第十二章 系统的状态变量分析法

§ 12.1 引言

建数学模型对系统分析，可分为两种：
单输入输出
状态变量
当研究多输入多输出情形，或为实现对系统更有效控制，需要对系统内部参量有所分析，状态变量分析法更具优势。

从数学模型看
对于N阶系统，输入输出描述采用一个N阶微分方程，因而只有激励和响应两个变量
状态变量描述采用N个一阶微分方程构成的微分方程组，涉及N个变量，这为从不同角度反映系统状态提供可能

状态变量分析法有三个较明显好处

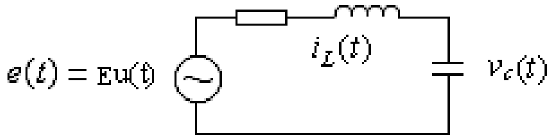
可方便处理多输入多输出问题

很容易推广到非线性或时变系统中

便于充分利用计算机分析

§ 12.1 引言

部分名词解释：



状态变量： 能够表示系统某种物理状态的变量

一个系统往往有很多个状态变量，如上图的 $i_L(t)$、$\varphi_L(t)$、$V_C(t)$、$Q_C(t)$，状态变量彼此间不一定线性独立

状态变量值取决于 $t<t_0$ 的初始状态和 $t>t_0$ 的外加激励，当两者都确定时状态变量的取值才确定

无记忆系统没有状态变量。比如纯电阻网络的各种信号关系都是代数关系，不必要对其进行状态变量分析

状态： 通过一组数目最少的状态变量来表示的系统物理状态

对于 N 阶系统而言，这一组状态变量数目是 N，给定系统 $t<t_0$ 初始状态和 $t>t_0$ 外加激励，就能确定该系统在任何其它时刻的状态。

*** 如用 $i_L(t)$、$V_L(t)$ 就无法确定系统的全部状态、

*** 若用 $i_L(t)$、$V_L(t)$、$V_C(t)$ 虽可确定，但又不是‘数目最少的’状态变量。

*** 状态空间的原点等于系统的零初始状态。

§ 12.1 引言

状态矢量： 指能够完全表示系统状态的一组状态变量

这组变量彼此独立，状态矢量是系统状态变量空间的一组基矢量，任何其它状态变量都可被状态矢量线性表出

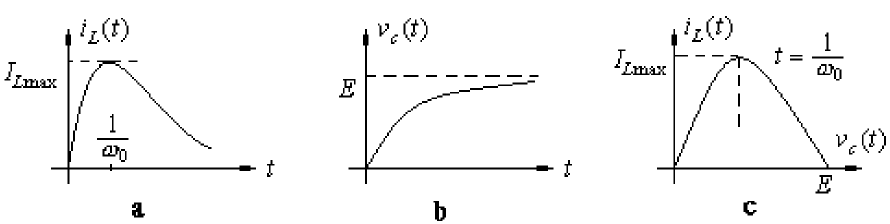
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{pmatrix}$$ 构成状态矢量

状态方程： 由状态矢量按照一定格式组成的一阶联立微分方程组

$$\begin{cases} Ri_L(t) + Li_L'(t) + v_c(t) = e(t) \\ cv_c'(t) = i_L(t) \end{cases}$$

是一个由状态矢量组成的一阶联立微分方程组
格式规范后成为状态方程

状态轨迹： 状态矢量端点随时间t变化时所描绘的路径



图c为状态矢量在二维空间的状态轨迹图。展现状态变量相互间制约关系。
当系统阶次高于三维时，可仅描述状态变量两两之间的制约关系、也可以借助于矩阵工具作分析。

§12.1 引言

一、状态方程的一般形式：参看教材P328、P329。

状态方程矩阵运算格式

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \cdots \\ \dot{\lambda}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdots \\ e_m(t) \end{pmatrix}$$

输出方程矩阵运算格式

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ \cdots \\ r_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdots \\ e_m(t) \end{pmatrix}$$

