{(s+1)^3}\right|_{s=0}=-2$

上式两边同对s求导：$$\frac{2}{s^2}=k_2+2(s+1)k_3+\Delta$$

令s=−1　k_2=2

上式两边再次同对s求导：$$-\frac{4}{s^3}=2k_3+\Delta$$

令s=−1　k_3=2

$$F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}-\frac{2}{s}$$

查表并利用平移性质：$t^2\leftrightarrow\frac{2}{s^3}$　$t\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$　$f(t)e^{-at}\leftrightarrow F(s+a)$

$$f(t)=\tfrac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}-2\qquad t\geq 0$$

实际问题中往往还要充分利用性质，例如：

$$F(s)=\frac{1-e^{-as}}{s(s^2+1)}$$

利用时移性质：

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t)u(t)-f(t-t_0)u(t-t_0)]=(1-e^{-st_0})F(s)$$

$$F(s)=F_0(s)(1-e^{-as})$$

利用卷积定理：

$$F_0(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}$$

阶跃函数是理想积分器：

$$f_0(t)=u(t)*\sin t=\int_0^t \sin\tau d\tau=1-\cos t$$

$$f(t)=(1-\cos t)u(t)-[1-\cos(t-a)]u(t-a)$$

留数定理法：

部分分式法并未真正完成反变换运算，因其需查拉氏变换表完成最后的反变换，否则必须记住一些基本的变换关系式。

留数：

设f(z)为定义在z平面上具有有限个奇点的单值解析函数，z_0是f(z)的孤立奇点，c为含z_0点于内的简单正向闭曲线，定义留数为：

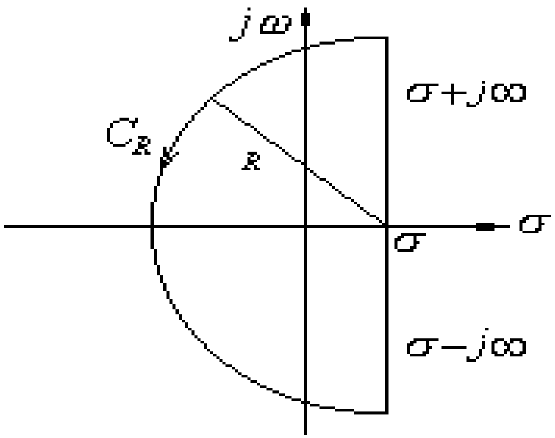
$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c f(z)dz$$

留数定理：

设f(s)在区域D内除有限个奇点p_1、p_2、…p_n外处处解析，c为包围诸奇点的一条简单正向闭曲线，则有：

$$\oint_c f(s)ds = 2j\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}[f(s), p_i]$$

为使反变换积分满足留数定理的条件，构造C_R(R→∞)使其成环路：



$$\frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds+\int_{C_R}F(s)e^{st}ds\right]$$

$$=\frac{1}{2j\pi}\oint_c f(s)e^{st}ds=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[F(s)e^{st},p_i]$$

积分 $\int_{C_R}F(s)e^{st}ds$ 由约当引理(有多种形式)

当 t>0 时若 F(s) 除有限个奇点外解析，则：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(s)e^{st}ds=0$$

$$\therefore\ f(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[F(s)e^{st},p_i]$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}[F(s)e^{st},p_i]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}[(s-p_i)F(s)e^{st}]\Big|_{s=p_i} & \text{Pi为一阶极点的情形}\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}(s-p_i)^{k}F(s)e^{st}]\Big|_{s=p_i} & \text{Pi为k阶极点的情形}\end{cases}$$

实际问题中应用较多的是“Heaviside展开式”，适用于F(s)为真分式且极点为单根的场合，这时留数定理可被简化为：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}[F(s)e^{st},p_i]=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)}{B'(p_i)}e^{p_i t}$$

