信号与系统

信息学院 主干基础课

上节课要点回顾

* 奇异信号的广义函数定义

* 信号的分解：脉冲分量、阶跃分量、正交函数分量分解

* 正交函数、正交函数集、完备正交函数集

* 用完备正交函数集描述信号

* 相关函数的定义

上节课要点回顾

$\delta[h(t)]$ h(t)为单根多项式

$$= \sum_i a_i \delta(t - t_i)$$ 脉冲串

$$\int_{t_i-\sigma}^{t_i+\sigma} \delta[h(t)]dt = \frac{1}{h'(t_i)} \int_{h(t_i-\sigma)}^{h(t_i+\sigma)} \delta[h(t)]d[h(t)]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{h'(t_i)}, h'(t_i) > 0 \\ \dfrac{1}{|h'(t_i)|}, h'(t_i) < 0 \end{cases}$$

$$\therefore a_i = \frac{1}{|h'(t_i)|}$$

第三讲

第一章　绪论

- §1.8 线性时不变(LTI)系统

第二章　连续时间系统的时域分析

- §2.1 线性系统的微分方程法分析
- §2.2 线性系统初始条件的确定

§1.8 线性时不变(LTI)系统

1. 叠加性与均匀性(齐次性)
2. 时不变性
3. 微、积分特性
4. 因果性
5. 可逆性
6. 稳定性

1. 叠加性与均匀性(齐次性)

若系统的激励与响应间的关系是：

$$\mathrm{e}_1(t) \to \mathrm{r}_1(t)、\mathrm{e}_2(t) \to \mathrm{r}_2(t)$$

则线性系统满足：

$$\mathrm{k}_1\mathrm{e}_1(t) + \mathrm{k}_2\mathrm{e}_2(t) \to \mathrm{k}_1\mathrm{r}_1(t) + \mathrm{k}_2\mathrm{r}_2(t)$$

线性响应关系：

$$k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t) \to k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$$

分别是叠加性、均匀性的合成：

线性系统定义

$$e_1(t) + e_2(t) \to r_1(t) + r_2(t)$$

$$e(t) \to r(t)、\ ke(t) \to kr(t)$$

叠加性与均匀性是对线性系统的定义，希望由此反映出系统之“多个独立源同时作用于系统的效果等效于各个独立源单独作用效果的叠加”的特性。

定理：已经证明具有正确性、可以作为原则或规律的命题或公式，如几何定理。

定义：对于一种事物的本质特征或概念的内涵和外延的确切而简要的说明。

对均匀性“$\mathrm{ke}(t)\to\mathrm{kr}(t)$”质疑：

若系统满足叠加性则必同时满足均匀性，均匀性条件不必要！

证：

设系统响应关系满足叠加性：$\sum_{i=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{e}_i(t)\to\sum_{i=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{r}_i(t)$

令：$\mathrm{e}_1(t)=\mathrm{e}_2(t)=\ldots=\mathrm{e}_\mathrm{k}(t)=\mathrm{e}(t)$

由此即可导出：

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{e}_i(t)\to\sum_{i=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{r}_i(t)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{ke}(\mathrm{t})\to\mathrm{kr}(\mathrm{t})$$

此即均匀性所描述的性质，故有上述质疑…

例：设系统激励响应关系为：$r(t)=\mathrm{Re}\{e(t)\}$

$$e(t)=x(t)+jy(t) \quad \Rightarrow \quad r(t)=x(t)$$

满足叠加性：

$$e_1(t)=x_1(t)+jy_1(t)、e_2(t)=x_2(t)+jy_2(t)$$

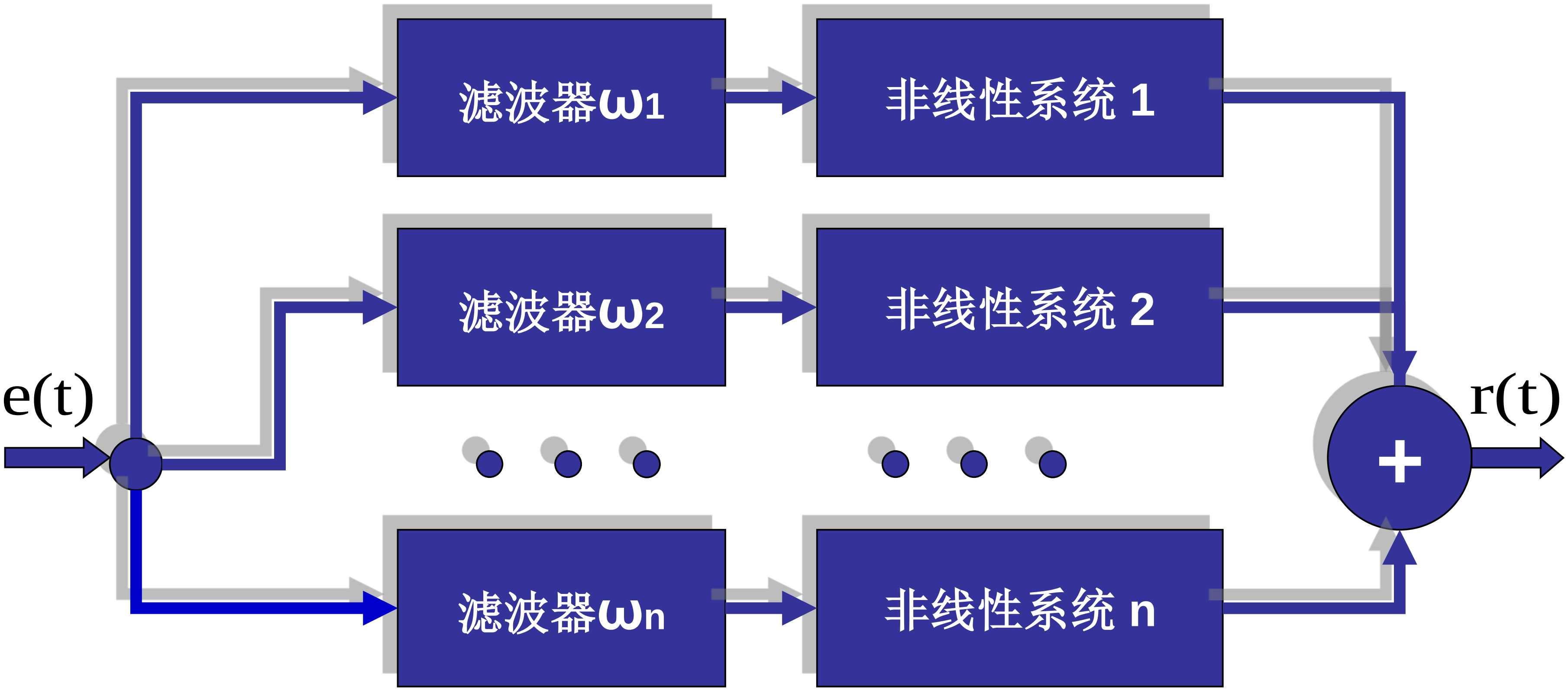
$$e(t)=e_1(t)+e_2(t) \quad \Rightarrow \quad r(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