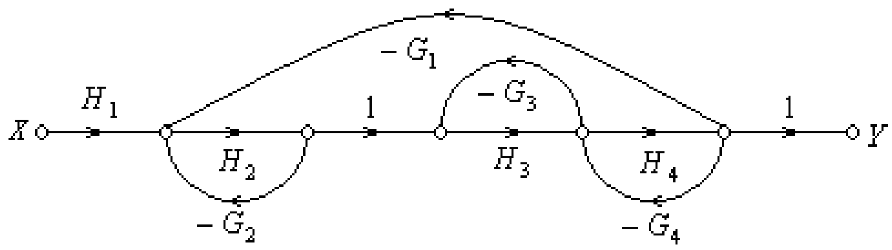
简写成矩阵表达式

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{k1} = A_{kk} \cdot \lambda_{k1} + B_{km} \cdot e_{m1} \\ r_{r1} = C_{rk} \cdot \lambda_{k1} + D_{rm} \cdot e_{m1} \end{cases}$$

§ 12.2 系统的信号流图表示

一、系统的信号流图表示

信号流图是方框图的一种简略表示。关于流图一些详细术语的定义参见教材，在此仅简单介绍



节点：表示信号的点。分为‘源点’、‘阱点’、‘混合节点(兼有输入输出)’；
支路：节点间的定向连线，称支路的增益为‘局部转移函数’；
通路：同方向支路相连的路径。‘开通路(不闭合)’、‘闭通路(环路)’、‘前向通路(源到阱的开通路)’。

流图的基本性质：

1、节点是点信号，作用如转发站，把所有流入信号相加后送到每一条输出(与分流不同)
2、混合节点中增加一条 $H(s)=1$ 的支路形成两节点，醒目且便于分类化简
3、同一系统的流图描述不惟一

流图的代数运算：

流图代数运算决定了化简规则，几种化简规则如下

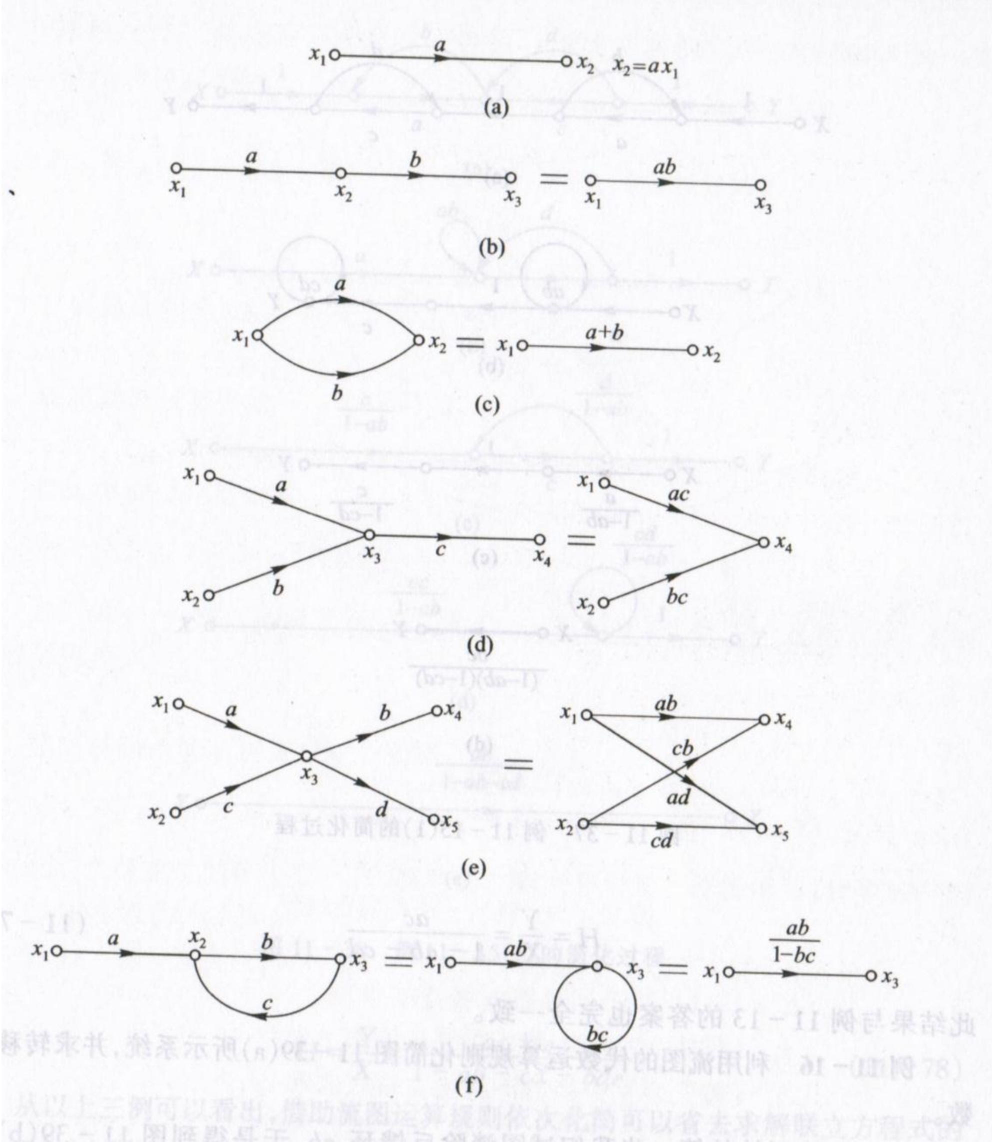
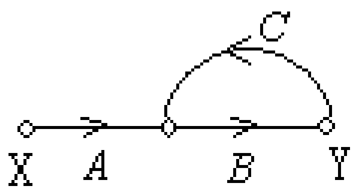
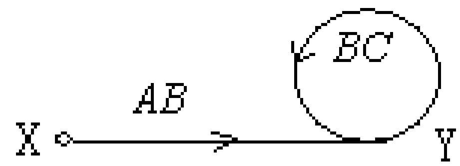