例如：

$$F(s)=\frac{1}{s(s+a)(s+b)}=\frac{A(s)}{B(s)}$$

$$B(s)=s(s+a)(s+b)=s^3+(a+b)s^2+abs$$

$$B'(s)=3s^2+2(a+b)s+ab\quad B'(0)=ab;\ B'(-a)=a(a-b);\ B'(-b)=b(b-a)$$

$$f(t)=\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{a(a-b)}e^{-at}+\tfrac{1}{b(b-a)}e^{-bt}\qquad t\geq 0$$

§4.4 用拉氏变换法分析电路、s域元件模型

围绕关系式：$r(t)=e(t)*h(t)\Leftrightarrow E(\omega)\cdot H(\omega)$

"系统的S域分析"具体指哪些内容？

求系统响应（与微分方程解法对等的方法）；

分析系统的稳定性；

分析系统的频响特性；

滤波器的设计问题 ……

用拉氏变换法求系统响应

例： $r''(t)+5r'(t)+6r(t)=2e'(t)+8e(t)$　　$e(t)=e^{-t}u(t)$、$r(0^-)=3$、$r'(0^-)=2$

对上式两端分别求拉氏变换：

$$s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)+5[sR(s)-r(0^-)]+6R(s)=2sE(s)+8E(s)$$

$$R(s)=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}E(s)+\frac{(s+5)r(0^-)+r'(0^-)}{s^2+5s+6}=R_{zs}(s)+R_{zi}(s)$$

将激励函数及响应的起始值代入方程：

$$E(s)=L\{e^{-t}u(t)\}=\frac{1}{s+1}$$

$$R_{zs}(s)=\frac{2s+8}{(s^2+5s+6)(s+1)}=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$r_{zs}(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

$$R_{zi}(s)=\frac{3s+17}{s^2+5s+6}=\frac{11}{s+2}-\frac{8}{s+3}$$

$$r_{zi}(t)=11e^{-2t}-8e^{-3t}$$

求系统的冲激响应：

系统的微分方程：
$$\begin{cases} r''(t)+5r'(t)+6r(t)=2e'(t)+8e(t) \\ e(t)=e^{-t}u(t)、r(0^-)=3、r'(0^-)=2 \end{cases}$$

$e(t)=\delta(t)$

转换为冲激响应方程：
$$\begin{cases} h''(t)+5h'(t)+6h(t)=2\delta'(t)+8\delta(t) \\ h(0^-)=0、h'(0^-)=0 \end{cases}$$

对上式求拉氏变换：
$$s^2H(s)+5sH(s)+6H(s)=2s+8$$
$$H(s)=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$
$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$$

如果是在前面求得系统响应的基础上：$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}\}$

线性系统的 S 域元件模型

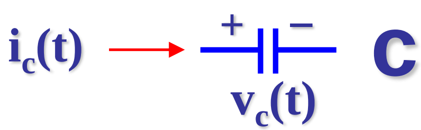
从微分方程中的主要构成项来看：

电阻： $v_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad \Leftrightarrow \quad V_R(s) = R \cdot I_R(s)$

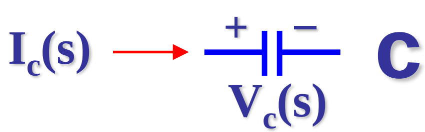
电容： $i_c(t) = \mathrm{c} \cdot \dfrac{d}{dt} v_c(t) \quad \Leftrightarrow \quad I_c(s) = s\mathrm{c} \cdot V_c(s) - \mathrm{c}v_c(0^-)$

电感： $v_L(t) = L \cdot \dfrac{d}{dt} i_L(t) \quad \Leftrightarrow \quad V_L(s) = sL \cdot I_L(s) - Li_L(0^-)$