不满足均匀性：

$$e_3(t)=je_1(t) \quad \Rightarrow \quad r_3(t)=-y_1(t)\neq jr_1(t)$$

全通系统，只有相位修正

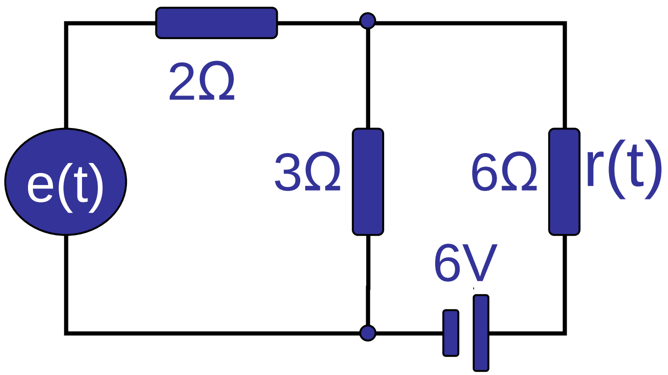
例：局部频分复用（FDMA）系统示意



$$e(t) \subset \{A_1 \sin\omega_1 t、A_2 \sin\omega_2 t \ldots、A_n \sin\omega_n t\}$$

满足叠加性、不满足均匀性！

例：试判断下述系统是否线性系统：



$$r(t) = (1/12)e(t) - 5/6$$

$$r_1(t) = (1/12)e_1(t) - 5/6$$

$$r_2(t) = (1/12)e_2(t) - 5/6$$

$$\mathrm{A}r_1(t) + \mathrm{B}r_2(t) = (1/12)[\mathrm{A}e_1(t) + \mathrm{B}e_2(t)] - (5/6)(\mathrm{A} + \mathrm{B})$$

仅当（A+B=1）时： $\mathrm{A}r_1(t) + \mathrm{B}r_2(t) = (1/12)[\mathrm{A}e_1(t) + \mathrm{B}e_2(t)] - 5/6$

例：试判断下述系统是否线性系统：

$$r'(t)+Ar(t)+B=e(t)$$

$$r_1'(t)+Ar_1(t)+B=e_1(t) \qquad (1)$$

$$r_2'(t)+Ar_2(t)+B=e_2(t) \qquad (2)$$

$$[k_1r_1'(t)+k_2r_2'(t)]+A[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]+(k_1+k_2)B=k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$$

若k_1、k_2均为1： $$[r_1'(t)+r_2'(t)]+A[r_1(t)+r_2(t)]+2B=e_1(t)+e_2(t)$$

不满足线性系统定义！

$$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\to k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$$