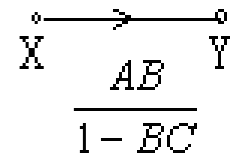
图 11－36　信号流图的代数运算规则

§ 12.2 系统的信号流图表示

消去反馈环







$$Y = ABX + BCY \qquad \therefore Y = \frac{AB}{1 - BC} X$$

在较复杂的情况下化简流图可参考梅逊增益公式

梅逊增益公式 $$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\Delta}\sum_k g_k \Delta_k$$

△——流图的特征行列式

△=1-（所有不同环路的增益之和）+（每两个互不接触环路增益乘积之和）-（每三个互不接触环路增益乘积之和）+…

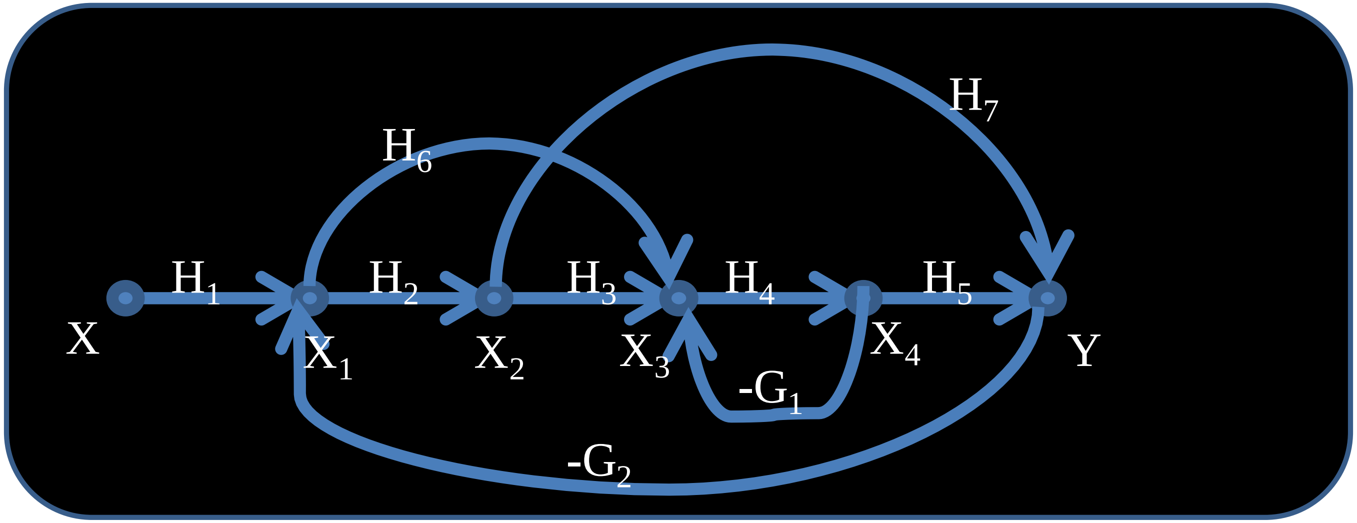
$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \ldots$$

k——由源点到阱点第 **k** 条前向通路的标号；

g_k——由源点到阱点第 **k** 条前向通路的增益；

$\triangle_k$——对第 **k** 条前向通路特征行列式的余因子。即除去与第 **k** 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式