从电路的基本构成元素（元件）看：

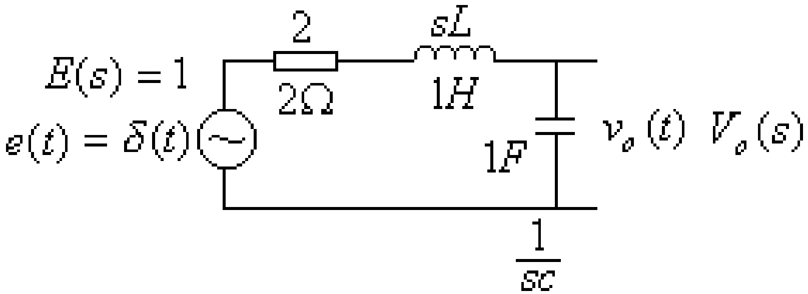


定义着运算： $\begin{cases} i_c(t) = \mathrm{c} \cdot \dfrac{dv_c(t)}{dt} \\ v_c(t) = \dfrac{1}{\mathrm{c}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau) d\tau \end{cases}$



定义新的运算： $\begin{cases} I_c(s) = s\mathrm{c} \cdot V_c(s) - \mathrm{c}v_c(0^-) \\ V_c(s) = \dfrac{1}{s\mathrm{c}} I_c(s) + \dfrac{1}{s} v_c(0^-) \end{cases}$

例：求系统的冲激响应：



由于是求一种零状态响应，因而可直接写零初条件的s域元件模型如上图。

$$\because \quad v_o(t)=h(t)*e(t) \quad \Leftrightarrow \quad V_o(s)=H(s)E(s)$$

$$V_o(s)=\frac{1/sc}{2+sL+1/sc}E(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{E(s)}=V_o(s)=\frac{1}{(s+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad h(t)=te^{-t}u(t)$$

§4.5　系统函数 H(s)

系统函数的概念：

$$H(s) = \frac{\text{系统零状态响应的拉氏变换}}{\text{输入激励的拉氏变换}}$$

时域分析的系统零状态响应： $r(t) = h(t) * e(t)$

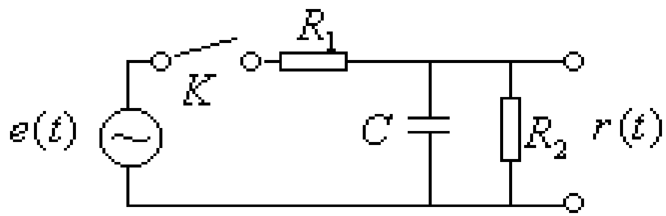
根据卷积定理其变换式为： $R(s) = H(s)E(s)$

系统函数： $H(s) = R(s)/E(s)$

这里E(s)应为全频信号
否则H(s)会是常数

由于是输出响应与输入激励之比，形式上具有“传输函数”的意义，因而系统函数也常被称为传输函数、传递函数、网络函数等，又由于从系统函数可反应出系统诸多重要特征，因而系统函数也常被称为“系统特征函数”。

例：求系统函数及零状态响应：



$$e(t) = Ee^{-at} \quad t \geq 0$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sc} // R_2}{R_1 + \frac{1}{sc} // R_2}$$

令： $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \qquad H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{\tau}} \qquad h(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{\frac{E}{R_1 C}}{(s+\frac{1}{\tau})(s+a)} = \frac{\frac{E}{R_1 C}}{a - \frac{1}{\tau}} \left(\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$r(t) = \frac{E}{R_1 C(a - \frac{1}{\tau})} \left(e^{-\frac{1}{\tau}t} - e^{-at}\right) \qquad a \neq \frac{1}{\tau}, t \geq 0$$

当： $a = \frac{1}{\tau} \qquad R(s) = \frac{\frac{E}{R_1 C}}{(s+a)^2} \qquad r(t) = \frac{E}{R_1 C} t e^{-at} \quad t \geq 0$

例：已知线性系统的激励响应关系，试求系统函数及描述该系统的微分方程。

激励响应关系为：$e(t)=e^{-3t}u(t)$、$r(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

$$E(s)=\frac{1}{s+3}、R(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

系统函数：$H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$、 $ROC:\mathrm{Re}(s)>-1$