系统满足线性特性的推论：

线性系统零输入一定导致零输出。

$$r'(t)+Ar(t)+B=e(t)$$

？

$$r'(t) + Ar(t) + B = e(t)$$

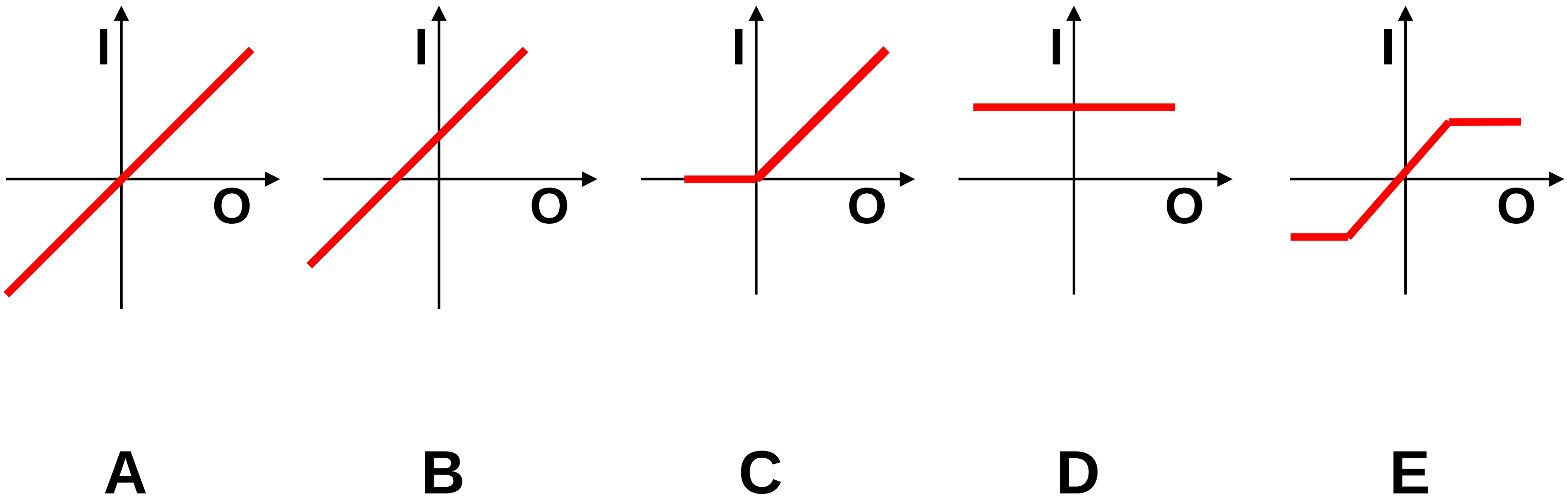
$$r_1'(t) + Ar_1(t) + B = e_1(t) \qquad (1)$$

$$r_2'(t) + Ar_2(t) + B = e_2(t) \qquad (2)$$

$$(1)\text{-}(2): \; [r_1'(t) - r_2'(t)] + A[r_1(t) - r_2(t)] = [e_1(t) - \mathrm{e}_2(t)]$$

$$\Delta r'(t) + A\Delta r(t) = \Delta e(t)$$

增量线性系统： $r(t) = k_1 e(t) + k_2$



判断上述哪些 I/O 关系是线性系统？

线性系统 I/O 关系一定过原点

思考一下：

若使信号的各类分量划分方式真正有意义，这些划分方式对系统特性有要求吗?

系统具有线性特性，上节课讨论的信号分解才有意义

2. 时不变性

若系统的激励与响应间的关系是：

$$e(t) \rightarrow r(t)$$

则时不变系统满足：

$$e(t-\tau) \rightarrow r(t-\tau)$$

例：考察下述系统是否时不变：

$(1)\quad r(t)=\sin[e(t)]$ $\qquad\qquad$ $(2)\quad r(t)=e(2t)$

（1）

$$e(t)=e_1(t)\ \Rightarrow\ r_1(t)=\sin[e_1(t)]$$

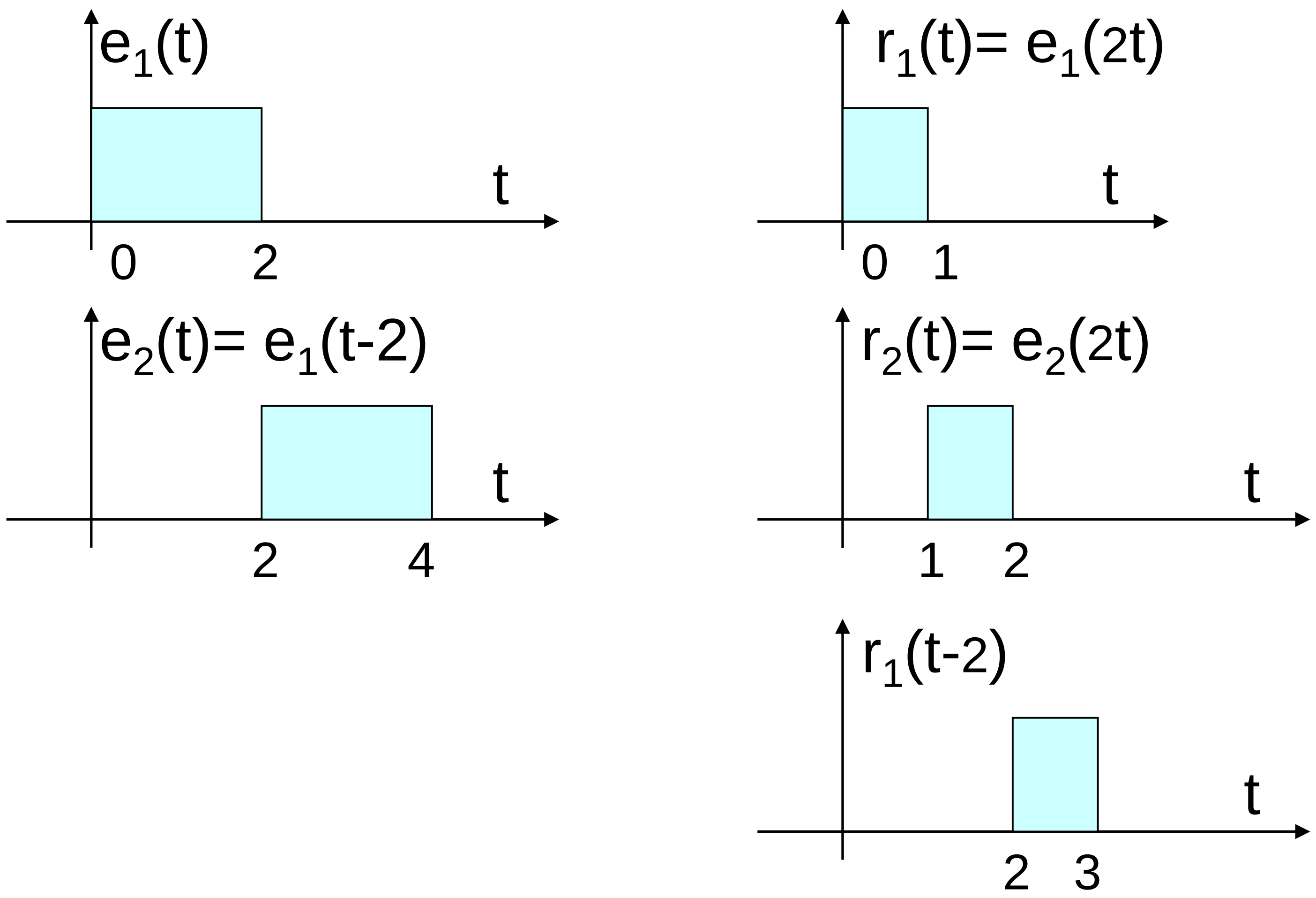
$$e(t)=e_2(t)=e_1(t-\tau)\ \Rightarrow\ r_2(t)=\sin[e_1(t-\tau)]=r_1(t-\tau)$$