例



先求环路，单环路

$L_1=(X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3)=-H_4G_1$

$L_2=(X_2 \rightarrow Y \rightarrow X_1 \rightarrow X_2)=-H_7G_2H_2$

$L_3=(X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_1)=-H_6H_4H_5G_2$

$L_4=(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_1)=-H_2H_3H_4H_5G_2$

两两不相交的环路

$L_1L_2=H_2H_4H_7G_1G_2$

有：$\triangle=1+(H_4G_2+H_2H_7G_2+H_4H_5H_6G_2+H_2H_3H_4H_5G_2)+H_2H_4H_7G_1G_2$

前向通路

1、$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y$

$g_1=H_1H_2H_3H_4H_5$

没有不接触的环路

2、$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y$

$g_2=H_1H_6H_4H_5$

没有不接触的环路

3、$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$

$g_3=H_1H_2H_7$

不接触环路为L_1，$\triangle_3=1+H_4G_1$

代入梅森增益公式，即可求出系统转移函数。

§ 12.2 系统的信号流图表示

本课程中流图工具作用

规范状态变量的选择
求系统的传输函数
后者的作用相对要小，流图运算与代数推导相当，流图化简麻烦且易错，因而流图工具的主要作用是前者

二、给定微分方程画流图

$$y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

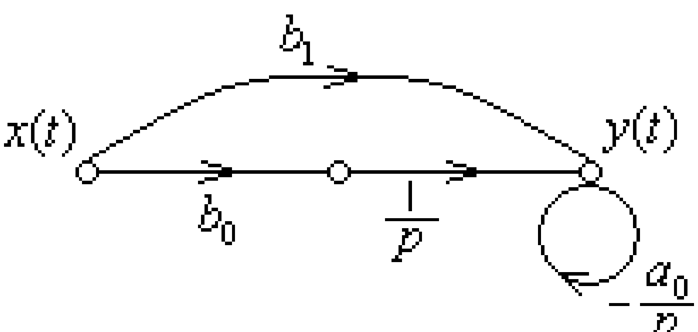
算符形式

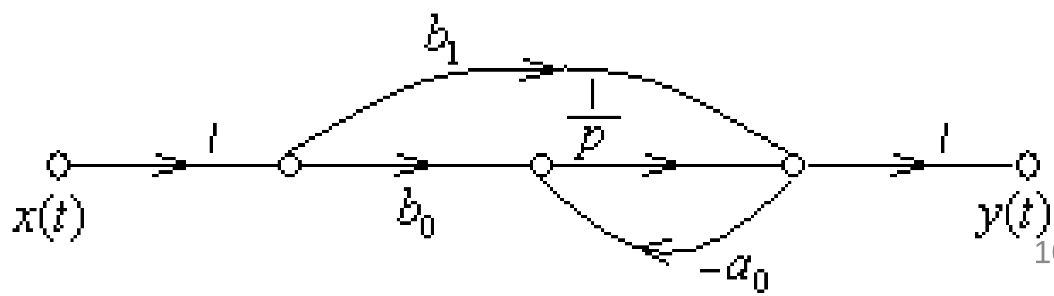
$$py(t) + a_0 y(t) = b_1 px(t) + b_0 x(t)$$

积分形式

$$y(t) + \frac{a_0}{p} y(t) = b_1 x(t) + \frac{b_0}{p} x(t)$$

$$y(t) = b_1 x(t) + \frac{b_0}{p} x(t) - \frac{a_0}{p} y(t)$$





§ 12.2 系统的信号流图表示

三、从转移函数画流图

例：对给定的微分方程

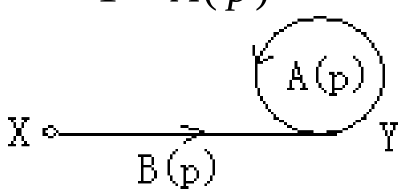
$$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+5\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=3\frac{d}{dt}e(t)+2e(t)$$