微分方程：$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$

$$r(0^-)=k_1、r'(0^-)=k_2$$

仅根据系统的零状态响应无法确定微分方程所对应的起始条件。

简单给定一个常系数微分方程而不同时注明初始条件，则无法确定其所描述系统的因果性；与此类似，给定一个系统函数而不注明其收敛区间，同样不能确定系统的因果性。

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

$$ROC:\quad 2<\mathrm{Re}(s) \qquad \Rightarrow \quad h(t)=(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(t)$$

$$ROC:-1<\mathrm{Re}(s)<2 \quad \Rightarrow \quad h(t)=(\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t})u(-t)$$

$$ROC:\quad \mathrm{Re}(s)<-1 \qquad \Rightarrow \quad h(t)=-(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(-t)$$

一个因果系统的系统函数的ROC由其收敛轴的右侧平面构成。

如果知道某系统的ROC由其收敛轴的右侧平面构成，又能确定其系统函数是有理的，则该系统是因果的。

系统的因果性定义：

因果系统的输出取决于当前及过去的激励，与将来的激励无关。

对于线性系统，因果性可表示为：h(t)=0, t<0 ，这等效于初始松弛条件，如果因果系统的输入在某个时刻 t_0 之前均为零，其输出在 t_0 之前也必为零。

例： $y(t)=6x(t)+6$

讨论上式描述系统的因果性：按上述关于因果性的第一条定义，它是因果的；但它却不满足上述关于线性系统的因果性定义，原因在于这个系统不是线性的，这个具有因果性却不满足初始松弛条件的系统特例说明：初始松弛条件等效于系统的因果性条件仅对线性系统成立。

例：系统求逆

设系统及其逆系统分别为： $h(t) \leftrightarrow H(s)$、$h_c(t) \leftrightarrow H_c(s)$

系统若互逆则满足： $h(t) * h_c(t) = \delta(t) \leftrightarrow H(s) \cdot H_c(s) = 1$

例 若给定系统函数： $$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

其逆系统的系统函数： $$H_c(s) = \frac{s^2+3s+2}{s+3}$$

其系统微分方程为： $$r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = e'(t) + 3e(t)$$

其逆系统的方程为： $$r'(t) + 3r(t) = e''(t) + 3e'(t) + 2e(t)$$

§4.6 由H(s)的极、零点分布分析系统的时域特性

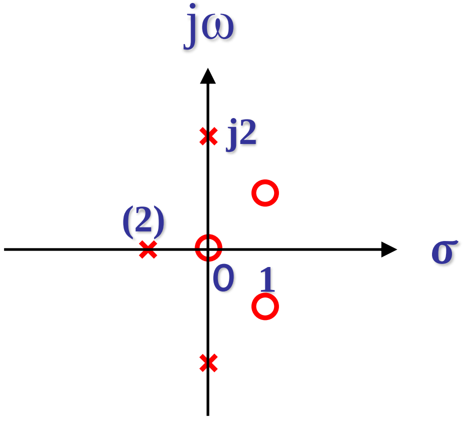
一、系统的极零图概念

二、极零点分布與时域特性的联系

三、基于极点位置划分不同的响应分量

一、系统的极零图概念:

$$H(s)=\frac{s(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)^2(s+j2)(s-j2)}$$