（2）

$$e(t)=e_1(t)\ \Rightarrow\ r_1(t)=e_1(2t)$$

$$e(t)=e_1(t-\tau)\ \Rightarrow\ r_2(t)=?$$

$$r(t) = e(2t)$$



不是时不变系统！

3. 微、积分特性

若：$e(t) \to r(t)$　　则：$e'(t) \to r'(t)$

令：$k_1 = \dfrac{1}{\Delta t}$、$k_2 = -\dfrac{1}{\Delta t}$、$e_1(t) = e(t)$、$e_2(t) = e(t-\tau)$

若系统线性则：$\dfrac{1}{\Delta t}e(t) - \dfrac{1}{\Delta t}e(t-\tau) \to \dfrac{1}{\Delta t}r(t) - \dfrac{1}{\Delta t}r(t-\tau)$

取△→0的极限：$e'(t) \to r'(t)$

如果系统满足线性及时不变特性，则满足微积分特性

系统方程为：$$r''(t)+a_1r'(t)+a_0r(t)=e(t)$$

两端求导：$$\frac{d}{dt}[r''(t)+a_1r'(t)+a_0r(t)]=\frac{d}{dt}e(t)$$

若系统时不变（方程常系数）：

$$[\frac{d}{dt}r(t)]''+a_1[\frac{d}{dt}r(t)]'+a_0[\frac{d}{dt}r(t)]=\frac{d}{dt}e(t)$$