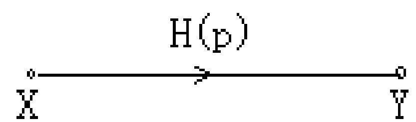
借助于 *p* 算符可求取系统的传输算子，以利于画出流图

$$P^3r(t)+5P^2r(t)+3Pr(t)+2r(t)=3Pe(t)+2e(t)$$

$$H(p)=\frac{3p+2}{p^3+5p^2+3p+2}=\frac{\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p^3}}{1+\frac{5}{p}+\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p^3}}$$

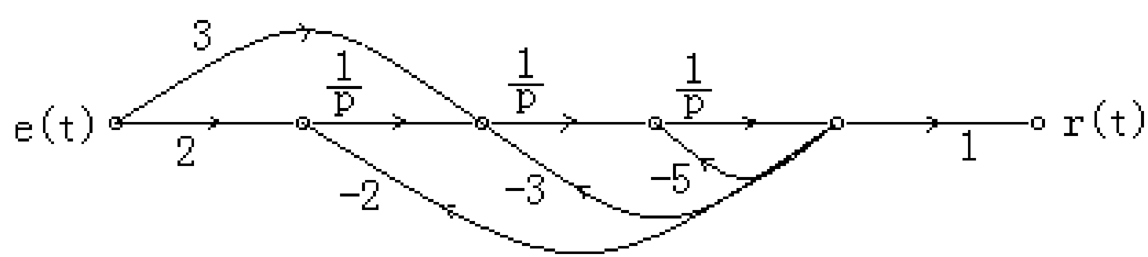
将其看成 $H(p)=\dfrac{B(p)}{1-A(p)}$ **的形式画流图**





其中

$$A(p)=-(\frac{5}{p}+\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p^3})\qquad B(p)=\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p^3}$$



§ 12.3 状态方程的建立

一、根据给定的微分方程式建立状态方程

把一个 K 阶微分方程按照标准形式改写为一个一阶联立微分方程组。

举例：$r'''(t)+6\underset{\lambda_3}{r''(t)}+11\underset{\lambda_2}{r'(t)}+6\underset{\lambda_1}{r(t)}=e(t)$

三阶方程只存在三个互相独立的状态变量，分别取状态变量如上

状态方程

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=\lambda_3\\ \dot{\lambda}_3=-6\lambda_1-11\lambda_2-6\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

输出方程 $r(t)=\lambda_1$

系数矩阵

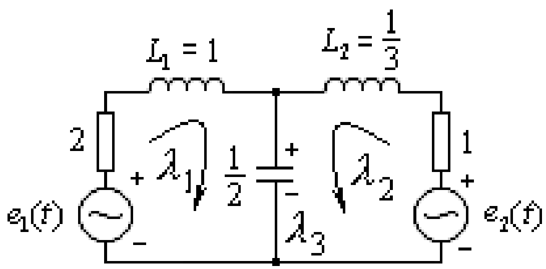
$$A_{33}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}\quad B_{31}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad C_{13}=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\quad D_{11}=0$$

§ 12.3 状态方程的建立

二、根据给定的电路图建立状态方程

特点是选择积分量 $u_c = \frac{1}{C}\int i_c\,dt$ $\quad i_L = \frac{1}{L}\int u_L\,dt$ 作为状态变量

例12-1



$\lambda_1 = i_{L_1}$ $\quad \lambda_2 = i_{L_2}$ $\quad \lambda_3 = u_c$

列回路电压方程

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \dot{\lambda}_1 + \lambda_3 = e_1(t) \\ \lambda_2 + \frac{1}{3}\dot{\lambda}_2 + \lambda_3 = e_2(t) \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{C}(\lambda_1 + \lambda_2) = 2(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -2\lambda_1 - \lambda_3 + e_1(t) \\ \dot{\lambda}_2 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 + e_2(t) \\ \dot{\lambda}_3 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