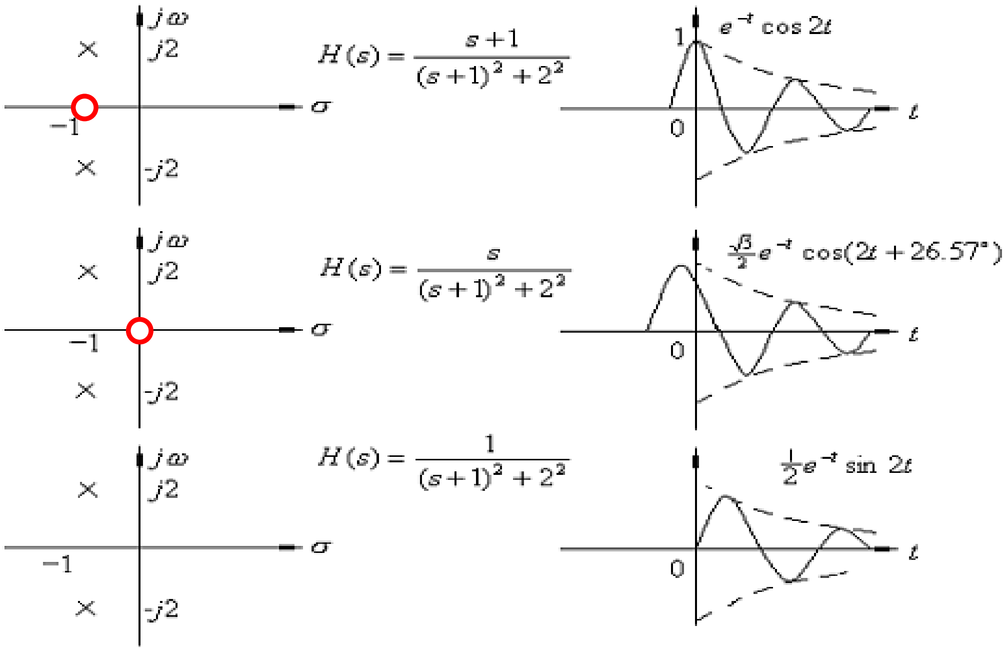
$$\sum_{k=0}^{N}a_k r^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k e^{(k)}(t) \Rightarrow (\sum_{k=0}^{N}a_k s^k)R(s)=(\sum_{k=0}^{M}b_k s^k)E(s) \Rightarrow H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k s^k}$$

微分方程、系统函数、系统极零图间的关系……

极零图与H(s)之间只差常数系数

二、极零点分布舆时域特性的联系：

1. 零点位置不同对h(t)的影响:

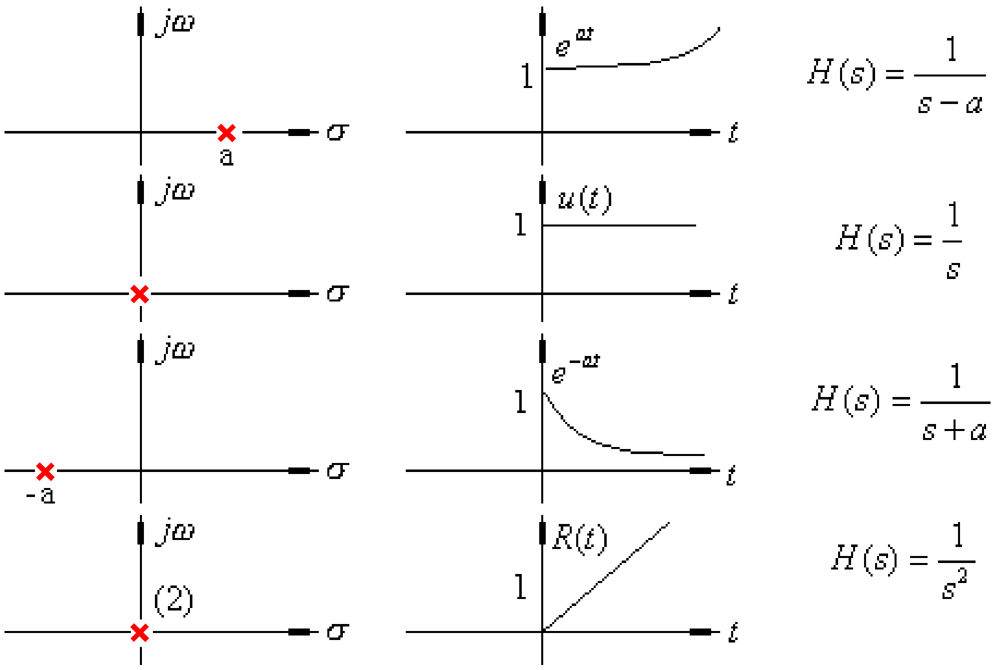


无零点是零点位置改变的一种特例：零点移到了无穷远。

$$H(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots\frac{k_i}{(s-p_i)^2}+\ldots$$