线性系统对信号的微分求导保持同一激励响应关系

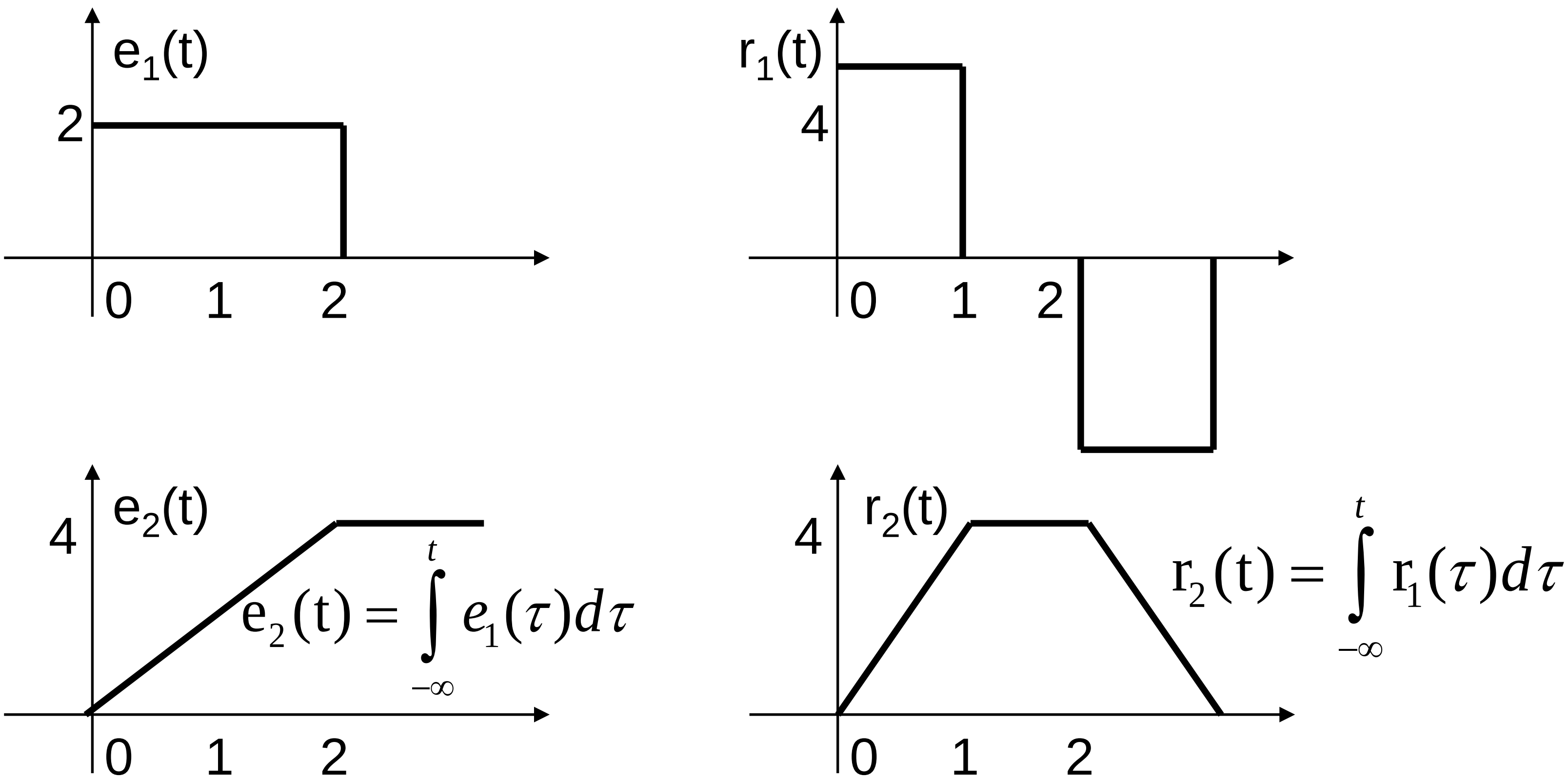
以类似方法也可说明，对于线性时不变系统：

若 $$e(t) \rightarrow r(t)$$

则有： $$\int_{-\infty}^{t} e(\tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{t} r(\tau) d\tau$$