整理成为

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$$

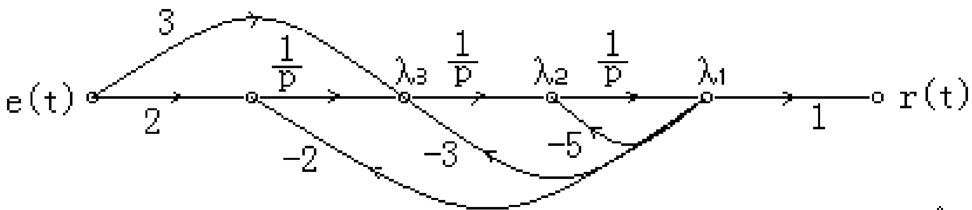
λ_2 的选取与教材上的方向不一致，因而矩阵中有些元素的位置和符号有所不同

状态方程的维数等于系统方程的阶数，对电路而言，应等于‘独立的’储能元件的个数

§ 12.3 状态方程的建立

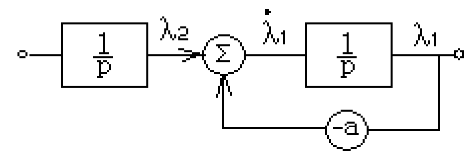
三、状态方程的信号流图建立方法

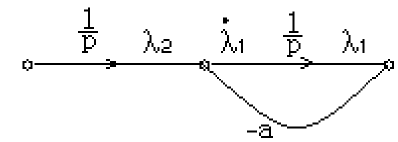
状态变量选取：如果就把状态变量表示在节点上则容易带来描述上的问题



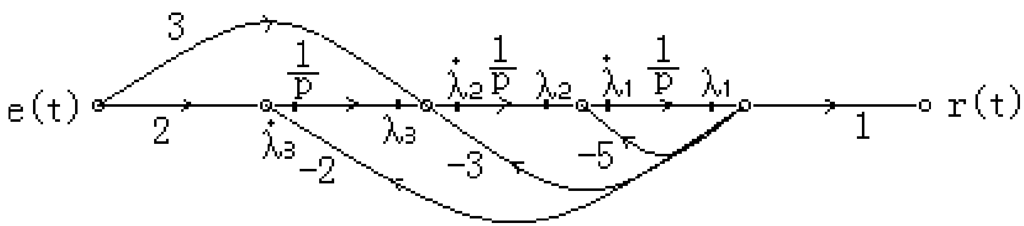
$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \qquad \lambda_2 = -5\lambda_1$$

为此分析一下积分元件在信号流图和方框图中对等的含义





在流图中每个积分元件的两端分别是状态变量及其导数；状态变量在描述上最好表示在靠近节点的旁边



根据上述流图
可列出状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -5\lambda_1 + \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -3\lambda_1 + \lambda_3 + 3e(t) \\ \dot{\lambda}_3 = -2\lambda_1 + 2e(t) \end{cases}$$

输出方程为 $r(t) = \lambda_1$

根据上述结果可写出相应的各参数矩阵 $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = (0)$

至此已基本掌握从转移函数（信号流图）列写状态方程的方法

在此基础上可以通过对流图结构的变形分别得到不同的系统状态矢量选择方式

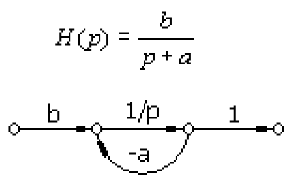
(P317例12-3：） $r'''(t)+6r''(t)+11r'(t)+6r(t)=e'(t)+4e(t)$

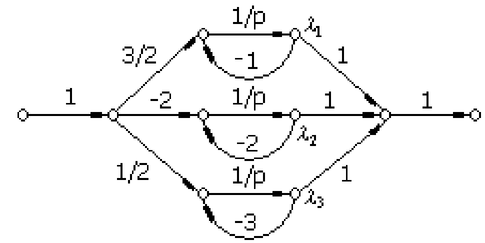
借助于 p 算符可求取系统的传输算子

$$H(p)=\frac{p+4}{p^3+6p^2+11p+6}=\frac{p+4}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

此为并联形式系统，其基本单元为

$$=\frac{3/2}{p+1}+\frac{-2}{p+2}+\frac{1/2}{p+3}=H_1+H_2+H_3$$

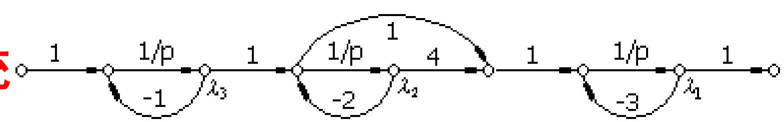




$$\begin{pmatrix}\dot\lambda_1\\ \dot\lambda_2\\ \dot\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2\\-2\\1/2\end{pmatrix}e(t)\qquad r(t)=(1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$$