零点如不抵消极点，则仅仅影响幅度和相位

2. 极点位置不同对h(t)的影响:



$$H(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots\frac{k_i}{(s-p_i)^2}+\ldots$$

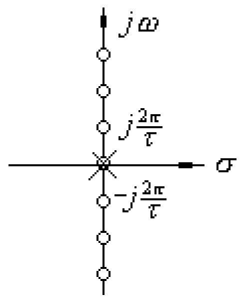
极点不同则收敛性不同，决定了系统的稳定性、频域特性

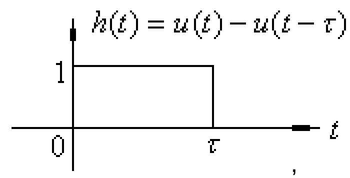
3. 特殊位置的极零点:

例： $H(s)=\dfrac{1-e^{-s\tau}}{s}$ **其零点是** $1-e^{-s\tau}=0$ **的根：** $s=\pm j\dfrac{2n\pi}{\tau}\qquad n=0,1,2\ldots\ldots$

具有无穷多零点： $s=0、\pm j\frac{2\pi}{\tau}、j\frac{4\pi}{\tau}\ldots\ldots$

原来仅有的极点: $s=0$ **与原点处的零点抵消，系统实际上无极点。**





这类现象是有限时间信号 ：

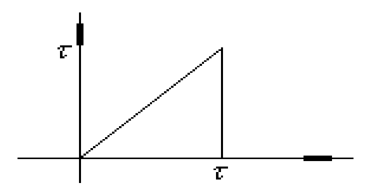
$$f(t)u(t)-f(t-\tau)u(t-\tau)\leftrightarrow F(s)(1-e^{-s\tau})$$

所具有的一个共同特点 。

例如给定系统函数为：

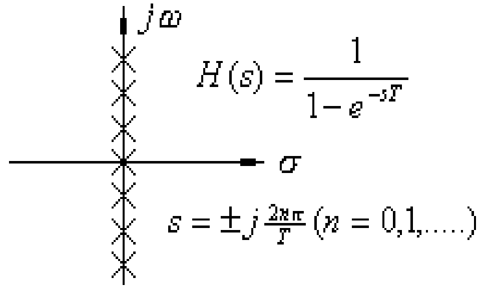
$$H(s)=\frac{1-e^{-\tau s}-s\tau e^{-\tau s}}{s^2}$$

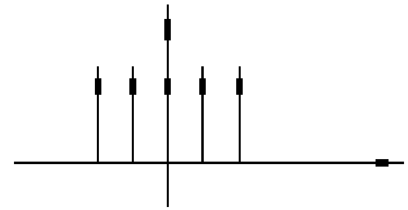
$$H(0)=\lim_{s\to 0}H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{(1-e^{-\tau s}-s\tau e^{-\tau s})'}{(s^2)'}=\lim_{s\to 0}\frac{s\tau^2e^{-s\tau}}{2s}=\frac{\tau^2}{2}$$



$$h(t)=t-tu(t-\tau)$$

例：





设：$f_1(t)$ 是(0, T)上的有限时间函数，用 $f(t)=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\ldots$

构成一个周期函数，其象函数为：

$$F(s)=F_1(s)+F_1(s)e^{-sT}+\ldots=F_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nsT}=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

对于更为复杂的情形 ：

$$H(s)=F_1(s)\frac{1-e^{-\tau\cdot s}}{1-e^{-T\cdot s}}$$ 可以做类似分析…

三、基于极点位置划分不同的响应分量 ：

由卷积定理表示的响应、或由其拉氏变换式所表示的响应都是零状态响应，因而基于极点位置的不同响应分量的划分方式不同于微分方程解法中的划分方式，基于极点位置所求的完全响应中不包含零输入响应部分。