例：已知线性时不变系统对 $e_1(t)$ 的响应为 $r_1(t)$

试求该系统对 $e_2(t)$ 的响应 $r_2(t)$



在线性时不变系统中（满足微积分关系），可解！

4 系统的因果性：

如果系统的响应只发生在激励作用期间或作用之后，则称该系统为因果系统 。

将“因果性”术语引申用于描述信号，如“因果信号”，则特指该信号在t<0之前的所有取值均为零, 亦可称“有始信号”。

设 $r(t)$、$e(t)$分别为系统的激励和零状态输出，判断下述系统的因果性：

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t} e(\tau)\cdot d\tau$$

$$r(t)=e(t-2)$$

$$r(t)=e(t)-e(t-k)$$

设 $r(t)$、$e(t)$分别为系统的激励和零状态输出，判断下述系统的因果性：

$$r(t) = e(t+2)$$

$$r(t) = e(2t)$$

$$r'(t) + Ar(t) + B = e(t)$$

有内部源，非因果

5 系统的可逆性：

可逆性：由系统的响应可以确定系统的激励

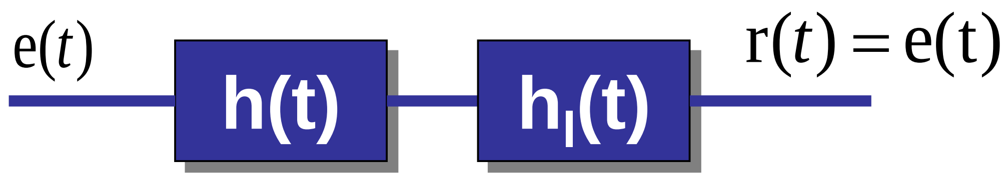
如果某系统的激励响应关系是一一完全对应的，则该系统必为可逆系统。

例：压缩编码

可逆系统： $r(t)=ke(t)$

不可逆系统： $r(t)=e^2(t)$

可逆系统的时域特征是：



$$h(t)*h_l(t)=\delta(t)$$

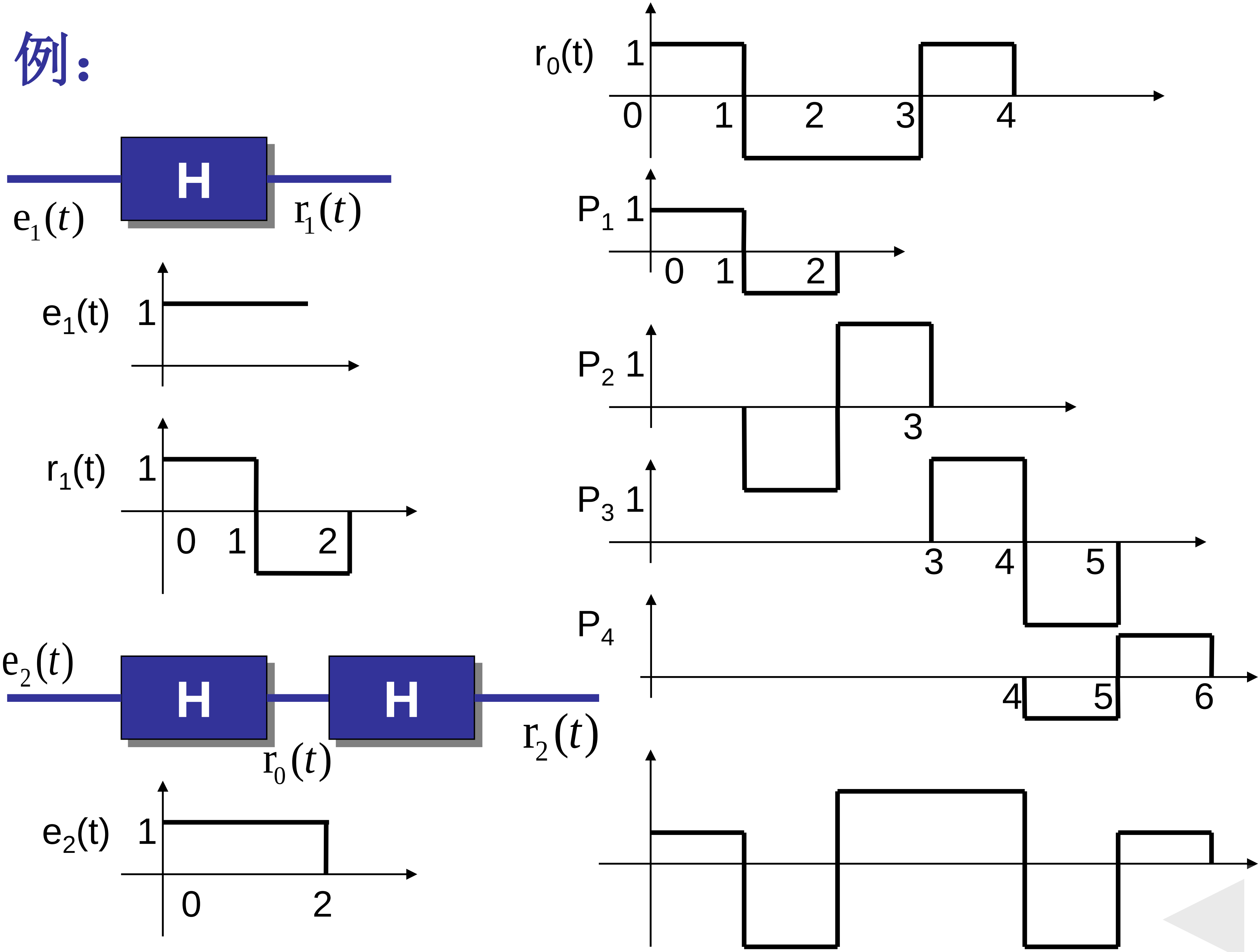
6 系 统 的 稳 定 性：

若对任意有界信号的激励都将产生有界信号的响应，则相应的系统被称为稳定系统(**BIBO**)。

(**B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput Systems)

例：银行存钱

例：

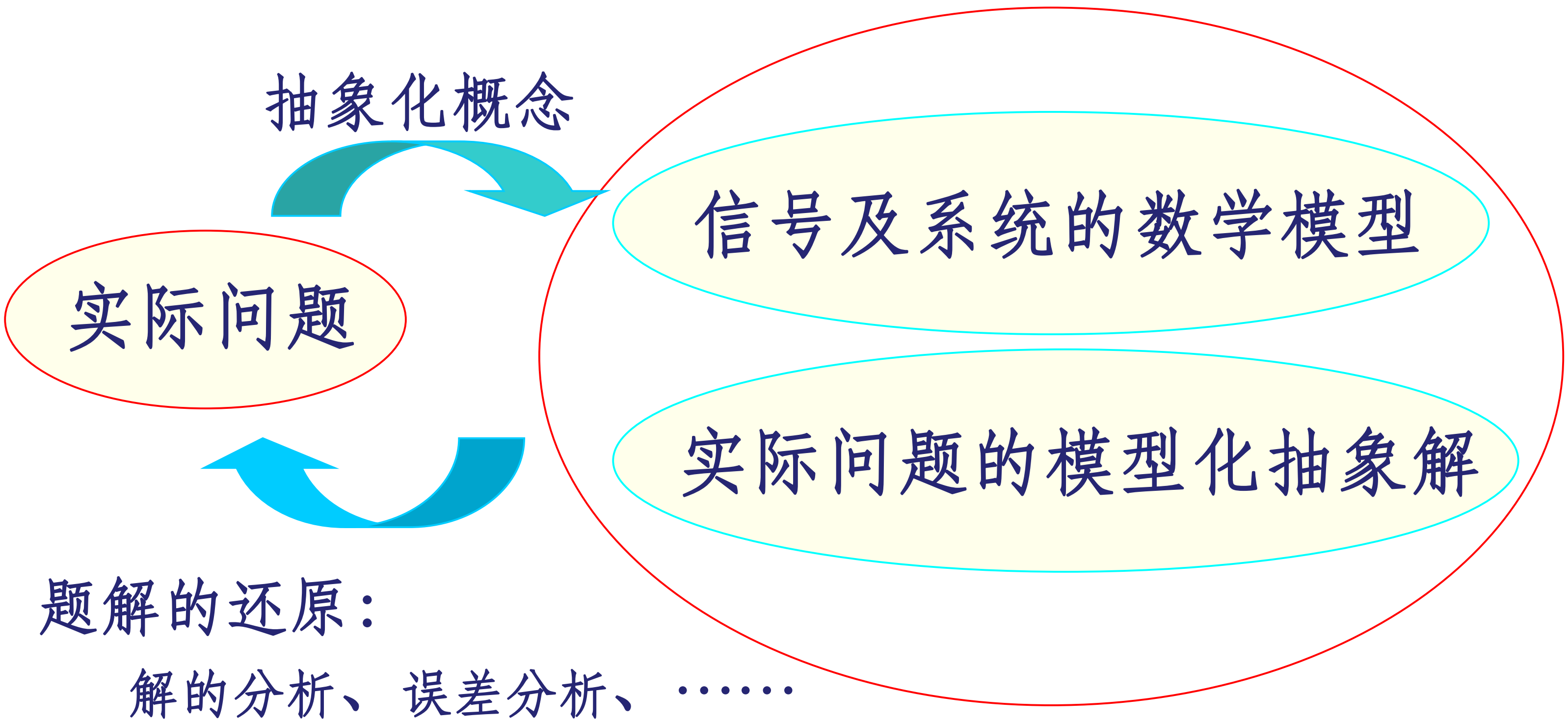


H
$e_1(t)$
$r_1(t)$
e1(t) 1
r1(t) 1
0 1 2
$e_2(t)$
H
H
$r_0(t)$
$r_2(t)$
e2(t) 1
0 2
r0(t) 1
0 1 2 3 4
P1 1
0 1 2
P2 1
3
P3 1
3 4 5
P4
4 5 6