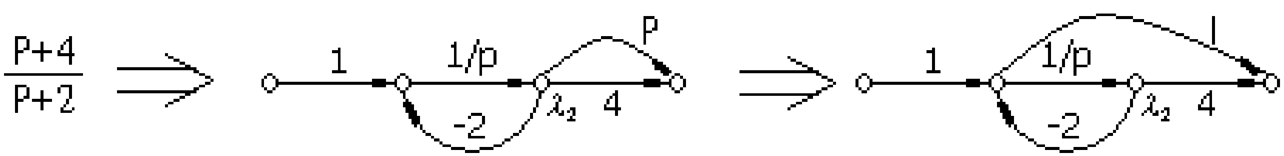
$$H(p)=\frac{p+4}{p^3+6p^2+11p+6}=\frac{p+4}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

此为串联形式系统



$$=(\frac{1}{p+1})(\frac{p+4}{p+2})(\frac{1}{p+3})=H_1\cdot H_2\cdot H_3$$

其中



$$\begin{cases}\dot\lambda_1=-3\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_2+\lambda_3=-3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\ \dot\lambda_2=-2\lambda_2+\lambda_3\\ \dot\lambda_3=-\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\dot\lambda_1\\ \dot\lambda_2\\ \dot\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&1\\0&-2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e(t)\qquad r(t)=(1,0,0)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$$

输出方程为 $r(t)=\lambda_1$

§ 12.4 系统的可控制性与可观测性

本节介绍一些现代控制论中可控制性和可观测性概念

可控制性： 指输入对系统内部状态的控制能力

判断系统是否完全可控，实际上就是要确定是否所有的状态变量都与输入激励有关

对应并联结构，观察矩阵 B 是否没有零元素即可断定。

可观测性： 指根据系统的输出量来确定系统的状态的能力

判断系统是否完全可观测，实际上就是要确定是否所有的状态变量都与输出相关

对应并联结构， 观察矩阵 C 是否没有零元素即可断定

状态矢量的线性变换

设从同一系统选择两组不同的状态矢量： $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \gamma_k \end{pmatrix}$

它们是同一状态空间的基矢，它们可互相线性表出 $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

不同状态矢量各系数矩阵间关系

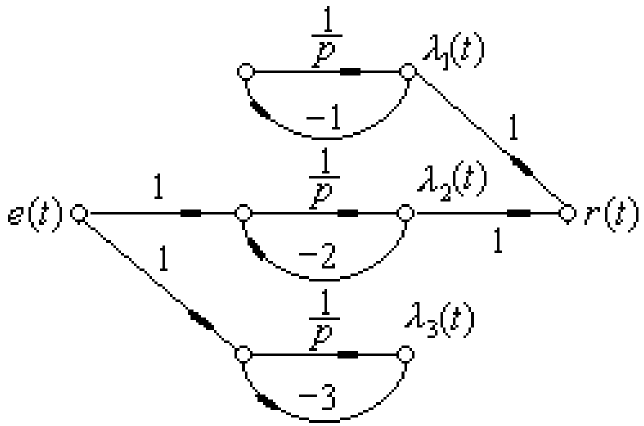
$$\hat{A} = P\mathbf{A}P^{-1}、\quad \hat{B} = P\mathbf{B}、\quad \hat{C} = CP^{-1}、\quad \hat{D} = D$$

通过相似变换可使 A 矩阵变成对角矩阵， 在系统结构上相当于并联系统

判断系统可控制性和可观测性：

完成 A 矩阵的对角化、然后观察 A 对角化后相应的 B 矩阵和 C 矩阵

例12-21



$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e(t)$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

观察用激励信号 $e(t)$ 控制各状态变量的情况：对 λ_2 和 λ_3是可控的，对 λ_1则不可控，从 $r(t)$ 来观察各状态变量的情况：对 λ_1和 λ_2是可观察的，对 λ_3 则不可观察。

习题

12-2 12-3 12-4