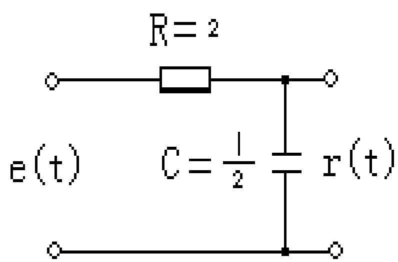
自由响应舆强迫响应：

设系统响应为： $R(s)=H(s)E(s)$

为表示方便，假设上式由单阶极点构成(高阶极点情形完全类似)：$R(s)=\sum_i \frac{k_i}{s-p_i}+\sum_j \frac{k_j}{s-p_j}$

设 p_i 为系统函数的极点、 p_j 为激励信号的极点，反变换之后：$r(t)=\sum_i k_i e^{p_i \cdot t}+\sum_j k_j e^{p_j \cdot t}$

例，求系统响应的自由响应分量和强迫响应分量：



$e(t)=10\cos 4t u(t)$ $E(s)=\frac{10s}{s^2+4^2}$

$$H(s)=\frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s}+2}=\frac{1}{s+1}$$

$$R(s)=\frac{10s}{(s+1)(s^2+4^2)}=\frac{-\frac{10}{17}}{s+1}+\frac{\frac{10}{17}s+\frac{160}{17}}{s^2+4^2}$$

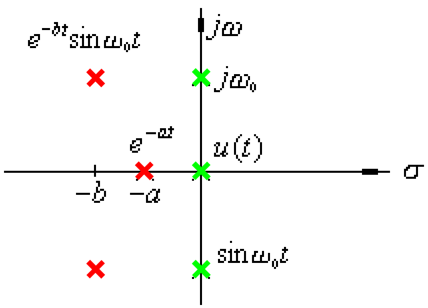
$$r(t)=\underbrace{-\frac{10}{17}e^{-t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{10}{17}\cos 4t+\frac{40}{17}\sin 4t}_{\text{强迫响应}}$$

暂态响应舆稳态响应：

暂态响应的特征是： $\lim\limits_{t\to\infty} r_t(t) = 0$

稳态响应可以近似描述为： $r_s(t) = \lim\limits_{t\to\infty} r(t)$

根据上述特征可以从极零图上划分这两类情况：



处于左开平面上的极点构成暂态分量、

处于虚轴上的极点构成稳态分量。

$$R(s)=\sum_i \frac{k_i}{s-p_i}+\sum_j \frac{k_j}{s-p_j}=R_t(s)+R_s(s)$$

pi为位于左开平面的极点、 pj为虚轴上的极点。

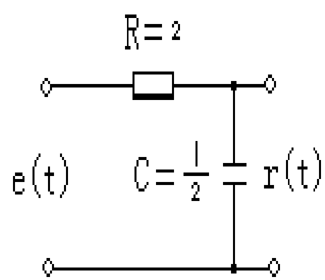
例：

$$R(s)=\frac{10s}{(s+1)(s^2+4^2)}=R_t(s)+R_S(s)$$

$$R_t(s)=\frac{-\frac{10}{17}}{s+1}\text{、}\quad R_S(s)=\frac{\frac{10}{17}s+\frac{160}{17}}{s^2+4^2}$$

$$r_t(t)=-\tfrac{10}{17}e^{-t}\text{、}\quad r_S(t)=\tfrac{10}{17}\cos 4t+\tfrac{40}{17}\sin 4t$$

暂态响应　　　　稳态响应



$e(t)=10\cos 4t\,u(t)$　　$E(s)=\dfrac{10s}{s^2+4^2}$

$$H(s)=\frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s}+2}=\frac{1}{s+1}$$

习　题：

4-1 (11---15)，4-4 (16、17、19)，4-5
4-16， 4-26， 4-29， 4-33， 4-35，

谢谢同学们!