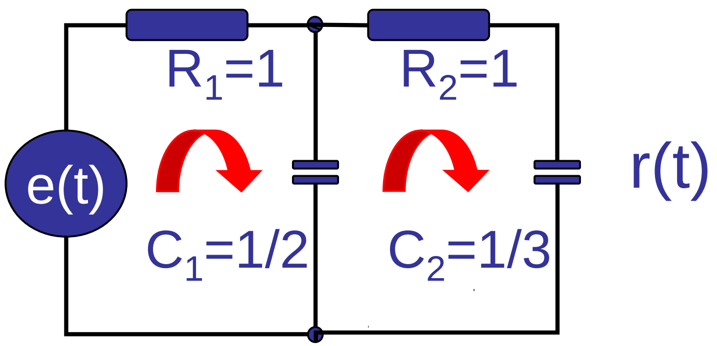
第二章　连续时间系统的时域分析

§2.1　线性系统的微分方程法分析

实际问题分析模型



例：电路系统分析（微分方程解法回顾）



$$e(t)=\sin 2t\cdot u(t)$$

$$u_{c_1}(0)=u_{c_2}(0)=0$$

输入回路：

$$R_1\left(C_1\frac{du_{c_1}}{dt}+C_2\frac{du_{c_2}}{dt}\right)+u_{c_1}=e(t)$$

输出回路：

$$u_{c_1}=R_2C_2\frac{du_{c_2}}{dt}+u_{c_2}$$

代入元件参数并消去中间变量 u_{C1}

$$u''_{c_2}+7u'_{c_2}+6u_{c_2}=6e(t)$$

例：电路系统分析（微分方程解法回顾）

$$u''_{c_2} + 7u'_{c_2} + 6u_{c_2} = 6e(t) \quad e(t) = \sin 2t \cdot u(t) \quad u_{c_2}(0) = 0$$

特征方程： $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 6) = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -6$

齐次通解： $u_{c_2 0} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-6t}$

设特解为： $u_{c_2 1} = A\cos 2t + B\sin 2t$

代入方程定特解： $u_{c_2 1} = -\dfrac{21}{50}\cos 2t + \dfrac{3}{50}\sin 2t$

方程的完全解： $u_{c_2} = u_{c_2 0} + u_{c_2 1} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-6t} - \frac{21}{50}\cos 2t + \frac{3}{50}\sin 2t$

§2.2　线性系统初始条件的确定

名词约定：

起始状态：激励接入前$t=0^-$时刻之系统状态，体现系统的历史特性；

初始状态：激励接入后$t=0^+$时刻之系统状态，体现系统的突变特性；

从起始状态得到初始状态→去除奇异函数

如何求解含奇异函数的方程？

系统在启动瞬间发生电压(电流)突变，其初始状态也将变化，如何从系统的起始状态值求得其初始状态值？

方法1： <u>根据“换路定律”从网络结构判断</u>

方法2： <u>从方程式中奇异函数平衡判断</u>

方法1：根据“换路定律”从网络结构判断

电路分析课中“暂态过程”内容中“换路定律”的局限性：

$u_c(0^+) = u_c(0^-)$、$i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$$q = cu_c \qquad i_c = \frac{dq}{dt} = c\frac{du_c}{dt}$$

$$\phi = Li_L \qquad u_L = \frac{d\phi}{dt} = L\frac{di_L}{dt}$$

“换路定律”相当于： $q(0^+) = q(0^-)$、$\varphi(0^+) = \varphi(0^-)$

方法1：根据“换路定律”从网络结构判断

将原来基于单一元件或支路的：$q(0^+) = q(0^-)$、$\varphi(0^+) = \varphi(0^-)$

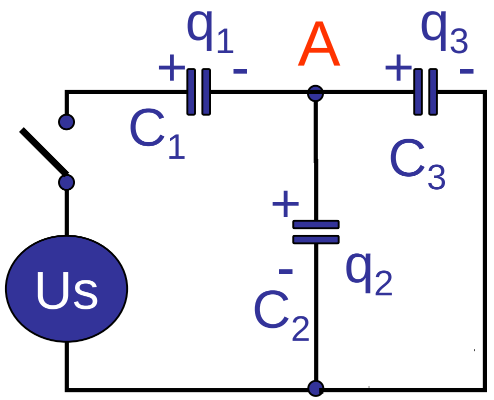
推广至基于网络节点或回路的：$Q(0^+) = Q(0^-)$、$\Phi(0^+) = \Phi(0^-)$

即新的“广义换路定律”：

换路前后任一网络节点上的电荷守恒：$Q(0^-)=Q(0^+)$

换路前后任一网络回路内全磁通守恒：$\Phi(0^-)=\Phi(0^+)$

例一：



1 根据广义换路定律

$t<0 \quad Q_A(0^-) = -q_1 + q_2 + q_3 = 0$

$t>0 \quad Q_A(0^+) = Q_A(0^-)$

2 根据 $q(t) = cu_c(t)$ ：

$-C_1U_1(0^+) + C_2U_2(0^+) + C_3U_3(0^+) = Q_A(0^+)$

3 根据回路电压定律：

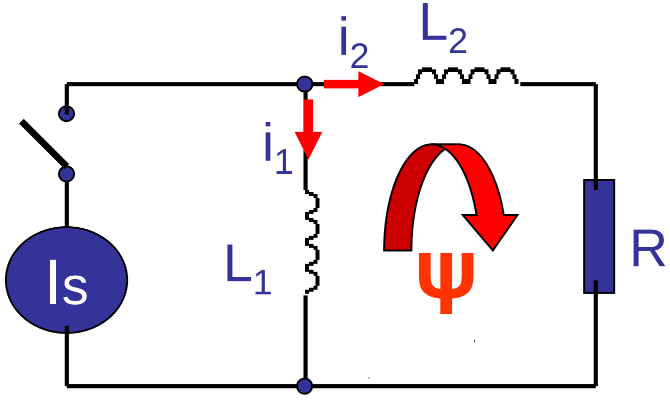
$U_1(0^+) + U_2(0^+) = Us$

$U_2(0^+) = U_3(0^+)$

三式联立解出：

$$U_1(0^+) = \frac{C_2 + C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U_S \qquad U_2(0^+) = U_3(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} U_S$$

例二： 初始时无储能，K在t=0时闭合，求$i_1(0^+)$、$i_2(0^+)$



因初始时无储能：

$$\psi(0^-)=\varphi_1(0^-)+\varphi_2(0^-)=0$$

$t=0^+$ 根据换路定律：

$$\psi(0^-)=\psi(0^+)$$

1 根据 $\Psi(t)=L\,i(t)$ ：

$$-L_1 i_1(0^+)+L_2 i_2(0^+)=\Psi(0^+)=0$$

2 根据节点电流定律：

$$i_1(0^+)+i_2(0^+)=Is$$

联立解出：

$$i_1(0^+)=\frac{L_2}{L_1+L_2}I_s \qquad i_2(0^+)=\frac{L_1}{L_1+L_2}I_s$$

方法2：从方程式中奇异函数平衡判断

给定含奇异信号项的方程：

$$\begin{cases} r'(t)+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}r(t)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\delta(t) \\ r(0^-)=k \end{cases}$$

等号两边分别求0⁻到0⁺的积分：

$$[r(0^+)-r(0^-)]+\frac{1}{R(C_1+C_2)}\int_{0^-}^{0^+}r(\tau)d\tau=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

初条件为：

$$r(0^+)=\frac{C_1}{C_1+C_2}+r(0^-)$$

等效方程为：

$$\begin{cases} r'(t)+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}r(t)=0 \\ r(0^+)=k+\dfrac{C_1}{C_1+C_2} \end{cases}$$

例题：试用奇异函数平衡法求初始条件

$$r'(t)+3r(t)=3u(t) \quad r(0^-)=6 \quad r(0^+)=?$$

$$r'(t)+3r(t)=3\delta(t) \quad r(0^-)=6 \quad r(0^+)=?$$

$$r'(t)+3r(t)=3\delta'(t) \quad r(0^-)=6 \quad r(0^+)=?$$

找u(t)，起始跳变只与u(t)有关：

$$r(t)=f(t)+k_1u(t)+k_2\delta(t)+k_3\delta'(t)+\cdots$$

$$r(0^-)=f(0^-) \quad r(0^+)=f(0^-)+k_1$$

例： $r'''(t)+4r''(t)+5r'(t)+2r(t)=\delta''(t)+3\delta(t)$

起始状态为零求初始状态值

设在t=0邻域：

$$r'''(t)=k_1\delta''(t)+k_2\delta'(t)+k_3\delta(t)$$

$$r''(t)=k_1\delta'(t)+k_2\delta(t)+k_3u(t)$$

$$r'(t)=k_1\delta(t)+k_2u(t)$$

$$r(t)=k_1u(t)$$

将其代入方程：

$$[k_1\delta''(t)+k_2\delta'(t)+k_3\delta(t)]+4[k_1\delta'(t)+k_2\delta(t)+k_3u(t)]+5[k_1\delta(t)+k_2u(t)]+2k_1u(t)$$
$$=\delta''(t)+3\delta(t)$$

例： $r'''(t)+4r''(t)+5r'(t)+2r(t)=\delta''(t)+3\delta(t)$

起始状态为零求初始状态值

$$[k_1\delta''(t)+k_2\delta'(t)+k_3\delta(t)]+4[k_1\delta'(t)+k_2\delta(t)+k_3u(t)]+5[k_1\delta(t)+k_2u(t)]+2k_1u(t)$$
$$=\delta''(t)+3\delta(t)$$

根据等号两边不同阶次奇异函数的系数列平衡对应表

	等号左边奇异函数项的系数	**等号右边奇异函数项的系数**
关于 $\delta''(t)$	$k_1\delta''(t)$	$\delta''(t)$
关于 $\delta'(t)$	$k_2\delta'(t)+4k_1\delta'(t)$	0
关于 $\delta(t)$	$k_3\delta(t)+4k_2\delta(t)+5k_1\delta(t)$	$3\delta(t)$

根据平衡对应表所决定的方程组可求解出：

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = -4 \qquad k_3 = 14$$

根据前面 t=0邻域所设：

$$r'''(t) = k_1\delta''(t) + k_2\delta'(t) + k_3\delta(t)$$

$$r''(t) = k_1\delta'(t) + k_2\delta(t) + k_3u(t)$$

$$r'(t) = k_1\delta(t) + k_2u(t)$$

$$r(t) = k_1u(t)$$

令式中变量： $t = 0^+$

最终可求得：

$$r''(0^+) = k_3u(0^+) = 14 \qquad r'(0^+) = k_2u(0^+) = -4 \qquad r(0^+) = k_1u(0^+) = 1$$

习　　题：

- 1-20，1-21，2-5，2-8 ，2-11。

谢谢同学们！